DZIEJE MYŚLI

DZIEJE MYŚLI

Wydawnictwo obejmuje wykład dziejów myśli i wiedzy ludzkiej, poczynając od pojęć i poglądów przednaukowych i uwzględniając dzieje nauk szczegółowych aż do najnowszych czasów. Na przykładach, czerpanych z różnych dziedzin wiedzy, autorowie ilustrują myśl, że wiedza wogóle i specjalnie ten rodzaj jej, ktory nazywamy nauką, jest wynikiem stopniowego rozwoju, zależnego od określonych warunków. W tym celu szczególny nacisk położono na te najważniejsze epizody z dziejów każdej nauki, które stanowią punkty zwrotne w sprawie rozwoju. Do najważniejszych zaś epizodów należą te oczywiście, gdy powstawały nowe pojęcia i metody, przystosowane do nowych materjałów, które nauka objąć musiała, gdy wynurzały się nowe zagadnienia, gdy ujawniał się wpływ jednych nauk na drugie. W dziejach każdej nauki zwrócono szczególną uwagę i uwydatniono gienezę tych pojęć i metod, które znamionują później całe okresy w rozwoju nauk. Wybrane epizody rzucają światło na rodowód obecnego stanu danej nauki, jej naczelnych zagadnień i kierunków.

T. I. z. I. O rozwoju metod badań naukowych. Wiedza ludów pierwotnych. Dzieje astronomji. Rys rozwoju fizyki. W opracowaniu: Wł. Heinricha, Ludwika Krzywickiego, Stanisława Kramsztyka i Ludwika Brunera.— Warszawa, 1907, str. XXXI + 296, z 82 ilustr. w tekście Cena rb. 1.50.

T. I, z. 2. Rozwój historyczny pojęć chemicznych. Szkic ewolucji pojęć w mineralogji. Zarys rozwoju matematyki. W opracowaniu: Leona Marchlewskiego, Józefa Siomy, Michała Feldbluma, Władysława Smosarskiego i Stefana Kwietniewskiego — Warszawa, 1911, str. 279 z 33 ilustr. Cena rb. 1 kop. 50.

T. II, z. 1. Historja ogólnej nauki o ziemi (gieografji—gieologji). Dzieje nauk biologicznych. Dzieje antropologji. Dopełnienie do historji fizyki. W opracowaniu: Wacława Nałkowskiego, Józefa Nusbauma i Ludwika Krzywickiego. Warszawa, 1907, str. 471, z 40 ilustr. w tekście i 2-ma tablicami. Cena rb. 2.

T. II, z. 2. Z historji zagadnień i metod psychologji. Zarys historji językoznawstwa czyli lingwistyki (glottologji). Indeksy alfabetyczne (rzeczowy i nazwisk) do hist. językoznawstwa. W opracowaniu: Stanisława Lorji i Jana Baudouina de Courtenay. Warszawa, 1909, str. 302. Cena rb. 1 kop. 50.

W przygotowaniu:

T. III. Historja nauk humanistycznych

Uwaga. *Każdy zeszyt stanowi oddzielną całość.*

DZIEJE MYŚLI

Historja rozwoju nauk

Tom I, Zeszyt 2-i

(ogólnego zbioru „Poradnika" Nr. XIV)

z 33 rys. w tekście.

WYDAWNICTWO

Aleksandra Heflicha i Stanisława Michalskiego

Z zapomogi Kasy pomocy
dla osób pracujących na
polu naukowym imienia
d-ra J. Mianowskiego.

WARSZAWA, 1911.
Skład główny w księgarni G. Centnerszwera i S-ki
Marszałkowska 143.

Czcionkami Drukarni Naukowej, Warszawa, Hoża 64.

SPIS RZECZY.

Str.

Rozwój historyczny pojęć chemicznych . . . . 1—93
opr. *Leon Marchlewski*

Szkic ewolucji pojęć w mineralogji . . . . 95—125
opr. *Józef Sioma*

Zarys rozwoju matematyki

I. Rozwój arytmetyki i algiebry do końca XVI w. 127—179
opr. *Michał Feldblum*

II. Zarys rozwoju gieometrji w starożytności, wiekach średnich i w epoce odrodzenia . 181—220
opr. *Władysław Smosarski*

III. Rozwój matematyki od początku w. XVII . 221—279.
opr. *Stefan Kwietniewski*

Omyłki druku, poprawki i dodatki.

Str,	*Wiersz*	*Zamiast:*	*Powinno być:*
53	2 d.	N—CH_3 lub ||| C	N—CH_3 lub |||| C
59	5 g.	oscylacji	oscylacją
59	4 d.	$CH_3.C_6H_4$—N:H— $NH.C_6H_5$	$CH_3.C_6H_4$—N:N— $NH.C_6H_5$
72	13 g.	dla promeni	dla promieni
73	2 d.	na jamy	na jony
74	12 g.	Kwas masłowy C_5H_7COOH	Kwas masłowy C_3H_7COOH
74	1 d.	wypływa	wynika
81	10 d.	energityki	energietyki
90	8 g.	R temperaturę	T temperaturę
93	dodać do „literatury“ **M. Centnerszwer** — Szkice z historji chemji. Warszawa, 1909. Cena rb. 1 kop. 50.—**Ostwald**—Der Werdegang einer Wissenschaft, 1908.		
99	21 g.	Lyellu, Haecklu. . . .	Lyellu
109	6 g.	fig. 4	fig. 5
109	7 d.	fig. 5	fig. 4
111	6 g.	trójściennego	trójkątnego
116	4 d.	we względzie	pod względem
127	7 g.	babylońska.	babilońska
168	6 g.	$\sqrt[3]{A} = \frac{A-a^3}{3a^2+3a+1}$	$\sqrt[3]{A} = a + \frac{A-a^3}{3a^2+3a+1}$
190	10 d	fałszywy	mylny
226	Na rys. 3. linja AD winna być równoległa do MN		
229	9 g.	une projektive	und projektive
230	20 g.	obliczaniu powierzchni .	obliczaniu pól
232	14 g.	są wymienione	są wymierne
235	17 g.	zawierzamy.	zamierzamy“.
242	14 d.	równoległej.	równoległej (rys. 5).

ROZWÓJ HISTORYCZNY POJĘĆ CHEMICZNYCH.

PRZEZ

L. MARCHLEWSKIEGO.

Historja rozwoju chemji różni się pod wieloma względami od historji innych nauk przyrodniczych. Zapoczątkowana w bardzo odległej przeszłości, stała się prawdziwą nauką, z jasno wytkniętym celem, stosunkowo niedawno. Ze względu na liczne i zmienne cele, którym miała służyć, opracowywano ją w różnych epokach rozwoju w rozmaity sposób. Stanowisko ogółu wobec niej i jej adeptów zmieniało się stosownie do ogólnego charakteru opracowywanych tematów; jednym razem wyśmiewana i prześladowana jako „czarna magja“ i szalbierstwo, innym razem czczona i uprawiana nawet przez wybitnych członków społeczeństw, przedstawiała w szeregu innych nauk przyrodniczych coś niezwykłego. Podczas gdy tamte pomimo zmiany ich nazw w rozmaitych epokach rozwoju zawsze zachowują stałą tendencję, zawsze dążą do tego samego mniej więcej celu, chemja z odwieczną swą nazwą ostateczny cel swych dociekań zmieniała nadzwyczaj często. Otrzymanie złota z metali nieszlachetnych, zdobycie sekretu fabrykacji kamienia filozoficznego, leczenie chorób, tłumaczenie zjawiska życia — to były cele, które zmieniały się z kolei, zależnie od panującej epoki. Wobec tego niepodobna uchylać się od odpowiedzi na pytanie, czy studjum wczesnej historji rozwoju, dla zrozumienia istoty i metody badania chemji nowoczesnej, może mieć jakąkolwiek wartość? Nie ulega wątpliwości, że tak. Nie można bowiem zaprzeczyć, że bez względu na odmienny cel chemji w różnych epokach, metoda badania w głównych zarysach była często ta sama, i choć chemja dnia dzisiejszego jest z pewnością czymś bardzo odmiennym od chemji wieków ubiegłych, to jednak myśli, pozostające na usługach jednej i drugiej, są z sobą spokrewnione, aczkolwiek pokrewieństwo owo niejednokrotnie tylko po bardzo szczegółowych dociekaniach uwydatnić się może.

Okres najstarszy niewiele się przyczynił do zapoczątkowania chemji właściwej; sąd pod tym względem jest jednak trudny z powodu braku jakichkolwiek pewniejszych wiadomości. Najstarsze narody kulturalne, Egipcjanie, Fenicjanie, Żydzi i inne niewątpliwie posiadały pewne wiadomości, które zaliczyćby można do chemicznych, wiadomości zdobywane przypadkowo, zwracające uwagę tylko o tyle, o ile mogły mieć zastosowanie bezpośrednio praktyczne, ale wiadomości te nie były objęte jakimkolwiek systemem naukowym. Nielepiej się działo w starożytnym Rzymie i Grecji, aczkolwiek epoce tej zawdzięczamy pewne pojęcia zasadnicze, któremi chemja późniejsza, a nawet nowoczesna operuje stale. Bogatszym w następstwa był drugi okres rozwoju chemji, okres alchemji, zapoczątkowanej niewątpliwie w Egipcie, której głównym postulatem była zasada przemienialności metali, oparta na przypuszczeniu, że metale są stopami różnego składu, że jednak pewne składniki są wspólne wszystkim. Usiłowanie przemieniania metali nieszlachetnych w szlachetne opierały się też niewątpliwie na naukach Platona i Arystotelesa, głoszących przemienialność pierwiastków; alchemicy usiłowali przypuszczenie to teoretyków udowodnić przez eksperyment i chociaż dokonać tego nie mogli, to jednak mają niewątpliwie wielkie zasługi przez to, że zapoczątkowali eksperymentowanie, któremu zawdzięczamy szereg prawd rzetelnych i zastosowań praktycznych. Po alchemji nastąpił okres, który nosi nazwę jatrochemji, datujący się od mniej więcej pierwszej ćwierci wieku XVI, a kończący się z wiekiem XVII-ym. I w tym okresie chemja nie była zajęta opracowywaniem właściwego swego zdania, pomimo to był on dla rozwoju chemji niezmiernie doniosłym, gdyż oddał ją w opiekę ludzi, którzy podówczas byli przyrodnikami w stopniu większym, niż ktokolwiekbądź ze spółczesnych, mianowicie w opiekę medyków. Już na schyłku okresu alchemicznego wyłoniła się tendencja zużytkowania wiadomości chemicznych w medycynie, gdy mianowicie Valentinus porównał proces leczenia schorzałego organizmu z procesem oswobadzania metali szlachetnych od towarzyszących im zanieczyszczeń. Głos ten wieku XV-tego oddźwięku jednak podówczas nie znalazł, ale tym silniej zaczął później rozbrzmiewać, gdy poparł go Paracelsus. Cel chemji scharakteryzował on krótko i węzłowato: prawdziwym celem chemji nie jest robienie złota, lecz przygotowanie środków leczniczych, konieczność zaś stosowania w medycynie preparatów chemicznych uzasadniał rozumowaniami teoretycznemi. Zdrowe ciało ludzkie jest według niego li tylko zbiorowiskiem pewnych ciał chemicznych; jeżeli ciała te ulegają jakiejkolwiek zmianie, wtedy musi nastąpić choroba organizmu, którą usunąć mogą jedynie związki chemiczne, zdolne do przywrócenia pierwotnego stanu rzeczy. Co do owych składników organizmów zwierzęcych Paracelsus dzielił zdanie Basiliusa: są niemi rtęć, siarka i sól. Złe ustosunkowanie tych składników powoduje chorobę: nadmiar siarki febrę lub dżumę, rtęci paraliż i melancholję, nadmiar soli biegunkę i wodną opuchlinę, destylacja rtęci z jednego organu do drugiego powoduje napady szału etc. Następcy Paracelsusa, jak Turquet de Mayerne, Libavius, Oswald Croll i inni nie podzielali wprawdzie niewolniczo poglądów swego mistrza, ale zgadzali się na jego poglądy zasadnicze; zjawiska fizjologiczne, procesy życiowe normalne polegają na przemianach chemicznych, przyczym czynne składniki oddziaływają na siebie w odpowiednich stosunkach; procesy patologiczne powodowane są przez zakłócenie owych procesów normalnych, terapja wreszcie ma na celu składniki, znajdujące się w nieodpowiednich ilościach, czynić nieszkodliwemi, zobojętniać je, w celu uzyskania ponownie ustosunkowania normalnego.

Poglądy te przyczyniły się pośrednio do pewnego wyświetlenia zjawisk chemicznych. Chcąc poznać oddziaływania do mniemanych składników organizmów w ciele żyjącym, należało badać oddziaływanie ich poza organizmem, stosowano więc całkiem racjonalnie metodę badania doświadczalnego, która wprawdzie miała na celu głównie interes medyczny, ale dla chemji bez pożytku nie pozostała, tymbardziej, że w czasach późniejszych tego okresu rozpoczęto badać zjawiska chemiczne dla zjawisk chemicznych bez względu na ewentualną korzyść, jaką ciągnąć mogła z otrzymanych wyników medycyna. Pod tym względem wyróżniały się szczególnie prace Helmonta, którego karjera naukowa wogóle przedstawia bardzo dużo stron ciekawych i uderzających i którego pojawienie się na widowni nauki było niewątpliwie warunkiem zjawienia się później Sylviusa i Tacheniusa, którym okres jatrochemiczny zawdzięcza rozkwit największy. Helmont łączył w sobie naturę bystrego i chłodnego obserwatotora z porywami mistyka, wierzącego w rzeczy nadnaturalne; twórca pierwszych racjonalnych poglądów na naturę gazów, mógł być jednocześnie obrońcą doktryny przemiany metali nieszlachetnych w złoto; bystry spostrzegacz, przywiązujący wielką wagę do bezpośredniego eksperymentu, dawał wiarę twierdzeniu, że mąka pszenna wraz z brudną koszulą wytworzyć może myszy żyjące. Dla psychologa umysł Helmonta przedstawia zapewne zagadkę niemałą, ale kwestji nie ulega, że chemja zawdzięcza mu dużo. On to udowodnił, że wbrew ogólnie podówczas panującemu mniemaniu, miedź wydzielona przez żelazo z siarczanu miedziowego, nie jest rezultatem szczególniejszego aktu stwarzania, a natomiast, że znajdowała się już w ciele, z którego ją wydzielono. Podobnie też nauczał o dalszym istnieniu pewnego ciała w różnych jego produktach przemiany, np. srebra w jego solach, krzemionki w szkle wodnym, co udowodnił w sposób podówczas niezwykły, że ze szkła wodnego można za pośrednictwem kwasów wydzielić krzemionkę w pierwotnie użytej ilości. Największe zasługi położył van Helmont na polu t. zw. chemji pneumatycznej, dając jej właściwie początek i przyczyniając się w ten sposób pośrednio do wykrycia praw, bez których nowoczesna chemja byłaby zgoła niemożliwą. Jak jasnym był pogląd Helmonta w tych sprawach, wypływa z tego faktu, że dostrzegł on różnicę pomiędzy gazami a parami, które dają się zgęścić na płyn. Jemu też zawdzięczamy dokładniejsze studjum bezwodnika węglowego, wytwarzanie się go z wapienia i z potażu pod wpływem kwasów, z palących się węgli, podczas procesów fermentacyjnych; stwierdził obecność jego w żołądku, w wodach mineralnych i w niektórych jaskiniach. Niemniej wielkim był wpływ jego na rozwój pojęć jatrochemicznych: i na tym polu spostrzec można ścisłą jego metodę obserwacji. Chcąc w racjonalny sposób stosować poglądy, starał się przedewszystkim poznać naturę składników organizmów, jemu zawdzięczamy myśl badania różnych soków organizmu na ich odczyn kwaśny lub alkaliczny. Kwas żołądkowy wszczyna według niego trawienie, nadmiar jego powoduje chorobę, którą można usunąć przez podawanie środków alkalicznych; naodwrót choroby powodowane przez brak kwasów leczy stosowaniem leków kwaśnych. Słowem w leczeniu jego uwydatnia się metoda oparta na doświadczeniach robionych z ciałami, in vitro, których obecność przypuszczał w organizmie, a więc metodę, która stawia go znacznie wyżej, niż Paracelsusa, metodę, która pozwala widzieć w nim ojca chemji fizjologicznej, tymbardziej, że proroczo przepowiedział wielki wpływ poznania zjawiska fermentacji na obraz procesów fizjologicznych wogóle. Obok Helmonta w okresie jatrochemicznym wsławili się szczególnie Franciszek de le Böe Sylvius i uczeń jego Tachenius. Pierwszy, oddany głównie medycynie, na rozwój chemji większego wpływu nie miał, lecz racjonalizm, rozpoczęty przez Helmonta, udoskonalił w znacznej mierze, pozbywając się zupełnie pierwiastków mistycznych. Helmont nie mógł nie przyznać oddziaływania mistycznego ducha w procesie trawienia, Sylvius zaś z pod tego przypuszczenia wyemancypował się gruntownie: tylko ślina, sok żołądkowy, trzustkowy i żółć odgrywają tutaj główną rolę, a medycyna miała według niego wogóle tylko o tyle prawo do egzystencji, o ile była chemją stosowaną. Z pomiędzy innych jatrochemików, hołdujących głównym postulatom Paracelsusa, na wzmiankę zasługuje jeszcze anglik Willis dla tego, że będąc zdeklarowanym jatrochemikiem, przyczynił się bezpośrednio do jej upadku przez swe studja anatomiczne, które pchnęły medycynę na inne tory. Jatrochemja w upadku była jednocześnie początkiem chemji właściwej; służąc medycynie, nie zawsze służyła jej dobrze, sobie tylko mało korzyści przynosząc, choć niewątpliwie okres jatrochemiczny był okresem przejściowym, bez którego ewolucji alchemji do chemji właściwej pomyśleć nie można. Nowy duch powiał w pracowniach ludzi zajmujących się chemją, gdy w innych, pokrewnych dziedzinach rozpoczęły się reformy, których następstwem było przedewszystkim badanie zjawisk przyrody pod wpływem pobudek czysto naukowych, badanie prawdy dla prawdy. Wpływ Kepplera, Galileusza i Toricellego na fizykę i astronomję nie mógł nie być odczutym przez chemję, a gdy jeszcze coraz szersze koła badaczów obejmował pogląd gienjalnego Bacona na sposób badania naukowego wogóle, przekonali się i chemicy, że tworzenie dedukcyjne jakichś zasad ogólnych, którym następnie podporządkowywano spostrzeżenia szczegółowe, jest zgoła nieracjonalne, dla nauki jałowe. W świetle nauk Bacona stało się też jasnym, dla czego Grecy, w kulturze narodów tak wybitną rolę odgrywający, tak mało dali nauce ścisłej, dla czego następcy ich, olśnieni pozorną świetnością filozofji greckiej i metodyką grecką, w stosowaniu jej niewiele się naprzód posunęli. Wielu z nich prawiło o ważności indukcyjnego wnioskowania, a w rzeczywistości dobrej tej zasady nie przestrzegali i najchętniej na zasadzie ogólnych założeń wnioskowali o szczegółach, zamiast budować gieneralizacje na szczegółach. Dla tego też dorobek teoretyczny o wartości istotnej wczesnych epok rozwoju chemji był niewielki; problemat budowy materji traktowany był tylko mimochodem, i tylko o tyle, o ile poglądy starych myślicieli dały się bez trudu stosować do spostrzeżeń nowych. Na uwagę zasługuje np. fakt, że w pracach alchemicznych wyraz „atom“ spotyka się nader rzadko, a doktryną panującą w tych pismach, począwszy od alchemików greckich aż do schyłku wieku XVIII-tego, była doktryna szkoły Pytagorasa, głosząca wspólność wszelkich rzeczy, doktryna wspaniała, lecz w epoce słabego rozwoju nauk przyrodniczych bezpłodna. Nie może też ulegać wątpliwości, że hamulcem w rozwoju poglądów teoretycznych na budowę materji był kościół, który przez usta Augustyna nie wahał się usprawiedliwić przed czytelnikami, że, krytykując poglądy naturalistów, wogóle dotknął tego rodzaju „brudów“. „Po co chrześcijanin ma wogóle zadawać sobie trud w celu wyświetlenia cudów przyrody. Zostawić to poganom“. Wiadomo też, że w wieku XIII dominikanie wprost zabronili badania zjawisk fizycznych. Atoli żądza poznania prawdy okiełznać się nie dała i choć w pierwszych dwu okresach rozwoju chemji rzadko się spotyka szerszy pogląd na zjawiska tej kategorji, trzeci, t. zw. okres teorji flogistonu, dowodzi, że w kołach chemików rozpoczęła się reforma. Pogląd zasadniczy tego okresu okazał się wprawdzie błędnym, ale charakteryzuje go racjonalna metoda badania, metoda, która zrobiła z chemji naukę we właściwym tego słowa znaczeniu. Celem chemji w tym okresie nie było zastosowywanie jej w innych gałęziach wiedzy, lecz przedewszystkim badanie składu i przemiany ciał, następnie badanie zjawisk, towarzyszących wytrwarzaniu się i rozkładaniu ciał, praw, według których te przemiany się odbywają i wreszcie badanie zależności własności chemicznych od składu ciał. Mężem, który pchnął chemję na nowe tory i od którego zwykle datują okres teorji flogistonu, był Robert Boyle (1627—1691): aczkolwiek badacz ten teorji flogistonu nie uznawał, badania jego jednak eksperymentalne miały na celu zjawiska, których tłumaczenie było celem teorji flogistonu. Jak jasno mąż ten przedstawiał sobie cele i zadanie naukowej chemji, to wypływa z następnego ustępu z jego „Preliminary discourse“:

„Chemicy dotychczas kierowali się ciasnemi zasadami, pozbawionemi wyższych punktów widzenia. Widzieli oni swe zadanie w otrzymywaniu środków leczniczych, w ekstrakcji i transmutacji (przemianie) metali. Ja zamierzam traktować chemję z zupełnie innego punktu widzenia, nie jako lekarz, lub alchemik, lecz jako filozof. Skreśliłem tutaj program filozofji chemicznej, którą, jak mam nadzieję, potwierdzą moje spostrzeżenia i doświadczenia. Gdyby ludzie dbali więcej o rozwój prawdziwej wiedzy, niż o własny interes, natenczas możnaby im wykazać, że przysłużą się światu w stopniu większym, wytężając wszystkie siły ku wykonaniu doświadczeń, zbieraniu spostrzeżeń, a zaniechując tworzenia teorji bez zbadania odnoszących się do nich zjawisk”.

Boyle więc był reformatorem chemji w wielkim stylu, wskazał na zasadniczą metodę, która jedynie może doprowadzić do celu, a zdobycze jego świadczyły, że obrana metoda była w istocie dobrą. Pojęcie pierwiastka, dotychczas chwiejne i nieokreślone, otrzymało przez Boyla jasne określenie. W pracy swej „Chemiste scepticus“ zwalcza on elementy Arystotelesa i elementy jatrochemików i alchemików; w jego mniemaniu pierwiastkami należy nazywać takie składniki ciał, których nie można rozłożyć na prostsze. Połączenie tych pierwiastków, dokonane pod wpływem chemicznego powinowactwa, daje ciała złożone, których własności różnią się bardzo od własności składników. Na zasadzie tego rodzaju jasnych już wyobrażeń mógł on dać sposób rozróżniania pomiędzy mieszaninami a związkami chemicznemi, a można też przypuszczać, że gdy tworzył t. zw. teorję korpuskulową, w umyśle jego kiełkowała już nowożytna teorja atomistyczna, mogąca tłumaczyć sposób łączenia się z sobą pierwiastków. Życzenie poznania składu ciał pchnęło Boyle'a do opracowywania metod analitycznych, można go skutkiem tego uważać za twórcę tej ważnej gałęzi chemji.

Sprawa przyczyny palenia się ciał także była przedmiotem dociekań Boyle'a, choć w traktowaniu jej był mniej szczęśliwy; zajęciu się tym problematem zawdzięczamy jednak inną ważną zdobycz, mianowicie znane prawo, że objętości gazów znajdują się w stosunku odwrotnym do działających na nie ciśnień, odkryte po raz drugi w 17 lat później przez Mariotta.

Z pomiędzy spółczesnych mu badaczów na szczególne wyróżnienie zasługuje jeszcze John Mayow; wypowiedział on zdanie, że powietrze zawiera składnik, który, działając na metale, powoduje ich „zwapnienie", który jest w stanie przemienić krew żylną w krew tętniczą i który wreszcie jest składnikiem także innych ciał, np. saletry.

Francja w owym czasie również zaczęła reformować chemję, choć nie w tym stopniu jak Anglja. Lemery i Homberg dali sporo przyczynków eksperymentalnych, które jednak zasadniczo chemji nie posunęły naprzód. Niemcy dały Kunkla i Bechera, którzy jednak co do jasności wyobrażeń w sprawach chemicznych nie wytrzymują żadnego porównania z Boylem. Po Kunklu i Becherze na widownię występuje wreszcie Stahl z teorją flogistonu, która jako próba objęcia szeregu zjawisk jednolitym poglądem odegrała w historji chemji wielką rolę. Miała ona pewne podobieństwo do teorji panującej w okresie alchemicznym, gdy przypuszczano, że wszystkie metale zawierają wspólny składnik, siarkę, która powoduje zmienność metali w ogniu. Poglądów Stahla nie dzielili wprawdzie wszyscy ówcześni chemicy, ale większość zgadzała się na przypuszczenie zasadnicze, że palnosć ciał powoduje się przez ten sam wszystkim ciałom wspólny składnik i że zjawisko palenia się jest zawsze procesem niszczącym, którego następstwem jest zawsze wydzielanie się czegoś z badanego ciała. Owym czymś jest według Stahla flogiston, ciało, którego wyosobnić nie umiał, w którego istnienie jednak wierzył. Ilość flogistonu w różnych ciałach jest według niego niejednakowa; ciała, które palą się szczególnie łatwo, jak np. węgiel, mają zawierać go więcej, niż ciała trudnopalne. Proces palenia polega na wydzieleniu flogistonu, jest rozkładem ciał, analizą, która daje nam pojęcie o składzie ciał: siarka, która, paląc się, daje kwas siarkowy, musi być według tego poglądu połączeniem flogistonu z kwasem siarkowym; metale, ulegające przemianie w „ziemie", są połączeniem tych ostatnich z flogistonem. Widzimy, że pomimo pozornej nowości tych poglądów zarodek ich spotkać można w bardzo odległej przeszłości. Przypominamy cztery pierwiastki Empedoklesa: wodę, ziemię, ogień i powietrze, które w nauce Arystotelesa stają się przedstawicielami czterech podstawowych własności: wilgotności, suchości, ciepła i zimna. Już w owe czasy zjawiska palenia się uważano jako wydzielenie materji płomiennej, a Plinjusz tłumaczył nawet wielką palność siarki zawartością znacznych ilości tej materji. Co jednak uderza najwięcej, to okoliczność, że już za czasów największego rozkwitu teorji flogistonu znano fakty, które jej przeczyły, a które jednak w mniemaniu ówczesnych nie były powołane do jej obalenia. Poglądom mianowicie, że proces palenia jest zawsze procesem rozkładowym, przeczył fakt, że w niektórych przypadkach stwierdzić można było powiększenie ciężaru ciała, które uległo „spaleniu". Znane to już było Geberowi, alchemikowi VIII-ego stulecia, a Rey, Mayow i Hooke dali szereg nowych przykładów tego rodzaju. Twórcom teorji flogistonu, Becherowi i Stahlowi, fakty te nie były obce, lecz powiększanie się ciężaru podczas procesu palenia uważali za coś zupełnie drugorzędnego, z właściwym zjawiskiem nie mające nic wspólnego. Nielepiej zachował się wobec tych faktów Boyle, niewątpliwie jeden z pierwszych myślicieli XVII-tego wieku i, jak już wspominaliśmy, zdeklarowany zwolennik nauk Bacona. Atoli następcy Stahla nie mogli milczeniem owych faktów zbywać i choć od teorji flogistonu jeszcze ich odwieść nie mogły, to jednak konieczność dyskusji na ten temat wskazywała, że zaczyna wyrabiać się nowa opinja, która bez następstw poważnych pozostać nie mogła. Do badaczów, którzy w ten sposób pośrednio i bezwiednie poczęli osłabiać teorję Stahla należy przedewszystkim Lemery [1]), który nie przestał wprawdzie jeszcze wierzyć w flogiston, ale zjawisko palenia już nie uważał tylko jako proces rozkładowy, którego następstwem jest wydzielenie flogistonu, ale prócz tego jako proces syntetyczny, skutkiem którego palące się ciało łączy się z ważką materją ognistą lub cieplną. Tłumaczenie to uważano za odpowiednie aż do schyłku wieku XVII-tego, dopiero Boerhave zadał mu kłam na zasadzie bardzo prostego eksperymentu, wykazując, że metale ważone w stanie zimnym i gorącym wagi nie zmieniają. W obozie flogistyków eksperymentu tego nie można było zbyć milczeniem i choć i taki wynik nie zdołał jeszcze ostatecznie obalić zasadniczej ich teorji w chemji, zaczął

---

[1]) Kopp, Historja Chemji III, 123.

wiać duch nowy krytyczny, który ostatecznie, pod wpływem dalszych wyników prac eksperymentalnych, wykazał bezpodstawność poglądów Bechera i Stahla. Przełom ten nastąpił w połowie XVIII-tego wieku, a do najwybitniejszych uczonych, zwalczających flogiston, zaliczyć trzeba Blacka, którego podobnie jak Boylea uważać można za poprzedników Lavoisiera i spółtwórców nowoczesnej chemji. Z pomiędzy chemicznych prac Blacka, który zasłynął także na polu dociekań fizycznych, największą wartość ma praca nad składem alkaljów. Poprzednicy jego uważali t. zw. alkalja łagodne jako ciała niezłożone, które podczas przepalania łączą się z flogistonem, wytwarzając alkalja gryzące; wapień (węglan wapniowy) np. staje się po przepaleniu gryzącym dzięki wchłonięciu materji ogniowej, którą za pośrednictwem wapna gryzącego można przenieść i na inne alkalja, przyczym wapno gryzące przemienia się ponownie w obojętne. Black wykazał, że tłumaczenie takie nie jest zgodne z prawdą, że t. zw. alkalja łagodne nie są ciałami prostemi, a złożonemi, że „kaustyczność“ otrzymują one nie przez połączenie się do nich hipotetycznej materji ogniowej, a przeciwnie przez wydzielenie pewnego ciała, które nazwał powietrzem utrwalonym. Do wniosków tych doszedł Black, stosując po Boyleu i Boerhavie po raz pierwszy wagi; przekonał się on że „łagodne wapno“ traci na wadze, przemieniając się w gryzące, i zawnioskował z tego, że ostatnie jest składnikiem pierwszego. Wnioski te poparł jeszcze innym dowodem, wykazał mianowicie, że kwasy wydzielają z łagodnego wapna to samo ciało gazowe, które wydziela się z niego pod wpływem prażenia; ciało owo gazowe uważał skutkiem tego za drugi składnik wapna łagodnego. Black więc wprowadził do chemji całkiem nową i w następstwach niezmiernie ważną zasadę, że jeżeli z pewnej określonej ilości jakiegoś ciała powstaje inne w ilości mniejszej, to ostatnie nie może być uważane za więcej złożone niż tamte, a przeciwnie musi być uważane za składnik jego. Zasada ta w rękach Lavoisiera obaliła flogistonowe poglądy na zjawisko palenia i dla tego Black był też jednym z pierwszych, którzy przyjęli poglądy badacza francuskiego.

Dowód Blacka, że gaz może być składnikiem ciała stałego, zwrócił ponownie uwagę chemików na gazy, a rezultatem tego były świetne prace Cavendisha, o których mistrzostwie nabyliśmy pojęcia szczególnie z chwilą odkrycia argonu przez Ramsaya i Rayleigha, gdyż nie może ulegać wątpliwości, że Cavendish pomimo prymitywnych przez niego używanych metod wskazał był na obecność w powietrzu gazu, który, jak teraz wiemy, jest argonem. Zasługa Cavendisha polegała przedewszystkim na tym, że zdołał obalić ówczesne przypuszczenia, że wszystkie ciała gazowe są w gruncie rzeczy powietrzem, których odmienne własności tłumaczyć należy zanieczyszczeniami, towarzyszącemi powietrzu. W zakres jego badań wchodził przedewszystkim wodór, otrzymany przez niego działaniem metali na kwasy i kwas węglowy. Wodór według jego spostrzeżeń okazał się stosunkowo znacznie lżejszym od powietrza; mamy tutaj pierwsze wogóle badanie nad ciężarem właściwym gazów, wartością, która w następstwie miała dla rozwoju chemji znaczenie pierwszorzędne. Niemniej doniosłe były prace tego badacza nad składem powietrza, które obaliły dawniejsze przypuszczenia o zmiennym jego składzie, w zależności od pór roku, klimatu i położenia gieograficznego. W związku z temi pracami stoją późniejsze tego samego badacza, publikowane w roku 1784 i 1785, mające na celu oświetlenie zjawiska palenia się, a w szczególności zmian, zachodzących w powietrzu po spaleniu w nim rozmaitych ciał. Stwierdził on przedewszystkim, że bezwodnik węglowy wytwarza się w powietrzu tylko wtedy, gdy spaleniu ulegają ciała pochodzenia zwierzęcego lub roślinnego, dalej że woda składa się z tlenu i wodoru, udowadniając, że przy spaleniu tych dwu ciał wytwarza się woda, której ciężar równa się sumie ciężarów wodoru i tlenu użytych przy spaleniu, że kwas azotowy (bezwodnik azotowy) powstaje przy łączeniu się tlenku azotu z tlenem powietrza i t d. Prace Cavendisha dostarczyły dużo materjału, który mógł być i w rzeczywistości był wyzyskany przez przeciwników teorji flogistonu do jej zwalczenia, a okoliczność uderzająca, że Cavendish sam pozostał jej wiernym, tłumaczy się, że przywiązywał, podobnie jak inni flogistycy, znacznie więcej wagi do spostrzeżeń natury jakościowej niż ilościowej. Flogiston jednak według niego jest niczym innym jak wodorem.

Z pomiędzy spółczesnych Cavendisha na uwagę zasługuje jeszcze rodak jego Priestley. Umysł to był nader ruchliwy, rzutki, przedsiębiorczy ale i powierzchowny. Zawdzięczamy mu sporo odkryć rzetelnej wartości, ale też mnóstwo spostrzeżeń błędnych. On to odkrył po raz pierwszy sposób otrzymywania w czystym stanie tlenu przez ogrzewanie tlenku rtęciowego, odkrył bezwodnik podazotawy i tlenek węglowy. Teoretyczne jego poglądy nie różniły się od poglądów Cavendisha; teorja flogistonu była według niego zdolną objąć całokształt zjawisk chemicznych, o ile się przyjmie, że flogiston jest identyczny z wodorem. Zjawisko np. reakji pomiędzy metalami a kwasami tłumaczył jak następuje: metal pod wpływem kwasów rozkłada się na wolny flogiston (wodór) i „ziemię" metalu, która rozpuszcza się w użytym kwasie. W razie gdy użyty kwas jest bardzo stężony, np. azotowy lub siarkowy, wtedy wydzielający się flogiston łączy się z kwasem i powstaje flogistonowany kwas siarkowy lub azotowy, czyli kwas siarkawy lub azotawy. Bardzo przekonywające było też tłumaczenie redukcji „ziem" metali pod wpływem wodoru: następowało tu według Priestleya po prostu łączenie się „ziemi" z flogistonem, następstwem czego musiało być odtworzenie metalu. Atoli fakty, które i z tak zmodyfikowaną teorją flogistonu zgodzić się nie chciały, mnożyły się z roku na rok, a to głównie pod wpływem spostrzeżeń robionych ze spółudziałem wagi. Szczególnie okres od roku 1774—1794 wzbogacił nas całym szeregiem prac, które dla losu teorji flogistonu były decydujące; pod ich naciskiem musiała ona nareszcie rozpaść się w gruzy. Okres ten dla chemji niewątpliwie był przełomowym, albowiem podczas niego hasłem panującym było ścisłe przytrzymywanie się nauki Bacona, zgodne z duchem jej wykonywanie ścisłych eksperymentów, pozbycie się wszelkich tradycyją utrwalonych teoretycznych założeń. Wynikiem tej dążności było wykrycie prawa o niezniszczalności materji, o którym w sposób nieokreślony mówiono wprawdzie już przedtym, ale które piętno rzetelnej prawdy naukowej otrzymało dopiero we wspomnianym okresie. Przewrót ów nastąpił dzięki pracom wiekopomnym Lavoisier'a, którego słusznie nazywają ojcem chemji nowożytnej. Pierwsza praca tego badacza, zajmująca się wprawdzie problematem pozornie małej wagi, daje już pojęcie o metodzie tego uczonego. Chodziło w niej o wyświetlenie dziwnego zjawiska, które zauważono, gdy gotowano przez czas dłuższy wodę w szklanych naczyniach; woda w tych warunkach przemieniała się jakoby w „ziemię". Lavoisier wykazał, że tego rodzaju tłumaczenie jest zupełnie bezpodstawne, aczkolwiek zewnętrzne spostrzeżenia przemawiają pozornie na jego korzyść. Metoda badania była następująca: naczynie szklane, urządzone w ten sposób, aby destylowana z niego woda po skropleniu znów do niego spływała, zważono dokładnie, jak również wodę przeznaczoną do eksperymentu; wreszcie zważono cały aparat napełniony wodą i gotowano ostatnią w ciągu 100 dni, aczkolwiek już po miesiącu zauważono wytwarzanie się „ziemi" w małych ilościach. Aparat zważono ponownie i przekonano się, że waga jego nie uległa zmianie; wniosek ztąd, że materja cieplna w każdym razie nie uległa wchłonięciu, w przeciwnym bowiem razie waga powinnaby się była powiększyć. Następnie Lavoisier waży wodę wraz z ziemią i przekonywa się, że ciężar uległ powiększeniu się, a waga naczynia szklanego zmniejszeniu. Stąd wniosek, że ziemia owa pochodzi ze szkła, która oczywiście pod wpływem wrzącej wody musiała ulec rozkładowi. Ubytek wagi szkła nie okazał się wprawdzie dokładnie równym przybytkowi wagi wody wraz z ziemią, ale niezgodność ta tłumaczy się błędem eksperymentalnym nie dającym się uniknąć.

Następna praca traktuje o powiększaniu się ciężaru przy zjawiskach spalania; Lavoisier stwierdza, że produkty spalenia siarki i fosforu ważą więcej niż ciała te przed spaleniem, co tłumaczy wchłonięciem przez nie powietrza. W późniejszej wykazuje, że przy przemianie cyny w ziemię przez ogrzewenie jej w zamkniętym naczyniu, waga całego układu nie ulega zmianie, fakt przemawiający znów za tym, że materja cieplna wchłonięciu nie uległa; dalej że waga metalu przytym powiększyła się o tyle, o ile zmniejszyła się waga powietrza użytego do eksperymentu. W tym czasie przypada odkrycie tlenu przez Priestleya i niezależnie od tego badacza przez Scheelego, który w szeregu eksperymentatorów zajmuje jedno z miejsc pierwszych. Lavoisier powtarza te eksperymenty, potwierdza ich prawdziwość i natychmiast korzysta z nich przy tłumaczeniu istoty przemian pierwotnie przez siebie badanych. Już bowiem w roku 1777 daję nową zupełnie teorję zjawiska palenia, którą streszcza w następujących twierdzeniach: przy paleniu się zawsze występuje ciepło i światło, ciała palą się tylko w czystym powietrzu (tlenie), ostatnie zużywa się przy paleniu, przyczym powiększenie wagi palącego się ciała równa się zmniejszeniu się wagi powietrza, wreszcie palące się ciała przemieniają się zazwyczaj przy paleniu w kwasy, a metale w „ziemie" metali. Ostatnie to twierdzenie doprowadza do pewnego poglądu, dotyczącego natury kwasów, ciał znanych zresztą już od bardzo dawna. Kwasy według niego zawsze składają się z pewnej zasady, wodoru i tlenu; pogląd ten ilustruje szeregiem przykładów: kwas węglowy jest połączeniem węgla z tlenem, kwas siarkowy—siarki z tlenem i t. d.

Poglądy te nowe na zjawisko palenia miały wogóle dla chemji wielką doniosłość, albowiem nietylko usunęły błędną teorję flogistonu, ale miały też wpływ wielki na kształtowanie się niektórych zasadniczych poglądów chemji. Lavoisier był zwolennikiem definicji pierwiastka, którą dał był już Boyle, według której za pierwiastek należy uważać ciało nieulegające dalszemu rozkładowi. Do grupy tej zaliczył Lavoisier też metale i energicznie zwalczał panujący podówczas pogląd jakoby metale zawierały flogiston. Trudności przytym nastręczały się liczne, szczególnie gdy chodziło o wykorzenienie zmodernizowanej teorji flogistonu Kirwana i Priestleya, na której korzyść zdawały się przemawiać liczne fakty. Zwłaszcza zachowanie się metali wobec kwasów zdawało się przemawiać szczególnie przekonywająco na korzyść tych poglądów. Z pomocą Lavoisierowi przyszedł w tym okresie Laplace, który podsunął mu przypuszczenie, że wodór, wydzielający się przy działaniu metali na kwasy, pochodzi z wody, która ulegając rozkładowi jednocześnie oddaje tlen, łączący się z metalem na tlenek. W takim oświetleniu zjawisko redukcji tlenków metali przez wodór także nie przedstawia już żadnych stron ciemnych: wodór łączy się z tlenem tlenka na wodę, a metal pozostaje w stanie wolnym. Poglądy te Lavoisier poparł też świetnie pomyślanemi eksperymentami, w których przewodnią myślą było zawsze przekonanie, że w reakcjach chemicznych zmianie ulega tylko skład materji, a jej ilość pozostaje niezmieniona, że skutkiem tego ciała użyte i powstające z nich produkty przemiany objąć można równaniem algiebraicznym, z którego obliczyć się daje jedna niewiadoma. Przekonanie to zawierało wprawdzie jeszcze inne, mianowicie, że łączenie się pierwiastków w ciała złożone zachodzi zawsze według stosunków stałych, którego udowodnieniem Lavoisier się wprawdzie nie zajmował i które przez ogół ówczesnych chemików uważane było jako nieulegające żadnej wątpliwości. Pewność ta została jednak niebawem zachwiana przez spółziomka Lavoisiera, Bertholleta, którego dzieło „Statique chimique“ pomimo niektórych przez nie propagowanych błędnych zapatrywań zaliczyć należy do klasycznych w nowoczesnych naukach przyrodniczych. Praca ta zwalcza głównie błędne ówczesne poglądy na t. zw. powinowactwo chemiczne, o których obszerniej informujemy niżej.

Tutaj wystarczy zaznaczyć, że Berthollet zwalczał głównie pogląd jakoby owo powinowactwo chemiczne było jakąś własnością stałą ciał, zależną tylko od ich chemicznej natury, pogląd głównie broniony przez Bergmana. Berthollet, stojąc na tym stanowisku, że główne zasady mechaniki i fizyki muszą mieć także wartość w dziedzinie zjawisk chemicznych, wypowiedział zdanie, że oddziaływanie chemiczne ciał zależy nietylko od ich natury chemicznej, ale i od masy. Chemiczne działanie danego ciała daje się według niego wyrazić przez iloczyn z masy ciała i powinowactwa, który to iloczyn nazywa masą chemiczną. Na efekt chemiczny ma zresztą wpływ nietylko masa, ale też stan skupienia danego ciała, a więc warunki fizyczne, w których eksperyment się wykonywa (temperatura, ciśnienie). Stan skupienia materji zależy według Bertholleta od dwu antagonistycznych sił od kohezji i elastyczności. Przewaga pierwszej prowadzi do stanu stałego, przewaga drugiej do gazowego; w płynach obie siły są w równowadze. Gdyby wszystkie kwasy miały jednakowy stan skupienia, w wyżej określonym znaczeniu, w takim razie, według Bertholleta, ten z nich należałoby uważać za najsilniejszy, który zdolny jest do nasycania największej ilości zasad.

Poglądy swoje Berthollet wyłuszcza głównie na przykładzie t. zw. podwójnej wymiany. Według niego rezultatem zetknięcia się kwasu z solą innego kwasu jest podział zasady pomiędzy oba kwasy, stosownie do ich „masy chemicznej“; otrzyma się skutkiem tego w roztworze mieszaninę czterech ciał, dwa kwasy i dwie sole. Stan taki jest jednak możliwy tylko pod warunkiem, że obie sole mają mniej więcej jednakowy spółczynnik rozpuszczalności; powstaje wtedy stan równowagi, zależny nietylko od siły kwasów, ale także od stosunków ich ilości. O prawdziwości tych poglądów nie można się jednak przekonać przez odparowanie roztworów i krystalizowanie przypuszczalnie wytworzonych soli, albowiem z chwilą gdy nie starczy wody do utrzymania wszystkich ciał w roztworze, na ostateczny wynik ma wpływ przedewszystkim kohezja i zdolność ciał do krystalizacji, a także różny stopień rozpuszczalności poszczególnych soli. Stosowanie tego rozumowania do szeregu przemian chemicznych udało się Bertholletowi po mistrzowsku, a liczne przepowiednie wypływające z zasadniczego założenia udało się mu też potwierdzić przez eksperyment. Atoli Berthollet poszedł za daleko w stosowaniu poglądów swoich fizycznych do zjawisk chemicznych;

kohezja według niego ma wpływ nietylko na rodzaj powstających ciał, ale stanowi też o stosunkach ilościowych, według których pierwiastki łączą się z sobą na ciała złożone. Pojęcie związku chemicznego nie jest ściśle związane ze stałością stosunków, według których ciało dane powstaje. Przeciwnie, w związkach chemicznych stosunek ilościowy składników może ulegać według niego ciągłym zmianom, a tylko w pewnych specjalnych warunkach stwierdzić można stałość proporcji. Jeżeli wodór łączy się z tlenem stale według tych samych stosunków ilościowych, to dzieje się to tylko z tej przyczyny, że rezultat tego połączenia —woda jest ciałem płynnym, a towarzysząca zjawisku chemicznemu kontrakcja staje na przeszkodzie powstawaniu ciał z innym stosunkiem ilościowym składników. W przypadkach natomiast, gdzie zachodzą tylko nieznaczne zmiany kohezji, ciała o zmiennym składzie zawsze powstać muszą. Jako przykład przytacza stopy metali, szkła i roztwory. W innej pracy do takich przykładów zalicza nawet tlenki metali, wychodząc z założenia, że dana ilość tlenu podzielić się musi pomiędzy dwa metale według ich „masy chemicznej“. Słowem, w oświetleniu Bertholleta prawo stosunków stałych, które odgrywało wówczas rolę niemal aksjomatu, nie jest w istocie prawem przyrody, akceptowanie go niema żadnej racji naukowej. Takie stanowisko obronić się jednak nie dało, i choć ogólnie przyjęto poglądy Bertholleta na zależność powinowactwa chemicznego od czynników fizycznych i masy działających ciał, przeciwko obalaniu prawa stosunków stałych przy wytwarzaniu się ciał złożonych podniesiono protest. Szczególniej Proust, na mocy bardzo ścisłych na owe czasy eksperymentów wytrwale zwalczał te poglądy swego rodaka. Początkowo wprawdzie większość chemików stanęła po stronie Bertholleta, ale w miarę postępu sporu, który trwał przeszło 6 lat (od roku 1801 — 1807), przekonano się, że przeceniano autorytet Bertholleta, że wyniki eksperymentów Prousta nie dopuszczają wątpliwości w słuszność prawa o stosunkach stałych, tymbadziej, że pod koniec owego sporu poznano wreszcie prace Richtera z lat 1791—1800 nad tą kwestją, i że Gay-Lussac wystąpił z pracami swemi nad stosunkami objętościowemi, według których łączą się pierwiastki, i wreszcie, że zaczęła już świtać nowożytna teorja atomistyczna, której nie można było żadną miarą pogodzić z poglądami Bertholleta.

Wyżej zaznaczyłem, że prawo stosunków stałych uznano już dawno, aczkolwiek traktowano je raczej jako prawdę aksjomatyczną, niż jako oparte na ścisłych spostrzeżeniach. Nie można się też dziwić temu, metody analityczne podówczas znane były mało ścisłe, do subtelniejszych pomiarów zupełnie się nie nadawały. Dopiero prace Bergmana, Scheelego i Cavendisha zaczęły torować w tym kierunku drogę. Badacze ci usiłowali oznaczyć stosunki ilościowe, według których ciała mogą łączyć się ze sobą, z czego nie wynika jednak, że uważali za związki chemiczne tylko ciała posiadające skład niezmienny, aczkolwiek niepodobna przypuścić, aby przy tych pracach nie kierowali się przeświadczeniem o prawdziwości prawa o stosunkach stałych. Gdyby tego przeświadczenia nie mieli, to, jak słusznie zaznacza Kopp, z pewnościąby nie tracili czasu na żmudne owe rozbiory. Pierwsze ściślejsze tego rodzaju roboty poświęcono oznaczaniu ilości kwasu i zasady, potrzebnych do wytwarzania danej soli; pracowali nad tym tematem Bergman, Wenzel i Kirwan, lecz najdonioślejsze przyczynki dał Richter, twórca stechiometrji. Richter zauważył, że przy zmieszaniu obojętnych soli, układ zachowuje charakter obojętny, nawet w przypadku zamiany podwójnej i zawnioskował, że ilości *a* i *b* dwu różnych zasad, zobojętnione przez ilość *c* jednego kwasu, muszą być zobojętnione przez tę samą ilość *d* drugiego kwasu i odwrotnie: ilości dwu różnych kwasów, zobojętnianych przez ilość *a* jednej zasady, muszą być zobojętniane przez jednakowe ilości *b* drugiej zasady. Chcąc zdobyczy tej dać podstawę praktyczną, Richter oznaczył ilości kilku kwasów, które są potrzebne do zobojętnienia pewnej ilości zasady; ażeby zobojętnić np. pewną ilość potażu, trzeba według jego oznaczeń zużyć 1.606 części kw. siarkowego, albo 2.239 kwasu solnego, albo 1.143 części azotowego. Prace Richtera napisane są językiem bardzo nieprzystępnym i niejasnym i tej okoliczności trzeba przypisać fakt, że prace jego przez długi czas pozostały bez wpływu i że prawo o stosunkach stałych, które można było wysnuć na mocy jego eksperymentów, jasno wypowiedział dopiero Dalton a to w związku z teorją atomistyczną i prawem o stosunkach wielokrotnych. Okoliczność ta uderza tym bardziej, że koncepcja teorji atomistycznej powstała, o ile badania dotychczasowe historyczne nie są mylne, raczej na zasadzie rozważań zjawisk fizycznych niż chemicznych. Sąd o stopniowej ewolucji pojęć Daltona jest tym trudniejszy, że badacz ten sam nigdzie nie zaznaczył wyraźnie drogi, po której krocząc doszedł do swej teorji. Istnieje jednak notatka spółcześnika Daltona i jego przyjaciela, która zdawała się rzucać nieco światła na tę sprawę. Thomson w książce swej p. t. „History of Chemistry II, 289, wspomina o odwiedzinach swoich Daltona, podczas których po raz pierwszy dowiedział się o owej teorji: „Ostatecznemi składnikami wszelkich ciał są atomy, niezdolne do dalszego podziału. Atomy owe mają wszystkie kształt kulisty, każdy z nich ma pewien ciężar, który wyrazić można przez liczbę. W celu łatwiejszego przedstawienia sprawy atomy poszczególnych prostych ciał przedstawił za pomocą symboli. Temu szczęśliwemu pomysłowi zawdzięczają poglądy Daltona ich jasność. Byłem zachwycony tym nowym światłem i pojąłem natychmiast wielkie znaczenie tej teorji po jej opracowaniu. Dalton poinformował mnie, że pomysł teorji atomistycznej nasunął mu się przy badaniu metanu i etylenu, których skład on sam badał po raz pierwszy. Z doświadczeń jego wypływało, że ciała te składają się wyłącznie z węgla i wodoru i że jeżeli sprowadzimy ilości wodoru w ciałach tych zawartych do tej samej ilości węgla, wtedy się okaże, że metan zawiera dokładnie dwa razy więcej wodoru niż etylen. Fakt ten nasunął dalej myśl wyrażenia stosunkowych ilości składników tych ciał za pomocą liczb i rozpatrywania etylenu, jako związku jednego atomu węgla i jednego atomu wodoru, a metanu jako połączenie jednego atomu węgla z dwoma atomami wodoru. Pomysł w ten sposób zrodzony zastosowano następnie do innych jeszcze przypadków, jak tlenku węglowego, wody, amoniaku i t. d.“.

Z powyższego wypływa, że według Thomsona teorja atomistyczna powstała w związku z badaniami nad metanem i etylenem, a więc w związku z wykryciem prawa o stosunkach wielokrotnych. Zdaje się jednak, że to przedstawienie stanu rzeczy jest mylne, że w rozmowie z Thomsonem Dalton nie trzymał się ściśle historycznego rozwoju swych myśli, a natomiast posiłkował się sposobem dla słuchacza swego najwięcej zrozumiałym, dając najprostszą ilustrację swych poglądów. Ważnym przyczynkiem do historji rozwoju teorji atomistycznej są oryginalne notatki wykładów, wygłoszonych przez Daltona w roku 1810 w londyńskiej Royal Institution, a także notatki laboratoryjne odnalezione przez Roscoe i opracowane przez tego uczonego wspólnie z Hardenem.

Z odczytów owych przytaczamy za Venablem[1]) następujące ustępy:

„Zajęty od dawna wykonywaniem spostrzeżeń meteorologicznych i spekulacją na temat natury i konstytucji atmosfery, często zadawałem sobie pytanie, dlaczego atmosfera złożona, czyli mieszanina dwu lub więcej elastycznych fluidów, przedstawia masę jednolitą, o własnościach atmosfery niezłożonej.

Newton wykazał jasno w 23-cim rozdziale 2-giej księgi Principia, że elastyczny fluid złożony jest z małych cząstek czyli atomów materji, które odpychają się nawzajem z siłą wzrastającą w miarę zmniejszania się ich oddalenia. Ale nowoczesne badania wykazały, że atmosfera zawiera trzy lub więcej elastycznych fluidów o różnym ciężarze właściwym; nie mogłem wyjaśnić sobie, jak można zastosować pogląd Newtona do takiego przypadku, o którym on oczywiście nie mógł mieć wyobrażenia.

Z tą samą trudnością walczył Dr. Priestley, który odkrył tę skomplikowaną naturę atmosfery. Nie mogłem zrozumieć, dla czego tlen, będąc gatunkowo cięższy, nie wytwarza wyraźnego stratum u spodu atmosfery a azot podobnie u góry jej. Pewni chemicy, zdaje się że Francuzi, sądzili, że znaleźli rozwiązanie tej zagadki. Według nich rolę tutaj odgrywa powinowactwo chemiczne. Jeden rodzaj gazu miał być rozpuszczany przez drugi, a utworzony związek rozpuszczał w sobie z kolei wodę; tym się tłumaczy parowanie, deszcz i t. d. Pogląd, że powietrze rozpuszcza w sobie wodę, panował już od dawna i pociągnął za sobą drugi o rozpuszczalności jednego gazu w innym. Zarzucano wprawdzie, że niema stanowczych objawów chemicznej reakcji przy mieszaniu się dwu różnych gazów, lecz na to odpowiadano, że powinowactwo w tym przypadku jest słabe i nie przejawia się tak energicznie jak w większości innych obserwowanych przypadkach“.....

„W roku 1801 wpadłem na hipotezę, która w zupełności usuwa te trudności. Według niej trzeba przypuścić, że atomy jednego rodzaju nie odpychają atomów innego rodzaju; odpychanie odbywa się tylko pomiędzy atomami tego samego rodzaju. Hipoteza tłumaczy w zupełności dyfuzję jednego gazu poprzez drugi, bez względu na ich ciężary właściwe, i godzi zachowanie się jakiejkolwiek mieszaniny gazów z teoremem Newtona. Hipoteza ta jednak, aczkolwiek zastosowania jej są piękne, miała cechy nieprawdopodobieństwa. Trzeba bowiem było przypuścić tyle różnych sił odpychających, ile jest gazów i że ciepło nie jest tą siłą w żadnym przypadku—stan rzeczy z pewnością nie bardzo prawdopodobny. Oprócz tego udowodniłem szeregiem eksperymentów, że dyfuzja jednego gazu przez drugi jest procesem powolnym i zdawała się być wielką pracą. Przemyśliwając ponownie nad tym przedmiotem, zauważyłem, że nie uwzględniałem dotychczas wcale wpływu różnych rozmiarów cząsteczek gazu... Je-

---

[1]) The study of the atom, or the foundation of Chemistry. Easton P. A. 1904.

żeli np. w pewnej objętości powietrza ilość atomów tlenu i azotu nie jest jednakowa, w takim razie rozmiary cząstek tlenu muszą być odmienne od rozmiarów cząstek azotu. Jeżeli zaś rozmiary owe nie są jednakowe, w takim razie, robiąc przypuszczenie, że siłą odpychającą jest ciepło, nie można sobie wyobrazić stanu różnowagi pomiędzy cząstkami niejednakowych wymiarów, cisnących jedna na drugą. Myśl ta powstała w roku 1805 [1]. Prędko się też przekonałem, że rozmiary cząstek gazu muszą być niejednakowe, albowiem miarka azotu łączy się chemicznie z miarką tlenu, dając blizko dwie miarki tlenku azotu, a dwie te miarki nie mogą zawierać więcej atomów tlenku azotu, aniżeli jedna miarka azotu lub tlenu. Stąd przypuszczenie, że atomy różnych gazów różnią się w rozmiarach, a także wytłumaczenie zjawisk dyfuzji bez uciekania się do jakichkolwiek sił odpychających z wyjątkiem do ciepła. To jest więc obecny mój pogląd na konstytucję mieszaniny gazów. Gdy stwierdziłem, że rozmiary atomów różnych gazów nie są jednakowe w tych samych warunkach cieplnych i ciśnienia, wtedy nasuwało się nowe zadanie, oznaczenie stosunkowych rozmiarów i wag i ilości atomów w danej objętości"....

Ażeby jeszcze dokładniej oświetlić pochód myśli Daltona, przytoczymy pracę jego z roku 1801 p. t. Konstytucja mieszanin gazowych. W pracy tej twierdzi Dalton, że ogólne ciśnienie wywierane przez mieszaninę dwu gazów na ściany naczynia, w którym się one znajdują, równa się sumie ciśnień każdego gazu poszczególnego; jeżeli usunie się jeden z tych gazów, ciśnienie wywierane przez gaz pozostały jest dokładnie takie same, jakie wywierał ten gaz wówczas, gdy znajdował się w pierwotnej mieszaninie. O pracy tej Dalton [2]) wyraził się sam w rok później w sposób następujący: „Głównym celem owej pracy było wykazanie stanu, w jakim elastyczne płyny znajdują się obok siebie i podnieść z naciskiem, że siły elastyczne i odpychające każdej cząstki są swoiste dla każdego gatunku cząstek, że skutkiem tego prężność takiego gazu, albo grawitowanie jest takie same, bez względu na to, czy ma się gaz jeden czy też w postaci mieszaniny z innym, zależnie od jego gęstości i temperatury.

W pracy ogłoszonej w listopadzie 1802 r. [3]) Dalton idzie jeszcze o krok dalej i stawia sobie w niej następujące zadania: 1) Oznaczyć ciężar każdego ze składników atmosfery, albo in-

---

[1]) Roscoe i Harden sądzą, że zaszła tu pomyłka druku, że powinno być 1803.

[2]) Memoires Manchester Lit. and Phil. Society 1802.

[3]) " " " " I, pp. 248, 249.

nemi słowy oznaczyć, jaką część wagi całej złożonej atmosfery powoduje azot, jaką tlen i t. d. 2) Oznaczyć stosunkową wagę poszczególnych gazów w danej objętości atmosferycznego powietrza. 3) Zbadać zachowanie się poszczególnych składników atmosfery względem siebie. Oprócz tego znajdujemy w tej pracy pierwsze przebłyski prawa o stosunkach wielokrotnych. Oznaczając mianowicie ilość tlenu w powietrzu, Dalton wykonał następujący eksperyment: „Jeżeli do 100 części zwykłego powietrza dodamy 36 części tlenku azotu w rurce, której szerokość wynosi 0.3 cali, a długość 5 cali, wtedy po kilku minutach cała objętość zmniejszy się do 79 lub 80 części, a w mieszaninie nie da się wykryć ani tlen, ani tlenek azotu. Jeżeli do 100 części zwykłego powietrza dodamy 22 części tlenku azotu w szerokim naczyniu ponad wodą, wtedy również otrzymamy jako pozostałość 79 lub 80 części czystego azotu. Jeżeli w tym drugim doświadczeniu użyjemy mniej niż 72 części tlenku azotu, wtedy w pozostałym gazie da się stwierdzić tlen; jeżeli użyjemy więcej tlenku azotu, wtedy część ostatniego nie zostanie zużytą. Fakty te jasno wskazują teorję zachodzącego procesu; cząsteczki tlenu mogą połączyć się z pewną ilością tlenku azotu, albo z dwa razy większą ilością tego ciała, nie zachodzi zaś połączenie ilościowe w innym stosunku. W pierwszym przypadku wytwarza się kwas azotowy, w drugim azotawy“ [1]). W następnej pracy z września 1803 r., p. t. „Absorpcja gazów przez wodę i inne płyny“, Dalton mówi już o masach cząsteczek całego szeregu ciał. Część tej pracy zajmuje się mechanizmem zjawiska absorpcji gazów przez wodę; w niej często mowa o cząstkach gazu, a zakończono ją w sposób następujący: Największą trudność napotyka zastosowanie mechanicznej hipotezy z tej przyczyny, że różne gazy absorbują się według różnych praw. Dla czego woda nie absorbuje wszystkie gazy w jednakowym stopniu? Aczkolwiek nie mogę na pytanie to odpowiedzieć w zupełnie zadowalający sposób, to przypuszczam jednak, że fakt ten powodowany jest niejednakowemi rozmiarami cząstek po-

[1]) Liczby podane nie mogą być dokładne, jak to wskazał Roscoe; przy powtórzeniu tego eksperymentu otrzymuje się całkiem inne liczby, wnioski więc Daltona, zupełnie zresztą słuszne, oparte były na całkiem fałszywych eksperymentach.

szczególnych gazów; te gazy, których cząstki są najmniejsze i „pojedyńcze“ absorbują się najtrudniej, cząstki zaś cięższe i więcej skomplikowane absorbują się łatwiej. Zagadnienie oznaczenia stosunkowych ciężarów ostatecznych cząstek materji jest, jak sądzę, zupełnie nowe. W ostatnich czasach pracowałem nad tym problematem z nadzwyczajnym powodzeniem. Nie mogę jeszcze podać zasady mych poszukiwań w tej pracy, zadowolnię się przytoczeniem ostatecznych wyników:

Waga stosunkowa ostatecznych składników ciał gazowych i innych:

wodór	1.0	tlenek azotu	9.3
azot	4.2	eter	9.6
węgiel	4.3	tlenek węgla	9.8
amoniak	5.2	siarka	14.4
tlen	5.5	kw. węglowy	15.4
woda	6.5	alkohol	15.1
fosfor	7.2	kw. siarkowy	25.4
		etc.	

Praca niniejsza, jak również poprzednio przytoczone, noszą datę roku 1802, ale tom memoirów filozof. i literackiego Manchesterskiego towarzystwa zawierający je ukazał się dopiero w roku 1805, jest więc rzeczą możliwą, że Dalton w międzyczasie zrobił w rękopisach niektóre zmiany, korekty lub dopełnienia, co było dla niego tym łatwiejsze, że był podówczas sekretarzem wspomnianego towarzystwa. Przypuszczenie to czyni Roscoe na podstawie studjów nad notatkami laboratoryjnemi Daltona, które odnaleziono niedawno w bibljotece filozof. i lit. towarzystwa Manchesterskiego; z notatek tych wypływa, że w roku 1803 Dalton nie znał jeszcze faktów, o których wspomina Thomson w swej książce (porównaj wyżej), a które prowadziły do prawa o stosunkach stałych. Podobnie też powyższa tabelka nie była pierwszą, jaką Dalton postawił, lecz skorygowana, albowiem w notatkach znajduje się tabelka inna z datą 6 września 1803, a więc zestawiona sześć tygodni przed wspomnianym odczytem w towarzystwie. Tabelka ta zawiera znamienny szczegół, mianowicie, że przy poszczególnych pierwiastkach i ciałach Dalton umieścił określenie „ult. at.“, ultimate atom, określenie powtarzające się często w notatkach z roku 1803. Wnioskować z tego można, że teorja Daltona pierwotna wzorowana była na teorji korpuskulowej Newtona. Atomy jego nie były początkowo niepodzielne, lecz tylko cząstką małą, drobną masą. Właściwa teorja atomistyczna powstawała dopiero stopniowo. W tabelce owej, jak równie w drukowanej w memoirach przytoczone są trzy przypadki, z których można było wywnioskować prawo o stosunkach wielokrotnych, a jednak o prawie samym w pracy ówczesnej niema żadnej wzmianki.

Z powyższego już wynika, że koncepcja teorji atomistycznej urabiała się w umyśle Daltona bardzo stopniowo; pierwszym impulsem powzięcia jej były rozważania nad zjawiskami meteorologicznemi, później w tym samym kierunku oddziaływały prace nad gazami atmosfery. Poglądy zdobyte znalazły potym świetne poparcie w badaniach jego chemicznych; na zasadzie ich Dalton zarzucił dawniej przyjmowaną teorję korpuskulową [1]), a przyjął natomiast atomistyczną z podstawowym pojęciem atomu, jako cząstki niepodzielnej. Kiedy mogła nastąpić w umyśle Daltona zasadnicza ta zmiana poglądów trudno dociec. Henry [2]) przypuszcza, że stało się to w okresie lat 1802—1804. Co się tyczy głównych motywów teorji, to powyższy pogląd popierają Roscoe i Harden na zasadzie wyczerpujących studjów wspominanych już notatek laboratoryjnych Daltona i dochodzą do wniosku, że koncepcja atomistycznej budowy materji powstała początkowo wyłącznie na tle koncepcji fizycznych, narzuconych przy badaniu fizycznych własności atmosfery i innych gazów.

Znalazszy się wobec konieczności oznaczenia stosunkowych wielkości cząsteczek, z których w mniemaniu Daltona gazy się składają, uciekł się on do analizy chemicznej. W przypuszczeniu,

---

[1]) Teorję korpuskulową zapoczątkował wyżej już wspomniany Helmont. Przyjał on dwa pierwiastki nie ulegające zmianie: wodę i powietrze; pierwszej przypisywał w budowie innych ciał niezmiernie wielką rolę. Różne stany skupienia wody tłumaczył różnym sposobem ułożenia najmniejszych cząstek wody, które stanowią podstawę wody jako materji. Poglądy te teoretyczne Helmonta większego znaczenia jednak nie miały. Ważną rolę odgrywa teorja korpuskulowa w poglądach Descartesa. Materja według niego jest wprawdzie podzielną w nieskończoność, lecz w zjawiskach materjalnych odgrywają ważną rolę cząstki materji, zdolne do pewnego stopnia odgrywać rolę samodzielnych elementów.

[2]) The Life of Dalton.

że kombinacje różnych ciał odbywają się zawsze według najprostszych reguł, doszedł do poglądu, że związki chemiczne wytwarzają się skutkiem oddziaływania cząstek różnej wagi. Rozszerzenie tego poglądu na wszystkie rodzaje materji doprowadziło go do wywnioskowania prawa o stosunkach wielokrotnych, a porównania rezultatów eksperymentów dało mu świetne potwierdzenie tej dedukcji.

W swym słynnym „System of Chemical Philosophy“ Dalton dał już całkiem dojrzałe swe poglądy, które w ogólnych i zasadniczych zarysach przetrwały do naszych czasów. Najfundamentalniejsze ustępy tej pracy tutaj podaję: „Wszystkie ciała złożone są z olbrzymiej ilości nader małych cząstek lub atomów materji, powiązanych z sobą przez siły przyciągające, które utrudniają ich rozpraszanie się. Ostateczne cząstki wszystkich ciał jednorodnych są zupełnie jednakowe co do wagi, kształtu etc. Każda cząstka wody jest podobną do każdej innej cząstki wody, każda cząstka wodoru jest podobna do innej cząstki wodoru i t. d. Chemiczna analiza i synteza sięga do rozdziału lub połączenia najmniejszych cząstek. Tworzenie lub rozkład materji leży poza możliwością chemicznych oddziaływań. Ostatecznemi składnikami ciał prostych są atomy, nie mogące ulegać dalszemu podziałowi. Jeżeli dwa ciała mają skłonność do połączenia się z sobą, to połączenie to odbywa się za pośrednictwem atomów“. Na zasadzie tych poglądów mógł Dalton przystąpić do oznaczenia stosunkowej wagi poszczególnych atomów i przewidzieć zasadnicze typy powstających ciał złożonych. Co do ostatnich wyraża się w sposób następujący: jeżeli 1 atom pierwiastku A połączy się z jednym atomem pierwiastku B, wtedy powstaje 1 atom drugiego rzędu. Jeżeli 2 atomy pierwiastku A połączą się z jednym atomem pierwiastku B — powstaje 1 atom trzeciego rzędu. Połączenie się 3 atomów pierwiastku A z jednym atomem pierwiastku B, lub odwrotnie, prowadzi do atomu czwartego rzędu i t. d. Wreszcie przewiduje też Dalton możliwość łączenia się z sobą atomów wyższych rzędów.

Ważną część teorji Daltona stanowi koncepcja różnych mas atomowych, różnych pierwiastków, których wartości stosunkowe stara się też eksperymentalnie oznaczyć. Zasady, na których się przytym opiera, są jednak dowolne, i ta okoliczność spowodowała w następstwie zamęt, z którego dopiero późniejsze teorje dodatkowe wyjście znalazły. Zasady te brzmią: jeżeli znamy tylko jedno połączenie dwu pierwiastków, to ono złożone jest z atomów drugiego rzędu. Jeżeli istnieją dwa połączenia dwu pierwiastków, w takim razie jedno z nich jest złożone z atomów drugiego rzędu, a drugie z atomów trzeciego rzędu. W razie istnienia trzech połączeń, przyjąć należy jeden atom drugiego rzędu i dwa atomy trzeciego rzędu. Opierając się na tych zasadach i przyjąwszy jako jednostkę mas atomowych—masę atomów wodoru, masy innych atomów oznacza się już z łatwością. Za czasów Daltona znano tylko jedno połączenie wodoru z tlenem i jedno wodoru z azotem—amoniak. Związki te więc tworzą atomy drugiego rzędu; t. j. zawierają po jednym elementarnym atomie, a oznaczając stosunek wagi azotu do wodoru lub tlenu do wodoru w tych związkach, Dalton wyznaczył masy atomowe tlenu i azotu; podobnie postępował w przypadku innych pierwiastków. Zasada taka, jak już wspominaliśmy, oparta była na zupełnie dowolnych przypuszczeniach, dotyczących konstytucji cząstek wyższego rzędu; niebawem też zarzucono Daltonowi, że hipotezę atomistyczną uzupełnił szeregiem innych dowolnych hipotez, i zwrócono mu uwagę na niekonsekwencję w stosowaniu wyrazu „atom" do cząstek dających się rozkładać, cząstek wyższego rzędu. Mając te braki na uwadze, przeoczono jednak zasadniczą wartość podstawowej hipotezy Daltona, a chcąc określić stanowisko wobec niej niektórych sfer naukowych Anglji, wystarczy zaznaczyć, że nawet znakomity Davy był początkowo stanowczym jej przeciwnikiem. Przeciwko faktom naturalnie przytym nie występowano, prawo stosunków stałych i wielokrotnych uznawano za słuszne, a chcąc wyeliminować wpływ hipotez dowolnych na dalszy tok rozwoju poglądów chemicznych, Davy proponował zarzucenie terminu „masa atomowa" dla liczb określonych przez Daltona, a używanie natomiast do określenia ich wyrazu proporcje. Wollaston używał natomiast wyrazu „ekwiwalent"—równoważnik, wprowadzony już dawniej przez Cavendisha.

Okazało się jednak niebawem, że lekceważenie teorji Daltona jest niedopuszczalne, szczególniej gdy się wyjaśniło, że za pomocą niej można nietylko tłumaczyć zjawiska odkryte przed i podczas jej tworzenia, ale też szereg nowych, które zrobiono po jej ogłoszeniu. Stosuje się to przedewszystkim do prawa objętości odkrytego przez Gay-Lussac'a w roku 1808. Już w roku 1805 Gay-Lussac i Humboldt zajmowali się dokładnym oznaczeniem stosunków objętościowych, według których łączy się tlen z wodorem, dając wodę, problematem, który interesował dawniej też Lavoisiera. Dwaj wspomniani badacze przekonali się, że woda tworzy się z dwu objętości wodoru i jednej tlenu. W trzy lata później Gay-Lussac rozszerzył zakres swych badań w tym kierunku.

Opierał się przytym na znanym już prawie Boyle'a — Mariotta i prawie rozszerzalności gazów, przez siebie odkrytym, przez Lavoisiera już przewidywanym. Otrzymane rezultaty dały się streścić w prostych bardzo twierdzeniach: dwa gazy łączą się chemicznie według prostych stosunków objętościowych, a objętość powstających ciał złożonych staje również w stosunku prostym do objętości ich składników. Gay-Lussac przekonał się np., że dwie objętości tlenku węglowego łączą się z jedną objętością tlenu, dając dwie objętości bezwodnika węglowego. Gay-Lussac znał teorję atomistyczną Daltona i wskazał na to, że rezultaty przez niego otrzymane harmonizują z nią doskonale. Wbrew wszelkim oczekiwaniom Dalton nie mógł się jednak z temi rezultatami pogodzić i wyraził się o nich wprost jako o fałszywych. Argumentacja Daltona jest jednak całkiem logiczna, ale świadczy jednocześnie, że pojęcie atomu w jego umyśle nie miało zupełnie ścisłego określenia. W krytyce swej Dalton powołuje się na ustęp z dzieła „New system of chemical philosophy", który brzmi: „Kiedy namyślałem się nad teorją gazów mieszanych, przypuszczałem początkowo, że cząstki wszystkich gazów mają jednakową postać. Przypuszczałem, że w jednej objętości tlenu znajduje się tyleż atomów, ile ich jest w jednej objętości wodoru. Przypuszczenie to wydało mi się jednak później niesłusznym, a to na zasadzie następujących argumentów: 1 atom tlenku azotu składa się z jednego atomu tlenu i jednego atomu azotu. Gdyby więc w jednakowych objętościach znajdywały się jednakowe ilości atomów, w takim razie przy połączeniu się jednej objętości azotu z jedną objętością tlenu powinnaby powstać jedna objętość tlenku azotu. Tymczasem Henry wykazał, że wytwarzają się w tym przypadku mniej więcej dwie objętości; tlenek więc azotu mógłby zawierać w tej danej objętości tylko połowę ilości atomów tlenu lub azotu". Dalej Dalton wywodzi: „Gay-Lussac stawia hipotezę, że objętości łączących się z sobą chemicznie gazów stoją w stosunku prostym; pogląd jego na objętości jest taki sam, jak mój na atomy, i gdyby można było udowodnić, że wszystkie gazy zawierają w jednakowych objętościach tę samą ilość atomów› w takim razie obie hipotezy byłyby jednakowe, z tą jednak różnicą, że moja jest ogólniejszą, gdyż hipoteza Gay-Lussaca stosuje się tylko do gazów. Gay-Lussac mógł się był przekonać, że ja przed nim rozważałem taką samą hipotezę, że ją jednak jako nieprawdopodobną odrzuciłem“.

Dalton rozumował zupełnie słusznie, że prawo objętości Gay-Lussaca można pogodzić z teorją atomistyczną tylko pod warunkiem, że zrobi się dalsze przypuszczenie, iż w jednakowych objętościach gazów znajduje się jednakowa ilość atomów, przypuszczenie, które jednak, jak wykazał, nie mogło się ostać. Z trudności tych wybawił jednak niebawem młodą chemję Włoch Avogadro, zasługa jego więc niezmiernie wielka tym bardziej, że zdołał przytym pogłębić teorję atomistyczną i umożliwił ustalenie pojęcia atomu. Avogadro rozróżnia pomiędzy „molécules intégrantes“ i „molécules élémentaires”, t j. pomiędzy cząsteczkami, zbiorowiskiem atomów, które mogą jeszcze ulegać rozkładowi i atomami, które są absolutnie niepodzielne. Wprowadzając pojęcie cząsteczek, cząstek materji odmiennych od atomów, tłumaczy prawo Gay-Lussaca, zgodnie z poglądami atomistycznemi bez żadnej trudności. Według Avogadra gazy składają się właśnie z owych cząsteczek, w których skład z kolei wchodzą elementarne atomy. Reakcje pomiędzy takiemi cząsteczkami poprzedzone są aktem ich rozkładu na atomy; cząsteczka tlenu i azotu zawiera po dwa atomy tych pierwiastków, a fakt, że przy łączeniu się jednej objętości tlenu z jedną azotu nie zachodzi kontrakcja, tłumaczy się tym, że cząsteczki powstającego tlenku azotu również zawierają dwa atomy, lecz różne, atom azotu i tlenu. Ilość ogólna cząsteczek nie uległa przy tym zmianie, zaszła jedynie zmiana o tyle, że przed reakcją mieliśmy mieszaninę dwu różnych rodzajów cząsteczek (tlenu i azotu), a po reakcji tylko cząsteczki jednorodne tlenku azotu. Avogadro więc zmienił zasadnicze twierdzenie Gay-Lussac'a tylko o tyle, iż przypuścił, że jednakowe objętości dwu gazów zawierają jednakową ilość cząsteczek, nie zaś atomów. Zastosowanie tego prawa do innych przypadków dało mu możność określenia ilości atomów, zawartych w cząsteczkach ciał złożonych. Z faktu, że dwie objętości wodoru, łącząc się z jedną objętością tlenu, dają dwie objętości pary wodnej, zawnioskował, że cząsteczka wody składać się musi z dwu atomów wodoru i jednego atomu tlenu. Zwrócił też uwagę na to, że Daltona zasady oznaczania masy atomowej są zupełnie dowolne i prowadzą do wyników błędnych. Gdyby bowiem woda miała zawierać, jak chce Dalton, po jednym atomie wodoru i tlenu, w takim razie przy łączeniu się tych pierwiastków nie powinna mieć miejsca kontrakcja. Wyciągając konsekwencje z założenia swego Avogadro jest w stanie oznaczać bez trudności masę molekularną ciał złożonych w odniesieniu do masy molekularnej wodoru, w którego skład cząsteczek wchodzą dwa atomy. Masy molekularne ciał gazowych stoją w stosunku prostym do gęstości tych gazów mierzonych w jednakowych ciśnieniach i temperaturach.

Do zupełnie podobnych wniosków doszedł w 3 lata po Avogadrze i niezależnie Ampère

Poglądy Avogadra i Ampère'a nie znałazły jednak początkowo zwolenników, prawdopodobnie z tego względu, że odnosiły się do stanu gazowego materji, podczas gdy w pierwszej ćwierci zeszłego wieku przeważna część chemików zajmowała się badaniem ciał, których w stan gazowy nie było można łatwo przeprowadzić. Zresztą cały szereg innych tematów podstawowych oczekiwał jeszcze rozwiązania lub szczegółowszego opracowania. Fakty przytaczane przez Daltona dla prawa stosunków wielokrotnych odnosiły się także do ciał gazowych, dla tego wykrycie podobnych stosunków w związkach ciał stałych było bardzo pożądane. Wollaston i Thomson wypełnili tę lukę. Pierwszy z nich znalazł, że kwas węglowy może łączyć się z jedną i dwiema częściami potażu, a drugi zrobił podobne spostrzeżenie dla kwasu szczawiowego. Nie ulega też wątpliwości, że dowolność wprowadzona przez Daltona co do ilości atomów wchodzących w skład związków zniechęcała do teorji atomistycznej ogół chemików, a gdy pod wpływem gienjalnego Davy'ego punkt ciężkości dociekań eksperymentalnych przerzucił się w dziedzinę zjawisk elektrochemicznych, teorja atomistyczna i jej konsekwencje chwilowo przestały interesować.

Pierwsze spostrzeżenie, które zaliczyć można do szeregu elektrochemicznych, zrobili Nicholson i Carlisle w roku 1800, stwierdzając, że przy rozładowaniu stosu Galvaniego poprzez wodę z ostatniej wydziela się tlen i wodór. Za niemi poszli Berzelius i Hisinger, którzy badali wpływ elektryczności dynamicznej na roztwory soli, amoniak, kwas siarczany i inne. W tym samym mniej więcej czasie sprawą wpływu prądu elektrycznego na związki chemiczne zajął się Davy. Interesowała go przedewszystkim kwestja zauważona przez innych, jakoby przy rozkładzie wody prądem miały powstawać ciała alkaliczne i kwaśne. Chcąc zgłębić tę kwestję, Davy poddawał wodę działaniu prądu w naczyniach z rozmaitego materjału, ze szkła, agatu, złota i t. d. i wykazał, że ilość i rodzaj przytym pozostających ciał zależy bardzo od natury materjału, z którego zrobiono naczynie. Nawet rozkładając wodę, zawartą w naczyniach złotych, przekonał się, że powstaje w małej ilości amoniak i kwas azotowy. Wytwarzanie się tych ciał Davy natychmiast sprowadził do obecności azotu w wodzie, absorbowanego z powietrza przez wodę i pogląd ten wreszcie udowodnił, elektrolizując wodę, z której uprzednio wypompował rozpuszczone powietrze; w tych warunkach woda dała pod wpływem prądu tylko tlen i wodór. Następnie Davy powtórzył doświadczenie Berzeliusa i Hisingera, potwierdził je i rozszerzył znacznie. Przekonał się, że u bieguna ujemnego wydzielają się wodór, alkalja i metale, a u dodatniego—tlen i kwasy, i zawnioskował, że pierwsze ciała zawierają elektryczność dodatnią, a drugie ujemną i dzięki temu przyciągają się przez elektrody naelektryzowane przeciwnie. Nieomieszkał też Davy wywnioskować poglądów na zależność powinowactwa chemicznego od stanu elektrycznego, które jednak głębszego znaczenia nigdy nie miały. Kulminacyjny zaś punkt badań Davy'ego stanowi sprawa zachowania się stopionych alkaljów pod wpływem prądu elektrycznego. Davy zauważył, że w tych warunkach na biegunie ujemnym wydzielają się kulki metaliczne, które jednak zaraz po powstaniu spalają się jasnym płomieniem. Po odpowiednim zmodyfikowaniu warunków eksperymentu udaje mu się wreszcie wyosobnić potaż i sód, których własności bliżej bada. Doniosłość tego odkrycia była ogromna; alkalje uważano za ciała elementarne, nie mogące ulegać rozkładowi, a kłam zadany temu twierdzeniu przez Davy'ego zdawał się robić nadzieję, że w prądzie elektrycznym znaleziono potężny środek, którego zastosowanie w różnych dziedzinach chemji może stać się źródłem wielkich odkryć praktycznych i teoretycznych. Na dowód, że zainteresowanie się pracami Davy'ego było wielkie, warto przytoczyć fakt, że eksperymenty jego były natychmiast powtarzane przez innych, szczególniej przez Francuzów, że wszelkie przez niego proponowane poglądy teoretyczne były wszechstronnie rozważane i krytykowane. Opierając się na faktach przez siebie zauważonych, Davy wypowiedział pogląd, że alkalja są związkami tlenu z potasem lub sodem, lecz poszedł też niepotrzebnie jeszcze dalej i a priori wypowiadał się o konstytucji ciał, wówczas jeszcze mało zbadanych, posługując się koncepcją otrzymaną przy badaniu alkaljów. Kwas solny i amoniak zawierają według niego tlen, podobnie jak „ziemie metali“, a nawet fosfor i siarka. Sód i potas niebawem w wyobraźni Davy'ego także występują jako ciała złożone. Badając amalgamat rtęciowo-amonowy, odkryty przez Seebecka, a badany przez Berzeliusa i Pontina, dochodzi do wniosku, że ciało to powstaje skutkiem połączenia się rtęci z hipotetycznym amonem, który składa się z amoniaku i wodoru. Porównywając wreszcie metale z owym amonem, nie waha się przypisać im analogicznej konstytucji, i przyjmuje, że zawierają one zawsze wodór, który powoduje ich palność. Davy wskazuje przytym na to, że pogląd jego ma dużo podobieństwa z flogistycznym poglądem Cavendisha. Po pewnym czasie jednak Davy przekonywa się sam o niesłuszności tych poglądów i to z okazji krytyki prac Gay-Lussaca i Thénarda, którzy „wodorową“ teorję metali także propagowali. Badacze francuscy badali działanie potasu na amoniak i zauważyli przytym obok wodoru tworzenie się ciała zielonego. Ilościowe oznaczenie wytworzonego wodoru przekonało ich, że ilość wodoru odpowiada dokładnie tej ilości wodoru, która się wydziela przy rozkładzie wody pod wpływem tej samej ilości potasu, jaką użyto do rozkładu amoniaku. Oprócz tego przekonali się ciż sami, że wspomniana zielona substancja rozkłada się pod wpływem wody, odtwarzając całą ilość amoniaku użytą do jej otrzymania obok potażu żrącego. Fakty te Gay-Lussac i Thénard tłumaczą sobie przypuszczeniem, że potas składa się z potażu żrącego i wodoru i że wodór ten ulega wydzieleniu z potażu zarówno pod wpływem wody, jak amoniaku. Davy, który zarzucił był swój flogistyczny pogląd na potas, dał zupełnie inne tłumaczenie doświadczeń Gay-Lussaca i Thénarda; według niego wodór, wydzielający się przy działaniu potasu na amoniak, pochodzi wskutek rozkładu tego ostatniego, a ciało zielone jest kombinacją potasu i reszty amoniakowej. Gay-Lussac i Thénard wreszcie także opuścili swój pierwotny pogląd na naturę potasu, przychylili się do poglądu, że jest to, podobnie jak i inne metale, pierwiastek; a uzupełnili jeszcze spostrzeżenia Davy'ego nowemi, na zasadzie których potaż żrący okazał się połączeniem potasu, tlenu i wodoru.

Przytoczyliśmy szczegóły tych badań i sporów, albowiem historja potasu i sodu w historji rozwoju chemji nowożytnej odegrała w istocie niezmiernie ważną rolę. Dzięki usiłowaniom tych trzech badaczy pojęcie pierwiastka znacznie się utrwaliło, a chemiczne nowe spostrzeżenia, w trakcie tych robót zrobione, miały też decydujący wpływ na zasadnicze pojęcie o kwasach, ciałach, w których od czasów Lavoisiera zawsze przyjmowano obecność tlenu i od obecności którego uzależniano własności kwaśne ciał. Przekonanie to tak się utrwaliło, że w niektórych terminologjach chemicznych tlen otrzymał nazwę, określającą jednocześnie stosunek jego do kwasów; Niemcy jeszcze dziś mówią „Sauerstoff", a w terminologji polskiej „kwasoród" figurował również przez długie lata. Zarówno Gay-Lussac i Thénard jak Davy początkowo przypuszczali, że kwas solny zawiera tlen, i że chlor jest ciałem złożonym, zawierającym tlen; prace badaczów francuskich wykonane po mistrzowsku znakomicie harmonizowały z takim poglądem. Davy jednak dał im później inne tłumaczenie, w którym chlor figurował jako pierwiastek, a kwas solny jako chlorowodór i chociaż Gay-Lussac początkowo oponował, później, szczególnie po poznaniu dokładnym jodu, poglądy Davy'ego przyjąć musiał. Teorja kwasów Lavoisiera tym samym runęła, a prace Davy'ego nad kwasem jodowym i chlorowym doprowadziły go wreszcie do wypowiedzenia przekonania, że do wytwarzania kwasu nie jest niezbędy jakiś specyficzny pierwiastek, że natomiast ciała te powstają wskutek jakiegoś szczególnego połączenia się różnych pierwiastków. W takim stadjum znajdowały się zapatrywania na kwasy, gdy na widownię naukową wystąpił Berzelius z swym „systemem chemicznym", z systemem, który niewątpliwie znacznie się przyczynił do rozwoju chemji; nie był on jednak bez wad, a zwalczanie ich pchnęło znów chemję na nowe tory, po których kroczy jeszcze dzisiaj.

Berzelius stał ściśle na podstawach teorji atomistycznej. Związki powstają według niego wskutek łączenia się atomów różnych pierwiastków w związki pierwszego rzędu, które, z kolei łącząc się z sobą, prowadzą do związków wyższego rzędu; dualizm ten tworzy nić przewodnią wszystkich jego poglądów. Przyczyna łączenia się atomów w cząsteczki złożone leży w powinowactwie chemicznym, które, jak w pogladach Davy'ego, jest wyrazem elektrycznych własności atomów. Według Berzeliusa elektryczność nie powstaje dopiero przy zetknięciu się dwu ciał, lecz jest własnością przyrodzoną materji; każdy atom jest elektrycznie dwubiegunowym, lecz te ładunki elektryczne nie są jednakowe, i zależnie od tego, czy przeważa ładunek dodatni lub ujemny, ma się do czynienia z pierwiastkami dodatniemi lub ujemnemi. Pierwiastki można według Berzeliusa uporządkować w szeregi w ten sposób, że zawsze poprzedzający jest silniej elektroujemnym niż następny. Tlen jest absolutnie elektroujemny, wszystkie zaś inne są tylko warunkowo elektro-ujemne lub dodatnie stosownie do tego, czy porównywa się je z pierwiastkami wyżej lub niżej ułożonemi w szeregu elektrochemicznym. Na stan owych ładunków mają zresztą wpływ znaczny warunki fizyczne, to jest, że powinowactwo chemiczne jest od nich zależne, zgodnie z poglądami wypowiedzianemi przez Bertholleta. Połączenie się atomów Berzelius wyobraża sobie w sposób następujący: atomy układają się obok siebie, zwracając ku sobie przeciwne bieguny, wyrównanie elektrycznych ładunków powoduje zjawisko cieplne i elektryczne, często towarzyszące przemianom chemicznym. Prąd elektryczny może nadać atomom pierwotne zasoby elektryczne i tym samym spowodować rozkład związku na atomy. Połączenie pierwszego rzędu nie jest obojętne elektrycznie, a więc i chemicznie; jest ono przeciwnie jednobiegunowe i może skutkiem tego wytwarzać połączenia drugiego rzędu. Ostatnie także mogą rozporządzać jeszcze siłami elektrycznemi, których napięcie jest jednak zazwyczaj bardzo małe.

Jednobiegunowość tlenków zależy wyłącznie od pierwiastków połączonych z tlenem, albowiem w szeregu ich mamy najwięcej elektroujemne (kwasy) i najsilniej elektrododatnie (zasady) ciała. Jeżeli ciało C rozkłada związek AB, wydzielając B w stanie wolnym, to dzieje się to jedynie dzięki temu, że C jest w stanie zobojętnić większą niż B ilość elektryczności ciała A. Poglądy te stanowią podstawę dualistycznej teorji materji Berzeliusa. Jednym z najważniejszych jej wniosków jest, że każde ciało złożone daje się rozłożyć na dwa prostsze, z których jedno jest elektrododatnim, a drugie elektroujemnym. Siarczan sodowy np. nie jest złożony według niej z siarki, tlenu i sodu, a natomiast z kwasu siarkowego i ługu sodowego, z których każdy znów może być rozłożony na dwa składniki, dodatni i ujemny. O konsekwencjach poglądów tych mowa będzie jeszcze niżej, tutaj zaś wypada zwrócić uwagę na jedną z największych zasług Berzeliusa dla chemji, mianowicie na zastosowanie racjonalne praw Gay-Lussaca do oznaczenia ilości atomów, wchodzących w skład cząsteczek. Zasady dowolne Daltona, o których wspominaliśmy wyżej, Berzelius w zupełności odrzuca, odmawiając im wartości naukowej; konieczność zaś znajomości tych stosunków trafnie charakteryzuje następującym zdaniem: „Gdyby nieograniczona ilość atomów jednego pierwiastka mogła się łączyć z nieskończenie wielką ilością atomów innego pierwiastka, w takim razie mogłyby powstać niezliczone połączenia, których skład różniłby się tak mało, że najdokładniejsze nasze analizy nie byłyby w stanie wykazać ich różnicy. Pogląd więc, że ciało powstaje przez łączenie się z sobą atomów, nie wystarcza jeszcze, aby wytłumaczyć prawo stosunków wielokrotnych; muszą istnieć jeszcze inne prawa, które ograniczają ilość powstających ciał; od tych praw przedewszystkim zależą stosunki wielokrotne“. W prawach Gay-Lussaca wreszcie Berzelius odnajduje owe prawa konieczne. Dla niego, w przypadku gazów prostych, atom i objętość są równoznaczne. Fakt, że dwie objętości wodoru łączą się z jednym atomem tlenu, dowodzi, według Berzeliusa, że woda składa się z dwu atomów wodoru i jednego atomu tlenu. Zdawało się, że Berzelius, posługując się odkryciami Gay-Lussaca, zechce przyłączyć się także do poglądów Avogadry i Ampère'a, i że zdobędzie w ten sposób zupełnie pewny środek do rozstrzygnięcia postawionych sobie zagadnień. Tymczasem Berzelius nie chciał uznać różnicy pomiędzy atomem fizycznym (cząsteczką) a chemicznym, a natomiast oparł się na innych regułach, dotyczących ilości atomów w cząsteczce, podobnie dowolnych jak te, które krytykował u Daltona. Dopiero później do swych kryterjów przyłączył nowe, wypływające ze zjawiska izomorfizmu, odkrytego przez Mitcherlicha. W roku 1820 przekonał się Mitcherlich, że arseniany i fosforany, krystalizujące się z jednakową ilością cząsteczek wody, krystalizują się w formach identycznych. Przypuszczano już wtedy, że kwasy arsenowy i fosforowy zawierają jednakową ilość atomów i dla tego Mitcherlich wpadł na myśl, że jednakowa budowa chemiczna ciał powoduje zjawisko izomorfizmu. Berzelius skorzystał również z tego poglądu i wypowiedział zdanie, że jeżeli jakieś ciało jest izomorficzne z innym, którego skład atomistyczny jest znany, w takim razie skład atomistyczny pierwszego jest również określony, albowiem izomorfizm jest mechanicznym następstwem jednakowej atomistycznej konstrukcji.

Posługując się temi poglądami, Berzelius oznacza masy atomowe poszczególnych pierwiastków i trzeba przyznać, że, chociaż w wielu przypadkach w wyborze otrzymanych liczb kieruje się dowolnością, bardzo wiele wartości mas atomowych przez niego otrzymanych utrzymało się z małemi zmianami do dnia dzisiejszego.

W odróżnieniu od chemików angielskich, niemieckich i Berzeliusa, Schweda, we Francji wyciągnięto wszelkie konsekwencje z hipotezy Avogadry. Główna zasługa w tym względzie przypada Dumasowi, który przez jasne sformułowanie pojęcia cząsteczki i atomu utorował tej hipotezie drogę i ostatecznie doprowadził ją do zwycięstwa. Według niego w jednakowych objętościach gazów znajduje się jednakowa ilość fizycznych cząsteczek, które w znaczeniu chemicznym ulegają jeszcze rozkładowi. Ze stosunku gęstości gazów oblicza skutkiem tego stosunek mas cząsteczkowych ciał, a eksperymentalne oznaczenie pierwszych udoskonala znakomicie. Stosowanie tej metody do jodu, fosforu, siarki i rtęci daje mu jednak wartości nieoczekiwane, a fakt ten tak bardzo zdziwił Dumasa, że na jakiś czas znów się wyrzeka hipotezy Avogadry. Pozostała wtedy tylko jeszcze jedna metoda oznaczania mas atomowych, mianowicie oparta na spostrzeżeniach Dulonga i Petita, które zdawały się przemawiać za tym, że iloczyn masy atomowej i ciepła właściwego pierwiastka jest wartością stałą. Okazało się niebawem, że i ta metoda z powodu licznych niekonsekwencji, do których prowadzi, ogólnego zastosowania mieć nie może, a gdy nadomiar odkryto dwumorfizm, który zachwiać musiał stosowanie bezwzględne zjawiska izomorfizmu do oznaczania mas atomowych niektórych pierwiastków, wtedy teorja atomistyczna wogóle znalazła się w chwili przełomowej, której zdawało się nie przeżyje. Coraz częściej podnosiły się głosy, że teorja ta prowadzi na bezdroża, że wprowadza niepotrzebne hipotezy, tamujące spokojny rozwój chemji i że najracjonalniej będzie porzucić pojęcie atomu, a natomiast zaspokoić się ścisłym oznaczaniem stosunków wagowych pomiędzy pierwiastkami w ciałach złożonych bez względu na jakikolwiek substrat ideowy. Na czele tej fali krytycznej stanął

Gmelin ze swoją szkołą. Dla niego niema ścisłej granicy pomiędzy związkami chemicznemi a mieszaninami, ciała wyposażone słabym powinowactwem chemicznym mogą łączyć się w nieskończenie wielu stosunkach ilościowych, im większym jest powinowactwo, tym więcej uwydatnia się tendencja do wytwarzania tylko nielicznych kombinacji, według stałych proporcji. Tak więc teorja atomistyczna w mniej więcej 30 lat po jej wypowiedzeniu znalazła się w niełasce; fakty chemji nieorganicznej ani fizyki utrzymać jej przy życiu nie mogły. Dopiero chemja organiczna natchnęła ją nowym życiem.

Początku chemji organicznej nowożytnej niepodobna ze ścisłością określić. Do ciał organicznych zaliczano przedewszystkim związki spotykane w organizmach zwierzęcych, ciała skomplikowane, trudne do zbadania, i dla tego najchętniej pomijane. Metody analitycznego badania tak bardzo już w owym czasie udoskonalone w przypadku analizy ciał mineralnych, które zawdzięczamy Proustowi, Klaprothowi i Vauquelinowi, nie miały zastosowania do ciał organicznych i dla tego skład ostatnich mało był znany. Pierwsze prace w tym kierunku Gay-Lussaca i Thénarda, jak również Berzeliusa, które opierały się na równaniu Lavoisiera:

substancja + zużyty tlen = kw. węglowy + woda

nie dały zupełnie ścisłych wyników. Dopiero późniejsza metoda Gay-Lussaca i Doberainera, polegająca na spalaniu ciał organicznych w obecności tlenku miedziowego i udoskonalona wreszcie przez Liebiga w roku 1830, dawała rezultaty dobre. Z tą chwilą ciała organiczne stały się mniej tajemnicze. Przekonano się, że do nich stosują się również prawa stosunków stałych i wielokrotnych, a gdy oprócz tego się przekonano, że dawny postulat, jakoby związki organiczne powstawać mogły tylko pod wpływem siły życiowej, jest błędny, chemja organiczna zaczęła robić postępy szybkie i niebawem interesowała chemików więcej niż nieorganiczna. Niezmiernie wielką doniosłość dla chemji, a pośrednio dla całego przyrodoznawstwa, miało właśnie obalenie wspomnianego postulatu, gdy Wöhlerowi udało się otrzymać sztucznie mocznik, przez odparowywanie roztworu wodnego soli amonowej kwasu cyanowego. Ostatni zaliczono do ciał nieorganicznych, albowiem otrzymuje aię z ciał, które wytwarzać można bez pomocy życia organizowanego, i dla tego przemiana jego w ciało, uważane podówczas wyłącznie jako produkt przemiany materji organizmów żyjących, była faktem uderzającym o doniosłości przełomowej. Nie mniejszą wagę odkrycie to miało dla teorji chemji, a szczególnie teorji atomistycznej; powołało ono bowiem do życia teorję izomerji, która może być uważana za najtrwalszą podwalinę poglądów zapoczątkowanych w chemji przez Daltona.

Do roku mniej więcej 1820 powszechnie przypuszczano, że ciała posiadające jednakowy skład jakościowy i ilościowy muszą być identyczne. Znano wprawdzie nawet już wtedy przypadki, które zdawały się powyższemu postulatowi przeczyć, znano np. dwie odmiany tlenku chromowego, kwasu krzemowego i tlenku cynowego, ale okoliczność ta szczególniejszej uwagi nie zwracała, a zauważone różnice modyfikacji sprowadzano do tej samej kategorji, jak np. istnienie dwu odmian krystalicznych tego samego ciała. Postulat wspomniany był tak zakorzeniony, że gdy odkryto fakty nie stojące z nim w zgodzie i nie mogące zatrzymać tłumaczenia fizycznego, początkowo je wręcz uważano jako niemożliwe, a odpowiednie eksperymenty za błędne. W roku 1823 Liebig stwierdził, że odkryty przez niego piorunian srebrowy ma taki sam skład jak cyanian srebrowy, analizowany w roku poprzednim przez Wöhlera, a możliwość tej identyczności składów dwu różnych ciał przyznał dopiero po przekonaniu się osobistym, że Wöhlera analizy były bez błędów. Berzelius nie zajął wobec tego odkrycia wyraźnego stanowiska, oczekiwał nowych podobnych odkryć, podczas gdy Gay-Lussac, zawsze odznaczający się niezwykłą zdolnością w obejmowaniu doniosłości nowych spostrzeżeń, tłumaczył różnice w zachowaniu się ciał o identycznym składzie różnym ugrupowaniem atomów w ich cząsteczkach. Wkrótce potym (1823) Faraday odkrył podobne zjawiska u dwu węglowodorów, a odkrycie syntezy mocznika (1828), mającego ten sam skład jak cyanian amonowy, wykazało dowodnie, że przypadek zauważony przez Liebiga nie jest wyjątkowym, że przeciwnie zródłem jego i jemu podobnych musi być ważna jakaś przyczyna ogólna. Gdy wreszcie Berzelius sam wykazał, że kw. gronowy ma taki sam skład jak kw. winny, wtedy i ten chemik, zajmujący początkowo stanowisko wyczekujące, przyłączył się do poglądów poprzedników i nazwał samo zjawisko izomerją—nazwa, która się utrzymała do dnia dzisiejszego.

Przyczyna izomerji polega według Berzeliusa, podobnie jak to przypuszczał Gay-Lussac, na różnym ugrupowaniu atomów danych cząsteczek, a chcąc upodobnić poglądy swe na budowę ciał organicznych do tych, które propagował w odniesieniu do nieorganicznych, a które, jak wiemy, wypływały z teorji dualistycznej, przypuszczał, że ciała organiczne składają się z dwu rodników, które w przypadku ciał organicznych różnią się sposobem ugrupowania w nich atomów. Powstała w ten sposób teorja rodników ciał organicznych, w której opracowaniu oprócz Berzeliusa brał udział Liebig. Korzystała ona zresztą ze spostrzeżeń i poglądów dawniejszych. Przed rokiem 1830 wypowiedział już podobne poglądy Gay-Lussac, który, przekonawszy się, że cyan zachowuje się naogół analogicznie do potasowców, zawnioskował, że grupy różnych atomów mogą niekiedy brać na siebie rolę pierwiastków. Najsilniejszym jednak filarem wyrabiającego się poglądu była praca Liebiga i Wöhlera nad rodnikiem benzoylowym i praca Bunsena nad połączeniami kakodylu. Badacze ci przekonali się że w przemianach olejku gorzkich migdałów i pochodnych jego chlorowych i bromowych powstaje stale bez zmiany rodnik składu $C_{14} H_{10} O_2$, który nazwali benzoylem. Wykazali oni, że rodnik ten, jako grupa atomowa, występuje w najrozmaitszych ciałach jak w kwasie benzoesowym, chlorku benzoylowym, benzamidzie, i że w związkach tych odgrywa rolę pierwiastka, nie ulegając żadnym zmianom. Rodnik ten, podobnie jak cyan, uważano za kompleks zdolny do samodzielnej egzystencji, a dalsze usiłowania ówczesnych chemików skierowane były głównie ku otrzymaniu tych rodników w stanie czystym, wyosobnienie ich z więcej skomplikowanych połączeń. Kiedy jednak przekonano się o bezowocności tego rodzaju poszukiwań, pojęcie rodnika również uległo zmianie. Berzelius wprawdzie wciąż jeszcze widział w owych rodnikach zbiorowiska atomów szczególnie silnie z sobą sprzęgniętych, układy, które dzięki tej swojej spoistości mogły reagować jako takie z innemi rodnikami lub pierwiastkami, lecz Liebig coraz częściej wyrażał się o rodnikach jedynie jako o symbolach grupowych, ułatwiających zrozumienie przemiany ciał. Wszelkie poglądy na budowę ciał organicznych opierały się jednak na pojęciu rodnika i z pomocą niego urzeczywistniono też klasyfikacje ciał nowych, wciąż odkrywanych. Teorja dualistyczna, aczkolwiek znacznie już zmodyfikowana, była i nadal podkładem tamtej. Dopiero prace

Dumasa nad podstawianiem wodoru przez chlor w związkach organicznych wykazały sprzeczność rażącą pomiędzy teorją dualistyczną a faktami. Poglądy Berzeliusa wykluczały możliwość znajdywania się obok siebie w rodniku pierwiastków o jednakowym charakterze elektrochemicznym, jak chlor, brom i tlen, fakty zaś odkryte przez Dumasa istotnie taki stan rzeczy udowodniały niezbicie. Poglądy swoje oparte głównie na reakcjach zachodzących przy działaniu chloru na olejek terpentynowy i na alkohol Dumas objął dwoma twierdzeniami, z których szczególniej jedno zasługuje na uwagę; brzmi ono: „ciała zawierające wodór poddane działaniu chloru, bromu lub jodu wchłaniają po jednej objętości tych pierwiastków na miejsce każdego atomu wodoru, który utracają“. W ślad za tym twierdzeniem Dumas zaznaczył niebawem fakt ogólny, że w wielu reakcjach chemicznych zachodzi wymiana równoważnika jednego pierwiastka przez równoważnik innego, nie wyciągnął jednak z zauważonych zjawisk żadnych wniosków teoretycznych. Wyręczył go w tym Laurent, którego poglądy spotykały się z nader ostrą krytyką Berzeliusa i Liebiga, poglądy, które w istocie nie posiadały głębszej naukowej wartości, lecz które pomimo to później, w zmienionej nieco postaci, dla dalszego rozwoju chemji organicznej były niezmiernie doniosłe. Laurent porównał charakter chemiczny ciał, powstających przez substytucję wodoru przez chlor, z własnościami ciał, z których produkty substytucji powstały i zawnioskował, że zamiana wodoru przez chlor nie miała głębszego wpływu na związki organiczne. Chlor więc w tych razach wziął na siebie rolę wodoru w związkach organicznych, a mniemanie to stanowi rdzeń rodzącej się teorji substytucji, która stanąć musiała w antagonizmie do teorji rodników, wykluczającej zmienność ostatnich wogóle. Dumas początkowo również zajmował wrogie stanowisko względem poglądów swego spółziomka, lecz gdy odkrył kwas jednochlorooctowy, a potym dwu i trój-chlorooctowe kwasy, musiał przyznać, że poglądy Laurenta jednak nie są zupełnie bez wartości, skoro kwasy owe pomimo zawartości chloru zachowywały się zupełnie analogicznie jak kwas octowy, z którego powstały. Przyczyna tego faktu tkwiła według Dumasa w tym, że związki te należą do tego samego typu, i powstała wtedy teorja typów ciał organicznych, która wszystkie związki grupowała według kilku typów; ciała zbudowane w myśl tego samego typu mają własności analogiczne bez względu na charakter pierwiastków w skład ich wchodzących. Ciało każde stanowi coś zupełnie jednolitego, nie składa się z dwu odrębnych części, jak tego naucza teorja dualistyczna i spokrewniona z nią teorja rodników, a chemiczny charakter związku zależny jest od sposobu ugrupowania atomów i ich liczby, mniej zaś od chemicznej natury tych atomów. Zawrzała wtedy walka pomiędzy unitarnym poglądem Dumasa a dualistycznym Berzeliusa, w której Liebig stanął po stronie drugiego. Berzelius od poglądów swych zasadniczych nie odstępował na krok, a związkom jak kw. chlorooctowy i octowy przypisywał zupełnie inną budowę. Gdy udowodniono mu jednak, że pierwsze z wspomnianych ciał może odtworzyć pod wpływem środków redukujących kw. octowy, wtedy Berzelius musiał jednak przyznać możliwość podstawiania wodoru przez chlor w rodnikach. Walka więc zaczęła brać obrót pomyślny dla teorji Dumasa, pomimo to schematyzm przez nią wprowadzony zdawał się wyjaławiać całą naukę o ciałach organicznych a gdy oprócz tego do charakterystyki przemian ciał teorja rodników często nadawała się doskonale, nastąpił okres zawieszenia broni, który wreszcie ustąpił okresowi zlania się teorji typów z teorją rodników pod egidą Laurenta i Gerhardta. Ten ostatni stał ściśle na stanowisku unitarnych poglądów Dumasa, ale jednocześnie przyjął pojęcie rodników, przez siebie nazwanych „resztami“, nadając im jednak nieco odmienne znaczenie. Owe reszty są według niego kompleksami atomowemi, które pozostają przy spółdziałaniu dwu ciał skutkiem większego powinowactwa pomiędzy niektóremi pierwiastkami i które, nie mogąc istnieć samodzielnie, łączą się z sobą dając nowe ciała, t. zw. ciała sprzężone. Działanie np. benzolu na kwas azotowy tłumaczy on tak: gdy dwa ciała reagują z sobą, wtedy z jednego z nich występuje jeden pierwiastek, np. wodór, który łączy się z innym pierwiastkiem drugiego ciała (np. tlenem), wytwarzając trwałe ciało (wodę), podczas gdy reszty obu ciał łączą się z sobą. Resztom owym nie przypisuje się bynajmniej realnej egzystencji, ani też stałego składu, przeciwnie jedno i to samo ciało mogło przeistaczać się rozmaicie i dawać początek różnym „resztom“, a reszty owe mogły być substytuowane przez inne lub przez elementarne atomy. Próby przeprowadzenia klasyfikacji organicznych związków na zasadzie tych poglądów spełzły jednak na niczym, cała sprawa otrzymała dopiero przejrzystość, gdy z pomocą Gerhardtowi przyszedł Laurent, który przyczynił się do jasnego sformułowania pojęć cząsteczki, atomu, masy atomowej i równoważnika, rehabilitując teorję atomistyczną w oczach chemików, którzy na mocy studjów li tylko ciał nieorganicznych nie mogli przezwyciężyć piętrzących się trudności. Na początku lat czterdziestych ubiegłego wieku, jak już wiemy, pojęcie masy atomowej zaciemniało się coraz bardziej, a chcąc uniknąć dowolności w wyprowadzaniu ich, posługiwano się liczbami, które wyrażały najprostsze stosunki, według których pierwiastki łączą się z sobą. Wszelkie spekulacje dotyczące mas atomowych porzucono, trzymano się wyłącznie suchych faktów, i tym się tłumaczy, że szereg wartości mas atomowych, oznaczonych przez Berzeliusa, w których zdobywaniu rządzono się jednak pewną dowolnością, porzucono, a natomiast posługiwano się równoważnikami, które oznaczać miały najmniejszą ilość pierwiastka zdolną do połączenia się z jedną częścią innego pierwiastka. Gerhardt wykazał, że owe równoważniki Gmelina nie mogą mieć zastosowania do ciał organicznych; ilości mianowicie wody lub bezwodnika węglowego, tlenku węglowego i t. p., wydzielające się przy reakcjach ciał organicznych, nie mogły być wyrażone przez proste równoważniki, faktom zadość czyniły jedynie podwojone równoważniki Gmelina. Wobec tego należało albo podwoić wszystkie wzory ciał nieorganicznych, z których wyprowadzono liczby równoważnikowe, albo też zmniejszyć o połowę wzory ciał nieorganicznych. Konflikt ten dał się jednak lepiej usunąć przez podwojenie równoważników Gmelina.

Powodzenia jednak początkowo Gerhardt u spółczesnych nie miał, a to skutkiem tego, że identyfikował pojęcie mas atomowych z równoważnikami i z masami atomowemi; istniejące podówczas zamieszanie pojęć wzmogło się pod wpływem pism jego jeszcze więcej. Dopiero Laurent, który jako eksperymentator okazał się wprawdzie wogóle niedołężnym, zdołał usunąć wszelkie sprzeczności z pomocą dobrze obmyślanych definicji zasadniczo odmiennych pojęć w pracy publikowanej wspólnie z Gerhardtem, przyczym przypomnieli światu zapomnianą już hipotezę Avogadra, która mogła stać się podwaliną wszelkich odpowiednich poglądów teoretycznych. Laurent rozumiał pod nazwą masy molekularnej pierwiastka lub związku taką ilość tych ciał, która w stanie gazowym zajmuje taką samą objętość jak dwa atomy wodoru. Wodór więc wolny nie składał się z samodzielnych atomów, a natomiast ze zbiorowiska cząsteczek, z których każda zawierała dwa atomy. Jeżeli symbolem wodoru jest H, to symbolem cząsteczki wodoru jest H_2, a jednostką mas molekularnych wartość dwa. Podobnie pisał wzory molekularne pierwiastków gazowych: Cl_2 dla chloru, O_2 — tlenu, N_2 — azotu, chlorowodoru HCl i t. d. Cząsteczkę Laurent definjuje jako najmniejszą ilość materji, jaka jest niezbędnie potrzebna do wywytworzenia związku, a atomem zowie najmniejszą ilość pierwiastka, znajdującą się w ciałach złożonych. Równoważniki wreszcie są to równoważne ilości analogicznych ciał a niektóre pierwiastki, łączące się z innemi w kilku różnych stosunkach, mają kilka równoważników. Ta ostatnia definicja była mniej szczęśliwą i można przypuszczać, że gdyby nie dalsze prace innych badaczów, które potwierdziły poglądy na cząsteczkę i atomy w powyższym znaczeniu, wpływ Gerhardta i Laurenta byłby się znów rozbił o złe skutki tej źle pomyślanej definicji. Wiliamson, Würtz i Hofmann zjawili się na widowni zaiste w stosownej chwili; prace dwu ostatnich nad pochodnemi amoniaku miały wielką doniosłość dla dalszego racjonalnego kształtowania się poglądów podstawowych, a oprócz tego utorowały drogę dla nowej teorji typów Gerhardta, która była ostatnim etapem rozwojowym poglądów na budowę związków organicznych. Niemałej wagi były też spostrzeżenia fizykalnej natury, które wskazywały, zgodnie z poglądami Laurenta, na podzielność cząsteczek pierwiastków.

W roku 1846 Favre i Silbermann, badając ciepło spalania różnych ciał, stwierdzili dziwny fakt, że węgiel, spalając się w tlenie, wydziela mniej ciepła aniżeli w atmosferze tlenku azotowego. Badacze ci tłumaczyli to zjawisko, przyjmując hipotezę, że palenie się nie jest wyłącznie procesem syntetycznym, łączeniem się pierwiastków, ale oprócz tego procesem rozkładowym, któremu towarzyszy wchłanianie energji cieplnej Proces ów rozkładowy może jednak zachodzić tylko w przypadku ciał złożonych, a ponieważ eksperymentowano z pierwiastkami, więc należało przypuścić, że owe pierwiastki nie są złożone z wolnych atomów, a natomiast z cząstek wyższego rzędu, które mogą ulec rozkładowi na atomy, te zaś z kolei łączą się z atomami innych pierwiastków, wytwarzając cząsteczki ciał złożonych. Wynik powyższych eksperymentów przemawiał też za tym, że do rozszczepienia cząsteczek tlenu na atomy zużyty być musi większy zapas energji niż do rozszczepienia cząstek tlenku azotowego na atomy azotu i tlenu.

Nader doniosłe były badania Williamsona, które również przyczyniły się do ugruntowania pojęcia cząsteczki przez zdobycie chemicznych sposobów oznaczania jej wielkości. W chwili gdy badacz ten rozpoczął swe badania, alkoholowi nadawano wzór $C_4H_6O_2$, a eterowi C_4H_5O, w myśl poglądów Liebiga; wzory Gerhardta tych ciał C_2H_6O i $C_4H_{10}O$, opierające się na masach atomowych przez niego wybranych (węgiel $C = 12$, tlen $O = 16$) nie znalazły wielu zwolenników. Podobnie rzecz się miała z poglądem Laurenta, według którego alkohol, eter, wodzian potasu i tlenek potasu zbudowane są według tego samego schematu jak woda:

HHO	$C_2H_5.HO$	$(C_2H_5)(C_2H_5)O$	KHO	KKO
woda	alkohol	eter	wodzian-potasu	tlenek potasu.

Doświadczenia Williamsona przemówiły na korzyść wzorów Gerhardta. Przez ogrzewanie alkoholanu potasowego z jodkiem etylowym otrzymał on eter, a fakt ten można było łatwo wyrazić za pomocą równania:

$$\begin{matrix} C_2H_5 \\ K \end{matrix} O + \begin{matrix} C_2H_5 \\ J \end{matrix} = \begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix} O + KJ.$$

Według zwalczanego zaś poglądu alkoholan sodowy miał być związkiem wodzianu potasowego i eteru, który pod wpływem jodku etylowego ulegał rozkładowi, dając eter, podczas gdy druga cząsteczka tegoż ciała miała powstać z jodku etylowego w myśl równania:

$$C_4H_5O.KO + C_4H_5J = 2(C_4H_5O) + KJ.$$

Nietrudno było wykazać, że równanie to nie oddaje istotnego stanu rzeczy. Gdy bowiem w eksperymencie powyższym użyto zamiast jodku etylu—jodek metylu, nie otrzymano mieszaniny dwu różnych eterów, jak to chce równanie drugie, a natomiast ciało jedno, indywiduum chemiczne, eter metylo-etylowy. Równie łatwo tłumaczył Williamson sposób wytwarzania się eteru z alkoholu pod wpływem kwasu siarkowego. Reakcja ta była przedmiotem licznych prac i dyskusji, w których brali udział Liebig, Berzelius i Mitcherlich. Według Williamsona pierwszym produktem reakcji wspomnianych dwu ciał jest kwas etylosiarkowy:

$$\frac{C_2H_5}{H}O + \frac{H}{H}SO_4 = \frac{H}{H}O + \frac{C_2H_5}{H}SO_4\,,$$

który z kolei reaguje z drugą cząsteczką alkoholu, odtwarzając kw. siarkowy i dając eter:

$$\frac{C_2H_5}{H}SOH + O\frac{H}{C_2H_5} = \frac{C_2H_5}{C_2H_5}O + \frac{H}{H}SO_4\,.$$

Gerhardt potrafił ocenić doniosłość tych poszukiwań Williamsona i przewidział, opierając się na nich, szereg reakcji, które istotnie urzeczywistnił, jak np. tworzenie się bezwodników jednozasadowych kwasów, które również sprowadził do typu wody:

$$\underset{\text{woda}}{\frac{H}{H}O} \qquad \underset{\text{bezwodnik octowy.}}{\frac{CH_3CO}{CH_3CO}O}$$

Niemniej doniosłe były wspomniane już prace Würtza i Hofmanna nad złożonemi amoniakami. Hofmann otrzymał przez działanie jodka etylu na amoniak ciała, które można było uważać jako pochodne amoniaku, powstające przez podstawienie jednego, dwu lub wszystkich trzech atomów wodoru przez rodniki, metyl lub etyl.

$$N\begin{matrix}H\\H\\H\end{matrix} \qquad N\begin{matrix}CH_3\\H\\H\end{matrix} \qquad N\begin{matrix}CH_3\\CH_3\\H\end{matrix} \qquad N\begin{matrix}CH_3\\CH_3\\CH_3\end{matrix}\,.$$

Prace te wraz z poprzednio podanemi Williamsona skłoniły wreszcie Gerhardta do usystematyzowania wszystkich ciał według typów, typu wody, amoniaku i wodoru lub chlorowodoru. Dążność upodobnienia ciał organicznych do nieorganicznych, która przebijała się już w teorji rodników, znalazła w teorji typów Gerhardta nowy wyraz. Oprócz tego Gerhardt posługiwał się w systemie swoim zasadą, poruszoną wprawdzie już przedtym przez innych, mianowicie szeregowaniem ciał tego samego typu w grupy, z czego wypłynęło pojęcie homologji, wprowadzone przez Schiela, a badane także przez Dumasa i Koppa. Później nieco Gerhardt jeszcze ściślej określił system swój ciał organicznych. Ciała należące do tego samego typu, tworzące ciągły szereg, i których skład różnił się stale o składniki CH_2, nazwał izologicznemi i heterologicznemi, zależnie o tego, czy ciała danych szeregów były chemicznie do siebie zbliżone lub nie. Najważniejszym jednak pomysłem było ugrupowanie ciał według typów; do typu wody Gerhardt zaliczył alkohole, kwasy organiczne, etery, bezwodniki kwasowe, ketony, aldehydy i sole. Typem analogicznym był typ siarkowodoru, według którego zbudowane są siarkowe połączenia, jak siarczki, merkapteny, tiokwasy i t. d.

H_2O	$\begin{matrix}CH_3\\H\end{matrix}O$	$\begin{matrix}C_2H_3O\\C_2H_5\end{matrix}O$	$\begin{matrix}C_2H_3\\H\end{matrix}O$
woda	alkohol metylowy	eter octowy	aldehyd
H_2S	$\begin{matrix}C_2H_5\\H\end{matrix}S$	$\begin{matrix}C_2H_5\\C_2H_5\end{matrix}S$	$\begin{matrix}C_2H_3O\\H\end{matrix}S$
siarkowodór	merkapten	siarczek etylu	kw. tiooctowy.

Do typu amoniaku zaliczono aminy, amidy kwasowe, fosfiny i t. p.

$\begin{matrix}H\\H\\H\end{matrix}N$	$\begin{matrix}CH_3\\H\\H\end{matrix}N$	$\begin{matrix}C_2H_3O\\H\\H\end{matrix}N$	$\begin{matrix}C_4H_4O_2\\H\\H\end{matrix}N$	$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\\CH_3\end{matrix}P$
amoniak	metylamin	acetamid	sukcynoamid	trójetylofosfin

Typ wreszcie wodorowy i pokrewny chlorowodorowy obejmuje węglowodory, organometalowe połączenia, chlorki, jodki i cyanki:

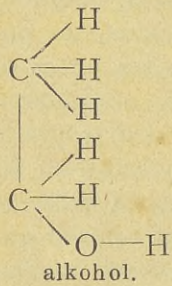
$\begin{matrix}H\\H\end{matrix}$	$\begin{matrix}CH_3\\H\end{matrix}$	$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}$	$\begin{matrix}C_2H_5\\Zn\end{matrix}$	$\begin{matrix}H\\Cl\end{matrix}$	$\begin{matrix}C_2H_5\\Cl\end{matrix}$
wodór	metan	etan	cynkoetyl	chlorowodór	chlorek etylu.

Teorja typów Gerhardta niewątpliwie odegrała wielką rolę Umożliwiła przedewszystkim pewną klasyfikację ciał organicznych, których ilość z dniem każdym rosła. Nie wszyscy jednak odnieśli się do niej przyjaźnie. Kolbe np. oświadczył, że próby wtłoczenia związków organicznych w ramki czterech typów są czczą grą, formułkami i nienaukowym schematyzmem. Krytyka taka surowa nie była jednak usprawiedliwioną. Gerhardt dał więcej niż jego poprzednicy, dał możność myślenia wzorami i przewidywania niektórych reakcji chemicznych, dał słowem „a working hipothesis", która cenioną być winna tak długo, jak bez względu na wewnętrzne jej zalety rozwój nauki umożliwia. Doniosłość teorji typów okazała się w następstwie jeszcze większą, gdy Kékulé zaproponował przyjęcie jeszcze czwartego zasadniczego typu, mianowicie typu metanu, do którego można było odnieść cały szereg ciał i kiedy zrodziło się na zasadzie teorji typów pojęcie wartościowości, które rządzi dzisiejszemi poglądami na budowę ciał organicznych i zarazem nieorganicznych. Nim jednak doniosła ta ewolucja dokonać się miała, przeciwnicy teorji typów pracowali energicznie nad rozwojem teorji rodników, której nie uważali za pokonaną, a która w ich mniemaniu głównemu zadaniu zbadania budowy chemicznej cząsteczek sprostać może lepiej niż schematyzm Gerhardta. Do tych przeciwników zaliczyć trzeba przedewszystkim Franklanda i Kolbego, a działalność ich naukowa, nacechowana niezmierną bystrością w spostrzeganiu i wyrafinowanym krytycyzmem, dla rozwoju nauki była bardzo korzystną. Kolbe był zdeklarowanym zwolennikiem teorji rodników Berzeliusa, ale przyznawał na zasadzie wyników prac własnych i cudzych, że postulat niezmienności rodników utrzymać się nie da, przyznawał się też do teorji tak zwanych ciał sprzężonych, ale rozumiał je inaczej niż Berzelius. Z prac jego i jego przyjaciela Franklanda nad przemianą cyanków alkilowych w kwasy tłuszczowe zawnioskował, że metyl i etyl i podobne rodniki są „bliższemi" składnikami tych kwasów. Te spostrzeżenia, które zapoczątkowały zrozumienie natury kwasów, znakomicie dopełnione zostały przez prace Franklanda nad t. zw. metaloorganicznemi połączeniami, a których głównym celem było wyosobnienie w stanie wolnym rodników. Z prac Franklanda wynikało przedewszystkim, że własności ciał nie zależą wyłącznie od ugrupowania atomów, ale także od natury poszczególnych atomów, wbrew twierdzeniom niektórych zwolenników teorji typów i że kojarzenie się rodników z pierwiastkami, jak z węglem, arsenem, siarką odbywa się według pewnych reguł, zależnych od natury tych pierwiastków. Frankland faktycznie odkrył prawo wartościowości, które mogło było być już wysnute przez jego przeciwników, zwolenników idei typów, a znalazszy z niemi punkty styczne przyczynił się do ujednostajnienia poglądów, któremi rozporządza nowożytna chemja organiczna. Zjawisko wartościowości można było niewątpliwie wysnuć już na zasadzie badania składu ciał nieorganicznych, szczególniej po poznaniu prawa o stosunkach wielokrotnych, że jednak dopiero chemja organiczna, rozporządzająca tak bardzo skomplikowanym materjałem rzeczowym, zdolną była do jasnego zdefinjowania nietylko pojęć cząsteczki, atomu i równoważnika, ale także wartościowości, zadziwia bardzo, ale tłumaczy się może tym, że różnorodność ciał tej kategorji, łatwość ich otrzymywania, zachęciła chemików do energicznego zajęcia się niemi.

Organometalowe połączenia dały, jak już nadmieniono, początek teorji wartościowości. Przed Franklandem ciała tej kategorji otrzymał Bunsen i tłumaczył ich budowę w myśl teorji rodników. Frankland, na mocy rezultatów badań swych nad etylocynowemi połączeniami, zawnioskował, że teorja ciał sprzężonych do nich stosowana być nie może. Teorja ta wymagała aby metale, połączone z rodnikami organicznemi, zachowały zdolność swą do łączenia się z tlenem w tym samym stopniu jak w stanie wolnym. Fakty natomiast, odkryte przez Franklanda, przypuszczaniu takiemu przeczyły.

Etylocyna może przyłączyć tylko jeden równoważnik tlenu, nie może łączyć się z tlenem w dwu stosunkach jak cyna, zachowaniem się więc swoim zadaje kłam przewidywaniom starej teorji. Ten i inne dowody przekonały Franklanda, że t. zw. związki sprzężone należy uważać za pochodne ciał nieorganicznych, które powstają przez podstawienie tlenu przez rodniki węglowodorowe. Etylotlenek cyny uważał Frankland za pochodną tlenku cynowego SnO_2, którego jeden atom tlenu został podstawiony przez rodnik etylowy. Podobnie można było postawić w związku ciała kakodylowe z kwasem arsenawym i arsenowym. Wreszcie spostrzeżenia swoje Frankland streścił w następujących zdaniach: „Przeglądając wzory ciał nieorganicznych, nawet powierzchowny spostrzegacz zauważy nadzwyczajną symetrję, która niemi rządzi. Szczególniej w połączeniach azotu, fosforu, arsenu, antymonu zauważyć można tendencję tych ciał do łączenia się z trzema lub pięcioma równoważnikami innych pierwiastków; te widać stosunki najlepiej odpowiadają powinowactwu wspomnianych ciał. Według stosunku równoważników 1 : 3 złożone są połączenia: NO_3, NH_3, NJ_3, PO_3, PH_3, PCl_3; SbO_3, SbH_3, $SbCl_3$; AsO_3, AsH_3, $AsCl_3$, według zaś stosunku 1 : 5 NO_5, NH_4O, NH_4J; PO_5, PH_4J i inne. Bez względu na jakąkolwiek hipotezę przykłady powyższe pouczają, że powinowactwo wspomnianych pierwiastków nasyca się przez tę samą ilość równoważników innych pierwiastków, niezależnie od chemicznej natury pierwiastków". Frankland więc w pracy tej po raz pierwszy wskazał na wartościowość pierwiastków i na względną jej zmienność. Poglądy te początkowo mało zwracały uwagę, stały się jednak aktualne, gdy Kékulé w sposób zapoczątkowany przez Franklanda oznaczył wartościowość węgla, co bardzo ułatwiło wysnuwanie konstytucji ciał i stało się kolebką nowoczesnej chemji strukturalnej, a pozwoliło wyzbyć się teorji typów, zawsze schematycznej i powierzchownej. W oświetleniu teorji wartościowości Franklanda przedstawiciele czterech zasadniczych typów Gerhardta są niczym innym jak wodorowemi pochodnemi pierwiastków jedno, dwu, trój, i czworowartościowych. Pierwiastki mogą nasycać się, jak się wyrażał Frankland, przez różne ilości atomów wodoru, a nasycając się przez mniej niż im przyroda przepisała, zachowują zawsze wolne jednostki wartościowości, które mogą ulegnąć nasycaniu. To zdanie zawiera poniekąd skreślenie teorji struktury, a możliwie dalekie z niego konsekwencje wysnuł Kékulé, omawiając ciała organiczne zawierające kilka atomów węgla: „Dla ciał, które zawierają kilka atomów węgla trzeba zrobić przypuszczenie, że przynajmniej część atomów utrzymuje się w cząsteczce przez powinowactwo atomów węgla i że same atomy węgla są z sobą sczepione, do czego zużywają się oczywiste jednakowe zapasy powinowactwa tych atomów. Najprostszy przykład tego rodzaju kombinacji jest ten, że w przypadku związku o dwu atomach węgla jedna jednostka powinowactwa jednego węgla wiąże się z jedną drugiego atomu węgla. Z ogólnej ilości 8 jednostek powinowactwa, dwie są więc zużyte a z pozostałych 6-ciu wszystkie mogą być nasycone przez inne pierwiastki.

Jednocześnie z Kékulém do podobnych wniosków doszedł Couper, który widząc braki teorji typów, postanowił szukać poglądów na budowę cząsteczek przez badanie sposobów wiązania się z sobą atomów. Rozróżniał on ściśle pomiędzy powinowactwem, t. j. ostateczną przyczyną łączenia się atomów z sobą, a wartościowością. Jednostki wartościowości wyrażał on przez kreski i dał w ten sposób pierwsze wzory struktury, któremi się obecnie wciąż posługujemy, np.:



alkohol.

Pomimo stałego tego postępu jedna z najważniejszych spraw chemji, ustalenie mas atomowych pierwiastków ciągle jeszcze urzeczywistnioną nie była. Dopiero w roku 1858 Canizzaro usunął istniejące sprzeczności nazawsze i tym zdobył sobie zasługi niezapomniane. Dla teorji budowy rozstrzygnięcie tej sprawy miało doniosłość pierwszorzędną, albowiem tylko wówczas można było mówić w sposób stanowczy o wartościowości wszystkich pierwiastków.

Po tych wstępnych przygotowaniach problemat konstytucji ciał organicznych i nieorganicznych robił szybkie postępy. Obok Kékulégo, Coupera i Erlenmeyera sprawą tą zajmował się też Butlerow, jemu też zawdzięczamy najściślejsze scharakteryzowanie ówczesnych usiłowań: „strukturą związku chemicznego nazywamy sposób łączenia się atomów w danej cząsteczce". Wzory strukturalne nie miały żadnego innego celu, jak tylko odźwierciadlać sposób uszeregowania atomów w cząsteczce, t. j. kolejne ich następstwo, ale o stosunkowym przestrzeniowym ich położeniu informować nie mogły żadną miarą. Sprawa związków izomerycznych z pomocą nowej teorji dała się rozwikłać z łatwością i dawała rezultaty w tych przypadkach, w których teorja typów była bezsilną. Znano np. dwa alkohole propylowe, których różnicy wzory „typowe" uwidocznić nie mogły. Oba te ciała należało w myśl teorji Gerhardta formułować jako pochodne wody, której jeden atom wodoru został podstawiony przez rodnik propylowy. Dla dwu więc różnych ciał otrzymano identyczne wzory, a zatym teorja, która go zrodziła, nie rozwiązywała zadania sobie postawionego, nie mogła oddać budowy ciała przez wzór. Nowa teorja struktury trudności takich nie znała. Różnice alkoholi propylowych sprowadzały do różnej budowy rodników propylowych. Rodnik propylowy C_3H_7, rozporządzający jedną jednostką wartościowości wolną, pochodzi od węglowodoru propanu, który posługując się teorją wartościowości i opartej na niej teorją struktury, posiadać może li tylko następujący wzór:

$$CH_3 - CH_2 - CH_3.$$

W przypadku jednak rodnika propylowego nie będzie rzeczą obojętną czy wolna jednostka wartościowości, która może nasycić się przez inny pierwiastek lub za pomocą której cały układ przyczepiony być może do innego wielowartościowego pierwiastka, znajduje się w jednym z końcowych układów powyższego układu węglowego albo też w środkowym, czyli że wyobrazić sobie można dwie grupy propylowe następującej budowy:

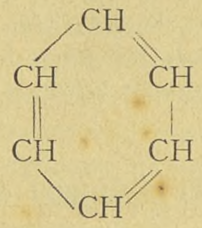
$$CH_3.CH_2.CH_2— \quad \text{albo} \quad CH_3.\underset{|}{CH}.CH_3$$

w których to wzorach kreski oznaczać mają wolne jednostki wartościowości. Zrozumiałą też teraz będzie okoliczność, że alkohol propylowy występować może w dwu odmianach, jednej z nich nadamy wzór:

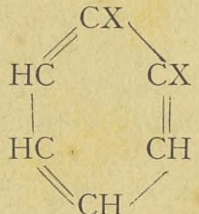
$$CH_3.CH_2.CH_2OH \quad \text{a drugiej} \quad CH_3.\underset{\substack{| \\ O.H}}{CH}.CH_3.$$

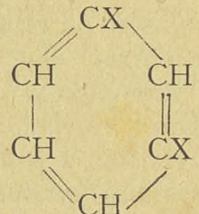
Teorja struktury szybko owładnęła znanym podówczas materjałem eksperymentalnym, ale co ważniejsza pozwalała przewidywać istnienie nowych ciał, a przedewszystkim nowych odmian izomerycznych, które też później otrzymywano istotnie drogą eksperymentalną. Konstytucję wielu ciał, nawet bardzo skomplikowanych, wyjaśniono we wszystkich szczegółach; przekonano się, że własności chemiczne często zależą od obecności w ciele pewnych grup charakterystycznych, np. alkoholi od grupy hydroksylowej—OH, kwasów od grupy karboksylowej COOH i t. d. i nauczono się stwierdzać obecność takich układów za pomocą mniej lub więcej skomplikowanych reakcji. Gdy więc chodziło o wykrycie struktury lub budowy jakiegokolwiek ciała, którego nie umiano skoordynować z żadnym ciałem znanym, zadawano sobie przedewszystkim pytanie, jakiego węglowodoru badane ciało może być pochodną i jakie są funkcje poszczególnych atomów, wchodzących w skład jego cząsteczki. Rezultaty otrzymane były zdumiewające i nie może ulegać dziś żadnej wątpliwości, że zbadanie budowy chociażby najskomplikowańszych ciał ostatecznie udać się musi; trudności mogą być tylko natury technicznej, teorja zaś zawodu nie zrobi.

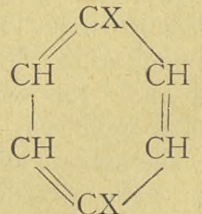
Nim chemja organiczna doszła do tego stopnia rozwoju, napotykano wprawdzie nieraz wielkie trudnosci, których pokonanie nie było rzeczą łatwą. Historja np. rozwoju chemji t. zw. związków aromatycznych, pochodzących od węglowodoru benzolu, którego empiryczny i molekularny wzór jest C_6H_6, przekonywa o tym najlepiej. Trwało długo, nim uporano się z tym problematem. Cząsteczka zawierająca sześć atomów węgla rozporządza $6 \times 4 = 24$ jednostkami wartościowości, na których zaspokojenie miano jedynie sześć atomów wodoru. Zagadkę tę rozwiązał Kékulé, dając dla benzolu słynny wzór pierścieniowy:



zawierający sześć wiązań t. zw. podwójnych. Wnioski teoretyczne, które można było wysnuć z tego wzoru, sprawdzono przez liczne eksperymenty. Udowodniono np., że dwusubstytuowane pochodne benzolu, powstające przez podstawienie dwu atomów wodoru przez jednowartościowe pierwiastki lub grupy, występują w trzech izomerycznych odmianach, zgodnie z trzema wzorami, przedstawiającemi trzy różne ugrupowania substytuentów w takich pochodnych:



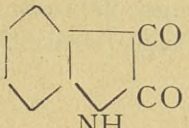
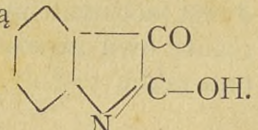




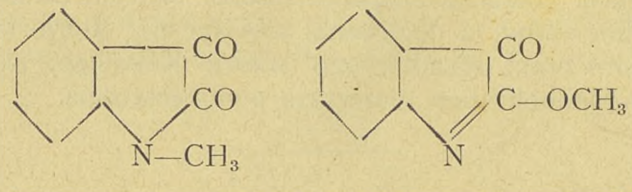
Wkrótce po wykryciu budowy benzolu poznano jeszcze szereg innych ciał, którym należało nadać budowę „pierścieniową“. Do nich należy np. naftalin, antracen, fenantren, albo pirydyna, chinolina, pyrrol i t. d., układy, które odegrały niezmiernie ważną rolę w przemyśle chemicznym, a których pochodne znajdujemy wśród najważniejszych ciał, wchodzących w skład organizmów zwierzęcych i roślinnych.

Zbyt daleko zaprowadziłby nas szczegółowy rozbiór najnowszych postępów na polu badań związków owych pierścieniowych lub cyklowych, które zainteresowały chemików w stopniu większym niż pochodne węglowodorów z łańcuchami otwartemi, będącemi podstawą związków t. zw. alifatycznych lub tłuszczowych. Badania eksperymentalne w tym dziale były bogate w plon obfity, a dociekania teoretyczne, które miały usunąć niektóre braki zasadniczego wzoru Kékulégo, nacechowane były niejednokrotnie niezwykłą pomysłowością.

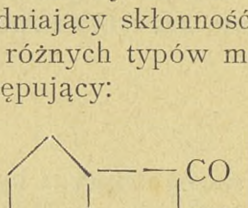
Naszkicowana powyżej teorja budowy związków organicznych zdawała się jednak nie mieć zastosowania ogólnego. Spotkano się z ciałami, których zachowanie się chemiczne nie harmonizuje z żadnym wzorem strukturalnym, albo które zachowywały się dwoiście w myśl dwu różnych wzorów konstytucyjnych. Do ciał takich należy między innemi ester kwasu acetooctowego i izatyna, których badanie jak się okazało pogłębiło poglądy na budowę ciał.

Szczególnie pracom Baeyera zawdzięczamy jasne postawienie kwestji. Badacz ten przekonał się iż izatyna, produkt utlenienia indygа, zachowuje się w myśl dwu wzorów konstytucyjnych, t. j. że niektóre jej reakcje można wytłumaczyć jedynie za pomocą wzoru:  inne zaś tylko za pomocą 

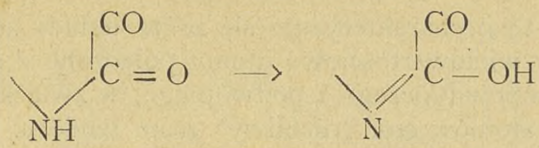
Według więc pierwszego izatyna byłaby związkiem, zawierającym dwie grupy karbonilowe (CO), a w myśl drugiego związkiem hydroksylowym. Dowodność reakcji, prowadzących do każdego wzoru jest zupełnie jednakowa, wyboru więc pomiędzy nimi zrobić niepodobna. Chcąc wybrnąć z tych trudności, Baeyer zrobił przypuszczenie, że niektóre związki istnieć mogą w dwu odmianach, które bardzo łatwo przemieniają się jedna w drugą, z pomiędzy których tylko jedna jest trwałą, druga zaś nietrwałą, która istnieje tylko przemijająco i prowadzi do pochodnych, nie stojących w stosunku prostym do formy trwałej zasadniczej. Izatyna według tego poglądu zbudowana jest, według Baeyera, w myśl wzoru hydroksylowego, odmiana zaś przedstawiona przez wzór dwukarbonilowy wyosobnić się nie daje, jest pseudoizatyną, która istnieje tylko przemijająco lecz pochodne jej są zdolne do samodzielnego istnienia, równie dobrze jak pochodne izatyny normalnej. Znamy np. etery alkilowe zarówno formy dwukarbonilowej jak hydroksylowej:



Inaczej zjawisko to tłumaczy Laar. Gdy z biegiem czasu ilość ciał, zachowujących się podobnie w zasadzie do izatyny, wzrosła bardzo znacznie i gdy wszelkie ówczesne próby wyosobnienia owych pseudo-odmian Baeyera spełzły na niczym, uczony ten zrobił przypuszczenie, że związki reagujące w myśl dwu wzorów konstytucyjnych wogóle nie mogą być formułowane za pomocą jednego wzoru statycznego, gdyż w związkach tych, w odróżnieniu od ciał zachowujących się zgodnie z teorją struktury, ma miejsce ciągła oscylacja atomu wodoru i jednoczesna zmiana położenia wiązania podwójnego. Zachowanie się izatyny przemawia według Laara zatym, że ani wzór dwuketonowy, ani hydroksylowy nie może być uważany za normalny, że jedynie schemat uwzględniający skłonność tego ciała do wytwarzania dwu zasadniczo różnych typów ma rację bytu. Schematem takim jest np. następujący:



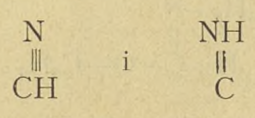
Atom wodoru oscyluje wciąż pomiędzy atomem azotu i pierwszym atomem węgla pierścienia pyrrolowego a jednocześnie ma miejsce zmiana położenia podwójnego. Ponieważ oscylacji takiej towarzyszy też zawsze przerzucenie się podwójnego wiązania:



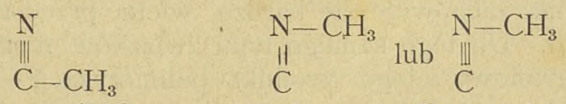
więc zjawisko to otrzymało też nazwę desmotropji (W. Meyer) a ciała uposażone w własność reagowania w myśl dwu wzorów konstytucyjnych — desmotropowemi.

Jak zobaczymy, poglądy na tautomerję względnie desmotropję uległy w ostatnich czasach znacznej zmianie, okazało się, że ciala tautomeryczne w znaczeniu hipotezy Laara nie istnieją, że podobnych ciągłych oscylacji atomów wodoru lub przerzucań się wiązań podwójnych przyjmować nie potrzeba, gdyż bliższym prawdy był Baeyer, utrzymując, że mamy tutaj do czynienia z ciałami, które występują w dwu odmianach, z których jedna, jako nader nietrwała, zwykle wyosobnioną być nie może. W. Wislicenus i Claisen wyosobnili jednak ową domniemaną formę nietrwałą w przypadku ciał, które mają wszystkie cechy ciał tautomerycznych. Pomimo tego praca Laara nie pozostała bez większej wartości naukowej, gdyż autor w sposób bardzo umiejętny rozklasyfikował te grupy atomowe, które w ciałach złożonych powodują zjawiska tautomerji. Według niego grupy powodujące tautomerję sprowadzają się do dwu typów, typu diad i triad.

P i e r w s z y t y p zawiera grupy atomowe, zawierające dwa atomy powiązane z sobą podwójnie lub potrójnie, pomiędzy któremi oscyluje atom wodoru. Przykładem takich ciał jest kwas cyanowodorowy, dla którego możliwe są dwa wzory:



Według pierwszego wzoru kw. cyanowodorowy jest nitrylem kw. mrówkowego, a według drugiego imidem tlenku węglowego. W stanie wolnym odpowiada mu zapewne tylko wzór drugi, alkilowe zaś połączenia są znane w dwu odmianach



acetonitryl metylokarbylоamin albo metyloizonitryl

D r u g i t y p charakteryzuje się przez układy atomowe zawierające trzy wielowartościowe atomy połączone z sobą za pomocą wiązania pojedyńczego i podwójnego; w związku z jednym z końcowych atomów stoi „ruchliwy“ atom wodoru:

$$X:Y.Z—H \quad \text{lub} \quad H—X.Y:Z.$$

Związków, zawierających podobne układy, znamy bardzo wiele, Laar dzieli je na sześć klas, a te znów na kilka grup. Do klasy 1-szej zalicza się związki zawierające tylko jeden atom węgla w pozycji środkowej. G r u p ę p i e r w s z ą tej klasy stanowią związki zawierające triady:

$$\begin{array}{c} —NH \\ | \\ —C{=}O \end{array} \qquad \begin{array}{c} —N \\ \| \\ —C—OH \end{array}$$

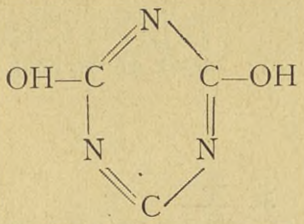
których przedstawicielem jest wspomniana już izatyna i oksindol. Zaliczyć tutaj można takie amidy kwasowe, które w stanie wolnym reagują zazwyczaj w myśl wzoru pierwszego. Pochodne zaś amidów znamy w dwu odmianach. Przekonano się np., że połączenie srebrowe benzamidu i formanilidu dają z jodkami alkilów imidoetery, podczas gdy połączenia sodowe dają związki, w których grupa alkilowa stoi w związku z azotem. Formanilid $C_6H_5.NH.C:OH$ daje więc w pierwszym przypadku z JC_2H_5 ciało

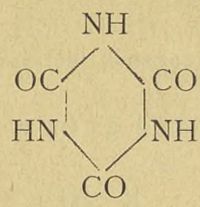
$$\begin{array}{c} C_6H_5—N \\ \| \\ H—C—O—C_2H_5 \end{array}$$

a w drugim

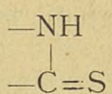
$$\begin{array}{c} C_6H_5—N—C_2H_5 \\ | \\ H—C{=}O \end{array}$$

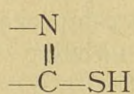
Podobnie zachowuje się bardzo wielu przedstawicieli tej gromady ciał. Do tego samego typu związków można też zaliczyć kwas cyanowy i jego produkt polimeryzacji — kwas cyanurowy:


norm. kw. cyanurowy

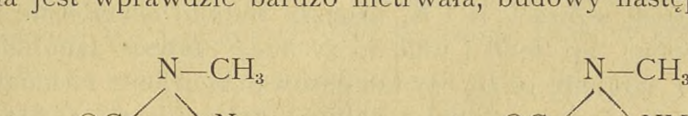

kw. izocyanurowy.

D r u g a g r u p a. Ciała tutaj należące zawierają triady:


układ tioamidowy


układ izotioamidowy

a więc tioamidy, tiomoczniki, tiouretany i liczne podobne z układem pierścieniowym. Tioanilidy występują tylko w jednej postaci, pochodne zaś ich alkilowe w dwu. Metalowe połączenia tioamidów formułują się zapomocą wzoru drugiego, gdyż dają one pochodne w których alkil stoi zawsze w połączeniu z siarką. Zwrócić należy uwagę jeszcze na tę okoliczność, że według Marckwalda w niektórych przypadkach można stwierdzić samodzielne istnienie obu form, okoliczność, która jak już zaznaczyliśmy, ma dla teorji t. zw. tautomerji bardzo wielkie znaczenie, albowiem właściwie identyfikuje ją ze zwykłą izomerją. Według badacza tego istnieją dwie izomeryczne formy, z których jedna jest wprawdzie bardzo nietrwała, budowy następującej:



Do tej grupy należy wreszcie kwas siarkocyanowy NHCS, który według Claisena w obecności kwasów mineralnych posiadać ma wzór NH=C=S, a w rostworach alkoholowych, szczególnie zaś w obecności alkalji wzór N≡C—SH. Alkilowe połączenia znane są w dwu formach. Zwykłe siarkocyanki przemieniają się przy ogrzewaniu w olejki gorczyczne:

$$\underset{\text{siarkocyanek metylowy}}{N : C—S—CH_3} \longrightarrow \underset{\text{olejek gorczyczny.}}{CH_3—N = C = S}$$

T r z e c i a g r u p a. Triady:

$$\begin{array}{l} R—NH \\ \quad | \\ R—C = N—R \end{array} \quad i \quad \begin{array}{l} R—N \\ \quad \| \\ R—C—NH—R \end{array}$$

są jak widzimy identyczne, jeżeli substytuenty R są jednakowe. Izomerja może występować tylko wtedy, gdy substytuenty są różne, gdy mamy układy:

$$R.NH.C : NR_1 \quad i \quad R.N : C.NHR_1$$

pomimo różnicy w tych wzorach, amidyny wytworzone według planów, które powinny prowadzić do różnych ciał, są w rzeczywistości identyczne i w tym właśnie zaznacza się ich charakter tautomeryczny. Pechmann nazywa tego rodzaju tautomerję wirtualną w odróżnieniu od funkcjonalnej. Ciałami ostatniej kategorji są naprzykład laktamy i laktimy i kwas cyanowy, które tautomerycznie reagują pod postacią dwu całkiem odmiennych ciał, w odróżnieniu od amidyn i dwuazoaminowych połączeń, których obie formy zaliczyć trzeba do tej samej gromady związków.

Co się tyczy amidyn to Pechmann stwierdził, że jeżeli w powyższych wzorach R i R_1 oznacza rodniki chemicznie zbliżone do siebie, np. fenil i tolil, to zachodzi zawsze tautomerja, t. j. że bez względu na to, czy kondesować będziemy formoanilid z p-toluidyną czy formotoluid z aniliną, otrzymuje się zawsze to samo ciało:

$$HC\begin{array}{l} \diagup NH.C_6H_5 \\ \diagdown O \end{array} + H_2NC_7H_7 = HC\begin{array}{l} \diagup NH.C_6H_5 \\ \diagdown NC_7H_7 \end{array} + H_2O$$

$$HC\begin{array}{l} \diagup NN.C_7H_7 \\ \diagdown O \end{array} + H_2.NC_6H_5 = HC\begin{array}{l} \diagup NH.C_7H_7 \\ \diagdown N.C_6H_5 \end{array} + H_2O$$

Przy alkilowaniu amidyny dają mieszaninę dwu izomerycznych alkilowych połączeń np.:

$$C_6H_5-C\begin{cases}=N.C_6H_5\\ -\underset{\displaystyle C_2H_5}{\underset{|}{N}}-C_7H_7\end{cases} \quad \text{i} \quad C_6H_5-C\begin{cases}-\overset{\displaystyle C_2H_5}{\overset{|}{N}}-C_6H_5\\ =N-C_7H_7\end{cases}.$$

Sprawa amidyn nie jest jednak jeszcze zupełnie wyświetlona. Istnieją wskazówki, że w pewnych warunkach amidyny Pechmanna mogłyby występować w dwu samodzielnych formach izomerycznych, albowiem udało się Waltherowi otrzymać dwie różne odmiany metenylo-fenilo-tolilo-amidynu wzoru:

$$CH\begin{cases}-NH.C_7H_5\\ =N.C_7H_7\end{cases} \quad \text{i} \quad CH\begin{cases}=N.C_7H_5\\ -NH.C_7H_7\end{cases}.$$

W specjalnym tym przypadku stwierdzono nawet egzystencję czterech izomerów, co nasuwa przypuszczenie, że występuje tutaj nawet izomerja przestrzeniowa. Do tej grupy należą wreszcie także amidoksimy i cyanoamid.

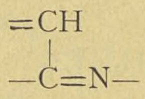
2-ga klasa triad. Pierwsza grupa. Oddzielną gromadę ciał tautomerycznych stanowią takie, w których mamy triady:

$$\begin{matrix}=CH\cdot\\ |\\ -C=O\end{matrix} \quad \text{albo} \quad \begin{matrix}=C\\ \|\\ -C-OH\end{matrix}$$

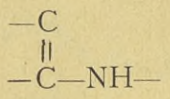
Brühl proponuje nazywać układ pierwszy ketowym względnie aldowym, a drugi, zawierający grupy hydroksylową, enolowym; propozycję tę ogólnie przyjęto. W przypadku tautomerycznych form aldehydów wyłącznie, używa się także w ślad za Claisenem nazw formil dla grupy $H-\overset{|}{C}=O$ i oksymetylen dla $H-\overset{\|}{C}-OH$.

D r u g a g r u p a. Tioaldehydy i tioketony z pewnością także okazywać będą zjawisko tautomerji, lecz zbadane są w tym kierunku bardzo mało.

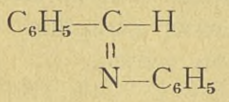
T r z e c i a g r u p a. Przedstawiciele tej grupy zawierają układ:



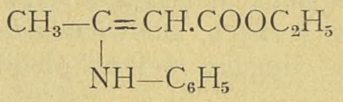
lub



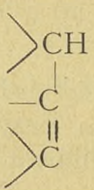
Są to przedewszystkim produkty kondensacji aminów z aldehydami i ketonami. W przypadku mniej złożonych produktów wzór pierwszy wydaje się najprawdopodobniejszy, natomiast pochodne β-ketonowych kwasów występują głównie w postaci drugiej. Przedstawicielem ciał pierwszej kategorji będzie np.



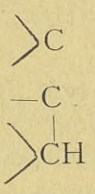
a drugiej



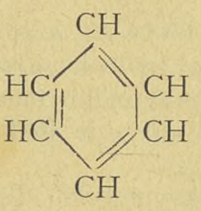
T r z e c i a k l a s a. Związki do tej klasy przynależne zawierają układ z trzech węgli:

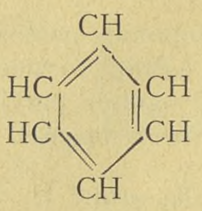


albo



które prowadzić będą oczywiście tylko w tym przypadku do ciał odmiennych, gdy rodniki przyczepione do końcowych atomów węgli są odmienne. Z powodu nagromadzenia atomów węgli ruchliwość wodoru jednak najczęściej ustaje skutkiem czego przypadki tautomerji są tutaj rzadkie, natomiast występuje izomerja właściwa. Ważnym przedstawicielem ciał z podanym układem jest benzol:





Jak wiemy, nie istnieją dwie pochodne izomeryczne benzolu, w których dwa substytuenty znajdują się w pozycji orto, pomimo że wzory powyższe izomerję taką przewidują. Brak jej tłumaczy Laar również tautomerją, ciągłą zmianą położenia wiązań podwójnych, lub oscylacji jednego z substytuentów.

K l a s a 4 - t a. Do klasy czwartej zalicza Laar wszystkie triady, w których nie ma atomów węgla.

1 - s z ą g r u p ę tego oddziału stanowią ciała, zawierające triady:

$$—NH—N:O \quad \text{albo} \quad —N:N—OH,$$

z których pierwszy układ nosi nazwę nitrozaminowego a drugi dwuazowego. Ciała drugiego typu występują oprócz tego w odmianach t. zw. przestrzeniowych, skutkiem czego chemja tego rodzaju ciał jest bardzo skomplikowana.

Tutaj wystarczy zaznaczyć, że dawniej uważano układy powyższe za tautomeryczne, t. j. że samodzielnych form, odpowiadających każdemu z powyższych układów, nie uznawano. Nowsze badania Hantzscha sprawę tę postawiły w świetle odmiennym i wogóle pogłębiły znakomicie poglądy na tautomerję.

2 - g a g r u p a obejmuje związki dwuazoaminowe, zawierające triadę:

$$\begin{array}{c} —NH \\ | \\ N{=}N— \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{c} —N \\ \| \\ N—NH— \end{array}$$

która powoduje, na podobieństwo układu amidynowego, tautomerję wirtualną. Tutaj spodziewać się należało izomerji w razie, gdy rodniki przyczepione do końcowych atomów azotu są różne. Działanie np. dwuazobenzolu na p-toluidynę prowadzić powinno do ciała o budowie następującej:

$$C_6H_5—N:N—NH.C_6H_4—CH_3\ ,$$

które powinnoby się różnić od produktu kondensacji aniliny i dwuazo-p-toluolu:

$$CH_3\,.\,C_6H_4—N:H—NH\,.\,C_6H_5\,.$$

W rzeczywistości jednak ciała otrzymane są identyczne.

5 - t a k l a s a. 1-sza grupa: Związki nitrozowe i izonitrozowe, charakteryzujące się przez układ:

$$\begin{array}{ccc} \rangle CH & \qquad & \rangle C \\ | & & \| \\ N=O & & N-OH \end{array}$$

nitrozozwiązki izonitrozozwiązki czyli oksimy.

O ciałach tego typu mówić jeszcze będziemy w dalszym ciągu niniejszego szkicu.

2-ga grupa. Ciała azowe i hydrazony, zawierające charakterystyczny układ:

$$\begin{array}{ccc} \rangle CH & \qquad & \rangle C \\ | & & \| \\ N=N- & & N-NH- \end{array}$$

azo-ciała hydrazony

stoją do siebie niekiedy w stosunku ciał tautomerycznych.

Gdy dwuazowe ciała działają na związki, zawierające grupę metylenową, zachodzącą szczególnie chętnie w reakcję, powstają ciała, które są identyczne z temi, jakie wytwarzają się przy działaniu fenilohydrazynu na odpowiednie ketony. Ester malonowy daje np. z chlorkiem dwuazonowym benzolu ciało, które po zmydleniu przemienia się w związek identyczny z produktem kondensacji fenilohydrazynu z kwasem mezoksalowym:

$$\begin{array}{lclcl} COOH & & COOH & & COOH \\ | & & | & & | \\ CH_2 & \longrightarrow & C{=}N\,.\,NHC_6H_5 & \longleftarrow & CO \\ | & & | & & | \\ COOH & & COOH & & COOH \end{array}$$

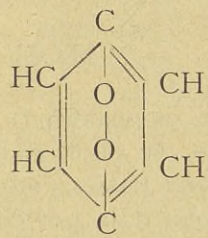
6-ta klasa. Do tego oddziału zalicza Laar ciała, zawierające układ

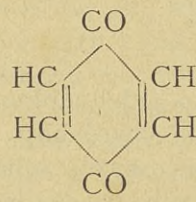
$$\begin{array}{ccc} \rangle CN & & C \\ | & \text{i} & \| \\ N=C\langle & & N-CH\langle \end{array}$$

związki mało jednak jeszcze badane.

Na szczególne wyróżnienie zasługuje wreszcie tautomerja laktonów i chinonów, które można wprawdzie podporządkować omówionym już grupom Laara, lecz które ze względu na skomplikowany charakter przedstawimy wślad za Wislicenusem osobno.

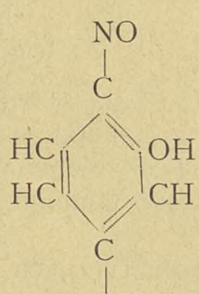
Chinon formułowano dawniej w myśl wzoru I-szego

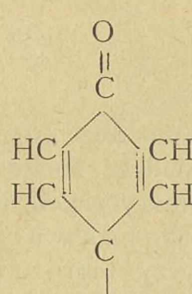

I


II

obecnie zaś większość chemików wypowiada się za wzorem II-gim.

Argumentem głównym w tej mierze jest fakt, że chinon daje z hydroksylaminem dwuoksim, czyli że ciało to zachowuje się tak, jak gdyby zawierało dwie grupy ketonowe. Sczególnie uderzającym jest fakt, że jednooksim chinonu, otrzymany przez działanie jednej cząsteczki hydoksylaminu na benzochinon jest identyczny z nitrozofenolem, otrzymanym z fenolu przez działanie kwasu azotawego:


nitrozofenol

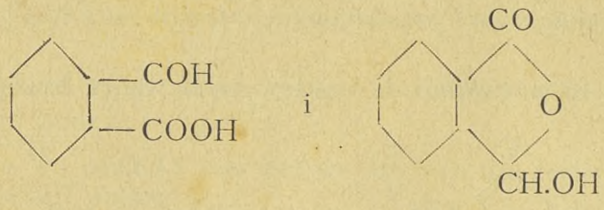

oksim chinonu.

W niektórych przypadkach wyosobniono obie formy; nitrozową i oksimową [1]).

---

[1]) Heinrich. Ber. **29**, 989.

U laktonów tautomerja także występuje nierzadko. Kwas o-ftalo-aldehydowy reaguje w myśl dwu wzorów:

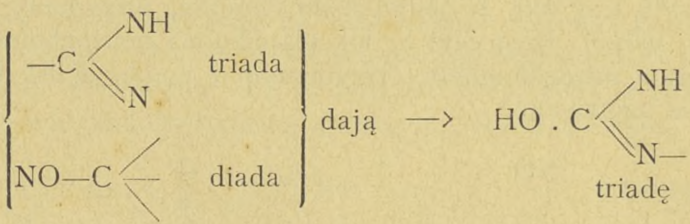


t. j. albo jako aldehydokwas, albo jako oksylakton[1]).

Wreszcie zwrócimy uwagę na to, że obok ciał, które zawierają różne, wyżej scharakteryzowane triady, możemy mieć ciała, w których triady łącząc się z sobą dają pentady i heptady, np. triady pierwszej i drugiej grupy dają układ:

NH . C : N . C : O i N : C . N : OH

Dalej może zajść kombinacja diady z triadą, przyczym powstanie tetrada



w których mamy dwa „ruchliwe" wodory, skutkiem czego może zajść przypadek, że trzy wzory stoją do siebie w stosunku wzorów tautomerycznych, powodując t. zw. tautomerję podwójną [Knorr[4]) Marckwald[3])].

Co się tyczy teorji związków tautomerycznych to, jak już wyżej wspomniano, poglądy Laara ostać się nie mogły szczególnie pod wpływem prac Claisena i Wislicenusa a także Guthzeita, Knorra, Marckwalda, Hantzscha i Schulzego, Holleman-

---

[1]) Hjelt. Ber. **19**, 411.

[2]) Ber. **28**, 706.

[3]) Ann. **286**. 350.

na i innych. Okazało się mianowicie, że w niektórych przypadkach można wyosobnić obie formy ciał reagujących według dwu wzorów konstytucyjnych, które zazwyczaj są nader nietrwałe, przemieniają się jedna w drugą bardzo łatwo, przyczym o trwałości każdej z nich stanowią panujące zewnątrz warunki fizyczne, temperatura, natura rozpuszczalnika i t. d. Laar więc nie miał słuszności, przyjmując w związkach tautomerycznych szczególnie jakiś oscylujący atom wodoru, nie miał słuszności twierdząc, że pewnym związkom nie można nadać określonego, statycznego wzoru strukturalnego, a okazało się natomiast, że pozorna owa oscylacja atomu wodoru, której następstwem miała być zdolność ciała reagowania w myśl dwu wzorów konstytucyjnych, polega w rzeczywistości na tym, że t. zw. ciała tautomeryczne są bardzo nietrwałe i łatwo przekształcają się w prawdziwe swe izomery, które oczywiście reagować będą naogół według odmiennych schematów.

Do ciał dawniej zwanych tautomerycznemi, które udało się wyosobnić w dwu samodzielnych odmianach, należą między innemi następujące:

Acetylodwubenzoylometan [1])
$$C\left\langle\begin{matrix}C(OH).CH_3\\ CO.C_6H_5\\ CO.C_6H_5\end{matrix}\right. \quad \begin{matrix}\rightarrow\\ \leftarrow\end{matrix} \quad HC\left\langle\begin{matrix}COCH_3\\ COC_6H_5\\ COC_6H_5\end{matrix}\right.$$
odmiana α odmiana β

Trójbenzoylometan [2])
$$C\left\langle\begin{matrix}C(OH)C_6H_5)\\ COC_6H_5\\ CO.C_6H_5\end{matrix}\right. \quad \begin{matrix}\rightarrow\\ \leftarrow\end{matrix} \quad CH\left\langle\begin{matrix}COC_6H_5\\ COC_6H_5\\ COC_6H_5\end{matrix}\right.$$
α β

ester kwasu formilo-fenilo-octowego [3])
$$\left.\begin{matrix}C_6H_5\\ C_2H_5OOC\end{matrix}\right\rangle C : CH.OH \quad \begin{matrix}\rightarrow\\ \leftarrow\end{matrix} \quad \left.\begin{matrix}C_6H_5\\ C_2H_5OOC\end{matrix}\right\rangle CH.COH$$

---

[1]) Claisen Ann. **291**, 25.

[2]) Claisen l. c.

[3]) W. Wislicenus Ann. **291**, 147.

Ester kwasu dwuacetobursztynowego[1])

$$\begin{array}{ccc} \alpha & & \beta \\ CH_3.C(OH):C.COOC_2H_5 & \rightarrow & CH_3.CO.CH.—COOC_2H_5 \\ | & & | \\ CH_3.C(OH):C.COOC_2H_5 & \leftarrow & CH_3.CO.CH.—COOC_2H_5 \end{array}$$

Dwubenzoylometan [2]).

$$\begin{array}{ccc} \alpha & & \beta \\ CH \begin{cases} C(OH).C_6H_5 \\ CO.C_6H_5 \end{cases} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} & CH_2 \begin{cases} CO.C_6H_5 \\ CO.C_6H_5 \end{cases} \end{array}$$

Fenilonitrometan [3])

$$\begin{array}{ccc} \alpha & & \beta \\ C_6H_5.CH{=}N \begin{cases} {=}O \\ OH \end{cases} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} & C_6H_5.CH_2NO_2 \end{array}$$

Zaznaczono zaś, że odmiany tego rodzaju ciał są bardzo nietrwałe, t. j. przemieniają się jedna w drugą bardzo łatwo, skutkiem czego w każdym razie otrzymuje się w rezultacie mieszaninę dwu ciał. Przemiana taka zachodzi już w temperaturze zwykłej, prędzej w temperaturach podwyższonych. Szczególnie ciekawy jest wpływ rozpuszczalnika na podobne odmiany ciał dawniej zwane tautomerycznemi; okazało się mianowicie, że natura rozpuszczalnika i koncentracja roztworu ma wpływ decydujący na naturę chemiczną rozpuszczonej odmiany. W przypadku np. estru kw. formilo-fenilo-octowego koncentracja wyższa (w roztworze alkoholowym) sprzyja formie hydroksylowej (enolowej), t. j. po rozpuszczeniu w alkoholu odmiany aldehydowej otrzymuje się w roztworze, jeżeli koncentracja była znaczna, odmianę hydroksylową. Wpływ natury rozpuszczalnika można scharakteryzować w ten sposób, że rozpuszczalniki o znacznej sile dyssocjującej sprzyjają formom aldowym, rozpuszczalniki zaś o małej sile dyssocjującej jak benzol, sprzyjają w większej

[1]) Knorr Ann. **291**, 147.

[2]) J. Wislicenus, Löwenheim i Wells. Ber. der Sächs. Akad. Sitz. v. 1 März 1897.

[3]) Hantzsch i Schultze Ber. **29**, 699, 2251 Holleman. Rec. Trav. chim. **14**, 121, **15**, 356, 365.

jeszcze mierze odmianie enolowej. Reguła ta zresztą nie ma ogólnego znaczenia.

Nie należy jednak zapominać o tym, że nie wszystkie związki t. zw. tautomeryczne wyosobniono w dwu odmiennych formach, pomimo to można się spodziewać, że z czasem poznamy takie środki eksperymentalne, które pozwolą uchwycić i te odmiany, ktorych trwałość jest bardzo mała. Co się tyczy oznaczania konstytucji odmian ciał tautomerycznych, jak również ciał dotychczas poznanych tylko w jednej odmianie, to metody chemiczne wogóle dają wprawdzie pewne ważne wskazówki, lecz rzadko są rozstrzygające. Metody natomiast fizyczno-chemiczne, na które później zwrócimy uwagę, dają często rezultaty pewniejsze, szczególniej jeżeli poświęci się im i nadal tyle pracy i zainteresowania, jak w czasach ostatnich. Wyższość metod fizycznych nad chemicznemi w badaniu ciał t. zw. tautomerycznych polega przedewszystkim na tym, że mogą być stosowane najczęściej bezpośrednio do ciała badanego, w nieobecności rozpuszczalnika lub odczynnika, podczas gdy metody chemiczne, opierające się z natury rzeczy na reakcjach chemicznych, posługiwać się muszą odczynnikami, które mogą mieć wpływ przekształcający na ciało badane.

Skutkiem tego rezultat otrzymany może się odnosić do owego produktu międzycząsteczkowej przemiany, a nie mieć nic wspólnego z ciałem właściwie badanym. Dla tego też epoka rozwoju metod fizyczno-chemicznych w rozwoju całej chemji organicznej jest jedną z najdonioślejszych. Zresztą nietylko zjawiska tautomeryczne zachwiały na pewien czas teorję struktury. Poznano ciała, które są niewątpliwie odmienne od siebie, a którym należało nadać identyczne wzory strukturalne. Poznano np. cztery odmiany kwasu $C_4O_6H_6$, których reakcje zgadzają się z wzorem struktury

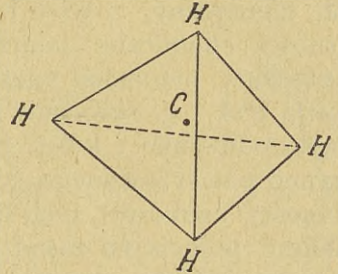
$$\begin{array}{l} COOH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ CH.OH \\ | \\ COOH \end{array}$$

a które jednak różnią się od siebie. Jeden z nich skręca płaszczyznę polaryzowanego światła w prawo, drugi w lewo, trzeci nie wywiera wpływu na płaszczyznę polaryzacji, ale daje się rozszczepić na dwie odmiany optycznie czynne, wreszcie czwarta odmiana jest również optycznie bierną i nie daje się rozłożyć na czynne komponenty. Podobnie rzecz się ma z kwasami mlecznemi; znamy kilka odmian, które nie różnią się zupełnie pod względem chemicznym i którym skutkiem tego nadano identyczne wzory strukturalne, a które względem polaryzowanego światła zachowują się odmiennie. Dawniej nie zwracano uwagi na tę sprzeczność, odmiany tego rodzaju zbywano po prostu nazwą odmian fizycznych, ale gdy w miarę rozwoju chemji organicznej żądano od wzorów struktury, aby do pewnego stopnia przynajmniej odźwierciadlały własności ciał, które wyobrażają, wtedy i dziwnych owych przypadków „optycznej“ izomerji nadal milczeniem zbyć się nie dało. Przy przeglądzie wzorów konstytucyjnych powyższych ciał, które odźwierciadlają zupełnie wiernie zachowanie się ich chemiczne, zauważono niebawem (van't Hoff i Le Bel) że zawierają one wszystkie t. zw. asymetryczny węgiel, t. j. atom węgla, którego cztery jednostki powinowactwa nasycone są przez różne atomy elementarne lub grupy. Ten fakt nasunął van't Hoffowi myśl uwzględniania przestrzeniowych stosunków w budowie cząsteczki, tym bardziej że i krytyka zwykłych wzorów ciał optycznie nieczynnych do konieczności takiej zniewalała. Uwzględniając np. budowę dwusubstytuowanych pochodnych metanu, można wyobrazić sobie dwa wzory, które niekoniecznie będą w znaczeniu chemicznym jednakowe, otrzymamy bowiem:

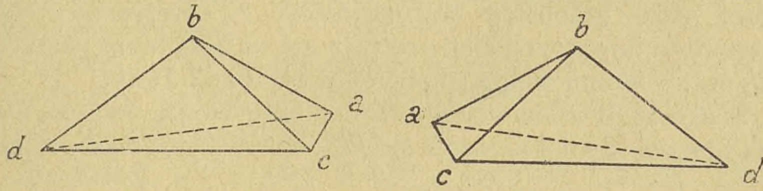
$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{H} & \\ & | & \\ \mathrm{H}- & \mathrm{C} & -\mathrm{a} \\ & | & \\ & \mathrm{b} & \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{ccc} & \mathrm{H} & \\ & | & \\ \mathrm{b}- & \mathrm{C} & -\mathrm{a} \\ & | & \\ & \mathrm{H} & \end{array}$$

tymczasem liczne doświadczenia uczą, że dwusubstyuowane pochodne metanu istnieją tylko w jednej odmianie. Przedstawienie więc ich budowy za pomocą wzorów w płaszczyźnie nie harmonizuje z zachowaniem się metanu.

Niekonsekwencje te usuwa przestrzeniowy wzór metanu. Van't Hoff wyobraża sobie, że cztery atomy wodoru znajdują się w jednakowych odstępach od atomu węgla w położeniu symetrycznym. Figura gieometryczna, powstająca przez połączenie linjami punktów, wyobrażających atomy wodoru, będzie tetraedr symetryczny:



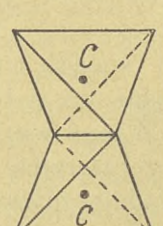
Podobną też formę gieometryczną otrzymamy dla każdego innego połączenia atomu węgla z 4-ma jednakowemi atomami lub grupami atomowemi, z tą tylko różnicą, że jeżeli zgodzimy się wyobrazić sobie siłę przyciągania atomu wodoru przez atom węgla długością przypuśćmy 10 mm., to przyciąganie pomiędzy innym elementarnym atomem a węglem wyrażać się będzie przez długość większą lub mniejszą, czyli że otrzymany tetraedr różnić się będzie od pierwszego rozmiarami, lecz będzie także symetryczny. Inaczej rzecz się ma w przypadku połączenia atomu węgla z czterema różnemi atomami lub grupami atomowemi. Przyciągać się one będą przez atom węgla niejednakowo i chcąc wyrazić tę okoliczność graficznie, zrobimy odstępy tych atomów od węgla niejednakowe, a otrzymana figura stereometryczna przedstawiać będzie tetrader nieregularny. Każdemu jednak tetraedrowi nieregularnemu odpowiada inny, różniący się od poprzedniego wręcz przeciwnym układem płaszczyzn, jak to uwidocznią figury następujące:



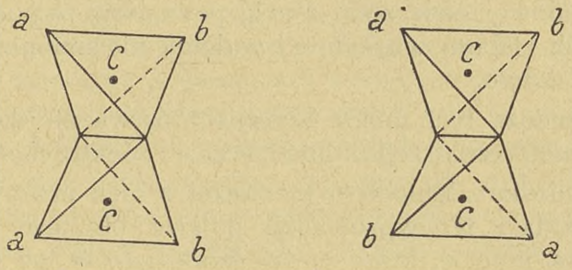
których nałożyć w żaden sposób na siebie nie można, które więc stoją w takim stosunku do siebie, jak przedmiot do odbicia swego w źwierciadle. Z tego wypływa, że cząsteczce, zawierającej węgiel połączony z czterema różnemi atomami lub grupami atomowemi, odpowiadają zawsze dwie konfiguracje, które reprezentować będą budowę przestrzeniową dwu cząsteczek, zawierających te same atomy i w jednakowy sposób połączone, które jednak w znaczeniu powyższym gieometrycznym nie są zbudowane w sposób identyczny, a więc będą należeć do dwu różnych ciał. Własności chemiczne takich dwu różnych ciał będą oczywiście identyczne, natomiast własności fizyczne, warunkujące się asymetrją ciał, t. j. skręcanie płaszczyzny polaryzowanego światła, będą odmienne. Jeden z tych związków będzie skręcać płaszczyznę polaryzowanego swiatła w prawo, drugi w lewo. O rzetelności naukowej tych koncepcji stereochemicznych można nabrać pojęcia na zasadzie faktu, że dotychczas nie poznano związku, któryby posiadał własność skręcania płaszczyzny polaryzowanego światła, jeżeli badanie struktury jego nie dało wzoru z t. zw. węglem asymetrycznym i odwrotnie, że nie znamy ciała (chemicznego osobnika), któreby nie skręcało płaszczyzny polaryzowanego światła, jeżeli wzór przedstawiający jego budowę zawiera węgiel asymetryczny, z wyjątkiem ciał zawierających parzystą ilość atomów węgla asymetrycznych z układami wręcz przeciwnemi (kw. antiwinny). Powstała w ten sposób nowa gałąź chemji struktury, t. zw. stereochemja, która w stosunkowo krótkim czasie nadzwyczajne znalazła zastosowanie. Wystarczy zaznaczyć, że syntetyczne badanie na polu związków z grupy cukrów byłoby zupełnie niemożliwe, gdyby właśnie nie pomoc teorji van't Hoffa i Le Bela.

Znamy zresztą także szereg ciał, których izomerję tłumaczyć możemy jedynie za pomocą wzorów przestrzeniowych, pomimo że nie zawierają węgli asymetrycznych. Są to ciała bez wyjątku należące do t. zw. nienasyconych, to jest takich, które zawierają przynajmniej dwa atomy węgla złączone z sobą za pomocą dwu jednostek wartościowości. Teoretyczne poglądy dotyczące budowy tych ciał opierają się na zasadniczej koncepcji konfiguracji atomu węgla, podanej przez van't Hoffa.

Schemat przedstawiający dwa atomy węgla, związane z sobą za pomocą dwu jednostek powinowactwa jest następujący:



nie trudno więc zrozumieć, że związki ogólnego typu Cab : Cab powinny występować w dwu formach, odpowiadających schematom:



które przyjęto też oznaczać krócej, jak następuje:

postać „cis“	postać „trans“.
a—c—b	a—b—b
‖	‖
a—c—b	b—c—a

Izomerję tego rodzaju przedstawiają ciała zwane kwasem fumarowym i maleinowym

kw. maleinowy	kw. fumarowy
COOH—C—H	COOH—C—H
‖	‖
COOH—C—H	H—C—COOH

a wzory odróżniające je, uwzględniające, jak widzimy, wzajemne przestrzeniowe układy atomów w cząsteczkach, nazwano wzorami konfiguracyjnemi.

Historja tych izomerów jest niezmiernie ciekawa i ważna, ale po bliższy wykład prac odpowiednich odesłać musimy czytelników do dzieł specjalnych [1]).

M e t o d y f i z y c z n e n a u s ł u g a c h c h e m j i o r g a n i c z n e j. Zastosowanie metod fizycznych w badaniach organicznych mogło liczyć na pewne szanse powodzenia dopiero

---

[1]) Porównaj np. L. Marchlewski, Teorje i metody badania współczesnej chemji organicznej. Lwów 1905.

wtedy, gdy przez wszechstronne zbadanie spółzależności własności fizycznych i budowy ciał poznano wpływ niektórych grup atomowych na pewne stałe fizyczne. Podstawę więc dla tego rodzaju metod dać musiały w każdym razie studja nad ciałami, których budowę oznaczono z całą pewnością za pomocą metod chemicznych ciałami względnie trwałemi, nie zmieniającemi swej konstytucji łatwo.

Z pomiędzy tych metod fizycznych najważniejsze są obecnie wolumenometryczna, refraktometryczna i elektrochemiczna.

Nad udoskonalenieniem pierwszej z nich pracował głównie Kopp[1]. Badacz ten wprowadził pojęcie objętości cząsteczkowej płynów, pojęcie, które w dziedzinie gazów już na początku nowożytnej ery w chemji odegrało tak bardzo doniosłą rolę. Według badań Koppa objętość cząsteczkową można uważać jako sumę objętości atomowych, które to ostatnie są naogół wartościami stałemi, zmieniającemi się tylko w przypadku niektórych pierwiastków, w zależności od sposobu powiązania ich z sobą lub z atomami pierwiastków innych. W sprawie budowy ciał tautomerycznych, kiedy najczęściej chodzi o rozstrzygnięcie kwestji, czy atom tlenu połączony jest z węglem za pomocą jednej jednostki wartościowości albo też za pomocą dwu jednostek, metoda wolumenometryczna mogłaby oddać pewne usługi, gdyż wartość objętości atomowej tlenu hydroksylowego różni się dość znacznie od wartości objętości atomowej tlenu karbonilowego. Na zasadzie licznych pomiarów gęstosci związków płynnych w temperaturze ich wrzenia Kopp doszedł do następujacych wartości objętości atomowych: $C = 11.0$, $H = 5.5$, O (hydroksylowy) $= 7.8$, O (karbonilowy) $= 12.2$, objętość więc cząsteczkowa ($\frac{m}{d}$, gdzie m oznacza masę cząsteczkową, a d gęstość badanego płynnego związku) jakiegokolwiek związku składu $C_a\, H_b\, O_c\, O'_d$ ($O =$ tlen hydroksylowy, $O' =$ tlen karbonilowy) można obliczyć z góry według równania:

$$\frac{m}{d} = 11.0a + 5.5b + 12.2c + 7.8d.$$

---

[1]) Ann. **96**, 153, 303 (1855).

Ze zgodności lub niezgodności wartości $\frac{m}{d}$ eksperymentalnie oznaczonej z określoną według powyższego równania można zawyrokować, czy trafnie przypisano atomom tlenu wchodzącym w skład danego związku odpowiednie funkcje. Szczegółowsze badania późniejsze, wykonane po części przez Koppa a po części Thorpea [1]), Ramsaya [2]), Lossena [3]) i ich uczniów przekonały jednak, że wartości objętości atomowych nie są w tym stopniu wartościami stałemi, jak początkowo przypuszczano, wahają się one w dość szerokich granicach zależnie od natury układu ogólnego, w którego skład atomy poszczególne wchodzą, t. j. że na owe wartości wpływ ma nietylko sposób wiązania się jednego atomu z innym, ale także konstytucja całej cząsteczki. Materjał więc eksperymentalny dotychczas nagromadzony okazał się niewystarczającym do wyświetlenia wpływu budowy na objętości cząsteczkowe i atomowe, a odpowiednie badania wolumenometryczne okazały się dotychczas niewystarczające w badaniu budowy ciał organicznych. O ile poglądy Schroedera, które różnią się dość znacznie od poglądów Koppa, i Traubego [4]) nad objętością cząsteczkową rostworową zadaniu odpowiedzą lepiej, przyszłość wykaże, aczkolwiek już dziś można przepowiedzić im rolę znaczną na zasadzie badań ostatnio wspomnianego badacza nad tautomerją estru kwasu formilo fenilo-octowego.

Metoda refraktometryczna w zasadzie jest zbliżoną do poprzednio wspomnianej. Na zasadzie badań Landolta [5]) dochodzimy do rezultatu, że t. zw. refrakcja cząsteczkowa, t. j. iloczyn masy cząsteczkowej przez refrakcję właściwą R ($R = \frac{n-1}{d}$ według starszych prób Gladstona i Dalea, a według Lorenza i Lorentza $= \frac{n^2-1}{n^2+2}\,\frac{1}{d}$, gdzie n oznacza współczynnik załamania światła, doświadczalnie oznaczony) równa się sumie re-

---

[2]) Chem, Soc. **1880**, 141, 327, 378.

[2]) Ber. **12**, 1024 (1879).

[3]) Ann. **214**, 138 (1882).

[4]) Ber. **25**, 2524 (1892) **27**, 3173, 3179 (1894) **28**, 410 (1895) Z. f. anory, Ch. **3**, 1 (1892) **8**, 12, 77, 323, 338 (1895) Ann. **290** 43 (1895).

[5]) Ann. Pogg. **123**, 595 (1864).

fakcji atomowych, przyczym ostatnie zmieniają się stosownie do sposobu łączenia się atomów jednego pierwiastka z sobą lub z atomami pierwiastków innych. Badaniem wpływu konstytucji na refrakcję atomową zajął się głównie Polski badacz J. W. Brühl, który wykazał, że refrakcja wogóle jest niesłychanie wrażliwą na wpływy konstytucyjne i dla tego badania refraktometryczne przedewszystkim są powołane do rozstrzygnięcia zawiłych kwestji tego rodzaju, aczkolwiek z natury rzeczy materjał faktyczny, odnoszący się do stałych refraktometrycznych musi być nagromadzony dla ciał, których budowa jest znaną z pewnością, w bardzo rozległym zakresie. Poniżej podajemy kilka refrakcji atomowych:

	dla promeni H_α
węgiel z wiązaniem pojedyńczym . .	2.365
wodór	1.103
O (hydroksylowy)	1.506
O (eterowy)	1.655
O (karbonilowy)	2.328
wiązanie podwójne pomiędzy węglami	1.836
„ potrójne „ „	2.220

Na zasadzie powyższych wartości można rozstrzygnąć sprawę budowy benzolu, w którym jedni przyjmują, jak wiadomo, trzy wiązania podwójne, a inni dziewięć.

$$\underset{(C_6H_6)}{MR} = 6\times2.365 + 6\times1.103 + 3\times1.836 = 26.32$$

Eksperymentalnie otrzymano $n = 1.4967$, $d = 0.8799$ ($t=20^0$) $M = 78$

$$MR = \frac{n^2-1}{n^2+2}\,\frac{M}{d} = 25.93$$

a więc wartość dość zgodną z wyżej obliczoną, gdy przyjęto, że benzol zgodnie z wzorem Kékulégo zawiera 3 wiązania podwójne. Wyżej przytoczone refrakcje atomowe tlenu przekonywują, jak bardzo refrakcje atomowe zależne są od sposobu powiązania się atomów. Wpływ ten uwidocznia się jeszcze bardziej przy przeglądzie refrakcji atomowych azotu, oznaczonych przez Brühla dla różnych grup zawierających azot:

azot elementarny, atom azotu		2.21
amoniak „ „		2.50
hydroksylamin „ „		2.51
hydrazyny, atom azotu w grupie NH_2 .		2.47
pierwszorzędowe aminy tłuszczowe	N	2.45
drugorzędowe „ „	„	2.65
trzeciorzędowe „ „	„	3.00
drugorzędowe tłuszczowe amidy	„	2.27
trzeciorzędowe „ „	„	2.71

Z powyższego zestawienia wysnuć można wniosek, że refrakcja atomowa azotu jest w istocie własnością w wysokim stopniu konstytucyjną, gdyż na wartość jej ma wpływ nietylko sposób wiązania azotu z różnemi rodnikami, ale także charakter chemiczny ostatnich. Zależnośc tego rodzaju została opracowana przez Brühla bardzo wszechstronnie, a zdobyte w ten sposób podstawy pozwoliły mu rozstrzygnąć cały szereg bardzo zawiłych kwestji konstytucyjnych, wobec których metody czysto chemiczne były bezradne.

Niemniej ważne wyniki dało stosowanie nowszych poglądów i metod elektrochemicznych na polu badań konstytucyjnych związków organicznych. Metody te można wprawdzie stosować tylko w pewnym ciaśniejszym zakresie, tym niemniej jednak wywarły one wielki wpływ na całokształt nowoczesnej chemji organicznej i oddały wielkie usługi w zakresie badań związków tautomerycznych. Teorja elektrolitycznej dyssocjacji w związku z teorją działania mas dała nam przedewszystkim możność ugrupowania kwasów organicznych według ich sprawnośći w pewnych przemianach chemicznych, z uwzględnieniem wpływu konstytucji kwasów na rzeczoną sprawność.

Teorje wspomniane uposażyły nas w następującą spółzależność przewodnictwa cząsteczkowego, względnie równoważnikowego w pewnym znacznym stężeniu, w którym niema miejsca dyssocjacja wszystkich rozpuszczalnych cząsteczek, i przewodnictwa t. zw. granicznego, t. j. charakteryzującego całkowity rozkład cząsteczek na jamy, od objętości zajmowanej:

$$k = \frac{\mu_v^2}{\mu_\infty(\mu_\infty - \mu_v)v}$$

gdzie μ_v oznacza przewodnictwo w danym stężeniu, μ_∞ przewodnictwo graniczne, v objętość, a k wartość stałą. Ostatnia jest zależna wyłącznie od natury badanego elektrolitu i od temperatury, niezależna zaś od koncentracji.

Porównanie wartości k, otrzymanych dla różnych kw. organicznych, jest bardzo pouczające. W przytoczonych poniżej przykładach używamy zamiast bardzo małej wartości k sto razy większą, oznaczaną przez K.

	k
Kwas mrówkowy H.COOH	0.02140
„ octowy CH_3.COOH	0.00180
„ propionowy C_2H_5COOH	0.00134
„ masłowy C_5H_7.COOH	0.00149
„ izomasłowy „ „	0.00144
„ izowaleryanowy C_4H_9.COOH	0.00161
„ kapronowy C_5H_{11}.COOH	0.00145

Z powyższego zestawienia widzimy, że stała K zmniejsza się w homologicznym szeregu kwasów organicznych alifatycznych, czyli w rostworach równocząsteczkowych kwasy o ciężarze cząsteczkowym mniejszym zdyssocjowane są w stopniu większym niż kwasy o ciężarze większym.

Kwasy izomeryczne tego szeregu nie różnią się znacznie co do zdolności rozszczepiania się na jony, w innych jednak szeregach wpływ konstytucji na wartość k jest, jak zobaczymy, bardzo wielki. Podstawienie atomów wodoru alkilów kwasów tłuszczowych przez rodniki lub atomy t. zw. odjemne, jak chlor, brom, hydroksyl powoduje znaczne powiększenie się stałej K, a więc zdolności kwasów do rozkładania się na jony:

	k
kwas octowy	0.00180
„ jednochlorooctowy	0.15500
„ jednobromooctowy	0.13800
„ propionowy	0.00134
„ mleczny CH_3.CH.OH.COOH	0.01380
„ β-oksypropionowy CH_2.OH.CH_2.COOH	0.00311

przyczym, jak z ustawienia stałych dla kwasów mlecznego i β-oksypropionowego wpływa, wpływ konstytucji uwidocznia się bardzo wyraźnie. Kwas mleczny, w którym mamy grupę hydroksylową przyczepioną do tego samego atomu węgla, z którym w związku stoi grupa karboksylowa, jest silniejszy niż kwas β-oksypropionowy, w którym grupa hydroksylowa znajduje się przy innym atomie węgla niż grupa karboksylowa.

Podobne stosunki spotykamy w szeregu kwasów aromatycznych. Kwas benzoesowy jest tylko mniej więcej 3 razy silniejszy niż kwas octowy, ale podstawienie jednego z atomów rdzeniowych przez grupę hydroksylową znacznie powiększa siłę, t. j. zdolność do rozszczepiania się na jony, ale zależnie od m i e j s c a tego podstawienia w stopniu różnym:

	k
kwas benzoesowy $C_6H_5.COOH$	0.0060
„ o-hydroksybenzoesowy $C_6H_4\left\langle\begin{matrix}OH\\COOH\end{matrix}\right.$	0.102
„ m- „ „	0.0087 .

Podstawienie zaś wodoru w pozycji para względem grupy karboksylowej powoduje nawet znacznie zmniejszenie siły kwasu, stała K p-oksybenzoesowego kwasu wynosi zaledwie 0.00286.

Podstawienie wodorów rdzeniowych benzolu przez grupę aminową powoduje zmniejszanie się stałej K i to w stopniu tym większym, im bliżej znajduje się grupa aminowa, grupy karboksylowej:

kwas o-aminobenzoesowy	0.0009
„ p- „	0.0010
„ m- „	0.0012

Podobny wpływ jak konstytucja, w znaczeniu teorji strukturalnej, ma także konfiguracja cząsteczki kwasów. Znamiennym faktem jest, że wszystkie dwukarbonowe kwasy szeregu trans są słabsze niż odpowiednie izomery szeregu cis:

	k
kwas maleinowy	1.170
„ fumarowy	0.093
„ cytrakonowy	0.340
„ mezakonowy	0.079

Z powyższych nielicznych przykładów można już wywnioskować, w jaki sposób mierzenie przewodnictwa izomerycznych kwasów i obliczenie otrzymanych dat eksperymentalnych stałej *K* może być zastosowane przy oznaczaniu konstytucji kwasów. W przypadku np. dwu izomerycznych kwasów, zawierających obok grupy karboksylowej grupę hydroksylową, ten z nich posiadać będzie grupę hydroksylową bliżej grupy karboksylowej, który okaże się kwasem silniejszym, a otrzymana w ten sposób wskazówka może być w wielu przypadkach rozstrzygającą. Podobnie też z pomiędzy dwu kwasów stereoizomerycznych temu z nich nadamy konfigurację „cis", który jest silniejszym i t. d.

Szczególne wielkie jednak zasługi położyła elektrochemja, mianowicie teorja elektrolitycznej dyssocjacji na polu badań tautomerji. Wypracowaniem odpowiednich metod zajął się z wielkim powodzeniem Hantzsch[1]) wraz ze swemi uczniami.

Jak wyżej zaznaczono, w oznaczeniu zasadniczej formy związków tautomerycznych najczęściej chodzi o rozstrzygnięcie, czy dany związek zawiera pewien wodór w związku z atomem tlenu, t. j. występuje w grupie hydroksylowej, i dzięki niej oddziaływa na podobieństwo kwasu, albo też czy oddziaływanie to kwaśne jest już następstwem przekształcenia pierwotnego ciała, charakteru kwasowego zupełnie pozbawionego. Elektrochemja uczy, że własnością charakterystyczną kwasów lub wogóle ciał oddziaływających kwaśno, jest zdolność do odszczepiania wodoru pod postacią wolnych jonów wodorowych, i że kwas silny zdyssocjowany jest w znacznym stopniu w stosunkowo znacznych nawet stężeniach i daje sole, które nie ulegają t. zw. hydrolitycznej dyssocjacji, albo też które podlegają jej w nieznacznym tylko stopniu. Jeżeli więc badanie pewnego ciała wykaże, że stała elektrolitycznej dyssocjacji *K* jest znikomo mała, w takim razie z całą stanowczością twierdzić możemy, że kwasem ono nie jest, a jeżeli pomimo to daje sole, w takim razie ostatnie nie mogą stać w bezpośrednim związku gienetycznym z ciałem badanym, a są natomiast pochodnemi produktu przekształcenia. Ciała tego rodziaju Hantzsch nazwał pseudokwasami. Bardzo często udać się może stwierdzenie obecności pseudokwasu przez badanie zjawiska przebiegu neutralizacji. Pseudokwas ule-

---

[1]) Porównaj Marchlewski: Teorje i metody badania współczesnej chemji organicznej. Lwów 1905.

gający podczas aktu neutralizacji przekształceniu w kwas właściwy przemianę tę swoją uskuteczni według reguł zasadniczych chemicznej kinetyki, t. j. szybkość przemiany będzie wprost proporcjonalną do masy czynnej, a więc może się odbywać stosunkowo powolnie, i choć neutralizacja utworzonego kwasu odbędzie się momentalnie, to jednak przebieg neutralizacji okaże się funkcją czasu, to jest neutralizacja w tych przypadkach może różnić się od neutralizacji zwykłych kwasów, odbywających się momentalnie. Jeżeli więc neutralizacja związku odbywa się z prędkością dającą się zmierzyć, przyczym metoda badania jest elektrochemiczna, w takim razie związek jest pseudokwasem. Inną wskazówką może być zmienność przewodnictwa elektryczności pod wpływem wzrostu temperatury. Przewodnictwo zwykłych elektrolitów powiększa się stale z wzrostem temperatury, o 2% mniej więcej dla każdego stopnia Celsjusza. W rostworach pseudokwasów wzrost temperatury powoduje przekształcenie pseudokwasów w kwasy właściwe, skutkiem czego wzrost przewodnictwa tego rodzaju rostworów jest znacznie większy niż elektrolitów zwykłych.

Wreszcie można posługiwać się jeszcze metodą, opartą na fakcie, że sole silnych kwasów hydrolizują się pod wpływem wody w stopniu znikomym. Jeżeli więc związek, powodujący bardzo słabe przewodnictwo, daje sole bardzo mało hydrolizujące się, w takim razie mamy do czynienia z pseudokwasami. Podobnie jak pseudokwasy, istnieją także pseudozasady, a fizyczne charakterystyki ich są mniej więcej takie same, jakie podaliśmy powyżej dla pseudokwasów.

Metoda termochemiczna także może mieć zastosowanie do badań konstytucyjnych. Zasługi na tym polu położył przedewszystkim duński uczony Thomsen[1]), któremu obok Berthelota zawdzięczamy najrozleglejsze studja termochemiczne. W późniejszych czasach na tym polu czynnym był także Stohmann z swojemi uczniami. Główna podstawa tej metody jest podobna do tej, na której opiera się wolumenometryczna i refraktometryczna: na wartość cząsteczkowego ciepła spalenia ma wpływ nietylko ciepło spalenia atomowe, ale także sposób łączenia się atomów z sobą, a więc stopień nasycenia atomów.

---

[1]) Marchlewski: Teorje i metody badania współczesnej chemji organicznej.

Barwa, czyli położenie i siła smug absorpcyjnych związków organicznych, zależy w wielkim stopniu od konstytucji, a badania spektralne mogą skutkiem tego również oddawać usługi w badaniach konstytucyjnych, aczkolwiek wogóle metoda ta ma na razie charakter tylko jakościowej, orjentującej metody. Optyczna czynność jest własnością wyłącznie konstytucyjną, na rolę tej własności w historji rozwoju nowoczesnych poglądów zwróciliśmy już uwagę powyżej.

Obok powyżej wspomnianych metod znamy jeszcze inne, które wszelako większego zastosowania jeszcze nie mają, a nie istnieją też widoki, aby w blizkiej przyszłości mogły być udoskonalone do tego stopnia, aby w praktyce mogły odegrać jakąkolwiek rolę. Wyjątek stanowić może tylko metoda Drudego oznaczania obecności grup hydroksylowych w związkach organicznych, opierająca się na spostrzeżeniu, że tylko związki w grupę taką wyposażone absorbują w stopniu znacznym fale elektryczne, wykonywające w sekundzie 405 miljonów drgań [1]).

Wyżej scharakteryzowany rozwój teorji budowy ciał organicznych, którego ostatnim wyrazem jest nowoczesna teorja struktury, uzupełniona poglądami na tautomerję, jak również izomerję przestrzeniową, umożliwił targnięcie się na opracowanie szeregu kwestji pierwszorzędnej wagi, które od dawien dawna stanowiły kardynalne zadania zarówno dla chemika, którego hasłem jest syntetyczne otrzymanie wszystkich ciał produkowanych przez organizm zwierzęcy lub roślinny, jak i dla fizjologa, który dopiero po poznaniu budowy ciał produkowanych przez organizm żyjący, może myśleć o skoordynowaniu ich przyczynowym. W pogoni za temi celami chemicy organicy wypuścili jednak z oka cały szereg kwestji pierwszorzędnych, bez których załatwienia o trwałym gmachu chemicznym mowy być nie może. Wykazaliśmy, że poglądy na budowę ciał zawsze miały ja-

[1]) O stosowaniu metod fizycznych w badaniach konstytucyjnych informują obszernie następujące dzieła: van't Hoff, Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie, Brunświk 1900. Nernst. Theoretische Chemie, wydanie IV. Graham-Otto, Ausführliches Lehrbuch der Chemie, Bd. I. Abtheilung 3. Marchlewski, Teorje i metody badania współczesnej chemji organicznej. Lwów. 1905.

ko punkt wyjścia spekulacje pewne najczęściej mgliste, zawsze niewystarczające, o powinowactwie chemicznym, przyczynie łączenia się atomów w cząsteczki. Berzelius utożsamiał owo powinowactwo z energją elektryczną i zgodnie z dualistyczną naturą elektryczności wypowiedział pogląd dualistyczny budowy materji. Zbyt daleko posunięta jednostronność zgotowała jego poglądom zgubę, poglądy jego zastąpiły inne początkowo czysto schematyczne, które znalazły wreszcie wyraz w teorji wartościowości. Poglądy wreszcie van't Hoffa na naturę powinowactwa chemicznego upodobniające je do ciążenia dały nam teorję węgla asymetrycznego i stereochemję wogóle. A jednak ani o wartościowości ani o powinowactwie chemicznym jaśniejszych wyobrażeń nie posiadano. Nie posiadamy ich właściwie i dziś, jednakowoż usiłowania ostatnich lat nie pozostały bez rezultatu; natury powinowactwa chemicznego nie znamy wprawdzie jeszcze, znamy jednak prawa, według których ono oddziaływa. Nim przejdziemy do opisu tych zdobyczy, cofniemy się nieco wstecz, do czasów, gdy pod wpływem rozwoju chemji organicznej pojęcia zasadnicze atomu i cząsteczki zostały jasno określone i gdy pojęcia o budowie ciał przeniesiono także na pole chemji nieorganicznej. Teorja wartościowości nie odegrała tu wprawdzie wielkiej roli, nie było dla niej wielkiego pola popisu, gdyż związki nieorganiczne naogół wydawały się znacznie mniej skomplikowane. Jednakże nie była ona bez wpływu na jedną ze szczególnie wielkich zdobyczy w sześćdziesiątych latach ubiegłego wieku, mianowicie na wykrycie pewnej zależnosci pomiędzy masami atomowemi pierwiastków i ich własnościami, które wreszcie doprowadziło do systemu perjodycznego pierwiastków, który zapowiadał bardzo wiele i dał też wiele, choć dał mniej niż spodziewali się po nim zbyt wymagający optymiści. Już od dawna przypuszczano, że istnieje jakiś związek pomiędzy różnemi gatunkami materji, pierwiastkami. W roku 1814 starał się Prout udowodnić, że masy atomowe pierwiastków gazowych stoją w prostym stosunku do masy atomowej wodoru i wypowiedział przypuszczenie, że pierwiastek ten jest pramaterją, z której powstały, wskutek przemian jeszcze nieznanych, wszystkie inne pierwiastki. Szczegółowe badania Berzeliusa i później Stasa wykazały jednak, że masy atomowe pierwiastków bynajmniej nie dają się wyrazić przez liczby proste w stosunku do masy atomu wodoru przyjętego za jednostkę, ale myśl rzucona przez Prouta pomimo to nie opuszczała umysłów. Wodoru wprawdzie nie uważano za pramaterję, ale wierzono, że istnieje jakiś głębszy związek pomiędzy pozornie nieskoordynowanemi rozlicznemi gatunkami materji i starano się myśl tę udowodnić. Spekulacja ta była niewątpliwie podstawą teorji triad Döbereinera [1]), który zwrócił uwagę na grupy pierwiastków złożonych z trzech, których masy atomowe tak są ustosunkowane, że jedną z nich można uważać jako średnioarytmetyczną dwu drugich. Przyczyna takiego stanu rzeczy mogła tkwić w pokrewieństwie tych pierwiastków.

Znacznie ważniejsze były jednak dociekania Newlandsa [2]), Lotarjusza Meyera [3]) i Mendelejewa [4]), którzy wykazali, że własności pierwiastków są perjodyczną funkcją mas atomowych. Pierwsze prace Newlandsa zwróciły mało uwagi, były one w owym okresie przedwczesne, prace zaś Meyera i Mendelejewa dopełniają się nawzajem, gdyż pierwszy z nich uwzględnił przedewszystkim własności fizyczne, a drugi własności chemiczne pierwiastków.

W szeregach Mendelejewa pierwiastki są uporządkowane według wzrastających mas atomowych, przyczym szeregi są w ten sposób podzielone na grupy, że pierwiastki o własnościach analogicznych znajdują się w szeregach pionowych, podczas gdy 7 lub 10 pierwiastków o wzrastającej masie atomowej tworzą t. zw. małe perjody, w których własności pierwiastków stopniowo się zmieniają. Dwa po sobie następujące poziome szeregi tworzą t. zw. dużą perjodę. Najważniejsze zastosowanie owego perjodycznego prawa pierwiastków, to kontrola mas atomowych i przepowiednie własności nieznanych jeszcze pierwiastków; obok tego przypisują mu też głębsze znaczenie filozoficzne. Spowodowało ono liczne spekulacje dotyczące gienezy pierwiastków, pomimo protestu Mendelejewa, który odmawia swemu prawu jakiejkolwiek roli w tej kwestji. Ne ulega jednak wątpliwości, że w oświetleniu tego prawa dawniejsze poglądy na pierwiastki

---

1) Pogg. Annal. XV, 301.

2) Chem. News X, 59, 194, XIII, 113.

3) Moderne Theorien der Chemie. (Istnieje tłumaczenie polskie). Ann. Chem. u. Pharm. Suppl. VII, 354.

4) Z. f. Chemie 1869. Ann. Chem. u. Pharm. Suppl. VIII, 133.

jako rodzaje materji zupełnie z sobą niespokrewnione utrzymać się nie dadzą. Analogje pierwiastków, szczególnie jasno rzucające się w oczy po zestawieniu wspomnianych perjodów, mogą być spowodane tylko przez istotną analogję materji, tymbardziej, że owe zmiany własności odbywają się w zależności od masy atomowej pierwiastków. Ostateczną przyczyną tego stanu rzeczy może być wspólne pochodzenie wszystkich pierwiastków od jednej jakiejś pra-materji, i pociągający ten pogląd omawiany też byłprzez szereg badaczów. Wśród nich najwybitniejsze może miejsce zajmuje Crookes i Lockyer, i chociaż spekulacje pierwszego zostały po dziś dzień tylko spekulacjami, a doświadczenia Lockyera, zdążające do udowodnienia złożoności pierwiastków, okazały się błędnemi [1]), to jednak myśl o wspólnym pochodzeniu pierwiastków tak silnie się zakorzeniła, że liczyć się z nią trzeba, tymbardziej, że najnowsze prace nad t. zw. elektronami i nad radem zdają się robić nadzieję, że kiedyś i owa pramaterja wejdzie w zakres pozytywnych badań a przestanie być li tylko przedmiotem przypuszczeń.

Co się tyczy ostatecznej przyczyny zjawisk chemicznych, to już w zaraniu rozwoju chemji nazywano ją powinowactwem chemicznym, affinitas, opierając się na hipotezie, że tylko takie ciała mogą działać na siebie chemicznie, które mają coś wspólnego, stoją w stosunku powinowactwa i t. d. Hipotezy te okazały się zupełnie błędne, gdyż przekonano się później, że w przeciwieństwie do powyższej hipotezy nie ciała spokrewnione ale przeciwnie ciała możliwie niepodobne okazują najczęściej największe do siebie „powinowactwo chemiczne“. Zrozumiano też na tle rozwoju t. zw. energityki wogóle, że nauka o powinowactwie chemicznym powinna być nauką o przemianie energji chemicznej w inne rodzaje energji. Do takiego postawienia kwestji prowadziła jednak mozolna droga poprzez szereg wielkich i często genjalnych błędów.

Teorja korpuskularna, która łączenie się ciał sprowadzała do czysto mechanicznego spajania się atomów, nigdy większej roli odegrać nie mogła, a na nienaukowość jej wskazał Newton, który, zachęcony wielkiem powodzeniem poglądów na ciążenie, próbował stosować je w dziedzinie zjawisk molekularnych. Po-

---

[1]) Porównaj: Bruner, Pojęcia i teorje chemji. Warszawa 1905.

glądy jego istotnie nie były bez wpływu na teorje Bergmanna i Bertholleta, poczęści też van't Hoffa. W początkach wieku XIX powstała zresztą nowa hipoteza, tłumacząca przyczynę „przyciągania“ się atomów, która bardzo szybko wycieśniła poprzednie, opierające się na ciążeniu wszechświatowym. Była to hipoteza elektrochemiczna. Na nowe te drogi skierowała się chemja pod wpływem epokowych odkryć Galvaniego i Volty. Podczas gdy pierwszy przyczynę znanego eksperymentu z łapkami żabiemi sprowadzał do tajemniczej elektryczności zwierzęcej, Volta upatrywał źródło zjawiska w dwu metalach i wilgotnym przewodniku. Wykazał on, że przez zetknięcie się tego rodzaju metali wytwarza się elektryczność i stworzył baterję, niesłusznie noszącą nazwę baterji galwanicznej, umożliwiającą wywołanie znacznie jaskrawszych, badaniu przystępniejszych zjawisk elektrycznych. Spostrzeżenia Volty bardzo szybko spożytkowali chemicy. Nicholson i Carlisle poraz pierwszy zauważyli działanie chemiczne prądu elektrycznego na związki chemiczne, a Berzelius i Hisinger wykazali w sposób bardzo dowodny, że sole obojętne ulegają rozkładowi pod wpływem prądu. Ponieważ fakt ten według słów ich zdawał się przeczyć prawom rządzącym powinowactwem chemicznym, więc zjawisko to poddali badaniom szczegółowszym z wynikami, na które już wyżej zwróciliśmy uwagę. Ze spostrzeżeń swych Berzelius wysnuł teorję powinowactwa chemicznego. Według niego atomy obdarzone są ładunkami elektrycznemi, różnoimiennemi w niejednakowych ilościach. Ogólna ilość elektryczności różni się w poszczególnych atomach bardzo znacznie, przytym zachodzić może okoliczność, że w atomach o ogólnej ilości elektryczności nieznacznej rozdział na różnoimienne elektryczności może być bardzo nierównomierny i odwrotnie w atomach o wielkich ilościach elektryczności ogólnej rozdział może być równomierny. Oddziaływanie wzajemne atomów, a więc zjawisko powinowactwa chemicznego sprowadza się właśnie do nadmiarów elektryczności odjemnej lub dodatniej nagromadzonych w atomach.

Do wielkiego rozwoju teorja ta nigdy nie doszła, że jednak bez znaczenia dla nauki nie była, o tym świadczy często posługiwanie się terminologją przez nią kreowaną w systematyce chemicznej, a także gmach nowoczesnej teorji jonów, stworzony przez Arrheniusa. Większą rolę odegrały poglądy Bertholleta. Badacz ten podobnie jak Szwed Bergmann wychodził z zasadniczego przypuszczenia, że powinowactwo chemiczne, przyczyna łączenia się atomów z sobą, zbliżone jest do ciążenia wszechświatowego. Obaj ci więc uczeni oparli się na poglądach Newtona. Różnice między niemi są jednak dość znaczne. Praca Bergmanna wyszła w Upsali w roku 1783. Utożsamiając przyczynę łączenia się atomów z ciążeniem wszechświatowym, Bergmann przedewszystkim zwraca uwagę na rolę stanu skupienia w reakcjach chemicznych. Podkreśla fakt, że ciała płynne reagują łatwiej niż stałe, a płynne nie tak łatwo jak gazowe. Bergmann rozróżniał kilka rodzajów przyciągania się chemicznego. Pomiędzy cząsteczkami jednorodnemi zachodzi attractio aggregationis, pomiędzy różnorodnemi attractio compositionis, które stosownie do tego czy objawiają się na drodze mokrej, czy też na drodze suchej (w stopach) noszą nazwę attractio solutionis. Jeżeli przy działaniu jakiego ciała na związek zostanie wydzielone ciało z tego związku, mamy wtedy do czynienia z attractio simplex electiva. Jeżeli zaś przy spółdziałaniu dwu ciał złożonych mamy wymianę części składowych, wtedy mamy do czynienia z attractio duplex, czyli podwójne selekcyjne powinowactwo i t. d. Bergmann zadaje sobie następnie pytanie, czy istnieje stały porządek w przyciąganiu się atomów, t. j. jeżeli pomiędzy trzema ciałami *a*, *b* i *c* stan rzeczy jest taki, że *a* ma więcej powinowactwa do *b* niż *c*, czy porządek ten zostaje bez względu na inne okoliczności stale zachowany. Odpowiedź jego brzmi twierdząco, dodaje jednak, że tylko ciepło może niekiedy stosunek ten zmienić, a nawet odwrócić. Wyjątki inne Bergmann usiłuje wytłumaczyć różnemi hipotezami dodatkowemi, a zawsze broni zasadniczego twierdzenia, że powinowactwo atomów jest wartością stałą, nie ulegającą zmianie, charakterystyczną dla atomu, od warunków zewnętrznych niezależną. Bergmann miał wielu zwolenników, którzy wspierali go przy rozwijaniu dalszych konsekwencji zasadniczego poglądu. Z tych wspomnę tu Maorveau, Greena i de Macquena.

Poglądy Bergmanna znalazły jednak energicznego krytyka w osobie Bertholleta, jednego z najtęższych uczonych, jakich Francja wydała. Berthollet wychodzi także z zasady Newtonowskiej o ciążeniu, ale przeprowadza ją gruntowniej, nie pomija żadnych okoliczności, jakiemi przejawy siłą ciążenia według Newtona się kierują. A więc, podobnie jak siła przyciągania jest proporcjonalną do mas, tak też powinowactwo chemiczne musi stać w prostym stosunku do mas działających atomów lub ciał. Rezultatem takiego stawiania sprawy był przedewszystkim pogląd, że powinowactwo chemiczne nie jest, jak chce Bergmann, wartością niezmienną, a zależy od masy ciał, biorących udział w reakcji. Jeżeli np. związek *AB* ulega rozkładowi pod wpływem ciała trzeciego *C*, przyczym powstaje nowe ciało *AC* a *B* się wydziela, to podczas zjawiska ilość ciała *C* wciąż się zmniejsza, a ilość *B* wciąż wzrasta, i wreszcie musi nastać chwila, w której ilość ciała *C* będzie bardzo mała, a ilość *B* stosunkowo wielka. Powinowactwo zależy jednak od masy reagujących ciał, wpływ zatym masy ciała *B*, mającego zresztą mniejsze powinowactwo do *A* niż *C*, uwidoczni się niedopuszczeniem owych małych ilości *C* do reakcji; czyli innemi słowy reakcja nie zajdzie ilościowo, zajdzie pewna równowaga, skutkiem czego w rezultacie powstanie układ czterech ciał: *AB*, *AC*, *B* i *C*

Uzasadnieniu tych, jak dziś wiemy, bardzo słusznych poglądów Berthollet poświęcił życie swoje, a rezultat prac eksperymentalnych i dociekań teoretycznych wydał w dziele „Essai de statique chemique" z roku 1803, które zalicza się do podstawowych dzieł chemji nowoczesnej. Dziwnym zbiegiem okoliczności w umyśle tak bystrym, tak spostrzegawczym, zrodził się jednak wielki jeden błąd zasadniczy, który był przyczyną tego, że poglądy Bertholleta poszły w zapomnienie, że spółcześni uważali nawet, że Bergmanowskie idee wyszły zwycięsko z zapasów z wrogiemi im Bertholletowskimi. Przejęty wielkim wpływem masy w reakcjach chemicznych, przewidywanym na zasadzie mistrzowskich koncepcji teoretycznych, stwierdzonym w licznych pomiarach eksperymentalnych, Berthollet zrobił jeszcze jeden krok naprzód, krok fatalny: wypowiedział mianowicie walkę prawu o stosunkach stałych przy tworzeniu się związków chemicznych, walkę, w której pobito go na głowę, a jednocześnie pogrzebano wśród zgliszcz dorobek drogocenny, wydobyty dopiero po długich latach zapomnienia. Antagonistą Bertholleta w tej sprawie pamiętnej był spółzawodnik jego Proust. Swietne poglądy, niezrównany talent pisarski, zabiegliwość rzadka i wytrwałosć Bertholleta, dedukcjonisty par excellence, rozbiły się o nieruchliwy, nieugięty, żadnych postronnych okoliczności nieuwzględniający fakt, głaz, o który oparł się Proust.

Proust wykazał, że Berthollet się myli, że stałość stosunków w połączeniach chemicznych jest faktem niezbitym, poparli go w tym Dalton, a później Berzelius. Dziś jaśniej patrzymy na sprawy, echa walki przebrzmiały, widzimy plusy i minusy obu stron walczących, widzimy błędy Bertholleta, rozumiemy ich konieczność. Walka ta w historji rozwoju chemji była epokową, bez niej, a szczególniej bez strony zwalczonej, nie masz chemji nowoczesnej.

Zwrot ku poglądom Bertholleta nastąpił jednak niebawem i to nie pod wpływem dalszego rozwoju teorji, a pod wpływem tej gałęzi chemji, która najmniej zwykła troszczyć się o teorję, mianowicie chemji analitycznej. Szczególne zasługi pod tym względem położył Rose. W roku 1842 badacz ten wykazał, że siarczki wapniowców otrzymane przez działanie węgla na siarczany, rozkładają się stopniowo pod wpływem wody, wydzielając siarkowodór i tworząc wodorotlenki wapniowców. Siarkowodór łączy się z nierozłożonym jeszcze siarczkiem, dając wodorosiarczek, którego roztwór przy gotowaniu wydziela siarkowodór w postaci gazowej. Działanie to wody, którego intensywność wzmaga się w miarę wzrastania masy wody, spowodowało skierowanie poszukiwań Rosego i na inne podobne pola badań. W roku 1852 ogłosił cały szereg prac uwidoczniających szczególnie dowodnie wielki wpływ masy w reakcjach chemicznych, szczególniej zaś wielki wpływ masy wody. Rose wskazuje przedewszystkim na niezmiernie daleko idące zmiany dokonywane na powierzchni ziemi przez ciała pozornie tak bardzo bierne, ciała z małym powinowactwem wogóle, jak woda i bezwodnik węglowy. Granit i podobne materjały, ulegające w laboratorjum rozkładowi tylko pod wpływem nader energicznych czynników, rozkładają się stopniowo w przyrodzie, wietrzeją pod wpływem powietrza i wody, względnie pary wodnej i bezwodnika węglowego. Odtworzenie tego rodzaju przemian w laboratorjum uskutecznić się nie da, albowiem wymagają one w stosunku do ilości wspomnianych minerałów niezmiernie wielkich ilości pary wodnej i bezwodnika węglowego i bardzo długiego czasu. Można jednak, jak to wykazał Rose, studjować podobne przemiany w przypadkach ciał, ulegających rozkładowi prędszemu. Rozkładu np. siarczanu potasowego pod wpływem wody nie można zauważyć, siarczan kwaśny natomiast ulega w tych warunkach przemianom bardzo łatwo. Wrzący, nienasycony roztwór kwaśnego siarczanu potasowego daje po ostudzeniu roztworu ciało, złożone w myśl wzoru $3\ K_2SO_4.H_2SO_4$.

H_2O. Po ponownym krystalizowaniu tej soli otrzymuje się w rezultacie li tylko siarczan potasowy obojętny. Podobne zachowanie się zauważono w przypadku kwaśnego siarczanu sodowego. Przykłady te uczą, że wpływ masy wody jest w istocie bardzo wielki, że woda, pozornie zupełnie bierny związek, masą swoją może wreszcie spowodować w zasadzie taką samą przemianę, jak silna zasada w rodzaju wodorotlenków alkalicznych. Podobnych przykładów zawdzięczamy zapobiegliwości Rosego cały szereg i nie może ulegać wątpliwości, że właśnie badania tego uczonego spowodowały ponowne zainteresowanie się poglądami Bertholleta. Wielkie zasługi pod tym względem położyli tu Margueritt i Tissier, Gladstone, Chiczyński, Berthelot i St. Gilles, i Bunsen. Z pomiędzy prac tych na szczególną uwagę zasługują badania Gladstone'a z tego względu, że posługują się zasadniczo nową metodą w badaniu składu rostworów jednorodnych. Przy zmieszaniu soli żelaza z solami kwasu rodanowodorowego powstaje zabarwienie czerwone, spowodowane utworzoniem się rodanku żelazowego. Gladstone zauważył przytym, że reakcja nigdy nie odbywa się ilosciowo, t. j. że część żelaza nie ulegała przemianie w rodanek żelazowy. Ilość żelaza przemienioną w czerwoną tę sól zależała mianowicie od natury kwasu istniejącego w uprzednim połączeniu żelazowym i od natury zasady połączonej z siarkocyanem. Używając np. równocząsteczkowych ilości azotanu żelazowego i rodanku potasowego, utworzyło się tylko 13.4% możliwej ilości rodanku żelazowego, a nawet przy użyciu 375 równoważników rodanku potasowego na 1 równoważnik azotanu żelazowego część ostatniego pozostała w stanie niezmienionym. Podobne rezultaty otrzymano przy badaniu soli gallusowych, mekonowych i t. d. Doświadczenia te popierały więc poglądy Bertholleta w bardzo zadowalający sposób, wykazały bowiem, że powinowactwo rodnika rodanowego do atomu żelaza, nie jest wyłączną dyrektywą przy powstawaniu rodanku żelazowego, że reakcja jest tym więcej zbliżona do schematu przewidywanego przez Bergmanna, im większe ilości soli rodanowych działają na sole żelazowe, że słowem masa soli rodanowych odgrywa tak ważną rolę w rzeczonej reakcji, że pomijanie jej wpływu jest zgoła niedopuszczalne.

Podobne doświadczenia wykonał Chiczyński. Szczególnie zaś doniosłe były prace Berthelota i St.-Gillesa. Badacze ci studjowali proces esteryfikacji, t. j. syntezę estrów z kwasów i alkoholi. Reakcja ta, którą można formułować ogólnie w sposób następujący:

$$R - COOH + R_1 OH = H_2O + R - COOR_1$$

jest, jak się okazało, odwracalną, t. j. przez działanie wody na estry otrzymać można kwasy i alkohole. Fakt ten wystarczał sam przez się do zakwestjonowania konsekwencji poglądów Bergmanna, a harmonizował z teorją Bertholleta. Następnie okazało się, że reakcja ta nie jest nigdy ilościową, fakt, który stoi w zgodzie z odwracalnością reakcji. W najlepszych warunkach z jednego równoważnika kwasu i jednego równoważnika alkoholu tworzy się 66.5% apriori przewidywanej ilości estru i wartość ta jest wartością graniczną, którą przy zwykłej esteryfikacji osiągnąć można. Inaczej rzecz się ma, jeżeli użyjemy nierównoważnych ilości kwasu i alkoholi a przeciwnie jednego ub drugiego w nadmiarze.

Gdy użyjemy np. wielkiego nadmiaru alkoholu, bardzo znaczna ilość kwasu ulegnie esteryfikacji, znacznie więcej niż w przypadku spółdziałania równoważników tylko. Badania te ponownie stwierdzają wielki wpływ masy ciał w reakcjach, udowadniają, że zasadnicze koncepcje Bertholleta były słuszne. Ironja losu chciała, że Berthelot któremu idea Bertholleta tak dużo zawdzięcza w późniejszym okresie, w niezwykle zresztą zasłużonej działalności naukowej, sprzeniewierzył się koncepcji swego spółziomka. Berthelot był jednym z pierwszych, który uznawszy doniosłość ścisłych pomiarów energietycznych w przemianach chemicznych, począł mierzyć ilości ciepła wydzielone w takich przypadkach. Ogólny wniosek długoletnich tych studjów eksperymentalnych, wykonanych z podziwu godną wytrwałością i sumiennością, był ten, że przy spółudziale kilku ciał, mogących wchodzić w reakcję chemiczną, tylko te ciała wejdą w reakcję w istocie, której wynikiem jest powstawanie produktu reakcji, któremu towarzyszy największe wydzielenie się ciepła. Berthelot tak bardzo przejął się prawdziwością tego postulatu, że nie wahał się postawić go w rzędzie dwu zasadniczych praw rządzących energietyką, stawiając go obok pierwszego i drugiego prawa termodynamiki, jako trzecie prawo z synonimem prawa pracy maksymalnej. Nie potrzeba zastanawiać się długo nad tym, aby dojść do przekonania, że słuszność tego „trzeciego prawa termodynamiki“ oznacza negację teorji Bertholleta, a poparcie zasad Bergmanna. Francuz opuścił poglądy swego spółziomka a kruszył kopję za poglądy Szweda, wywołując potężną opozycję w obozie Szwedów, którzy wyrzekli się teorji swego spółziomka aby ująć się za Francuzem. Przemówili mianowicie Guldberg i Waage, których prace oznaczają nową epokę w badaniach nad powinowactwem chemicznym.

Prace Rosego wyżej scharakteryzowane były tylko jakościowe, ścisłym sformułowaniem praw rządzących wpływem masy się nie zajmowały. Dopiero Guldberg i Waage zrobili znaczny krok naprzód, formułując w ścisły sposób wpływ masy i dając początek ścisłego traktowania kwestji powinowactwa wogóle.

Podstawą teorji Guldberga i Waagego jest twierdzenie, że działanie chemiczne stoi w stosunku prostym do t. zw. masy działającej, t. j. ilości zawartej w jednostce objętości. Jeżeli dwa ciała działają na siebie, to działanie ogólne jest wprost proporcjonalne do masy działającej każdego ciała zosobna, a staje się równym zeru, skoro masa jednego z nich staje się zerem. A zatym intensywność działania dwu ciał oddaje się przez iloczyn mas działających. Działanie zależy oprócz tego od temperatury, natury działających ciał i innych czynników, których wpływ wyrazić można przez spółczynnik dodany do wspomnianego iloczynu mas działających. Jeżeli oznaczymy przez p i q masy działające dwu ciał, a przez k wspomniany spółczynnik, to „siła“ przemiany chemicznej wyraża się przez wzór: $k\ p\ q$.

Jeżeli dalej badana przemiana chemiczna jest tego rodzaju, że dwa ciała, reagując na siebie, wytwarzają dwa nowe, z których mogą odtworzyć się dwa poprzednie, to w takim razie w sprawie tej chemicznej należy uwzględnić drugą siłę działającą jak gdyby w kierunku wprost przeciwnym, która wyrazi się przez wzór $k_1\ p_1\ q_1$. Reakcja zajdzie w stan równowagi, z chwilą gdy siły te zniwelują się, a stan równowagi wyrazi się równaniem:

$$k p q = k_1 p_1 q_1 .$$

Równanie powyższe ulegnie nieznacznej zmianie, jeżeli ilości działających ciał wyrazimy w równoważnikach, t. j. przez iloczyny mas przez ciężary równoważnikowe. Oznaczymy te równoważniki przez $P_1 Q_1$ P' i Q'. Po skończeniu reakcji, t. j. po nastąpieniu stanu równowagi, część x równoważników P i Q ulegnie przemianie w równoważniki P' i Q' a więc otrzymany w stadjum końcowym: $P-x$, $Q-x$, $P'+x$, Q_1+x. Jeżeli wreszcie v oznacza ogólną objętość, to masy działające wyrażą się według definicji

$$\frac{P-x}{v}, \frac{Q-x}{v}, \frac{P'+x}{v}, \frac{Q'+x}{v}.$$

Wstawiając te wartości w pierwsze równanie otrzymamy:

$$(P-x)(Q-x)\,k = k'\,(P'+x)(Q'+x)$$

albo $(P-x)(Q-x) = \frac{k'}{k}(P'+x)(Q'+x) = K(P'+x)(Q'+x)$

i jeżeli oznaczymy eksperymentalnie choć tylko jeden raz x dla danej kombinacji, to na zasadzie powyższego równania oznaczyć będziemy mogli $\frac{k'}{k}$, a mając stosunek spółczynników, możemy dla każdego innego początkowego układu dwu tych ciał oznaczyć x czyli stan równowagi po zajściu reakcji. Wyniki tych poglądów zasadniczych sprawdzone zostały przez cały szereg badań. Prawo Guldberga i Waagego wyprowadzono też dedukcyjnie, opierając się na poglądach kinetycznych; otrzymało ono ogólną nazwę prawa o działaniu mas i daje nam nietylko dokładne pojęcie o danym stanie równowagi, ale też jednocześnie o szybkości z jaką układ dochodzi do stanu równowagi. Jest ono więc podstawą główną nietylko statyki chemicznej, ale i kinetyki. Szczególnie zaś doniosłą jest jeszcze ta okoliczność, że jak wykazały prace teoretyczne Horstmanna, Gibsa i van't Hoffa, prawo wspomniane jest także koniecznym następstwem termodynamiki.

Zauważyliśmy już poprzednio, że stan równowagi reakcji chemicznych zależy nietylko od ilości działających mas, ale jeszcze od innych czynników, jak temperatury, które objęliśmy ogólnym spółczynnikiem k. Ponieważ zaś wpływ owych czynników na dany układ sprowadza się, wobec energietycznej natury zjawisk chemicznych, do zmian energji tego układu, więc wykrycie zależności pomiędzy stanem równowagi a owemi czynnikami, głównie temperaturą i ciśnieniem, jest pierwszorzędnej wagi.

Jasne sformułowanie tej zależności zawdzięczamy van't Hoffowi. Przedewszystkim uzasadnił on prawo Guldberga i Waagego termodynamicznie, badając wpływ koncepcji czyli masy działających ciał na stan równowagi chemicznej za pomocą procesu kołowego i izotermicznie. Największa praca, która w takim procesie uzyskać się daje, wyraża się przez wzór:

$$A = -R\,T ln \frac{C_1^{n_1}\,C_2^{n_2}}{C_3^{n_3}\,C_4^{n_4}}$$

w którym A oznacza największą pracę, R stałą gazową, R temperaturę absolutną, ln logarytm naturalny, a C z odpowiednimi znakami koncentracje. Oznaczając $\frac{C_1^{n_1}\,C_2^{n_2}}{C_3^{n_3}\,C_4^{n_4}}$ przez $\frac{1}{k}$, otrzymamy

$$A = R\,T ln k\,.$$

Ponieważ największa praca A oznacza jednocześnie zmianę wolnej energji, która w procesach odwracalnych w istocie nie ulega zmianie, więc otrzymamy $A = const.$, $k = \frac{C_3^{n_3}\,C_4^{n_4}}{C_1^{n_1}\,C_2^{n_2}} =$ $= const.$, czyli prawo Guldberga i Waagego.

Wpływ temperatury na procesy chemiczne zbadać można również, stosując drugą zasadę termodynamiki. Wyraża się ono przez równanie:

$$A - U = T\frac{dA}{dT} \tag{1}$$

w którym A, jak widzieliśmy $= R\,T ln k$. Po zróżniczkowaniu tego ostatniego równania względem T otrzymamy:

$$\frac{dA}{dT} = R ln k + R\,T\frac{d ln k}{d\,T}\,. \tag{2}$$

Wstawiając wartość $\frac{dA}{dT}$ w równanie (1), a na miejsce U czyli zmiany całkowitej energji efekt cieplny procesu chemicznego ($- U = q$), przyczym q oznacza ciepło absorbowane, gdy proces odbywa się bez wykonywania pracy zewnętrznej, otrzymamy:

$$RTlnk + q = TRlnk + RT^2 \frac{dlnk}{dT}$$

$$\text{albo } \frac{dlnk}{dT} = \frac{q}{RT^2}.$$

Z wzoru tego wysnuł van't Hoff następujące ważne konsekwencje dotyczące wpływu temperatury na stan równowagi chemicznej, przy stałej objętości, mianowicie: w razie ogrzewania układu chemicznego, stan równowagi przesuwa się w tym kierunku, w którym reakcja jest połączona z wchłanianiem ciepła, albo: podnoszenie temperatury ułatwia odbywanie się procesów, którym towarzyszy wchłanianie ciepła. Wyniki tych badań są niezmiernie doniosłe, a przytaczamy je tutaj jedynie z tego względu, aby wykazać, w jakim kierunku nauka o powinowactwie chemicznym obecnie dąży. Włączenie jej do energietyki wogóle, badanie przemiany energji chemicznej w inne rodzaje energji dało możność traktowania tej ważnej gałęzi chemji w sposób racjonalny, którego wszystkich owoców jeszcze wprawdzie nie posiadamy, które jednak niewątpliwie będą wspaniałe.

Sprawa wartościowości chemicznej jest niestety znacznie mniej posunięta. Poza stwierdzeniem faktu, że pierwiastki mają zdolność łączenia się z różnemi ilościami atomów innych pierwiastków, i że wartościowość jest zmienną, najczęściej zależną od temperatury, faktów znanych już Franklandowi, w chwili gdy pojęcie wartościowości pierwiastków wprowadził do chemji, nie wiemy nic więcej. Jest jednak rzeczą możliwą, że najnowsze prace nad elektrycznością, t. zw. teorja elektronów, rzucą może więcej światła na ciemną tą a ważną kwestję. W rozwoju tych teorji fizycznych niepoślednią rolę odegrały badania chemiczne w dziedzinie roztworów, na które obecnie chcę zwrócić uwagę.

Roztwory przez długi szereg lat przedstawiały dziedzinę ciemną, z którą nikt sobie rady dać nie mógł. Dopiero van't Hoff sprawę postawił jasno i w krótkim czasie dał dzielnie opracowaną teorję roztworów, która niebawem powołała do życia teorję jonów Arrheniusa, mającą niezmiernie wielką donioslość dla wszystkich gałęzi chemji. Opierając się na pracach eksperymentalnych de Vriesa, Pfeffera i Raoulta, na pojęciu ciśnienia osmotycznego i stosując prawa termodynamiki do roztworów, van't Hoff udowodnił, że prawa gazowe zasadnicze mają zastosowanie także do roztworów, t. j. że ciśnienie osmotyczne, wywierane przez cząsteczki rozpuszczonych ciał, w roztworze jest odwrotnie proporcjonalne do objętości, że zależy ściśle od temperatury i wzrasta w tym samym stopniu w zależności od wzrostu temperatury jak ciśnienie gazów, że wreszcie i prawo Avogadra ma zastosowanie do roztworów, t. j. że w jednakowych objętościach, w jednakowej temperaturze i ciśnieniu roztwory różnych ciał zawierają jednakową ilość cząsteczek. Poznał jednak też wyjątki, które nie dały się wtłoczyć w ramy teorji. Do wyjątków należały t. zw. elektrolity, t. j. ciała, których wodne roztwory są przewodnikami elektryczności. W większości przypadków roztwory te posiadały dwa razy większe ciśnienie osmotyczne, niż się można było spodziewać na zasadzie ich wzorów molekularnych, t. j. że zawierały dwa razy więcej cząstek, od których zależy ciśnienie osmotyczne, niż ciała nieprzewodzące elektryczności. Przyczynę tego odrębnego zachowania się elektrolitów wytłumaczył następnie Arrhenius, przyczym do pewnego stopnia oparł się na dawniejszych poglądach, dotyczących elektrolitów Clausiusa, Williamsona. Przypuszcza on, że gramocząsteczka elektrolitu, np. soli kuchennej, dlatego wywiera dwa razy większe ciśnienie osmotyczne, niż gramocząsteczka nieelektrolitu, np. cukru, że pod wpływem rozpuszczalnika ulega rozkładowi na dwie cząsteczki nowego gatunku, t. zw. jony, które sobie wyobraża jako elementarne atomy lub grupy atomowe obdarzone ładunkami elektrycznemi. Sól kuchenna według tego rozkłada się pod wpływem wody na jon sodu i jon chloru, które są zdolne do samodzielnej egzystencji, przyczym pierwszy posiada ładunek elektryczny dodatni, a drugi ładunek odjemny. Pogląd ten, nadzwyczaj płodny w następstwa, który odegrał między innemi niezmiernie ważną rolę w ścisłym naukowym opracowaniu elektrochemji, teorji elektrolizy, ogniw elektrycznych i t. d. początkowo napotkał na opozycję w kołach chemików, dziś jednak powszechnie jest przyjęty, chociaż objektywnych dowodów istnienia jonów w roztworach pomimo usiłowań Nernsta, Ostwalda jeszcze nie posiadamy. W oświetleniu tej teorji, t. zw. elektrolitycznej dysocjacji, prawo Faradaya, którego niemożliwość starał się udowodnić Berzelius, stało się koniecznością; przypomniała ona też pogląd Helmholtz na naturę atomistyczną elektryczności, która występuje tak wyraźnie w budowie jonów, które stosownie do ich wartościowości obdarzone są różnemi ładunkami elektryczności, stojącemi do siebie w stosunkach prostych. Materjalizacja owa elektryczności postąpiła jeszcze o krok naprzód w najnowszych poglądach fizyków na t. zw. elektrony, która dla teorji chemji jest jeszcze z tego względu nader ważna, że daje możność w sposób więcej realny niż dotychczas dyskutować problemat pochodzenia wszystkich pierwiastków od wspólnej pramaterji [1]. Z zagadnieniem tym jest ściśle związana kwestja stałości pierwiastków. Do niedawna przypuszczenie o niezmienności t. zw. pierwiastków uważano za prawdę niemal aksjomatyczną, przypuszczenie, które w rozwoju dotychczasowym chemji odegrało rolę pierwszorzędną. Nowsze badania przekonywają jednak, że niektóre ciała, mające niewątpliwie cechy pierwiastków, jak np. rad, przekształcając się samorzutnie w inne, między innemi w hel, i aczkolwiek sposób tej przemiany jest na razie dla nas wielką zagadką, sam fakt jej ma doniosłość pierwszorzędną, przewrotową. Odkrycie pierwiastków t. zw. promieniotwórczych (rad, polon, aktyn i t. d.), związane z imieniem polskim (M. Skłodowska) jest przeto w zwycięskim pochodzie chemji nowożytnej epoką niemal równie doniosłą, jaką była epoka pierwszych kroków atomistyki Daltona, bez której i dziś, pomimo usiłowań Ostwalda, Walda i innych, nie ma chemji.

LITERATURA.

Pragnącym poświęcić historji chemji studja gruntowniejsze polecamy następujące dzieła:

Kopp: Die Geschichte der Chemie. 2 t. Brunświk, 1844.
Ladenburg: Vorlesungen über die Geschichte der Chemie, 1904.
E. v. Meyer. Geschichte der Chemie. III wyd. Lipsk 1905.
Ostwald: Leitlinien der Chemie. Lipsk, 1906.

---

[1]) Porównaj: L. Marchlewski. Z filozofji nauk przyrodniczych. Poglądy chemiczne na budowę materji. Warszawa, 1904 r.

SZKIC EWOLUCJI POJĘĆ W MINERALOGJI.

OPRACOWAŁ

JÓZEF SIOMA.

Często się słyszy, że treść pewnej dziedziny naukowej można przedstawić niezależnie od jej historji, bez wglądania w przeszłość jej rozwoju, że wtrącanie historji nauki do wykładu jest balastem, obciążającym go bezcelowo, gdyż to, co weszło do nauki, niezależnie od kolei, jakim podlegało w swym stopniowym ukształtowaniu, da się przeprowadzić, wysnuć w drodze logicznego myślenia. Że taka możność wyzucia wykładu z pierwiastka historycznego jest pozorna, że może być mowa tylko o tym, czy udzielić mu miejsca świadomie, czy też biernie zachować się wobec wyzierania z wykładu ciągłości historycznej, nie trudno dowieść. Nawet wykład dogmatyczny skrępowany będzie zawsze granicami, w jakich się obracała myśl ludzka w dziedzinie pewnej. W naukach doświadczalnych nie wystarcza twierdzenie dogmatyczne. Wszystko, co zostaje tu podnoszone do godności twierdzenia naukowego, musi opierać się na doświadczeniu, musi przejść przez próbę krytyki i tylko to, co jest w zgodzie ze wszystkiemi faktami znanemi, może pretendować do miana prawdy naukowej. Logika nie daje nam jasnowidzenia faktów nowych, dalszych doświadczeń. Jest zatym bezsilna, ilekroć chodzi o sprawdziany rzeczowe. Nie mniej bezsilna jest jednak i w wysnuwaniu wniosków. Zakres wniosków, do których dochodzimy w drodze konsekwencji logicznych, jest bardzo szczupły i gdybyśmy tylko na nich poprzestawali, musielibyśmy się wyzbyć znacznej, bardzo nawet znacznej, części wiedzy. Jest to aglomerat bardzo nieszczelny, niejednolity. Dość przetrząść jakikolwiekbądź jej dział, żeby się o tym przekonać. Powoływanie się zatym na logikę równa się traktowaniu rzeczy z odległości Syrjusza. Każdy, kto zada sobie trud zanalizowania, jakie pierwiastki złożyły się na pewne twierdzenie naukowe, czego jest ono wyrazem, przekona się jak odmienny charakter mają pojęcia naukowe, w porównaniu z tym, czegobyśmy się spodziewać mogli na mocy cechowania omawianego. Powiada się, że to, co naukowe, jest pewne, niezbite, jest wyrazem dokładnego poznania. Zatrzymajmy jednak uwagę na którymkolwiek twierdzeniu naukowym. Upływa pewien czas, zakres wiedzy, ilość faktów się zwiększa, zaostrza się obserwacja, wysubtelniają metody i to, co było dla swego czasu prawdą, doskonałym niemal wyrazem wiedzy, staje się anachronizmem, przeżytkiem naukowym. Takie przeświadczenie o warunkowości prawd naukowych, o ich znaczeniu, jako szczebli w nieskończonej drabinie, po której pnie się umysł ludzki ku poznaniu rzeczy, to jedna z bardziej ważnych i płodnych dla samej nauki zdobyczy, jaką przynosi znajomość historji wiedzy. Nie jedyna to przecie, a jako motyw do poznawania historji nauk, nie dominująca okoliczność. Są względy takie, które nietylko zniewalają do znajomości i liczenia się z historją nauki, ale czynią powoływanie się na nią nieodzownym w wykładzie, jeżeli się ma na względzie istotnie wierne jej przedstawienie, a nie podanie falsyfikatu lub dowolnej improwizacji. Chodzi o to, że nikomu nie jest dane samodzielne ogarnięcie całego świata idei, zetknięcie się ze światem zjawisk. Zresztą i „widzenie" samo jest właściwością wysoce indywidualną. Zależnie od cech umysłowości, przez uwagę ludzi, patrzących na tą samą rzecz, przewija się zupełnie odmienny szereg spostrzeżeń. Tylko zawdzięczając możności utrwalania i komunikowania myśli powstaje pewna wiedza, jako pokaźniejsza suma wiadomości. Zarówno jednak druk jak i słowo nie są nigdy wiernym odbiciem myśli, nie są tedy środkiem doskonałym jej utrwalenia. I stąd właśnie rodzi się konieczność odczytywania pomiędzy wierszami całej jej pełni, odbudowywania na mocy danego materjalnego wyrazu pracy myślowej, całej jej treści istotnej. To jest możliwe tylko w jeden jedyny sposób. Myśl nasza musi przejść przez pewien niezbędny cykl ewolucjonowania, odpowiadający temu, jaki myśl daną pierwotnie zrodził. Dla ewolucji tej musi być jednak grunt odpowiedni, ziarno to musi kiełkować w odpowiedniej pożywce. Boć pojęcia nabierają dla nas dopiero wtedy wartości realnej, gdy się wiążą z wyobrażeniami, już przez nas posiadanemi. Jest to czystej krwi proces asymilacyjny i tu, jak wszędzie, niepodobna zaszczepić nic na gruncie, nie stanowiącym substratu właściwego. Konieczność takiego zespalania się z myślą autora, takiego nastrajania się do unisonu, by sobie przyswoić jego ideę, wskazuje na mus ostrożności względem interpretacji, brania z drugich rąk. Interpretującego zaś obarcza obowiązkiem rzeczowego traktowania. Samo przytym zapamiętanie lub podanie słów autora nie wystarcza, bo owego właściwego tła jego myśli nie odbudowuje. Musi być uwzględniona cała historja jego twórczości, odzwierciadlony podkład realny, na którym idea powstawała. Jeżeli tak jest z pojęciami pojedyńczemi, czyż może być inaczej, gdy chodzi o kwestję szerszą, mającą szeregi pracowników i koleje rozmaite. A taką jest większość kwestji naukowych.

Obok tej strony sprawy zasługuje na względy i inna. Mało kto chyba przypuszcza, że w pracy naukowej istnieje porozumienie między jednostkami, że wyzwalająca się z niej myśl wychodzi w formie doskonałej, obejmującej jakąś całość. Przeciwnie, jest niezawodnie rzeczą znaną, jak nierównomiernie rozwijają się rozmaite działy tej samej kwestji, jak mozaikowy charakter ma każdy niemal wniosek. Czy może być mowa o ujęciu dokładnym sprawy bez pominięcia ważnego jakiegoś przyczynku, bez znajomości jej historji, bez szperaniny bibljograficznej.

O ile łatwo jednak zorjentować się zarówno w niezbędności jak ważności historji nauki dla właściwego przyswajania nauki, o tyle trudniej zastosować się do tej konieczności. Gdy nauka ma już długą i bogatą przeszłość, gdy przechodzi w stan wiedzy ścisłej, wżyć się w myśl jej twórców z rozmaitych epok, ocenić ważność poszczególnych momentów, rozwikłać gienezę pojęć, wykazać ich rozwój, następczość w czasie jest rzeczą niezmiernie trudną. Oprócz ogromnej erudycji niezbędna jest zdolność do niejakiego transformizmu duchowego, by stawać kolejno na stanowisku umysłowym epok, społeczeństw czy jednostek. A tylko w taki sposób można ocenić doniosłość chwili, dociec zależności w rozstrzelonych dla oka obcego wydarzeniach twórczej pracy pokoleń. To też taka praca już sama w sobie stanowić będzie osobną dyscyplinę i, wkraczając w dziedzinę historjozofji, wychodzi poza zakres nauk pojedyńczych, powołując pod swój sztandar swoiste uzdolnienia i metody. Wyniki takich badań historjozoficznych stają sie ze względów zaznaczonych nie- odzowne, jako źródło poprawek w pojmowaniu danych każdej nauki. Dopiero w taki sposób poparte studja naukowe zdobywają ten charakter krytycyzmu, jaki jest niezbędny dla należytego owładnięcia materjałem naukowym.

Oprócz takiego znaczenia ma jednak historja nauki i bardziej doniosłe, poza granice danej nauki sięgające. Obok potęgowania bowiem samej nauki w jej wartości, stawia przed nasze oczy i te tysiączne fibry umysłowości ludzkiej, anatomizuje je w ich własnościach twórczych, odsłania przed nami gienezę myśli naukowej. Jak się okazuje, twórczość naukowa nie jest wynikiem tak prostych, jednolitych tendencji, jak to się zwykło przypuszczać. Często się naprzykład spotyka mniemanie, że wierzenia religijne są antytezą poglądów naukowych, że religja przez swych rzeczników hamuje postęp wiedzy. Trzeba tu odróżniać pasorzytów religji (jakoteż nauki) od ich rzeczników. Otóż w historji nauk na każdym niemal kroku spotykamy się z najoczywistszemi dowodami, że dzieje się wprost przeciwnie. Wierzenia religijne, rojenia mistyczne są ustawicznie pobudką do badań naukowych, są paleniskiem, podtrzymującym napięcie badawczej energji i kto wie, czy pośród czynników naukowej pracy twórczej nie odegrały roli jednego z bardziej doniosłych bodźców. Boć mniema się powszechnie, że twórczość naukowa jest czymś w rodzaju funkcji niejakiego specjalnego „nerwu" naukowego, że zamiłowanie do dociekań naukowych cechuje pewne odrębne indywidualności, pokrewne sobie duchowo. Wistocie nic podobnego nie zachodzi.

Twórczość naukowa bierze swój początek w tak odmiennych niekiedy właściwościach duchowych, tak rozmaite pierwiastki składają się na oblicze duchowe naukowych pracowników, tak się tu sprzęgają najrozmaitsze rysy umysłowości ludzkiej, że tę dziedzinę pracy należy uważać za nieodzowną, nieodłączną funkcję życiową zespołów ludzkich, niejako za funkcję fizjologiczną zbiorowej umysłowości, gdzie jednostka jest niczym innym, jak wcieleniem pewnych tendencji zrzeszenia, jest narzędziem bezwiednie służącym do dania wyrazu funkcjom zespołu i w danym jakimś razie wszystko jedno, czy ta lub owa jednostka, kładzie piętno swego talentu, indywidualności na nadaniu wyrazu dojrzewającej myśli, bo tuż gdzieś obok dorastają inne—i nie ta, to owa stanie się organem mowy dla danego zbiorowego siedliska pracy badawczej. Wymienię chociażby jeden ze świeższych i bardziej znanych przykładów. Darwin sam wskazał niektórych ze swych poprzedników, rzucił światło na ich rolę w przygotowaniu gruntu dla idei, których stał się rzecznikiem. Jak się jednak dalej okazało, miał ich znacznie więcej. Pozostawali w cieniu za panowania innych poglądów. Ich rola, rola tych drobnych faktów i odkryć, na jakich oparła się nauka o ewolucji, była długi czas niewidoczną. Pierwsze jednak usiłowania, przygotowujące grunt dla niej, sięgały daleko w przeszłość, wzmagały się stopniowo, zaczęły się wreszcie napraszać pod uwagę. Gdy przyszedł Darwin ze swą subtelną uwagą, miał do spełnienia nie rolę twórcy pojęć, nie bojownika o nowe i nieznane dotychczas idee. On podkreślił fakty znane, dorzucił garść spostrzeżeń i myśli nowych i to przeważyło szalę na korzyść poglądów, które już w Lamarck'u, Lyellu, Haecklu mialy swych bojowników, a w Wallace'ie znalazły orędownika, który jednocześnie z Darwinem dał wyraz nurtującym w nauce ideom. Nie mniej dosadne przykłady znajdujemy w odgrzebywanych coraz częściej przez historję wiedzy faktach powstawania teorji, praw, parokrotnie, a zupełnie niezależnie od siebie i w rozmaitym czasie wypowiadanych.

A skoro tak, jakże można w wykładzie pozbawiać naukę tego jej znamiennego charakteru ciągłości w czasie, ewolucjonowania po przez umysły?

Jak można podawać za prawdy bezwzględne to, co jest tylko mniej lub bardziej doskonałą formułą czasową. Jak wreszcie można zacierać w swych słowach ten charakter sprawozdawczy, jaki jest jedynie właściwy w dziedzinie myśli, w których autorstwie niema się udziału, a i nawet nie zawsze się jest pewnym, czy się je oddaje w sensie należytym.

Stąd to właśnie ustaliło się w zwyczaju podawanie twierdzeń nauki z możliwym uwzględnieniem wszystkich cech jej rodowodu. Pomijanie tego niby balastu, dogmatyczny wykład jej t. zw. prawd jest jeżeli nie falsyfikatem, to w każdym razie improwizacją tym bardziej dowolną i paczącą istotną treść danej nauki, im bardziej usiłuje się ją wyzwolić ze znamion naturalnych.

Niestety, zwłaszcza w dziedzinie, w której z ewolucją pojęć mamy się zapoznać, tradycja poszła w niepamięć, ciągłość historyczna nietylko w wykładzie, ale i w badaniach zanika, dzięki rozwielmożnieniu się prądów zgoła nawet obcych pracy naukowej, ciążących na niej jako naskorupienie, tamujące jej bieg rozwojowy. Z dziedziny myśli, z której wykwitło tyle doniosłych idei, która wyhodowała cykle nauk ścisłych, bo tu i chemja i krystalografja swe soki czerpały, a fizyka znalazła niwę zoraną dla szeregu wywodów, mineralogja przekształcona została w nieudolnej interpretacji na suchy wykaz, martwy spis inwentarza szczegółowych wiadomości. To też mówi się niekiedy, że ona kończy swoje bytowanie. Po wielokrotnym pączkowaniu została jakby tylko martwina, z której życie wysiąkło. Tak jednak nie jest. Trzeba się tylko rozejrzeć w tej dziedzinie, aby się o tym przekonać.

Już w zaraniu swym, w niemowlęctwie myśli naukowej wogóle, a w szczególności — myśli tej w dziedzinie nauk przyrodniczych, spostrzegamy charakter swoisty w zagadnieniach stawianych na tle znajomości tych ciał przyrodzonych, które później otrzymały nazwę — minerałów. Gdy w zwierzętach, roślinach dopatrywano się pierwiastka transcendentalnego, pewnej siły odrębnej, egzotycznej, minerały już w samym zaraniu łączone były w umyśle obserwatora z siłami przyrodzonemi. Zapewne, i tu coś niecoś szło na łup mistycznych rojeń, uchodziło za przedmiot szczególnej łaski boskiej, naogół jednak mniej dopatrywano się tu znamion sił szczególnych, praw nadprzyrodzonych.

Pierwszemi znawcami i dostarczycielami minerałów światu spółczesnemu byli, z pośród ludów cywilizowanych starożytności, Fenicjanie. Mało jest jednak znana historja kultury tego przemyślnego narodu, nie wiele też da się powiedzieć o ich roli w zakresie mineralogji. Pierwszych wiadomości o minerałach dostarczają nam dopiero dzieła klasyków helleńskich. Spotykamy się z bursztynem (ἤλεκτρον) u Homera, wspomina on o wielu świecidełkach, które Grecy od Fenicjan zdobywali, mówi o kamieniach drogich, służących do ozdoby świątyń i osób. Tu na obczyźnie, niezawodnie w interpretacji kapłanów, te ciała kopal ne otaczane są legiendami, nabierają znaczenia talizmanów. Pochodzenie ich łączone jest z misterjami. Stąd i same mają własności cudotwórcze. Tak przenikające przez „kryształ promienisty“ promienie słoneczne rozpalają ogień święty. Opal agat, jaspis, gagat, obsydjan, topaz, po dzień dzisiejszy jako ozdoby używane, znane są tu narówni z magnetytem, djamentem, szmaragdem—już to jako talizmany, już to jako kamienie święte i nietykalne. W miarę jednak jak się demokratyzuje władza w zespołach helleńskich, a teokratyzm słabnie, i minerały nabierają w oczach Greka innej wartości i znaczenia. Arystoteles stawia już kamienie na równi z metalami oddawna w świecie helleńskim znanemi jako kopaliny powszednie, użytkowe i dzieli cały znany naówczas zasób mineralny na ὀρυκτά (kamienie) i μεταλλευτά (kruszce). W rozumieniu jednak ich stanowiska w przyrodzie, jakkolwiek wolny od fantazji poetyckich eposu, nie idzie dalej, jak do ogólnikowego powoływania się na żywioły.

Kamienie powstały przy udziale „wyziewów wilgotnych“ kruszce—„suchych dymów”. Na owe czasy jest to jednak niezaprzeczenie znamienna interpretacja, a kto wie, czy niema praw ojcowstwa do teorji, bardzo mało od nas odległych. Być może, że w tym niewyszukanym, ale w każdym razie już przyrodniczym podziale, tkwi ziarno, z którego wykiełkował tyle owocny dla nauki spór neptunistów z wulkanistami. Tu nie spotykamy jeszcze żadnych cech naukowego traktowania rzeczy; czasy następne są krokiem wstecz. Diodor na kilkadziesiąt zaledwie lat przed erą obecną wypowiada się o krysztale górskim, jako składającym się z wody jeno, nie przez pospolitą siłę, ale moc ognia boskiego ściętej w ciało stałe o właściwej mu postaci. Seneka, jakkolwiek dla tegoż kryształu ma już bardzo naturalne tłumaczenie, w porównaniu z poprzednim, upatruje bowiem w krysztale tym lód, z opadów wody powstały i stąd wolny od części ziemistych, tylko przez długotrwałe działanie zimna stężały w ciało tej twardości,—w innych razach nie wznosi się ponad fantazjowanie mniej lub bardziej naiwne. Jeden z lepszych znawców ciał mineralnych, zwłaszcza krystalicznych, w nowszej starożytności — Plinjusz Starszy tak jeszcze jest jednak daleki od jakiejkolwiekbądź metody nietylko badania ale opisu, że nawet trudno wywnioskować z jego słów, o czym mowa.

Dopiero średniowiecze inauguruje żywszy rozrost wiadomości mineralogicznych, daje im formy ściślejsze. Idzie to w parze z rozwojem górnictwa, które w tym czasie zakłada swe podwaliny w Europie środkowej, tam właśnie, skąd później zataczając coraz szersze koła, wraz z wiadomościami technicznemi, rozsiewany zostaje plon nauki Wernera, Breithaupta — ojców mineralogji spółczesnej. W szóstym stuleciu w ręku Słowian, bodaj że wychowanych na tradycji, przyswojonej przez ojców, za czasów parobkowania niewolniczego u Rzymian powstaje i rozwija się górnictwo w Czechach i Morawji. Wędruje stąd do Czarnolasu, na Harz. W 920 r. poznany zostaje łupek miedzionośny Frankenbergu w Hessji, w 935 r. pokłady Rammelsberga na Harzu, w wieku 12-ym otwierają się Góry Kruszcowe Saskie dla kopalnictwa i mineralogji.

Górnicy zabiegliwie krzątają się około wydobycia „skarbu" na światło dzienne, prują łono ziemi w pościgu za kruszcem. Za niemi wślad dąży baczne oko obserwatora ciułającego wiadomości co do charakteru występowania tak kruszców samych, jaki skał. Materjał, wyrzucany na powierzchnię, w tysiącach okazów wędruje po świecie, trafia do gabinetów badaczy zagadek przyrody, pociąga ich uwagę. Na pracy tej długi czas jeszcze znać piętno pojęć pisarzów starożytności helleńsko-romańskiej. Obfitość jednak materjału, nawał spostrzeżeń, jakie się cisną, z konieczności chociażby, przy ciągłych zachodach około kopalni, rozpierają ramy szablonu zapożyczonego, znajdują samodzielnych dziejopisów. Jednym z takich, którego imię utrwaliło się w historji, jest Jerzy Agricola (1490—1555). Lekarz z zawodu w Joachimowie (Joachimsthal) i Chemnitz, po dzień dzisiejszy ogniskach kopalnictwa Gór Kruszcowych, około kopalnictwa chodzący i z nim zżyty, miał sposobność gromadzenia wiadomości tak bezpośrednio, jak ze środowiska, w którym większość raczej podziemia za swój dach uważała.

Zawód lekarski do czasów ostatnich był tym kunsztem, który pielęgnował wiadomości przyrodnicze; objął tę rolę, ze zmianą warunków społecznych, po mnichach. Rola ta z natury rzeczy była najbardziej właściwą ludziom, którzy z charakteru zawodu musieli się uciekać do przyrody po leki, na które zioła i sole przyrodzone oraz ich przetwory się składały, jako też kamienie, których moc leczniczą upatrywano w ich własnościach przyrodzonych czy nadziemskich. Bogaty materjał w doświadczeniu górniczym zdobyty znalazł tedy odpowiedniego wyraziciela. Spotykamy też po raz pierwszy u Agricoli cały szereg nowych nazw, dotyczących minerałów i skał tu pospolitych, jak kwarc (skwarzec), szpat, łupek, gnejs (gnojec), opis szczegółowy kształtu, barwy, twardości, połysku, łupliwości etc. Werner, syn tej samej ziemi i jej „skarbów“, słynny znawca i interpretator, nazywa Agricolę „ojcem wszechwiadomości metalurgicznych”. Niezawodnie jest on pierwowzorem tych badaczów i pisarzy, jakich doba ówczesna wydała.

W tym też czasie należy upatrywać pierwocin kierunku, który po dziś dzień jeszcze dominuje w mineralogji opisowej— poznawania minerałów w ich własnościach gieometrycznych.

Niezawodnie już starożytni zbieracze musieli zwrócić uwagę na prawidłowość postaci minerałów krystalicznych, dopiero w tym jednak okresie Gesner (De rerum possilium figuris, 1551), Boetius de Boot (Gemmarum et Lapidum historia, 1609) kuszą się o ujęcie tej prawidłowości. Usiłowania te nabierają jednak znaczenia dopiero w ręku Kepplera, Bartholina, Huygensa, Stenona. Już od dawien dawna wśród okazów mineralogicznych zwracały na się uwagę niektóre, posiadające postać wielościanów. Okazy takie trafiały się wszędzie już przy pierwszych usiłowaniach górnictwa, zdobiły zbiory szperaczy, pociągały uwagę już grą światła, już samą „dziwną” postacią. Tendencji do uświadomienia sobie własności tych postaci nie spostrzega się długi czas. Uważano je za przypadkowy przejaw własności materji. Tłumaczy się to być może tą okolicznością, że światu starożytnemu (a wieki średnie na tych wiadomościach poprzestawały) była prawie obcą znajomość wielościanów wogóle. Znano zaledwie pięć brył gieometrycznych prawidłowych: sześcian, ośmiościan, dwunastościan, czworościan i dwudziestoczterościan. To też prawidłowości postaci, jakie zachodzą w ciałach przyrodzonych, dla niewyrobionego oka stawały się niedostrzegalne. Tym mniej to się jeszcze wyda dziwnym, jeżeli zwrócimy uwagę, że wielościany przyrodzone występują rzadko o takim rozwinięciu oblicza, by prawidłowości łatwo się było dopatrzeć.

Jednak bardziej obyci zarówno z gieometrją jak i z ciałami o postaci wielościanów już oddawna zwracali uwagę na prawidłowości, jakie tu zachodzą. Wraz ze sposobnością obserwowania zjawiska krystalizacji, jaka się nadarza przy dociekaniach chemicznych, przychodzi myśl, że ciała chemiczne wogóle mogą być otrzymywane w postaci wielościanów i że wielościany przyrodzone mogły powstać analogicznie. Zwłaszcza taki pogląd zaczyna coraz szersze widnokręgi zataczać w wiekach XV—XVII. Wreszcie niektórzy uczeni wieku XVI, jak Brunguccio, Kepler formułują zagadnienie kategorycznie: postać gieometryczna wielościanów przyrodzonych jest czymś stałym, podlegającym prawom gieometrji. Jest tu sporo mistycyzmu przytym.

Enceljusz z Saalfeldu powiada, że przyroda w łonie ziemi sposobem cudownym uprawia gieometrję. Keppler w „Harmonices mundi libri" (1669 r.) mówi o kryształach, jako wytworze naturae geometrisantis (przyrody gieometryzującej). Jednak są to czasy, kiedy umysł ludzki, nie poprzestając na gieometrji starożytności, opanowuje coraz bardziej prawidłowości obserwowane w przyrodzie, pogłębia i wysubtelnia ich znajomość, zdobywając się wreszcie na pomiary i podnosząc do znacznej doskonałości ich ścisłość. Dążenie do utrwalenia i formułowania notowanych prawidłowości za pomocą znaków matematycznych znacznie pracę uprzystępnia i potęguje. To, co się pierwej niewyraźnie, mglisto zarysowywało w umysłach, otrzymuje postać obserwacji, wykazanych ilościowo. Tak więc w ręku anatoma i teologa duńskiego kardynała Mikołaja Stenona w dziele „De solida inter solidum" (1669) znajdujemy pierwszą jasną i określoną formułę prawidłowości, zachodzących w postaci wielościanów przyrodzonych, formułę, która się ostała po dzień dzisiejszy jako prawo stałości kątów. Gdy porównamy kilka kryształów tego minerału, który był już przedmiotem uwagi Seneki Plinjusza, a który w postaci bezbarwnych przezroczystych okazów nosi nazwę kryształu górskiego, pospolicie zaś nazywa się kwarcem, w każdym spostrzegamy nieco odmienne zarysy powierzchni. Jednak nawet dla oka nieuprzedzonego będzie rzeczą oczywistą, że poza zmianami w rozmiarze płaszczyzn w ich zarysie linjowym, jest pewna tożsamość w ich ugrupowaniu. Owóż Steno po raz pierwszy wykazał, że nachylenie ku sobie płaszczyzn, stanowiących powierzchnię kryształu, jest wielkością stałą i niezmienną. Zarówno wielkie, jak i małe kryształy mają zawsze jednakowe kąty między płaszczyznami identycznemi. Prawidło to, stwierdzone już przez samego Stenona i na innych wielościanach przyrodzonych, sprawdzone później po wielokroć i nie znające wyjątku, nabrało oprócz znaczenia teoretycznego, tym więcej wagi w praktyce, że odrazu dało możność ustalenia punktu oparcia dla poznawania prawidłowości dalszych zachodzących w krysztale.

Mając za wytyczną to prawidło, łatwo się było doszukać, że rozmaitość postaci, jaka się spotyka w kryształach tego samego minerału, jest pozorna, rozmaity bowiem ich wygląd, wielkość zależne są od rozwoju kryształu i sprowadzają się do niejednakowego w rozmaitych kierunkach stopnia przesunięcia równoległego, co jednak istoty ich charakteru gieometrycznego nie zmienia tak, jak sześcian mały jest zupełnie identyczny w swych własnościach z sześcianem dużym. W tym samym czasie przychodzi z pomocą utrwaleniu takiego gieometrycznego pojmowania krzyształu znana już dawniej, jeszcze przez Agricolę wspominana w minerałach zwanych „fissiles“ własność łupania się wzdłuż płaszczyzn pod naciskiem, uderzeniem. Kalcyt np. pod wpływem uderzenia, ogrzewania łupie się w ten sposób, że całe ciało wewnątrz otrzymuje system płaszczyzn dzielących je na rombościany. Płaszczyzny idą równolegle w trzech kierunkach, tak że dzielą kryształ na szereg odłupków mających kształt skośnych równoległościanów, gdzie każda z sześciu płaszczyzn stanowi równoległobok. Paralelogramy te mogą łatwo być sprowadzone przy równomiernym łupaniu do rombów. Bartholinus stwierdził, że kąty tu są stałe i wynoszą 101° i 79°.

Mamy tu do czynienia już z fizycznym jakby przesuwaniem równoległym płaszczyzn. Spółczesny Bartholinusowi Boyle konstatuje tę samą własność łupania się wzdłuż płaszczyzn u wielu innych minerałów. Okoliczność ta niezawodnie przygotowuje grunt do zapatrywania się na płaszczyzny, składające się na oblicze kryształu, zupełnie gieometrycznie. Skoro płaszczyzny wielościanów krystalicznych są ruchome, nic nie stoi na przeszkodzie do przesunięcia ich tak, by dały wielościan prawidłowy—w przypadku kalcytu np. — rombościan. Tak nieznaczna transpozycja jednak jest nieodzownym krokiem do ujawnienia dalszych prawidłowości w krysztale, mianowicie prawa racjonalności odcinków, prawa symetrji. Dziwnym jednak zbiegiem okoliczności prawidłowość postaci kryształów na pewien czas schodzi na plan drugi, wysunięty zaś zostaje na widownię związek między postacią a budową wewnętrzną.

Wymieniony Duńczyk Bartholinus popchnął poznawanie prawidłowości, zachodzących w kryształach, na nowe tory przez odkrycie własności „szpatu islandzkiego“ [1]), który jest, jak wiadomo,

---

[1]) Experimenta Crystalli islandici disdiaclastici. 1670.

czystą o wielkich rozmiarach kryształów odmianą bardzo pospolitego minerału, zwanego kalcytem, własności ciekawej — rozdwajania promieni świetlnych, co w praktyce się wyraża przez zdwajanie obrazu przedmiotu oglądanego przez płytkę szpatu. Spółczesny Bartholinusowi Huygens zajmuje się w tym czasie własnościami promieni świetlnych. Dwójłomność znana mu już jest w kwarcu. W ciele tym jest jednak słabo wyrażona i wobec niedoskonałości metod ówczesnych nie poddaje się badaniu. Szpat islandzki, posiadający tę własność w daleko znaczniejszym stopniu, prowadzi badacza tego do wniosku, że dwójłomność zależy od własności kryształu przepuszczania światła z rozmaitą szybkością w rozmaitych kierunkach i daje znany do dziś w fizyce schemat. Prawa odbicia i załamania promieni poznane przez Huygensa stosują się do jednego z dwu promieni, na jakie się rozszczepia promień zwykły, trafiając na powierzchnię kryształu. Drugi promień, zwany niezwykłym, zachowuje się inaczej. Stosunek ich wzajemny sformułowany zostaje tak: „Jeżeli (fig. 1) *ABPS* jest sferoidem, po którym w pewnym przeciągu czasu rozchodzi się w krysztale światło odpowiadające niezwykłemu załamaniu, to koło *BVST* określa rozpowszechnienie się w tym samym czasie światła, odpowiadającego załamaniu zwykłemu“. Pod względem optycznym tedy ciało krystaliczne jak kalcyt jest dwukierunkowe. „Jakkolwiek przeto według wywodu naszego dwa są rodzaje rozchodzenia się światła w tym krysztale, jasne jest jednak, że tylko w kierunku prostopadłym do osi *BS* sferoidu jedno rozchodzenie się następuje szybciej niżeli drugie, w innym zaś kierunku, mianowicie równolegle do tejże osi *BS*, która jest jednocześnie osią kąta rozwartego kryształu, oba posiadają szybkość jednakową“.

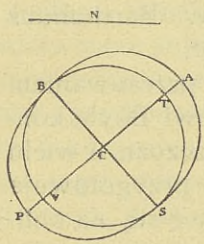


Fig. 1.

Wyłania się tu przed naszemi oczyma wątek tych pojęć, które legły w osnowie całego gmachu krystalografji spółczesnej, jako nauki o ciałach anizotropowych. Kalcyt zasadniczo różni się tym od szkła, wody, że względem światła wykazuje rozmaite zachowanie zależnie od kierunku.

Gdy przepuszcza się światło przez kryształ we wszelkich kierunkach, to w każdym kierunku kryształu zawsze przejść są zdolne dwa promienie, dwie fale świetlne. Szybkość ich jest jednak rozmaita. Spółczynnik załamania jednego z promieni jest stale jednakowy, przeto i szybkość jednakowa, a punkty, do których jednocześnie dobiega światło od jakiegoś punktu wyjścia w krysztale, stanowią powierzchnię kuli. Zjawisko zachodzi tu tak, jak w innych ciałach zbadanych przedtym przez Huygensa. Opór, jaki stawia ciało przechodzeniu światła, jest równomiernie jednakowy. Jest to zachowanie się izotropowe. Inna rzecz dla promienia drugiego. Tu punkty, do których dobiega światło promienia jednocześnie, stanowią figurę dwuosiową. Opór zatym, stawiany przez ciało, jest rozmaity i mierzy się wielkością zmienną, wahającą się między wielką i małą osią, jest ściśle zespolony z kierunkiem. Ciało okazuje się anizotropowym, a osi mają określone położenie względem postaci zewnętrznej. Mianowicie oś mała odpowiada w kalcycie przekątnej między kątami C i E (fig. 2), a oś wielka — między kątami D i F. Jak widzieliśmy, Huygens badał własności optyczne kalcytu w wielościanie, otrzymanym w drodze łupliwości. To, co stwierdził dla danego wielościanu, dało się wykazać dla każdego z tych wielu, na jakie się dana bryłka przez dalsze łupanie da podzielić. To naprowadza Huygensa na myśl, że wielościan łupliwości kalcytu składa się z „małych, niewidzialnych i jednakowych cząstek“, będących „sferoidami spłaszczonemi“ i ułożonych jak na fig. 3. Na włas-

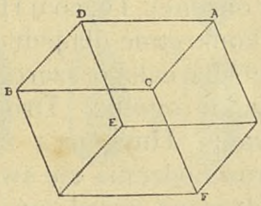


Fig. 2

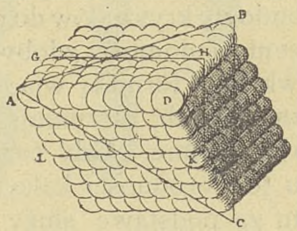


Fig. 3.

nościach układu ich polega łupliwość, a mianowicie w ten sposób, że „każda warstwa łatwo się oddziela od sąsiedniej, bowiem każdy sferoid tylko od trzech sferoidów warstwy sąsiedniej się odczepia“, gdy, by naruszyć gładkość i ciągłość warstwy „musiałby się odczepić od sześciu innych sferoidów“. W rezultacie takiej koncepcji wyłania się pojęcie zależności budowy ciała krystalicznego od jego drobnych cząstek pierwiastkowych. Łupliwość kalcytu staje się konsekwencją własności budujących go drobin. Przez nawarstwianie ich prawidłowe możemy otrzymać ciało dowolnych rozmiarów wiernie powtarzające własności drobnych jego cząstek, i odwrotnie przez łupliwość bryła dowolnych rozmiarów daje się podzielić na drobniutkie bryłki, z których każda jest wiernym uosobieniem całości. Pojęcie rozmiaru staje się zbytecznym w rozumieniu ciała krystalicznego. Postać jego zewnętrzna schodzi na drugi plan, staje się czymś podrzędnym. Ciało krystaliczne — to środowisko materjalne, w którym własności zależne są od kierunku, słowem—to środowisko materjalne anizotropowe. Huygens nie stawia takiej formuły wyraźnie. Zostało to uczynione znacznie później, nie mniej przeto jest rzeczą oczywistą, że formuła taka tu swój początek posiada. Później przychodzi znajomość ciał o trzech wytycznych kierunkach, gdzie są trzy główne szybkości rozchodzenia się światła, trzy osi słowem, przez Arago, Biot'a, Brewster'a niezależnie od siebie wskazane; następuje formułowanie budowy ciał krystalicznych bardziej ogólne, matematyczne, sferoid optyczny Huygens'a wciąż jednak zostaje na stanowisku przewodnim w formułowaniu własności fizycznych tych ciał, i, jakkolwiek jest rozumiany w rozmaitym czasie sam pierwiastek, czy jako cząstka fizyczna, jak u Hauy'ego, czy też jako punkt, środek ciężkości pewnej bryły skądinąd fizycznie pojmowanej, jak u Gadolina, równoległy układ pierwiastka budującego kryształ nie schodzi z widowni dociekań budowy kryształów do chwili obecnej. To, co u Huygens'a jest wyrazem wiadomości zdobytych konkretnie dla jednego ciała, staje się wkrótce formułą wiadomości dla całego szeregu kryształów poznawanych, otrzymuje znaczenie ogólne. Drogi są jeddak nieco odmienne. Gdy rozumowanie Huygens'a opiera się na pojęciu jednorodności kalcytu z rozchodzenia się światła wysnutym, tu za podstawę służy wywleczona przed uwagę badaczów po raz pierwszy przez Bartholinusa łupliwość. Bartholinus, Boyle już znali tę cechę w szeregu minerałów. Są to jednak jeszcze wiadomości luźne. Materjał, który tu był objektem, był i szczupły i zbyt mało w innym względzie znany, by mógł podsunąć myśl o znaczeniu tej własności. Okresowi temu obce są niemal jakieś bliższe dane o prawidłowości tak postaci jak budowy wewnętrznej.

W najbliższym już jednak czasie gromadzi się taki materjał. Słynny Linneusz (1707—1778) przygotowuje swoją pracą systematyzowania ciał przyrodzonych grunt dla niezmordowanego zbieracza i badacza kryształów Romé de-Lisle'a. Uczony ten niezależnie od Stenona i późniejszego włoskiego badacza lekarza Guglielmini'ego z Bolonji (De salibus dissertatio epistolaris, 1707) poznaje prawo stałości kątów i stwierdza je na olbrzymim zgromadzonym przez się materjale kryształów przyrodzonych. Za pomocą zbudowanego wraz z Carangeot'em goniometru zwanego przykładanym (fig. 4) dokonywa szeregu pomiarów i konstatuje, że postaci kryształów stanowią określoną grupę wielościanów i że dadzą się tu wyróżnić postaci zasadnicze od pochodnych. Idea ta znajduje też wspaniałe opracowanie u spółczesnego Lisle'owi — René Just Hauy'ego.

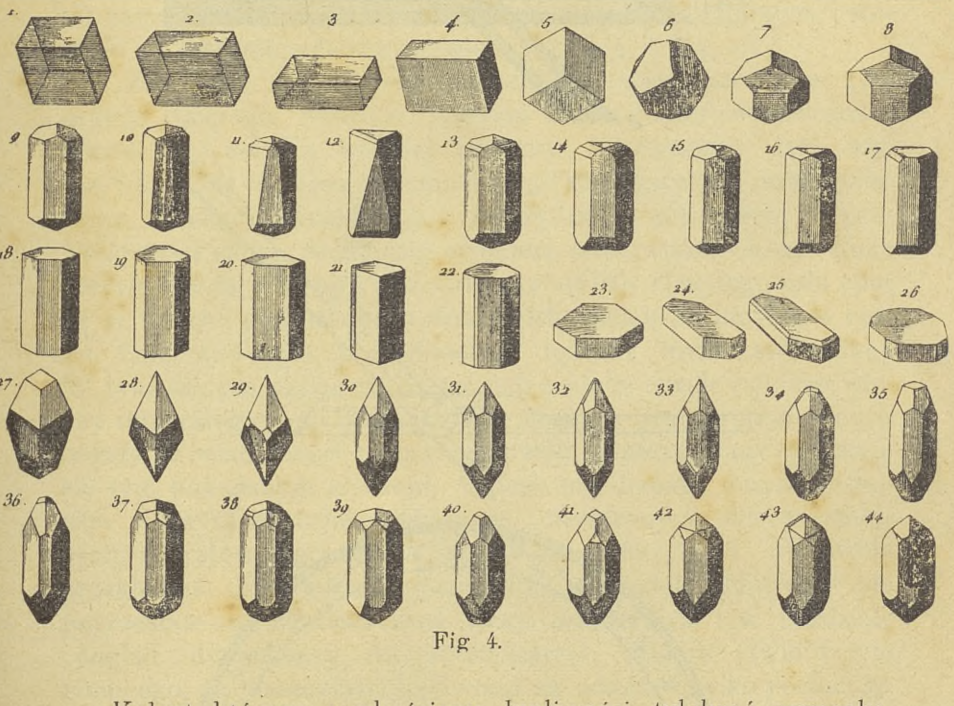


Fig. 4.

Kalcyt, którego rombościany łupliwości tylekroć zwracały uwagę, występuje w kryształach o bardzo rozmaitej postaci (fig. 5).

Już chemik szwedzki Torbern Bergman (zm. 1784) znalazł, że wszystkie te postaci dadzą się wyprowadzić z jednej (forma primitiva). Nic nie wiedząc o tym, Hauy wyprowadza postać znalezionego w Defrance słupka sześciobocznego kalcytu, w którym są zaznaczone rombościany łupliwości, z tego właśnie rombościanu, mianowicie przez nawarstwienie drobniutkich rombościanów na płaszczyzny wielościanu jądrowego. Budowa kryształu w ten sposób rozumiana jest analogiczną do tej, jak ją

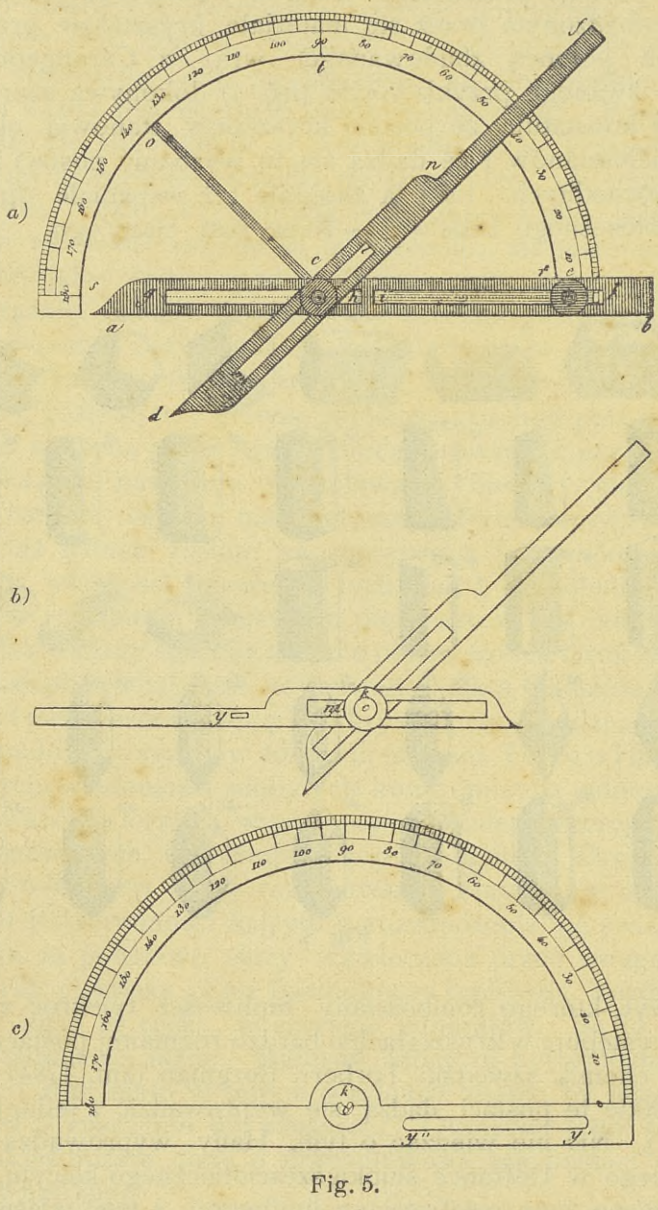


Fig. 5.

sobie wyobrażał Huygens. Jest w zgodzie z łupliwością. Hauy rozciąga tę koncepcję na inne kryształy i przychodzi do wniosku, że w kryształach da się wykazać sześć „formes primitives" — sześcian (skośny czy prosty), ośmiościan, czterościan (tetraedr), prawidłowy słup (pryzmat) sześcioboczny, granatoedr i dwunastościan. Nie poprzestając jednak na tym, uważa że te postaci wywodzą się z trojakiego rodzaju cząstek (molecules integrantes): tetraedrycznej, pięciopłaszczyznowego pryzmatu trójściennego, ściętego prostopadle i sześciościennego równoległościanu.

Skoro jednak tak, to płaszczyzny odziewające kryształ muszą być w prostej zależności między sobą, dającej się wyrazić całemi liczbami. Hauy też stwierdza, że jeżeli odniesiemy płaszczyzny do osi, to odcinki dane przez płaszczyzny kryształu na tej samej osi są do siebie w prostym stosunku liczbowym i stosunki te otrzymują liczby niewielkie 2, 3, 4, 5 (fig. 6).

Zależność tedy postaci od budowy wewnętrznej w tym prawie Hauyego, zwanym prawem racjonalności (wymierności) odcinków, nabiera wielkiej prostoty i otrzymuje taki wyraz, który już wprowadza manipulacje matematyczne do tej dziedziny. Postać kryształu staje się wyrazem zewnętrznym prawidłowości stałej, cechującej strukturę środowiska. „Essai d'une theorie sur la structure des Cristaux" (1784) Hauy'ego robi epokę w nauce i jak ziarno na dobrą glebę, spada na umysły w czasie tym, nawskroś przenikniętym tężyzną myśli swobodnej. W tym samym czasie w Niemczech zakłada trwałe ognisko wiedzy mineralogicznej Werner. Dla uczniów jego wyposażonych bogato w wiadomości natury opisowej, synteza Hauy'ego staje się tym pożądanym kluczem, jakiego się domaga umysł ściślejszy. Jednym z bardziej płodnych i zasłużonych dla krystalografji umysłów tego okresu jest Weiss (1780—1856). W swoim przekładzie „Podręcznika mineralogji obywatela Hauy'ego" nie poprzestaje na atomistycznej teorji nauczyciela i w rozdziale „pogląd dynamiczny na krystalizację", zbijając twierdzenie Hauy'ego, że płaszczyzny łupliwości są właściwe tylko postaci jądrowej, utrzymuje, że one i postaciom wtórnym odpowiadają i że zależą wogóle od kierunków krystalizacji właściwych środowisku krystalicznemu. Dalej stwierdza wielce ważną dla rozumienia całej dynamiki kryształu okoliczność, że płaszczyzny odziewające kryształ ułożone są pasami. W każdym pasie płaszczyzny są równoległe do linji pewnej, zwanej osią pasa. Wreszcie w dziele „De indagando formarum crystallinarum charactere gieometrico principale" (1809) wykazuje to znaczenie osi, jakie dziś wśród pierwiastków symetrji kryształu posiadają: „axis vero linea est omnis figurae dominatrix, circa quam omnia aequabiliter sun

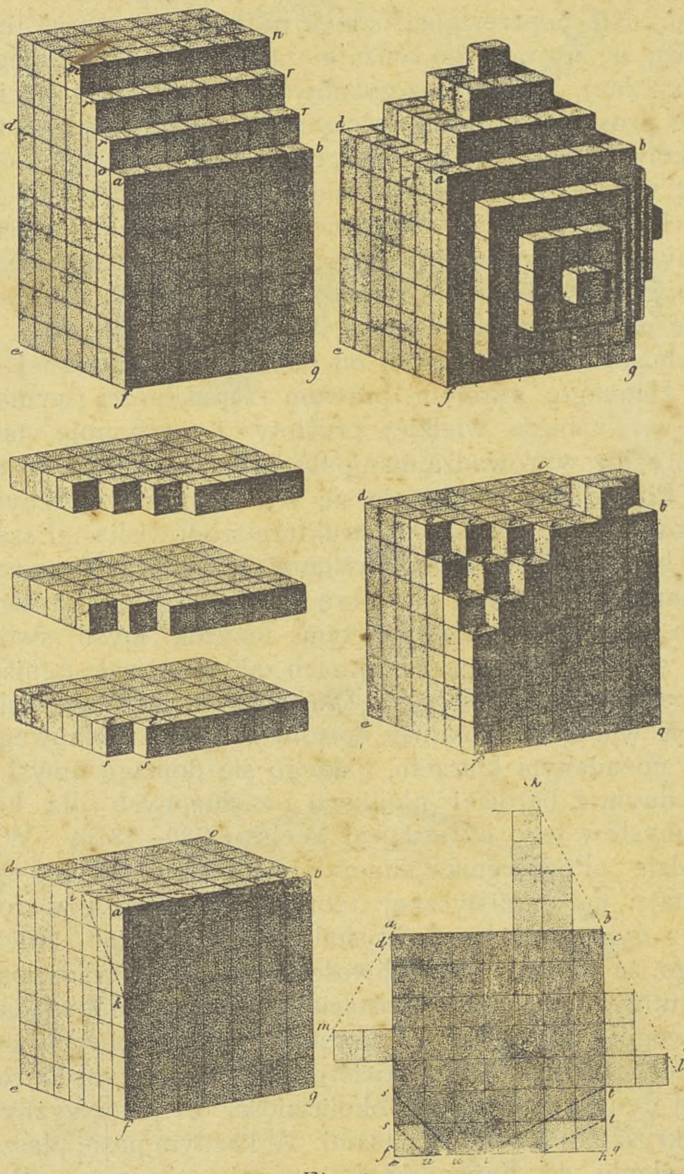


Fig. 6.

disposita. Eam omnia spectant, eaque quasi communi vinculo et communi inter se contactu tenentur".

Dziś wydaje się dziwnym, że, pomimo ustawicznego badania postaci kryształów, tak późno spostrzeżono tę prostą a tak ważną okoliczność, że kąty między płaszczyznami kryształów powtarzają się i że grupują się dokoła pewnych osi w sposób prawidłowy. Tłumaczy się to jednak niedokładnością pomiarów, jakie dawał goniometr Carangeota na kryształach przyrodzonych. To też właściwe ujęcie prawidłowości gieometrycznej brył krystalicznych, przez Weissa dopatrzonej, przychodzi dopiero wraz z wydoskonaleniem metody pomiarów i ich koordynowania. Dwa są tu momenty decydujące: zastosowanie przez Wollastona (1809) goniometru, opartego na zasadzie odbijania się światła od powierzchni zwierciadlanych i wprowadzenie do formułowania własności gieometrycznych kryształu a) projekcji przez Neumann'a (Beiträge zur Krystallonomie 1823); b) metody osi spółrzędnych przez Miller'a (w tym samym czasie). Gdy postać kryształu znajduje tak wspaniałe opracowanie, nie pozostaje w tyle i teorja budowy kryształów, i u Delafosse'a znajduje taką interpretację, w której już można dojrzeć ową dążność do opracowania ogólnego, jaką znajdujemy w najnowszych czasach. Delafosse odrzuca wszelkie spekulacje o postaci cząstek elementarnych kryształu. Równoległościany Hauyego otrzymują tu znaczenie siatki atomów, ułożonych w kątach lub środkach równoległościanów. Ta interpretacja znajduje dalszy rozwój u Bravais'a, przybiera charakter matematyczny i znaczne wykończenie u Mallard'a. Tu i u najbliższych następców krystalografja zdobywa promocję na abstrakcyjną dziedzinę wiedzy i traci łączność z mineralogją. W drodze wysnuwania przesłanek, matematycznie ujętych, powstaje pojęcie 32 klas wielościanów, dla kryształów pomyśleć się dających, a różniących się ilością i jakością pierwiastków symetrji. Niewszystkie te klasy wśród wielościanów przyrodzonych skonstatowane zostały, jakkolwiek niektóre dały się stwierdzić, będąc poniekąd przewidziane. Natomiast nieznane są wielościany przyrodzone, któreby przez owe klasy nie były objęte, z wyjątkiem tych postaci odmiennej natury, które, jako „zrostki bliźniacze", przez kojarzenie swoiste tamtych brył prawidłowych, wyprowadzić się dają i z natury swej, jako ciała niejednorodne, nie przeczą ogólnej zasadzie zamknięcia wielościanów jednorodnego ciała krystalicznego w granicach wymienionej ilości klas symetrji.

Nie będziemy bliżej wchodzili w poznawanie istoty tych pojęć. Na gruncie abstrakcji zrodzone musiałyby być w sposób bardzo ogólny traktowane, zanimby nas doprowadziły do wywodów konkretnych, mających znaczenie dla mineralogji. Stanowią same w sobie odrębną dziedzinę wiedzy o charakterze matematycznym. W mineralogji mają znaczenie pomocnicze. Takie zdanie będzie niezawodnie uważane za mylne przez wielu. Zwolennicy tego działu uważają go za zasadniczy w mineralogji. Jednak w najbliższym czasie przekonamy się, że ta sfera pojęć nie stanowi w istocie nawet dyscypliny mineralogicznej. Zrodzona na gruncie znajomości nie minerałów, lecz kryształów wogóle, jest też bardziej ogólną nauką — jest nauką o ciałach stałych i, jak się okazuje, w najogólniejszym tego słowa znaczeniu, a zatym częścią fizyki. Takie przeświadczenie nie jest, niestety, tak rozpowszechnione, jak na to zasługuje. W fizyce, jako bardziej zasadnicze, jako typowe dla stanu stałego ciał uważane są ciała izotropowe. Kryształy są traktowane podrzędnie.

Jednak już Frankenheim, profesor wrocławski, w trzecim dziesiątku ubiegłego wieku, wypowiedział i dowiódł, że izotropowemi mogą być tylko gazy i ciecze, ciała zaś stałe są izotropowe tylko pozornie. To, że szkło, nawet w wielkich niekiedy kawałkach, jakie służą dla teleskopów, jest izotropowe dla światła, że znane są wogóle szkła, stopy izotropowe, tłumaczy się w ten sposób, że ciała te składają się z niezmiernej ilości bardzo drobnych kryształów, rozsianych bezładnie: w rezultacie taki konglomerat, zbudowany z ciał anizotropowych, w dowolny sposób względem siebie położonych, bez prawidłowej orjentacji, daje własności przeciętne, jednakowe w najrozmaitszych kierunkach ciała. W teorji budowy ciał krystalicznych, później matematycznie rozwiniętej, dającej możność przewidywania struktury ciał, miejsca dla ciał izotropowych się nie znalazło. Thompson sprawdził to i przyszedł do wniosku, że kryształki, składające ciało izotropowe, są nadzwyczaj małe, nie większe od długości fal świetlnych.

W tym samym czasie, kiedy keplerowska „natura geometrisans" pociąga całą plejadę umysłów ku sobie i myśl, w rojeniach mistycznych poczęta, wykarmiona na obserwacji tych materjalnych objektów matematyki ucieleśnionej, które szperacz przyrodnik z ziemskiej skorupy wygrzebał, napowrót ulata ku sferom wszechharmonji, ustawicznie rozwija się i potęguje inna dziedzina rozumienia tych samych ciał przyrodzonych. Obok Linneusza, który widzi źródło przyszłej wiedzy przyrodniczej w systematyce i zasila je tysiącznemi spostrzeżeniami, jego spółziomek Aksel Cronstedt (1722—1765), w „Försök til Mineralogie" toruje drogę chemji minerałów. Już Bartholinusowi znana dmuchawka, w ręku Cronstedt'a przyczynia się do stworzenia metody przysparzającej szeregu wiadomości, na mocy których staje się możliwym ustalenie odrębności chemicznej ciał mineralnych. Bergman, „wyrocznia chemików spółczesnych", doskonaląc tę metodę, dochodzi do posiadania „Sciagraphia regni mineralis secundum principia proxima digesti", 1782 (opis rzeczoznawczy królestwa mineralnego podług zasad próby ogniowej), gdzie przedstawia systematycznie wynik pracy swej i swych poprzedników. Jest to tego samego rodzaju dorobek wiedzy chemicznej co do minerałów, jaki w tym samym czasie Romé-de-Lisle daje co do własności krystalograficznych tych ciał. Wreszcie Vauquelin i Klaprot w „Beiträge zur chemischen Kenntniss der Mineralkörper", obszernym sześciotomowym dziele w okresie 1705 — 1715 lat się pojawiającym, w szeregu analiz przedstawiają ciała mineralne w nowym świetle. Już Hauy w swym „Tableau comparatif des mineraux" (tablica porównawca minerałów), 1782, wychodzi z tego założenia, że każdy minerał jest określonym związkiem chemicznym i stawia sobie za zadanie ułożenie minerałów w grupy naturalne na mocy wzoru chemicznego i wyśledzenie zmian postaci krystalicznej w związku z tym grupowaniem. Poprzednicy i spółcześni Hauyemu swą ustawiczną pracą dostarczają materjału, z którego wynika niestety, że skład chemiczny znacznej ilości minerałów określonym wzorem wyrazić się nie da, a nawet nie daje się przedstawić w postaci stałego stosunku procentowego składników. Hauy i jego zwolennicy tłumaczyli to niedoskonałością metod analizy chemicznej spółczesnej i niedostateczną jednorodnością poddanego analizie materjału. Jednak w najbliższym już czasie w ręku Berzeliusa analiza nabiera znakomitej dokładności; fizycy z Brewsterem, Arago na czele wypracowują metody dające możność dokładnego konstatowania jednorodności ciał, a wyniki analizy minerałów nie stają się przeto lepsze w sensie stosowania się do określonych wzorów chemicznych. Jednak idea Hauyego nie upada. Przeciwnie, cały szereg spostrzeżeń ciekawych i ważnych przychodzi jej z pomocą, jako twierdzenia pomocnicze, stając u jej boku. Profesor monachijski Fuchs wykazuje, że ciałom mineralnym właściwe są domieszki,—ciała „wikarjujące“, niestałe, nie mające znaczniejszego wpływu ani na własności fizyczne, ani na wzór chemiczny składnika głównego. W tym samym czasie, wychodząc ze spostrzeżeń krystalograficznych, badacz francuski Beudant przychodzi do wniosku, że kryształom właściwa jest pewna siła krystalizacyjna, zniewalająca ciała obce podporządkowywać się obcej dla nich postaci krystalicznej i rozsiewać się w krysztale jednostajnie. Takie wcielone do kryształu domieszki w stosunkach nieokreślonych wciągnięte, nie odbijając się wyraźnie na jednorodności kryształu, uniemożliwiają wyprowadzenie dlań wzoru chemicznego. Wreszcie w 1823 r. uczeń Berzeliusa Mitscherlich wypowiada twierdzenie, że kryształy, których skład nie da się wyrazić wzorem chemicznym, są mieszaniną ciał, zdolnych do występowania wspólnie w jednym krysztale w dowolnych stosunkach na mocy blizkości postaci krystalicznej każdemu z osobna właściwej. Zostaje wysunięte twierdzenie, że niektórym ciałom o podobnym składzie chemicznym właściwą jest pokrewna postać kryształów. Dając „mieszaniny izomorficzne“, ciała takie stanowią kryształy o składzie chwiejnym. Idea ta pokutuje po umysłach do dnia dzisiejszego. Już w najbliższym jednak po swych narodzinach czasie traci na powadze wobec faktów, podnoszonych zarówno przez jej zwolenników, jak i przeciwników. Mitscherlich nadaje swemu twierdzeniu znaczenie ogólne. Stawia je nie w związku z ciałami przyrodzonemi—minerałami tylko, ale przeciwnie popiera przykładem fosforanów i arsenianów, otrzymywanych sztucznie. Dzięki temu już na wstępie nietrudno było o sprawdzenie szerszej tej idei przez odwołanie się do licznych doświadczeń.

Zresztą już samo twierdzenie stanęło pod zarzutem nieokreśloności. Jakie bowiem należało postawić granice podobieństwu postaci kryształów? Rozejrzenie się w świecie kryształów, dość obficie znanych w owym okresie rozwoju badań chemicznych, wykazało, że często ciałom nic ze sobą nie mającym wspólnego we względzie chemicznym właściwa jest postać pokrewna i odwrotnie. Marignac, Klein, Tschermak wykazali, że ciałom o wielkiej cząsteczce, gdzie budowa i skład są zaledwie analogiczne, właściwe jest jednak tworzenie kryształów jednorodnych. Wreszcie Lehman w najnowszym czasie wskazuje fakty, kiedy ciała nic ze sobą wspólnego pod względem chemicznym nie mające dają kryształy jednolite. Takie tedy rozwiązanie otrzymuje pogląd przez Hauyego wystawiany w kolei poznawania przyrody chemicznej kryształów. Wyłania się nowy cykl pojęć, nowy sposób rozumienia minerału. Minerał to już nie ciało jednorodne chemicznie, to nie kryształ jednolity. Pojęcie kryształu, jako odprysku środowiska anizotropowego, nie może tu mieć znaczenia ogólnego. Jest to raczej wyraz pewnego stanu równowagi dla ciał, siłą krystalizacyjną we wspólną postać obleczonych. Siła krystalizacyjna nie ma tu jeszcze znaczenia realnego; jest nieokreślona, mglista. Rozumienie dynamiki kryształu przychodzi już w czasach najnowszych. Wylania się ze studjów nad rośnięciem kryształu z roztworu. Otrzymywanie kryształów soli z roztworów znane jest oddawna. Późno przychodzi jeno uwaga badawcza. Mianowicie znane były liczne przepisy, jak hodować kryształy, nie znajdujemy jednak bliższej oceny, jak i dla czego kryształy w roztworze rosną. Lavalle w „Recherches sur la formation lente des cristaux à la temperature ordinaire“ w Comptes Rendus Akademji Paryskiej (1853) utrzymuje, że kryształ ściąga ku sobie cząstki soli z całego obszaru wielkich nawet naczyń. Jednak Frankenheim już w roku 1836 wykazuje na szeregu przykładów, że siła przyciągająca kryształu nie sięga tak daleko w przestrzeń, przeciwnie, jeżeli krystalizować siarczan wapnia na powierzchni gipsu, kryształki powstające z kropelek roztworu układają się równolegle do blaszki gipsu, dość jednak pokryć gips lakierem, by kryształki się układały bezładnie. Stąd wniosek, że kryształ wywiera wpływ orjentacyjny na kryształki soli, wyłaniającej się z roztworu ale tylko w dotknięciu bezpośrednim. Jest to fakt bardzo ważny, a nie doceniony w konsekwencjach. Wszystkim zapewne, kto się zajmował hodowlą kryształów, jest rzeczą wiadomą, że jeżeli roztwór, z którego kryształ rośnie, zmącić, wysypują się w postaci drobniutkiej mąki mirjady drobnych kryształków. Jest tedy rzeczą oczywistą, że w roztworze takim są poniekąd gotowe drobniutkie kryształki, jak gdyby tylko czekające na sposobność wydostania się z roztworu. W kontakcie z kryształem zachodzi stopniowe ich wypadanie, a nawarstwianie odbywa się równolegle na razie. Kryształ staje się zatym ośrodkiem wyławiającym i orjentującym gotowe cząstki krystaliczne.

Niezrozumiałym staje się jednak, jak kryształ wyławia dalsze cząstki. Naprasza się tu myśl o wędrówce tych cząstek w roztworze. Jeden z możliwych rodzajów takiej wędrówki jest to zjawisko, znane w fizyce pod nazwą dyfuzji. Frankenheim jednak spostrzega, że dokoła kryształu w roztworze wytwarza się podczas rośnięcia pole jaśniejsze (Hof). Nasuwa mu to myśl, że wskutek zubożenia roztworu dokoła kryształu przez wydzielenie części soli pozostaje smuga cieczy lżejszej, która jako taka unosi się, a natomiast dopływa z dalszych okolic roztworu ciecz cięższa. Powstaje prąd. Istnienie takiego prądu zostaje następnie wielokrotnie konstatowane (fig. 7) i staje się punktem wyjścia dla szeregu badań nad wzrostem kryształu np. Hauera, profes. Wulfa i jego uczniów. Badania te stwierdzają niezawodny grunt do rozumienia postaci kryształu jako wyrazu historji jego powstawania. Postać kryształu daje się urabiać w pewnych granicach za pomocą zmiany warunków, jak koncentracji, temperatury. Staje się jednak rzeczą oczywistą, że kryształ wyrastający w roztworze, jest skupieniem cząstek krystalicznych, mikrokryształków, które przeciążają, przesycają roztwór, będąc lada chwila gotowe zeń się wyłonić, jak gdyby wypierane. Orjentacyjny wpływ kryształu ułatwia tym kryształkom skupianie się w ciało, mogące przeciwstawić temu napięciu ujście; powierzchnia bowiem kryształu, na której kryształki drobne dzięki orjentacyjnemu wpływowi układają się w zwartą masę, jest miejscem najmniejszego oporu w przestrzeni, zajętej przez przesycony roztwór. Postać tedy kryształu jest wyrazem równowagi między roztworem a nadmiarem soli, który, nie mogąc być w roztworze utrzymany, zostaje wydzielony i, że tak powiemy, ściśnięty w bryłę dla oszczędności miejsca. Jak łatwo spostrzec, w istocie powstawania kryształów są obie zasadnicze cechy budowy takiej, jaką rozumieli Huygens i Hauy. W sposobie wzrastania kryształu unaocznia się, że rozmaite jego zewnętrzne postaci powstają przez nawarstwianie się tych samych cząstek. Postać na mocy tych badań nabiera znaczenia wskaźnika warunków, w jakich się wytwarzał kryształ, jest „wielościanem rośnięcia“. Okazuje się bowiem, że modyfikuje się w zależności od koncentracji roztworu, warunków temperatury. Z całego

Fig. 7.

szeregu badań innych autorów unaocznia się wpływ domieszek ciał obcych w roztworze... Jest to już spółczesna karta dziejów dynamiki kryształu. Dziś nie jest jeszcze dostatecznie oceniona, zwłaszcza przez mineralogów. Jednak ma wśród zwolenników, (którzy i sami zapisują się na niej w sposób wybitny), takie imiona, jak prof. Becke'go z Wiednia. Dopiero tego rodzaju badania nadają właściwą treść całej erudycji mineralogicznej czasów ubiegłych. Jeżeli dziś staje się coraz bardziej oczywistą prawdą, że mineralogja nie jest ani fizyką, ani chemją, ani też gieologją w obszernym słowa tego znaczeniu, to stało się to dzięki temu właśnie cyklowi badań. Fizyka ciał stałych przyrodzonych jest niezaprzeczenie częścią fizyki ogólnej, jako nauki powszechnej, podobnież — chemja tych ciał. Nic się bowiem nie da pomyśleć jako ciało materjalne bez uwzględnienia fizycznej i chemicznej jego przyrody. Te dwa cykle względów nie wyczerpują jednak treści naszych pojęć o ciałach przyrodzonych. Ciało fizyczne, chemicznie traktowane, daje się pojmować bez względu na jego miejsce w przyrodzie, na koleje, jakim wraz z innemi ciałami przyrodzonemi podlegało. Pierwiastek przyrodniczo-historyczny może tu być wykluczony. Minerał zaś jest przedewszystkim rezultatem zjawisk, które zachodziły w skorupie ziemskiej Dla minerału obowiązuje pojęcie wieku, stosunku do otoczenia, czyli czasu i miejsca. Minerał wreszcie jest cegiełką, budującą skorupę ziemską, jest osobnikiem, jeżeli tak się wyrazić można, który swoim obliczem indywidualnym stanowi o cechach indywidualnych miejsca danego w obliczu ziemi. Dziś w wykładzie mineralogji niekiedy zapomina się o takim jej znaczeniu wśród nauk, omawiających przyrodę naszej planety, ale to jest niezaprzeczenie wytwór przejściowy tego nieliczenia się ani z całym zakresem danej nauki, ani z jej tradycjami, jakie jest właściwe umysłom o widnokręgu, zacieśnionym fabrycznym produkowaniem artykulików do centrablatów i zeitschriftów. Rozdrobnienie pracy, specjalizacja prowadzi do zacieśnienia poglądu na całość nauki, wprowadza do pracy charakter wyrobnictwa z dnia na dzień, skierowuje umysły ku wypracowaniu raczej metod do wyrabiania tandety przyczynków, która już jutro traci znaczenie wraz z pojawieniem się przyczynka nowego, niżeli skupienia się w pracy krytycznej na znajomości szerszej przedmiotu opartej. Zaznaczać się to zaczęło od chwili, gdy na arenę pracy naukowej wystąpili gromadnie uczeni niemieccy ze sztabami swych doktorantów, na sposób fabryczny pracujących na mistrza, uposażonego w przywilej wynagradzania od sztuki w postaci doktoratu. Ci przyszli majstrowie i „werkfürerzy" licznych fabryk swej uprzemysłowionej ojczyzny, wdrażani do produkowania fabrycznego już na ławie uniwersyteckiej, popierają „wielki przemysł" naukowy, zanim dane im będzie sprawowanie bardziej odpowiedzialnych czynności „werkfürerów" hut, odlewni... A owoce takiej pracy stanowią treść „handbuchów", mających reprezentować dorobek badawczej myśli w danej dziedzinie wiedzy. Tak właśnie dzięki uganianiu się za łatwą zdobyczą przyczynku do spraw przedyskutowywanych i zadecydowanych, zostają systematycznie pomijane wyniki tej potężnej gałęzi, która przed stu z górą laty puściła pędy od pnia zagadnień ówczesnych pod wpływem Wernera i jego uczniów. Zżyty z górnictwem, jako profesor szkoły górniczej we Freibergu, ognisku kopalnictwa Gór Kruszcowych, mający sposobność poznawania zasobów mineralnych w łonie ziemi w warunkach przyrodzonych, gromadzi wiadomości, ówczesnym obce. Jak widzieliśmy to wyżej, już dawniej zaznaczało się rozdwojenie tendencji naukowych. Jedne umysły zaprząta myśl o prawidłowościach gieometrycznych, jakie zachodzą w układzie płaszczyzn otaczających kryształ, w stosunkach wielkości, jakie się dają wykazać przestrzeniowo dla rozmaitych własności kryształu, jak np. w zachowaniu się względem światła, ciepła... To, co tu zostało poznane, przeniesiono w dalszym ciągu w poszukiwaniach i na inne ciała, wytworzone nie w skorupie ziemskiej, lecz w laboratorjum przy współudziale myśli ludzkiej. Badania te zostają uwieńczone wspaniałym rezultatem, który jest przedmiotem dumy jednej z bardziej ścisłych nauk—krystalografji, o której się mówi, że może być zwana „matematyką ucieleśnioną". Obok zaś nurtują prądy inne. Ciało mineralne podlega analizie nie samo przez się, nie w związku z pojęciami gieometrji i fizyki, jako przejaw prawidłowości liczbowych, panujących w przyrodzie, lecz jako cząstki tego nieprzebranego bogactwa przedmiotów, jakie się nasuwały pod uwagę obserwatora w górach, kopalniach. Zawdzięczając ustawicznemu szperaniu, gromadziły się olbrzymie materjały wymagające pracy analitycznej. W zbiorach przyrodników XV—XVII stuleci występowały obok siebie kryształy, szczątki zwierząt, rośliny, monety, łopatki krzemienne... Stopniowo wyodrębniał się tu materjał dla zoologji, botaniki, mineralogji... jednak metody poznawania, kryterja były naówczas tak jeszcze słabe, że o rozgraniczeniu ścisłym mowy być nie mogło. Dopiero d'Espadné, alchemik 17 wieku, zdobywa się na podział przedmiotów przyrodzonych według przynależenia do jednego z trzech królestw przyrody — zwierząt, roślin, minerałów. Do królestwa minerałów trafiały jednak zarówno skamieniałe szczątki roślinne i zwierzęce, jak wszelkie znaleziska w ziemi napotkane, a nie mające wyraźnej fizjognomji. Długi czas jedynym niemal kryterjum klasyfikacyjnym była postać przedmiotu, jedyną metodą — metoda opisowa. Stawało się przeto koniecznym wypracować takie metody, któreby dały możność szerszej orjentacji. Już oddawna odczuwana, znajduje niezmordowanego rzecznika dopiero w Wernerze (1750—1817). Badacz ten w całym szeregu prac systematyzuje własności minerałów „zewnętrzne, wewnętrzne, fizyczne i empiryczne“, zwraca tedy uwagę na barwę, twardość, łupliwość, zachowanie się w ogniu, względem odczynników i t. d. i t. d. W rezultacie jego pracy systematyka ciał mineralnych, ich definicja nabierają znacznej doskonałości; metody są proste, dostępne dla każdego, stają się metodami podręcznemi a jednak są już tak doskonałe, że mogą zastąpić mozolne badanie postaci gieometrycznej i składu chemicznego. Wobec tego możliwą rzeczą staje się orjentowanie się wśród minerałów tuż na miejscu w polu, w kopalni. Tysiączne obserwacje, jakie się nasuwają przy tym, co do zmian indywidualnych w tych własnościach, w rozmaitych minerałach, każą się liczyć z miejscowością. Wreszcie nie może ujść uwadze, że niektórym minerałom właściwe jest występowanie wraz z określonemi grupami innych minerałów. To też już Werner zaznacza konieczność studjowania otoczenia minerału w przyrodzie, zapoczątkowuje poznawanie gienezy minerału na mocy studjów otoczenia tak w mineralogicznym, jak gieologicznym znaczeniu. Obie części nauki rozwijają w dalszym ciągu uczniowie: Mohs, uczeń Wernera i jego następca na katedrze w szkole (dziś Akademji) górniczej we Freibergu, łączy ze studjowaniem występowania minerałów każdorazowe dokładne poznawanie ich własności indywidualnych, krystalograficznych i mineralogicznych; Breithaupt, uczeń Mohs'a i z kolei następca jego na katedrze freiberskiej, rozwija naukę o paragienezie.

„Przez paragienezę minerałów należy rozumieć mniej lub bardziej zaznaczony sposób wspólnego ich występowania czyli asocjacji. Kładzie się tu szczególny nacisk na względny wiek ciał tam, gdzie następczość ich daje się poznać", powiada autor ten we wstępie do rozprawy, która była rezultatem wieloletnich studjów: „Die Paragenesis der Mineralien. Mineralogisch, geognostisch und chemisch beleuchtet... 1849". To, co tu przez trzech kolejno po sobie następujących profesorów freiberskich zostało do nauki wprowadzone, jako wynik wieloletnich studjów w kopalniach, w drodze spostrzeżeń i metod opisowych, przewija się następnie przez całą naukę mineralogiczną jako motyw przewodni na wstępie do szeregu studjów i stanowi część osiową tej dziedziny wiedzy. Metoda opisowa jednak nie doprowadza nas do rozwiązania całego szeregu kwestji w sposób decydujący. Nie wyświetla zjawisk, których wynikiem jest dana asocjacja minerałów. Zjawiska takie dają się pomyśleć, zrozumieć tylko na tle fizyko-chemicznym. Niezbędną staje się metoda doświadczalna. Konieczność jej wynika już chociażby z tego charakteru wywodów, do jakich przychodzi Breithaupt w swym „gieognostycznym i chemicznym oświetleniu" sprawy. Ścisłe chemiczne oświetlenie jej może dać znajomość reakcji, jakie są zdolne doprowadzić do tego rodzaju i tej asocjacji produktów i jakie się spotyka w postaci minerałów paragienetycznie połączonych. Dopiero przez restaurowanie procesu chemicznego można wyświetlić wszystkie cechy fizyko-chemiczne zbiorowiska mineralnego, jakie mu są właściwe, wyodrębnić gieneracje związane reakcją wspólną, dać podkład przyczynowy następczości, wiekowi i obecności rozmaitych indywiduów mineralnych w jednej paragienezie, wspólnym wiekiem i reakcją związanych. Stąd właśnie ta metoda syntetyczna, która po całym szeregu doświadczeń syntetyków z École i Collège de France, mających za cel otrzymanie danego ciała na jakiejkolwiek bądź drodze reakcji chemicznej, u Daubrée w „Etudes de géologie synthetique, 1879", zdobywa charakter dociekania takich reakcji, które się w przyrodzie pomyśleć dają. Szeroki prąd studjów syntetycznych tu wzmożony łączy się w dalszym ciągu z dociekaniami nad powstawaniem minerałów w lawach, już przez Halla zapoczątkowanych, i w studjach J. Vogta, A. Lagorio, J. Morozewicza prowadzi do rozumienia minerałów jako produktów dyferencjacji stopniowej pierwotnego stopu materji ziemskiej—magmy, jako stanów równowagi ogniw chemicznych, które się wywiązują przy przechodzeniu tej magmy ze stanu plastyczno-ciekłej masy w stan stały na skutek oziębiania i utraty pewnych składników przez wyparowanie. Jednocześnie już od Wernera, Breithaupta ciągnie się drugie pasmo idei — o przemianach powolnych, stopniowych, jakie zachodzą na skutek reakcji nikłych w przebiegu, ale ustawicznie nurtujących w skorupie ziemskiej. Breithaupt spotyka takie ciała mineralne, których postać odpowiada jednemu ze znanych minerałów, a zawartość innemu, w których zatym postać nie odpowiada zawartości i budowie wewnętrznej. Badanie ciał takich, nazwanych p s e u d o m o r f o z a m i, nasunęło bardzo wiele danych co do reakcji stopniowych, powolnych, jakie zachodzą na skutek czynników powszednich, nikłych w swej sile, zato potężnych w skutkach dla swego ustawicznego działania przez ogromny przeciąg czasu. Są to te zjawiska, które zbiorowo wraz z innemi znane są pod nazwą m e t a m o r f i z m u, a pospoliciej określane jako w i e t r z e n i e. W rezultacie licznych studjów nad zjawiskami temi okazało się, że takie czynniki, jak woda deszczowa, przesiąkająca w cielsko skalne przez szczeliny i przedostająca się do wnętrza minerałów po gęstej siatce cieniutkich szczelinek łupliwości, z biegiem czasu przeistacza skład i budowę minerału na skutek reakcji, jakie zachodzą między składnikami minerału i tym rozcieńczonym roztworem, jaki woda deszczowa stanowi. Zmiany temperatury, mróz ścinający wodę w lód w samym ciele mineralnym i wytwarzający na skutek rozprężania się tężejącej w ciało stałe wody, tysiączne kliny, druzgoczą minerały ku łatwiejszemu opłukiwaniu przez ciecz omywającą jego wnętrza. Blum gromadzi olbrzymi materjał opisowy w „Die Pseudomorfose d. Mineral. Reichs. 1841—1879; Bischof w „Chemische Geologie“ skupia gromadzone przez siebie i spółczesnych wiadomości co do charakteru tych reakcji; Lemberg, Thugutt studjują reakcje szeregu ciał doświadczalnie, a ponad tym gmachem wiedzy o gienezie minerałów powiewa aforyzm Heraklita „πάντα ῥεῖ“ („wszystko płynie“). Wszystko tu jest w ruchu, wszystko dąży w drodze przemian do jakiejś nieuchwytnej, usuwającej się w przyszłość równowagi.

Z dociekań tych wyrasta pojęcie nietrwałości ogromnego odłamu tych miljonów bryłek, tak kunsztownie doprowadzonych przez siły przyrody, przez ową „natura geometrisans“ do stanu ciał prawidłowych, jednorodnych. Są to produkty reakcji, które się odbyły, są to objekty reakcji, które się odbywają. Ustawicznie podlegają przemianom, podściełają się pod stopy przyszłości, która przejdzie ponad niemi, niwecząc je i druzgocząc ku niewiadomemu celowi i w niewiadomym kierunku. Przeminął ogień, który je przetapiał na nowe rodzaje materji. Przyszła woda, która je przerabia na nowe kompleksy chemiczne, nowe postaci gieometryczne, czasami na świadectwo swej potęgi tylko zostawiając im postać dawną. Rozumienie tych przemian, jakim minerały ustawicznie w swej postaci, budowie, składzie podlegają, nie da się pomyśleć w oderwaniu od zbiorowego życia ziemi. Wpływy jej ustawicznie się ścierają. Woda, powietrze, przenikając do wnętrza ziemi, powodują ciągłe przemiany w jej cegiełkach-minerałach. Ta „praca u podstaw“ rodzi przemiany w całych obszarach, powołuje do życia źródła mineralne, jeziora słone, wpływa na zmiany szaty roślinnej miejsca, na oblicze gór przez ich łuszczenie się, wytwarzanie coraz to nowej gleby u swych stóp i t. d. i t. d., przeistacza słowem oblicze ziemi na równi z innemi potężnemi czynnikami.

Widzimy tedy, że znajomość gieometrycznej, fizycznej i chemicznej przyrody minerałów jest zaledwie wstępem do ich znajomości, podstawą, gruntem do poznawania ich w roli, jaką odegrały w historji skorupy ziemskiej, jako jej cząstki, które dźwigają na sobie cały ciężar jej życiowych funkcji, które swemi cechami przyrodzonemi stanowią o losach najbliższych i najdalszych nietylko tego miejsca, gdzie wyciskają piętno indywidualne swemi okazałemi lub rzadkiemi skupieniami, ale wszędzie w całym jej ciele, jako części skałotwórcze. Żadna siła wyższa, siła obca nie zmieni oblicza ziemi, jego życia, nie może mieć na nie wpływu, nie rozpryskując się na tysiączne czynności w celu owładnięcia temi tysiącznemi życiami jednostek mineralnych. Ich własności, ich harmonijna postawa stanowi o wszystkim, co się na ziemi odbywa i odbywać będzie.

Literatura.

Oprócz wymienionych w tekście rozpraw podajemy tu do historji mineralogji następujące dzieła:

M a r x.—Geschichte d. Krystallkunde. Carlsruhe u. Baden, 1825.
L e n z.—Mineralogie der alten Griechen u. Römer. Gotha, 1861.
v. K o b e l l.—Geschichte d. Mineralogie von 1850—60. München, 1864.
W h e w e l l.—Geschichte der induktiven Wissenschaften, w przekładzie z angielskiego z przedmową I. I. v. Littrowa (Astronomie, Physik, Mechanik, Chemie, Geologie, Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Zoologie, Anatomie, Physiologie). Stuttgart, 1839—42.

Z powodu braku opracowania, któreby objęło historję mineralogji za ostatnie lat kilkadziesiąt, zwracać się należy do oddzielnych sprawozdań za poszczególne lata, jak np.[1]) B a y l e y W. S. and W. H. H o b b s.: A summary of progress in Mineralogy and Petrography, 1891-7. F l e t c h e r L.: On recent progress in Mineralogy aud Cristallography, 1894 i t. p.

---

[1]) patrz Katalog Maxa Wega, Lipsk.

ZARYS ROZWOJU MATEMATYKI.

I.

Rozwój arytmetyki i algiebry do końca XVI w.

OPRACOWAŁ

Michał Feldblum.

T r e ś ć: I. Czasy przednaukowe. II. Arytmetyka starożytnych Egipcjan. III. Arytmetyka babylońska (chaldejska). IV. Arytmetyka u innych starożytnych ludów wschodnich. V. Pierwsze fazy rozwoju arytmetyki greckiej. VI. Szkoły pitagorejska i ateńska. VII. Rozkwit matematyki greckiej. VIII. Stan arytmetyki w epoce upadku nauki greckiej. IX. Arytmetyka i algiebra u Indusów. X. Rola Arabów w historji matematyki. XI. Matematyka w Europie w wiekach średnich. XII. Rozwój arytmetyki i algiebry od początku epoki odrodzenia do końca XVI w. Literatura.

I.

Czasy przednaukowe.

Początki rachunku giną w pomroce czasu. Rachunek mógł rozwijać się systematycznie dopiero wtedy, gdy myśl człowieka wytworzyła pojęcie o liczbie, a do tego niezbędnym było, aby człowiek umiał myśleć abstrakcyjnie. Pott [1]) opowiada, że członkowie pewnego pasterskiego plemienia południowo-afrykańskiego,

---

[1]) Przytaczam według Moritza Cantora.

nie umiejąc zliczyć poza 10, odrazu spostrzegają, gdy ze stada bydła, liczącego 400 do 500 głów, zginie jedna sztuka. Weźmy jeszcze pod uwagę spostrzeżenie, że kaczka zna liczbę swych małych i odrazu dostrzega brak jednego z nich. Z tych faktów jednakże nie można wysnuć wniosku, że pojęcie o liczbie jest właściwe ludziom na najniższym szczeblu kultury stojącym, a nawet zwierzętom: zarówno ów afrykańczyk, jak i kaczka zachowują w pamięci każdy egzemplarz danego zbiorowiska, ta jednak cecha zbiorowiska, którą nazywamy liczbą, jest zgoła obca ich mózgom. Ażeby tę cechę ująć, umysł musi wyodrębnić ją z pośród wszystkich innych cech zbiorowiska; czynność tego wyodrębnienia jest właśnie abstrahowaniem. Umysł więc musiał się zaprawić do abstrakcji, aby mógł pomyśleć liczbę, jako pewną oderwaną cechę zbioru indywiduów. Jednocześnie z pojęciem o liczbie musiały powstać nazwy na oznaczanie pomyślanych liczb, t. j. musiały powstać te pierwiastki mowy, które nazywamy liczebnikami. Badania filologji porównawczej stwierdziły, że we wszystkich językach liczebniki należały do najdawniejszych pierwiastków i że do języków pochodnych przechodziły z prajęzyków.

Gdy zdolność abstrakcyjna umysłu ludzkiego rozwijała się, człowiek powoli rozszerzał swój widnokrąg liczbowy, t. j. wytwarzał sobie pojęcie o liczbach coraz większych, do czego dawały mu pochop spostrzeżenia i doświadczenia życia codziennego. Nazywanie każdej liczby oddzielną nazwą i zachowywanie tych nazw w pamięci stawało się coraz trudniejszym i uciążliwszym w miarę, jak powiększał się zasób utworzonych liczb. Im więc bardziej rozszerzał się zakres posiadanych liczb, tym pilniejszą stawała się potrzeba wprowadzenia w te pojęcia jakiegoś ładu, ujęcia ich w pewien system, który ułatwiłby pamiętanie i posiłkowanie się niemi i który umożliwiałby nazywanie ich w sposób dogodny i zrozumiały. W ten sposób bardzo wcześnie zaczęły powstawać układy liczbowe, i, o ile tylko badania zabytków pozwalają sięgnąć wstecz, dostrzega się wyraźnie uformowane układy liczbowe.

Jest rzeczą zupełnie naturalną, że człowiek pierwotny oparł swój układ liczbowy na elementach swego ciała, a z tych przedewszystkim na ilości palców. Prawdopodobnie człowiek pierwotny liczył, pomagając sobie przebieraniem palców, jak to dziś czynią dzieci i prości ludzie. Po przeliczeniu wszystkich palców jednej ręki, człowiek pierwotny mógł zaczynać da capo, i w ten sposób grupa pięciu jednostek byłaby najbliższą wyższą kategorją liczby po jednostce; albo też, przeliczywszy wszystkie palce jednej ręki, mógł zacząć liczyć palce drugiej ręki i w ten sposób utworzyć pojęcie o dziesiątku, jako o grupie wyższego rzędu; wreszcie mógł w rachubę wciągać palce u rąk i u nóg. Widzimy tedy, że najdawniejsze, najnaturalniejsze układy liczbowe są te, które opierają się na liczbach: 5, 10 albo 20, t. j. tak zwane układy: piątkowy, dziesiątkowy i dwudziestkowy. Układ dziesiątkowy przetrwał do naszych czasów, i nie można przewidzieć, aby w przyszłości był powód do zarzucenia go. Układ ten wydaje nam się dziś tak elementarnym i zasadniczym, że zazwyczaj nie zastanawiamy się nad tym, ile potrzeba było doświadczenia i sprytu, aby od rozsypanych, niczym nie powiązanych liczb przejść do tego systemu.

W kulturach różnych ludów możemy odnaleźć ślady innych układów liczbowych, z których przedewszystkim interesują nas układy piątkowy i dwudziestkowy. Śladów konsekwentnie rozwiniętego układu piątkowego nie odkryto. Są języki, w których liczy się grupami po 5, ale niema w nich oddzielnych nazw na oznaczenie liczb 25, 125 i t. d. Przypuszczać można, że układ piątkowy był tylko fazą przejściową i rychło bywał rugowany przez układ dziesiątkowy. Natomiast do dnia dzisiejszego są języki z zupełnie ukształconym układem dwudziestkowym. Jak układ dziesiątkowy opiera się na tworzeniu coraz wyższych kategorji liczb, będących potęgami dziesięciu, a więc: 10, 100, 1000 i t. d., tak w układzie dwudziestkowym liczenie opiera się na tworzeniu potęg dwudziestu, t. j. liczb: 20, 400, 8000 i t. d. Układy takie mają istotnie niektóre plemiona, np. plemię Maya w Jukatanie, plemię Azteków w Meksyku. Dalej ślady układu dwudziestkowego spostrzegamy w językach francuskim i duńskim. We francuskim są pozostałości celtyckie: *quatrevingt* t. j. cztery dwudziestki zamiast 80; podobnego pochodzenia jest nazwa szpitala w Paryżu: l'hôpital des *quinze-vingts* (szpital dla 300 niewidomych). Podobnież w duńskim zamiast 60 mówi się 3 dwudziestki, zamiast 80— 4 dwudziestki. Wreszcie znamiennym jest, że jedno plemię, zamieszkałe w Orinoko w Ameryce, ma na oznaczenie dwudziestu ten sam wyraz, co na oznaczenie pojęcia „człowiek".

Układy liczbowe, oparte na liczbie palców, są dla nas gienetycznie jasne, ale nie są jedynemi. Tak np. Babilończycy, jak później zobaczymy, mieli konsekwentnie rozwinięty układ sześćdziesiątkowy, którego ślady przetrwały dotąd np. w podziale okręgu koła na stopnie, minuty i sekundy oraz w podziale godziny na minuty i sekundy. U niektórych ludów znajdujemy układy tak dziwaczne, że ich gieneza jest dla nas zupełnie ciemna. Stwierdzono np., że tubylcze plemiona Nowej Zelandji liczą według układu jedenastkowego; w ich języku są specjalne nazwy dla kilku pierwszych potęg jedenastu: 11, 121 i 1331; zamiast 12 mówią 11 i 1, zamiast 15—11 i 4, zamiast 22—dwie jedenastki, zamiast 38 — trzy jedenastki i 5 i t. d. Na zachodnim wybrzeżu Afryki jest plemię bolańskie albo buramańskie, które posiłkuje się układem szóstkowym; zamiast 7 mówi ono: 6 i 1, zamiast 12 — dwie szóstki i t. d. Naogół jednak te układy dziwaczne tworzą oddzielne nieliczne wyjątki.

Kwestja dawności układów liczbowych wiąże się ściśle z kwestją dawności działań arytmetycznych. Wszelki układ liczbowy jest oparty na dodawaniu i mnożeniu; tak np. w układzie dziesiątkowym tworzymy liczbę 14, dodając 10 i 4, 20 — mnożąc 10 przez 2, 36—mnożąc 10 przez 3 i dodając do iloczynu 6. Pojęcie więc o dodawaniu i mnożeniu musi być co najmniej tak dawne, jak układy liczbowe. W niektórych językach znajdujemy także tworzenie liczebników, oparte na odejmowaniu, jak np. łacińskie *undeviginti*—20 bez 1, t. j. 19, *duodeviginti*—20 bez 2, t. j. 18 i t. p. Najdawniejsze przykłady podobnego odejmowania daje język sanskrycki, np. *unavingsati* (*una* = bez, mniej) dwadzieścia bez — domyśl. 1, t. j. 20—1=19; niekiedy jest wyraźnie podany odjemnik *eka* = 1, np. *ekonaszaszta*: 60 bez 1, t. j. 59; wreszcie odjemnik może być różny od 1 i 2, np. *pantszonangsatam* = 100 — 5 t. j. 95. Podobne przykłady daje też język grecki, np. δυοῖν δέοντες ἑξήκοντα 60 bez 2, t. j. 58, ἑνὸς δέοντες πεντήκοντα 50 bez 1, t. j. 49; u Thucydidesa: τριακοσίων ἀποδέοντα μύρια 10000 bez 300, t. j. 9700. Rzadziej tworzenie liczebników posiłkuje się dzieleniem, są jednakże przykłady i tego działania, np. łac. *sesquialter*, gr. ἐπιδεύτερος—$1^1/_2$, dosłownie: połowa drugiego; łac. *sesquitertius* gr. ἐπίτριτος—$1^1/_3$ i t. p. W duńskim zamiast 50, 70 mówi się połowa trzeciej, czwartej dwudziestki, zamiast 90—połowa piątej dwudziestki. Malajczycy zamiast 25, 55 mówią: półtrzydzieści, półsześćdziesiąt, t. j. połowa trzeciego, szóstego dziesiątka.

Po logicznie skonstruowanym układzie liczbowym drugim momentem, który pchnął poważnie naprzód kulturę umysłową człowieka, był wynalazek pisma. Pismo, czy to polegało na nakładaniu barwnika na gładkie pole muru, tablicy, liścia lub papyrusu, czy też na żłobieniu płaskiej powierzchni rylcem, pozwalało człowiekowi utrwalać wyniki jego myślenia i ułatwiało wymianę myśli z innemi ludźmi. Zastosowanie umiejętności pisania do liczb niewątpliwie ułatwiło wykonywanie rachunków i musiało zatym przyczynić się do ich rozwoju. Dopóki liczenie było pamięciowe, ludzie nie mogli przekroczyć pewnego umiarkowanego zakresu liczb i nie mogli posuwać się zbyt daleko w działaniach na liczbach. Systematyczne rozwijanie metod rachunkowych umożliwione zostało przez umiejętność pisma. U wszystkich ludów najdawniejszym było pismo obrazkowe: ludzie w sposób mniej lub więcej nieudolny rysowali przedmioty, które wymienić chcieli. Następnie, gdy wypadło zanotowywać czynności lub pojęcia oderwane, ludzie wprowadzili pismo symboliczne, najprzód zbliżone do obrazkowego, później coraz bardziej upraszczane. Wreszcie szczytem rozwoju sztuki piśmienniczej był wynalazek pisma dźwiękowego, którym dziś posiłkują się wszystkie ludy ucywilizowane. Godną zaznaczenia jest uwaga, że w dzisiejszym piśmie fonetycznym przetrwała pozostałość pisma symbolicznego w postaci odrębnych znaków na oznaczanie liczb: obok alfabetu dźwiękowego mamy symboliczne cyfry! Co znamienniejsze, ten rudyment, zabytek poprzedniej fazy kultury, nie tylko nie stał się hamulcem na drodze rozwoju, ale, przeciwnie, istnienie specyficznego znakowania cyfrowego wytworzyło dalej symbolikę znaków matematycznych w całej dzisiejszej rozciągłości. Ta giętka, w swej prostocie nader przejrzysta symbolika matematyczna w bardzo wysokim stopniu przyczyniła się do rozwoju nauk matematycznych; ze swej zaś strony rozwój tych nauk pociągał za sobą coraz większe doskonalenie aparatu symbolów matematycznych. Postęp matematyki wiele zawdzięczał pozostałości z czasów, kiedy ludzie posiłkowali się pismem symbolicznym! Dziwny to paradoks, na który zwrócił uwagę znakomity historyk matematyki Moritz Cantor.

II.

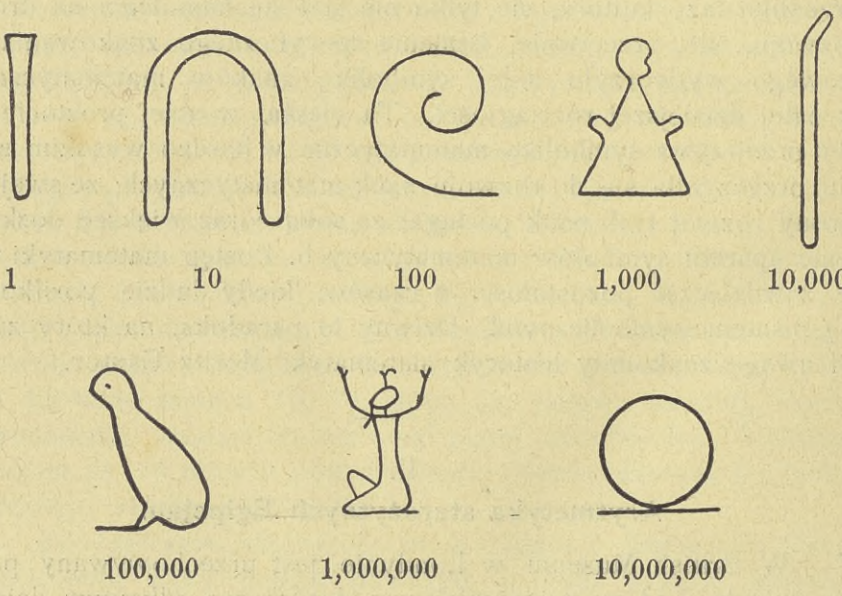
Arytmetyka starożytnych Egipcjan.

W British Museum w Londynie jest przechowywany papyrus egipski, będący najdawniejszym dotychczas odkrytym dziełem matematycznym. Treść tego papyrusu wydał R h i n d, przełożył ją zaś na niemiecki August E i s e n l o h r w dziele „Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter“, Lipsk 1877. Papyrus, o którym mówimy, znany jest w literaturze pod nazwą papyrusu Rhinda albo, według imienia autora, pod nazwą papyrusu A h m e s a. Według zgodnego orzeczenia egiptologów papyrus Rhinda pochodzi z czasów między 2000 i 1700 rokiem przed naszą erą.

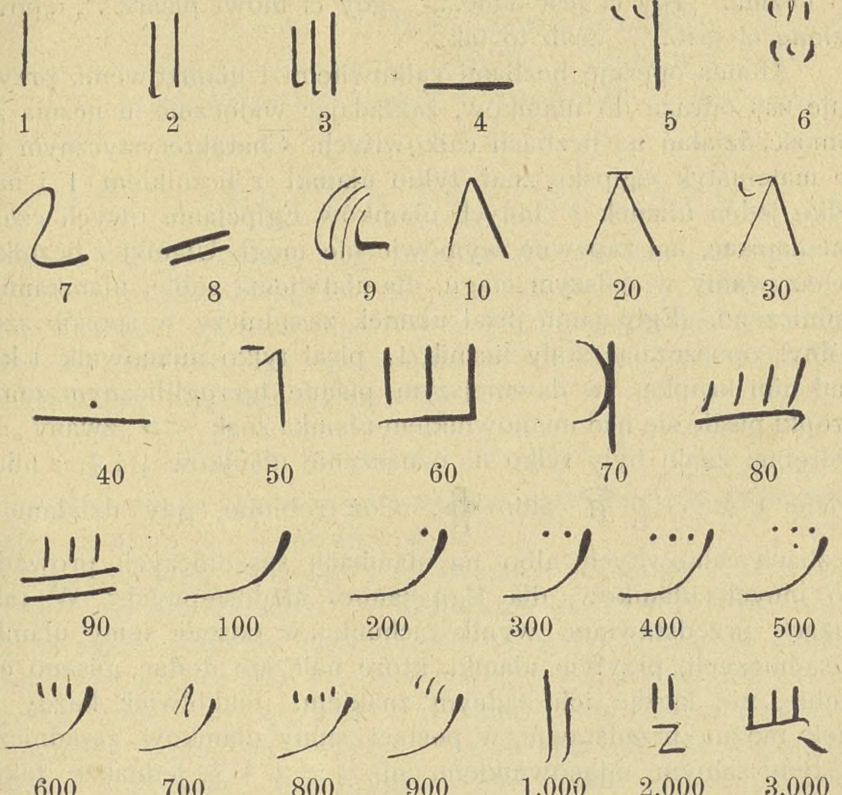
Podobnie, jak nasze księgi, papyrus Rhinda zaczyna się od tytułu; tytuł ten w przekładzie dosłownym brzmi: „Przepis dla zdobycia wiadomości wszelkich rzeczy ciemnych... wszelkich tajemnic, zawartych w przedmiotach. Księga ta została napisana w roku 33 Mesori dnia.... za panowania króla górnego i dolnego Egiptu Ra(a)us, życie dającego, według wzoru starych pism, sporządzonych za czasów króla (Ra-en-m)at, przez pisarza Ahmesa ułożone to pismo.“

Papyrus Rhinda jest napisany pismem hjeratycznym, które powstało przez uproszczenie dawniejszego pisma obrazkowego, zwanego hjeroglificznym. Rys. 1 zawiera liczby w piśmie hjeroglificznym, rys. 2—w piśmie hjeratycznym.

Rys. I.



Rys. II.



Z przytoczonego wyżej tytułu papyrusu widzimy, że już znacznie dawniej były pisane dzieła matematyczne, które służyły Ahmesowi za wzór. Już więc znacznie wcześniej, niż przed czterema tysiącami lat, myśl matematyczna była o tyle czynna, że znalazła sformułowanie w postaci traktatów.

Papyrus Rhinda nie jest wykładem teorji i nie zawiera żadnych ogólnych reguł czyli przepisów. Jest to właściwie zbiór zadań i ich rozwiązań; z początku są zadania arytmetyczne, nieraz po kilka jednego typu, w końcu rozwiązane są zadania gieometryczne, przeważnie na obliczanie pól; w tych ostatnich zadaniach idzie Ahmesowi głównie o stronę rachunkową przedmiotu, tak że dzieło jego jest przedewszystkim pracą arytmetyczną. Nazwa „przepisów“, dana papyrusowi przez samego autora, jest w widocznym związku z tonem, w którym utrzymany jest cały tekst papyrusu: jest to ton nauczyciela, przemawiającego po mentorsku do ucznia: „gdy ci jest dane...,“ „gdy ci mówi pisarz...“, „powiedziane ci jest...“, „zrób to tak...“

Ahmes operuje liczbami całkowitemi i ułamkowemi, przystępuje zaś odrazu do ułamków, zakładając widocznie u ucznia znajomość działań na liczbach całkowitych. Charakterystycznym jest, że matematyk egipski znał tylko ułamki z licznikiem 1 i nadto tylko jeden ułamek $\frac{2}{3}$. Innych ułamków Egipcjanin owych czasów ani napisać, ani zapewne wymówić nie mógł. Ułamki z licznikiem 1 nazywamy w dalszym ciągu, dla ułatwienia sobie, ułamkami zasadniczemi. Egipcjanin pisał ułamek zasadniczy w sposób szczególny: opuszczając stały licznik 1, pisał tylko mianownik i kładł nad nim kropkę; (w dawniejszym piśmie hjeroglificznym zamiast kropki pisało się nad mianownikiem ułamka znak , zwany „ro“). Odrębne znaki były tylko na oznaczenie ułamków $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$, a mianowicie: $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$ albo . Cóż robiono, gdy działanie na liczbach całkowitych albo na ułamkach zasadniczych prowadziło do innych ułamków, dla Egipcjanina niedostępnych? W takich razach przedstawiano wynik rachunku w postaci sumy ułamków zasadniczych; przytym ułamki, które należało dodać, pisano obok siebie, nie łącząc ich żadnym znakiem. Jakkolwiek każdy ułamek można przedstawić w postaci sumy ułamków zasadniczych z tym samym mianownikiem, np. $\frac{2}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$, jednakże takiego rozkładu unikano, starając się, aby wszystkie dodawane ułamki zasadnicze były różne; dopuszczalnym więc rozkładem ułamka $\frac{2}{9}$ jest rozkład: $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$; podobnież zamiast ułamka $\frac{2}{95}$ brano sumę $\frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$. Egipcjanin nie mówił, że ta ostatnia suma przedstawia ułamek $\frac{2}{95}$, gdyż tego ułamka właśnie nie mógł wymówić. Mówił tedy: „podziel 2 przez 95; uczyni to: $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{380}$ $\frac{1}{570}$“. Z tego można widzieć, że rozkład ułamków na sumy różnych ułamków zasadniczych odgrywał w arytmetyce egipskiej rolę podstawową. Tekst papyrusu Ahmesa rozpoczyna się też od tablicy rozkładu ułamków $\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \ldots$ do $\frac{2}{99}$. Zamiast rozkładu $\frac{2}{3}$ jest przepis: „podziel dwa przez 3, uczyni to $\frac{2}{3}$“, co jest zrozumiałe, gdyż ułamek $\frac{2}{3}$ był Egipcjanom znany. Niezależnie od tego Egipcjanie znali również rozkład $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, jak wynika z jednego zadania. Ułamków z mianownikami parzystemi w tablicy niema: ułamki z licznikiem 2 i z mianownikiem parzystym Egipcjanie odrazu skracali i pisali wprost, jako ułamek zasadniczy. Wzmiankowana tablica rozkładów obejmuje tylko ułamki z licznikiem 2. Ułamki z innemi licznikami można przedstawić w postaci sumy ułamków zasadniczych i ułamków z licznikiem 2, a potym już jako sumę wyłącznie ułamków zasadniczych, naprz. (opuszczając znak $+$):

$$\tfrac{5}{9} = \tfrac{1}{9}\ \tfrac{2}{9}\ \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{9}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{18}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{18} = \tfrac{1}{9}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{18}.$$

Nie było to ani proste, ani wygodne, ani w rezultacie przejrzyste, ale w końcu do pożądanego wyniku prowadziło. Przy większych liczbach trudności wzrastały nadzwyczajnie, i przejrzystość jeszcze bardziej się zatracała; tak np. rezultat podzielenia 1386 przez 97 przedstawiał się w następującej postaci:

$$14\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{97}\ \tfrac{1}{56}\ \tfrac{1}{679}\ \tfrac{1}{776}\ \tfrac{1}{194}\ \tfrac{1}{388}.$$

Po głównej tablicy rozkładu podana jest mniejsza tabliczka rozkładu ułamków z mianownikiem 10.

Dalej następują zadania. Przytoczymy następujące zadanie, z którego poznamy zarazem, że Egipcjanie umieli rozkładać ułamek $\frac{2}{3}$ na sumę ułamków zasadniczych: „$\frac{2}{3}$ uczynić pewnego ułamka. Gdy ci mówią, co jest $\frac{2}{3}$ jednej piątej, uczyń podwojoną i sześciokrotną liczbę, i to będzie $\frac{2}{3}$. Tak samo należy uczynić z każdym ułamkiem, który się nadarzy“. Tekst ten, napozór zagadkowy, stanie się jasnym, gdy uprzytomnimy sobie sposób pisania ułamków przez Egipcjan. Nasz wzór:

$$\tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}$$

wyglądał w pisowni egipskiej:

$$\tfrac{2}{3} = \dot{2}\ \dot{6}.$$

Bardzo obszerny dział zadań stanowią zadania „hau“; wyraz ten oznacza: kupa. Zadania na rachunek kupy, przełożone na dzisiejszy język matematyczny, okazują się zadaniami na równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (kupą). Oto przykład takiego zadania: „Kupa, jej siódma część, jej całość, czyni 19“. W dzisiejszej pisowni przedstawilibyśmy to zadanie w postaci równania:

$$\tfrac{1}{7}\, x + x = 19, \text{ czyli: } \tfrac{8}{7}\, x = 19.$$

Egipcjanin obliczał najprzód iloraz 19 przez 8 w postaci 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$, a potym powiększał tę liczbę 7 razy i dochodził do ostatecznego wyniku 16 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$.

Z jakiemi trudnościami rachmistrz egipski musiał się przytym borykać, łatwo zrozumieć z tego, że dzisiejsza technika mnożenia była mu zupełnie obcą: umiał on mnożyć tylko przez 2. Do mnożenia przez inną liczbę dochodził stopniowo drogą podwajania. Tak np. gdy wypadało mnożyć 43 przez 21, liczono:

/1	43
2	86
/4	172
8	344
/16	688,

następnie znaczono kreseczkami te mnożniki, których suma dawała 21, i przez dodawanie otrzymywano:

21 903.

W taki sam sposób mnożono ułamki, mnożono bowiem właściwie tylko mianowniki, gdyż iloczyn ułamków zasadniczych jest znowu ułamkiem o liczniku 1.

Podziw w nas budzić musi wytrwałość i pracowitość rachmistrzów egipskich, którzy tak wielkie trudności zwalczać musieli, gdzie dziś dziecko z łatwością daje sobie radę. Tak naiwnie prostemi środkami kładziono cegiełki pod budowę przyszłego gmachu królowej nauk. Matematykowi czasów dzisiejszych, przywykłemu do zręcznej spółczesnej techniki rachunkowej, mającemu szeroko rozwinięte pojęcie o liczbach, przedstawia niezmierną trudność wniknięcie w świat kombinacji, do których uciekał się matematyk czasów Ahmesa. Wierzyć się po prostu nie chce, że nawet to, co zawiera papyrus Ahmesa, zostało dokonane tak nieudolnie prostemi środkami. A jednakże w dokumencie tym są, między innemi, zadania na t. zw. regułę podziału proporcjonalnego, na postępy arytmetyczny i gieometryczny. Wzór—raczej przepis — na sumę wyrazów postępu arytmetycznego był Ahmesowi znany; prawdopodobnie znał on również odpowiedni wzór dla postępu gieometrycznego.

Sposób pisania liczb był bardzo zmudny i bynajmniej nie mógł sprzyjać doskonaleniu techniki rachunkowej. Sposób ten zasadniczo różnił się od naszego wskutek tego, że Egipcjanie, podobnie, zresztą, jak inne narody w starożytności, nie znali zera; stąd ich system pisania liczb był bardziej, co do zasady, zbliżony do dobrze nam znanego sposobu rzymskiego. Bajeczne ułatwienie w pisaniu liczb daje nam t. zw. zasada położeniowa, polegająca na tym, że ta sama cyfra przybiera różne znaczenia w zależności od miejsca, które zajmuje. Nie znając zera, Egipcjanie nie mogli wpaść na myśl podobnej zasady. Inna wszakże zasada była konsekwentnie przeprowadzana, i to nietylko u starożytnych Egipcjan, ale u wszystkich ludów spółczesnych im i późniejszych, aż do naszych czasów włącznie. Zasada ta polega na tym, że gdy liczba tworzy się przez dodanie kilku części składowych, to zawsze na piśmie większa liczba składowa poprzedza mniejszą; należy przytym mieć na uwadze kierunek pisma. W myśl tej zasady my piszemy 27, t. j. najprzód dwadzieścia, a potym siedem; Rzymianie pisali tę samą liczbę XXVII, podobnież Grecy w odleglejszej starożytności: ΔΔΠΙΙ (10 + 10 + 5 + 2), później $\overline{\kappa\zeta}$ ($\kappa = 20$, $\zeta = 7$); w piśmie hebrajskim, które idzie od prawej strony ku lewej, liczba ta wyrazi się: כז (כ = 20, ז = 7); Chińczycy, piszący od góry ku dołowi, napiszą najprzód 20, a *pod* tym 7. Ta to zasada była ściśle przestrzegana już przez starożytnych Egipcjan. (Pismo hjeroglificzne szło dowolnie to w jednym, to w drugim kierunku; egiptologowie, odtwarzając hjeroglify, piszą je zawsze w kierunku od lewej strony ku prawej; pismo hjeratyczne zawsze szło od prawej strony ku lewej).

W mozolnych swych rachunkach Egipcjanie pomagali sobie bądź to liczeniem na palcach, na co wskazują wizerunki na staroegipskich łokciach, bądź przy pomocy kamyków, przesuwanych na desce. Herodot opowiada, że „Egipcjanie posługują się przy rachunku kamykami, przesuwają je jednak od prawej strony ku lewej, podczas gdy Grecy przesuwają kamyki od lewej strony ku prawej.“

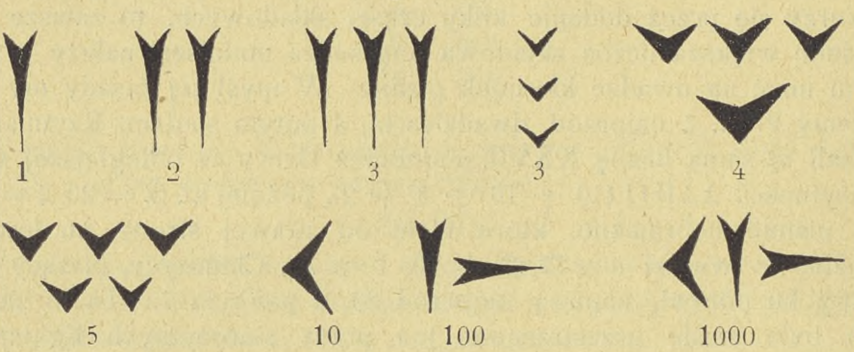
---

3. Arytmetyka babilońska (chaldejska).

Babilończycy i Asyryjczycy z zamiłowaniem uprawiali astronomję; zwłaszcza Sumirowie, którzy do Babilonji przywędrowali z północy, byli biegłemi astronomami: robili spostrzeżenia na niebie, następnie spostrzeżenia te notowali i obliczali; przepowiadali oni zaćmienia słońca i księżyca. Tak daleko posunięta wiedza astronomiczna wymagała z konieczności wydoskonalonych rachunków, to też niewątpliwie arytmetyka babilońska stała na wyższym poziomie, niż staroegipska.

Odkryte zabytki babilońskie są pisane pismem klinowym czyli ćwiekowym, które powstało z dawniejszego chaldejskiego pisma obrazkowego. Pismo klinowe (rys. 3) szło od lewej strony ku prawej, czyli tak, jak nasze pismo dzisiejsze.

Rys. III.



O kulturze matematycznej Chaldejczyków świadczą odkryte dokumenty, z których najsłynniejsze są dwie tabliczki gliniane z wyżłobionemi napisami klinowemi, odkryte w 1854 r. przez gieologa W. K. Loftusa pod Senkereh nad Eufratem. Według angielskiego asyrjologa A. H. Sayce'a tabliczki te pochodzą z czasu między 2300 i 1600 r. przed Chrystusem (a zatym mniej więcej z tej samej epoki, z której pochodzi papyrus Rhinda). Tabliczki te są zapisane po obudwuch stronach, i każda z nich zawiera po 60 wierszy. Jedna z nich ma treść następującą:

1 kwadrat 1
4 kwadrat 2
9 kwadrat 3

i t. d.; w ten sposób podane są kwadraty liczb od 1 do 60. Po wierszu

49 kwadrat 7

oczekiwalibyśmy wiersza:

64 kwadrat 8,

zamiast tego jednak czytamy:

1 4	kwadrat	8
1 21	kwadrat	9

i t. d., wreszcie ostatnie wiersze są:

58 1	kwadrat	59
1	kwadrat	1.

Cóż to znaczy? Sens powyższych wierszy zrozumiemy odrazu, gdy sobie uprzytomnimy, że obok układu dziesiątkowego, na którym zresztą jest oparty sposób pisania liczb pismem klinowym, Babilończycy mieli rozwinięty system sześćdziesiątkowy; tym ostatnim szczególnie chętnie posługiwali się w pracach naukowych, a charakter takiej właśnie pracy mają tabliczki, których treść opisujemy. Otóż czytane w układzie sześćdziesiątkowym, przytoczone wiersze oznaczają:

$60+4$	kwadrat	8
$60+21$	kwadrat	9
. . . . .	. . .	. .
$58\times 60+1$	kwadrat	59
60.60	kwadrat	60.

Druga tabliczka jest nieco uszkodzona. Najprzód daje ona porównanie dwuch układów miar, z których jeden miał poddziały sześćdziesiętne. Potym następuje tablica sześcianów liczb, ułożona w sposób analogiczny, jak tablica kwadratów:

1	sześcian	1	
8	sześcian	2	
27	sześcian	3	
1 4	sześcian	4	
2 5	sześcian	5	
. . .	. . .	.	
1 8 16	sześcian	16	(t. j. $60^2+8.60+16=16^3$)

i t. d. Tablica ta daje sześciany liczb od 1 do 32; należy przypuszczać, sądząc z rozmiarów tabliczki i z kształtu ułamanych części, że na tych ostatnich były sześciany dalszych liczb naturalnych do 60.

Wykazano, że Babilończycy swobodnie posługiwali się ułamkami z mianownikiem 60, pisali przytym tylko liczniki, domyślając się stałego mianownika (pewna analogja z naszemi ułamkami dziesiętnemi!).

Bliższe szczegóły, dotyczące techniki rachunków babilońskich, niestety, dotychczas nie są znane.

Nie możemy nie wspomnieć o pewnym zabytku babilońskim, odkrytym przez angielskiego badacza Hincks'a. W dokumencie tym jest dana odpowiedź na pytanie, jaka część tarczy księżyca jest oświetlona w 15 kolejnych dniach od nowiu do pełni. Wynik jest podany w następującej formie:

5	10	20	40	1 20
1 36	1 52	2 8	2 24	2 40
2 56	3 12	3 28	3 44	4

Hincks objaśnił tę tablicę, odczytując ją według układu sześćdziesiątkowego; wtedy staje się ona wyraźną, a mianowicie:

5	10	20	40	80
96	112	128	144	160
176	192	208	224	240.

Tablica ta orzeka, że w pierwszym dniu po nowiu jest widocznych $\frac{5}{240}$ tarczy księżyca, w drugim $\frac{10}{240}$ i t. d., w pierwszych więc 5 dniach szerokość widzianej części tarczy księżyca wzrasta w postępie gieometrycznym, w następnych zaś 10 dniach—w postępie arytmetycznym.

Wzmiankowany już wyżej Sayce odkrył i odcyfrował dzieło astrologiczne, napisane około 1700 r. przed naszą erą dla asyryjskiego króla Sargona. Dzieło to zawiera przepowiednie astronomiczne i komentarze do nich w duchu astrologicznym. Niezależnie od charakteru wróżbiarskiego tego dzieła, jest rzeczą jasną, że mogło ono powstać tylko na gruncie zebranych i opracowanych dostrzeżeń astronomicznych. Nadzwyczaj ważnym jest fakt, że Chaldejczycy liczyli w roku 360 dni; według bardzo prawdopodobnego przypuszczenia Cantora w tym podziale roku należy upatrywać źródło sześćdziesiątkowego układu liczb.

Wykopaliska babilońskie, niestety, nie dają możności głębszego wniknięcia w świat pojęć matematycznych Babilonu; jakiejś większej pracy matematycznej, w rodzaju choćby papyrusu Ahmesa, nie odkryto. Lukę tę wypełnia ta okoliczność, że w Egipcie w Babilonji kształcili się ojcowie matematyki greckiej; dzięki temu uczeni greccy ostatnich kilku wieków przed Chrystusem nieraz powołują się na egipskie albo babilońskie źródła, i w ten sposób studja nad matematyką grecką nieco pogłębiają to, co wiemy o rozległości nauki babilońskiej. Niewątpliwie np. Babilończycy znali własności proporcji, jakkolwiek w odkrytych dokumentach babilońskich niema o tym wyraźnej wskazówki.

---

4. Arytmetyka u innych starożytnych ludów wschodnich.

Zabytki, dotyczące matematyki u Fenicjan, Hebrajczyków i Syryjczyków, są zbyt niedostateczne, aby według nich można było odtworzyć sobie dokładne pojęcie o stanie tej nauki u wymienionych narodów. Fenicjanie utrzymywali stosunki handlowe z mieszkańcami wybrzeży i wysp morza Śródziemnego i, jako dzielni kupcy, niewątpliwie posługiwali się swobodnie rachunkiem. Ich zasługą jest wynalazek alfabetu dźwiękowego, składającego się z 22 liter i przyjętego prawie bez zmian przez Hebrajczyków i Syryjczyków i z niewielkiemi zmianami przez Greków. Alfabet fenicki w najdawniejszych czasach prawdopodobnie nie miał ustalonej kolei liter, jednakże już w 2-ej połowie VII w. przed Chr. porządek liter w alfabecie fenickim był ustalony, jak tego uczą tabliczki z bibljoteki Asurbanipala, wykopane w Niniwji. Pomimo jednak ustalenia porządku liter w alfabecie, Fenicjanie nie wpadli na myśl oznaczania liczb przez litery; to zastosowanie litery alfabetu otrzymały dopiero u Syryjczyków, Hebrajczyków i Greków. Hebrajczycy za przykładem Babilończyków uprawiali t. zw. *giematrję*, która polegała na nadawaniu znaczenia liczb literom, tworzącym pewne wyrazy, i wyciąganiu stąd rozmaitych wniosków. Tak np. rok nazywa się po hebrajsku שנה (szono); wartości liczebne liter ש, נ, ה, są odpowiednio: 300, 50, 5; suma tych liczb 355 jest równa liczbie dni w roku Hebrajczyków. W *Genesis* 14,14 podaje się, że gdy Abraham usłyszał o wzięciu brata do niewoli, uzbroił wyćwiczonych ludzi, urodzonych w jego domu, w liczbie 318 osób i wysłał ich dla odbicia brata. Z tego, że suma liczb, odpowiadających literom wyrazu אליעזר (Eliezer), wynosi właśnie 318, komentatorowie wywnioskowali, że Abraham wysłał oddział ludzi pod dowództwem Eliezera. Były to igraszki liczbowe, na których opierała się kabała żydowska, igraszki te jednakże świadczyły o pewnej swobodzie w posiłkowaniu się liczbami.

Zanim przejdziemy do historji matematyki greckiej, zauważymy tylko jeszcze, że w najdawniejszych czasach wiedza arytmetyczna stała na dość wysokim poziomie rozwoju u Chińczyków. Mieli oni rozwinięty układ dziesiątkowy liczb i korzystali z przyrządu, zwanego „swan-pan“, składającego się z 10 drutów na ramie; po drutach przesuwano kółeczka. Chiński „swan-pan“, sądząc z rysunków, bardzo przypominał dzisiejsze rosyjskie „szczoty“. Żadnych jednak *pewnych* wiadomości o stanie wiedzy arytmetycznej u starożytnych Chińczyków nie mamy. Źródła historyczne chińskie, dziś dla europejczyków dostępne, są przeważnie mało wiarogodne, dane chronologiczne są często fantastyczne i pogmatwane; z właściwej więc historji matematyki starożytnych Chin należy zrezygnować.

---

5. Pierwsze fazy rozwoju arytmetyki greckiej.

W najdawniejszych napisach greckich, sięgających VI w. przed Chr., liczby oznaczano literami, przeważnie literami początkowemi odpowiednich liczebników: jedność oznaczano kreską I, pięć (πέντε) Γ albo Π (wielkie *pi*); dziesięć (δέκα) Δ (litera *delta*), 100 (ἑκατόν) H (litera *eta* dawniej nie oznaczała dźwięku *e*, lecz przydech, jak polskie h; dźwięk ten słyszy się na początku wyrazu ἑκατόν), dalej 1000 (χίλια) X (*chi*), 10000 (μύρια) M (*mi*). Znaków tych używano w rozmaitych kombinacjach, np. 𐅄 albo 𐅄 oznaczało 50, 𐅅 albo 𐅅—500. Znaki powyższe nazwano później *herodjańskiemi* od Herodjana, gramatyka bizantyjskiego, który je opisał. W parę jednak wieków po wprowadzeniu pisma jońskiego t. j. około III wieku przed Chr. zaczęto oznaczać liczby literami: $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$ . . . $\vartheta=9$, $\iota=10$, . . . $\rho=100$, $\varphi=500$. Nad liczbami, napisanemi w ten sposób, Grecy kładli kreskę dla odróżnienia od wyrazów. Dla oznaczania tysięcy używano znaku, podobnego do accentus gravis, np. ὰ=1000. Zera Grecy nie znali.

Ułamki Grecy pisali, kładąc najprzód licznik z akcentem ′, a potym mianownik dwa razy z podwójnym akcentem ″, np. ζ′ κα″ κα″$=\frac{17}{21}$. Gdy ułamek miał licznik 1, opuszczano go i pisano tylko mianownik 1 raz, np. $\lambda'' = \frac{1}{30}$. Ułamki, napisane obok siebie, dodawano (jak u Egipcjan) np. $\delta''\ \eta''\ \iota\beta'' = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24} = \iota\alpha'\ \varkappa\delta''\ \varkappa\delta''$. Oddzielne znaki były na oznaczanie ułamków $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$ (znowu wpływ egipski!).

Czy uważać należy za krok naprzód zamianę znaków herodjańskich przez litery jońskie, to zależy od punktu widzenia. Bez kwestji łatwiej było napisać $\overline{\lambda}$ niż ΔΔΔ, $\overline{\nu}$ niż 𐅄, ale z drugiej strony podczas, gdy między wzorami:

ΔΔΔ + ΔΔ = 𐅄
HHH + HH = 𐅅

odrazu dostrzega się analogję, prowadzącą do związku natury ogólnej, to analogja ta ginie zupełnie, gdy piszemy te same wzory pismem jońskim:

$$\overline{\lambda} + \overline{\varkappa} = \overline{\nu}$$
$$\overline{\tau} + \overline{\sigma} = \overline{\varphi}.$$

Uproszczenie więc było niewątpliwie pod względem pisarskim, ale bynajmniej nie można tej reformy uważać za korzystną pod względem arytmetycznym.

Grecy, podobnie jak Egipcjanie, ułatwiali sobie rachunek liczeniem na palcach i przy pomocy desek, na których przesuwali kamyki; deska taka nazywała się ἄβαξ; na deskach tych były wyżłobione kolumny pionowe, albo też deski były gładkie, przysypane piaskiem, i wtedy można było na nich kreślić figury gieometryczne.

---

6. Szkoły pitagorejska i ateńska.

Matematyka grecka zasadniczo różni się od matematyki innych narodów świata starożytnego. Podczas, gdy matematyka egipska, babilońska i fenicka powstały i rozwinęły się na gruncie potrzeb praktycznych i warunków życia, miała więc podkład utylitarny, Grecy odrazu założyli kamień węgielny pod gmach nauki czystej; grecki umysł filozoficzny znajdował dość impulsu w samej nauce, by jej kult uprawiać. Dalej, gdy wiedza matematyczna ludów starożytnych tworzyła się z sumy nagromadzonych przez wieki spostrzeżeń, Grecy, nie mając tradycji naukowej, przyswoili sobie gotowy całokształt nauki egipskiej i babilońskiej, zwłaszcza pierwszej, i na tym podłożu zaczęli rozwijać badania samoistne.

Matematyka grecka jest przeważnie gieometryczną; badania arytmetyczne, względnie mniej rozległe, były często przyoblekane w szatę gieometryczną.

Naukę liczb najwcześniej uprawiał w Grecji Pitagoras i jego szkoła (Pitagoras żył według jednych od 569 r. do 470 r., według innych od 580 r. do 500 r. przed Chr.). Szkoła pitagorejska była organizacją naukową zamkniętą; od jej członków wymagano dyskrecji i baczono, aby wyniki badań nie wychodziły poza obręb szkoły. Wskutek tego ściśle nigdy nie można twierdzić, co należy przypisywać samemu Pitagorasowi, a co jego uczniom, i mianowicie, któremu z nich. Dlatego to, zamiast mówić o odkryciach matematycznych Pitagorasa lub jego poszczególnych uczniów, słuszniej jest mówić o matematyce szkoły pitagorejskiej. Szkoła ta przetrwała do końca V w. przed Chr.

Pitagorejczycy natknęli się na liczby niewymierne i doskonale zdawali sobie sprawę z niewymierności stosunku przekątnej i boku kwadratu[1]).

Naukę o liczbach pitagorejczycy dzielili na dwa działy: na *arytmetykę* i *logistykę*: arytmetyką nazywano naukę o liczbach oderwanych, logistyka miała za przedmiot zastosowania praktyczne

---

[1]) Prawdopodobnie z czasów Pitagorasa pochodzi następujący dowód twierdzenia o niespółmierności przekątnej i boku kwadratu, przytoczony przez Euklidesa.

Załóżmy, że stosunek przekątnej do boku kwadratu wyraża się stosunkiem liczb całkowitych α i β, nie mających wspólnego czynnika, wtedy mamy zależność:

$$\alpha^2 = 2\beta^2.$$

Liczba α musi być liczbą parzystą, a ponieważ β nie ma z α czynnika wspólnego, więc β *jest liczbą nieparzystą*. Oznaczając połowę liczby α przez γ, otrzymamy:

$$\beta^2 = 2\gamma^2,$$

stąd wynika, że β *jest liczbą parzystą*. Ponieważ β nie może być jednocześnie liczbą parzystą i nieparzystą, więc stąd wniosek, że założenie jest mylne.

liczb. Arytmetyka pitagorejczyków odpowiadała dzisiejszej teorji liczb, logistyka — dzisiejszej arytmetyce, jako umiejętności rachunku.

Arytmetyka pitagorejska miała zabarwienie mistyczne: pitagorejczycy upatrywali stosunki liczbowe we wszechświecie i kojarzyli pojęcia o liczbach z pojęciami o bóstwach, przymiotach, obyczajach etc. Według Plutarcha uroczystą przysięgą pitagorejczyków była *tetraktys* — liczba $36=2+4+6+8+1+3+5+7$, jako suma pierwszych czterech liczb parzystych i pierwszych czterech liczb nieparzystych.

Segregując liczby całkowite, pitagorejczycy odróżniali liczby parzyste od nieparzystych, liczby pierwsze od złożonych. Dalej pitagorejczycy rozważali różne kategorje liczb, tworzonych jako sumy szeregów, i tłumaczyli je gieometrycznie. Tak np. liczby kształtu $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ nazywali *trójkątnemi*, liczby $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ — *kwadratowemi* i wyobrażali je gieometrycznie w ten sposób:

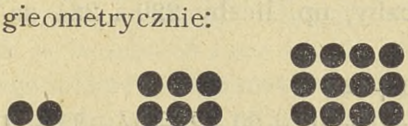
liczby trójkątne:

(1) (3) (6) (10) i t. d.

liczby kwadratowe:

(1) (4) (9) (16) i t. d.

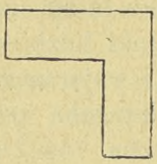
Tak samo rozważali liczby, utworzone przez sumowanie kolejnych liczb parzystych: $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$. Liczby te przedstawiano gieometrycznie:



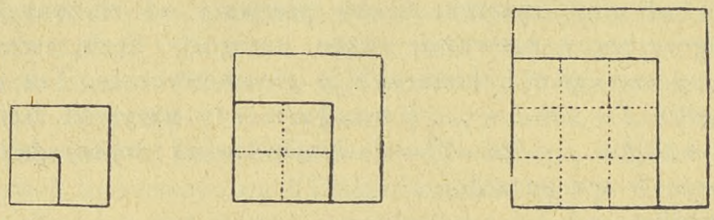
(2) (6) (12) i t. d.

Dodając do n-ej liczby kwadratowej (n^2) liczbę $2n+1$, otrzymywano $(n+1)$-ą liczbę kwadratową: $(n+1)^2$. Na tej zasadzie liczbę

$2n+1$, t. j. w ogólności liczbę nieparzystą nazywano *gnomonem* liczb kwadratowych. Gieometrycznie gnomon wyobrażano w kształcie figury:



Znaczenie gnomonu komentowano, jak następuje:



Widzimy, jak przez kolejne dodawanie gnomonu do kwadratu o boku 1, 2..., otrzymuje się kwadrat o boku o 1 większym od poprzedniego.

Nauka o proporcjach była bardzo rozwinięta; obok średniej arytmetycznej i średniej gieometrycznej dwuch liczb rozważano także średnią harmoniczną.

Pitagorejczycy znali liczby *doskonałe* (liczbą doskonałą nazywamy liczbę, równą sumie wszystkich jej dzielników, mniejszych od niej samej, np. $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$). Liczby niedoskonałe dzielili na *nadmiarowe* i *niedomiarowe* zależnie od tego, czy były większe, czy też mniejsze od sumy swoich dzielników. Dalej pitagorejczycy znali również liczby *zaprzyjaźnione* (dwie liczby nazywamy zaprzyjaźnionemi, jeżeli każda z nich jest równa sumie dzielników drugiej liczby, np. liczby 220 i 284 są zaprzyjaźnione, gdyż jest:

$$220=1+2+4+71+142$$

$$284=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110.$$

Na pytanie, czym jest przyjaciel, Pitagoras miał dać odpowiedź: „Ktoś, kto ma inne ja, jak 220 i 284.“ Zera pitagorejczycy nie znali, Nikomachus później bowiem pisze, że każda liczba jest średnią arytmetyczną obudwu sąsiednich, tylko jedność, która nie ma dwu sąsiednich, jest połową liczby sąsiedniej.

Charakterystyczną dla owej epoki jest opozycja, z którą spotykały się idee pitagorejskie, wybiegające poza dotychczasowe pojęcia o wielkości i o liczbie. Pitagorejczycy rozważali punkt jako „jedność, mającą położenie“ (μονὰς ἔχουσα θέσιν), a więc jako pojęcie czegoś samoistnego, natknęli się na liczby niewymierne i byli bardzo blizcy pojęcia o ciągłości. Idee te były jednakże zwalczane; szczególniej w tym kierunku odznaczył się Zenon z Elei, który dowodził pozornie logicznie, że idee pitagorejskie prowadzą konsekwentnie do niedorzeczności; znane są paradoksy Zenona, dowodzące jakoby niemożności ruchu, niemożności, aby Achilles dopędził uciekającego żółwia i t. p. Oczywiście, skoro tego rodzaju paradoksy miały debit, to nie było w owej epoce warunków, sprzyjających dalszemu rozwojowi nauk pytagorejczyków, w szczególności przedwcześnie było wtedy na to, aby z tych nauk wyłoniła się metoda nieskończonostkowa.

Pod koniec V w. Ateny stały się głównym ośrodkiem matematyki greckiej. Plato założył szkołę ateńską czyli t. zw. Akademję. Z matematyków tej szkoły wymienimy Eudoxusa (408 — 355), twórcę metody wyczerpywania. Metoda ta opiera się na twierdzeniu, że jeżeli od całości odjąć więcej, niż połowę, następnie od reszty odjąć więcej, niż jej połowę i t. d., to można zawsze dojść do reszty mniejszej, niż jakakolwiek wielkość dana. Metoda ta, rozwinięta później przez Archimedesa, zastępowała starożytnym w pewnym stopniu rachunek nieskończonostkowy, np. przy pomocy tej metody Archimedes potrafił obliczyć pole odcinka parabolicznego.

Szkoła ateńska odegrała w historji matematyki greckiej rolę wybitną: ona to rozbudziła zamiłowanie do studjów matematycznych, rozwinęła niektóre ważne metody gieometryczne; matematykę szkoła ateńska traktowała, jako część filozofji. Matematycy tej szkoły zaczęli dbać o ścisłość definicji i rozumowania, tak np. oni pierwsi zaczęli w badaniach zastanawiać się nad kwestją możliwości danego zagadnienia. Matematycy szkoły ateńskiej w dalszym ciągu w duchu pitagorejskim przyoblekali naukę o liczbach w szatę gieometryczną, a to tak dalece, że nawet metoda wyczerpywania, która była zaczątkiem późniejszego rachunku nieskończonostkowego, powstała jako metoda gieometryczna. Uczeń Platona

Arystoteles pierwszy zaczął stosować litery do oznaczania liczb; u niego znajdują się też zaczątki kombinatoryki. Późniejsi uczeni szkoły ateńskiej już nie dokładali nowych cegiełek do budowy gmachu matematyki; oni jedynie systematyzowali i komentowali prace swych poprzedników. Wreszcie szkoła ateńska istnieć przestała i środek ciężkości badań naukowych przeszedł do Aleksandrji w Egipcie. Szkoła aleksandryjska stanowi epokę kulminacyjną w rozwoju matematyki greckiej.

---

7. Rozkwit matematyki greckiej.

Aleksandrja miała wszelkie warunki po temu, aby stać się głównym punktem rozwoju nauk. Ptolemeusze, roztaczając na swym dworze przepych niebywały, byli zarazem szczodremi mecenasami nauki. Uczyniwszy Aleksandrję stolicą swego państwa, Ptolemeusz Soter (panował od 305 do 285 przed Nar. Chr.), a za nim i następcy jego: Ptolemeusz Philadelphus (285—247) i Ptolemeusz Euergetes (247—222) starali się ściągnąć do tego miasta uczonych mężów, których następnie otaczali prawdziwie królewską opieką. W pobliżu pałacu królewskiego został założony uniwersytet z książnicą, czytelnią, muzeami i laboratorjami. Dzięki tym warunkom Aleksandrja stała się niebawem ogniskiem matematyki greckiej. Ze szkoły aleksandryjskiej wyszli trzej najwięksi matematycy świata starożytnego: Euklides, Archimedes i Apolonjusz. Dzięki nim matematyka podźwignęła się ze stanowiska działu filozofji i stała się nauką samoistną, godną badania dla niej samej. Dominującą rolę na polu krzewienia i uprawiania nauk matematycznych Aleksandrja odgrywała aż do roku 641 po Chr., gdy gród ten został przez Arabów zburzony.

Obaczmy, co uczeni szkoły aleksandryjskiej zdziałali dla rozwoju arytmetyki.

Euklides (około 330—275 przed Chr.) napisał kilka prac, z których najdonioślejsza ma tytuł „Stojcheja“ t. zn. „Elementy.“ Jest to systematyczny wykład gieometrji elementarnej. Praca Euklidesa odrazu zaćmiła i wyparła z użycia inne ważniejsze wykłady elementów, a dzieło to było tak znakomite, że na długo potym służyło, jako podręcznik podstawowy. Jakkolwiek praca Euklidesa jest wybitnie gieometryczną, jednak wiele miejsca poświęca on nauce o liczbach. Ponieważ jednak sposób myślenia Euklidesa był par excellence gieometryczny, przeto i rozważania liczbowe ujęte są w szatę gieometryczną: zamiast na liczbach Euklides przeprowadza rozumowania na linjach i polach. Tak np. druga księga Elementów rozwija zastosowania twierdzenia Pitagorasa i wypowiada szereg twierdzeń o polach prostokątów; przetłumaczone na dzisiejszy język algiebraiczny, wnioski te brzmiałyby:

$$ab+ac+ad+\ldots=a(b+c+d+\ldots),$$
$$ab+a(a-b)=a^2$$
$$ab=b(a-b)+b^2$$
$$a^2+b^2=2ab+(a-b)^2$$
$$4ab+(a-b)^2=(a+b)^2$$
i t. d.

Figury gieometryczne zastępowały Euklidesowi nasze wzory algiebraiczne, pozatym jednak rozumowanie jego należy zaliczyć raczej do arytmetyki, niż gieometrji. Tak samo w księdze V-ej Euklides podaje naukę o proporcjach, rozwiniętą na odcinkach, które odgrywają tam rolę liczb.

W księdze VI-tej znajdujemy pierwsze zadanie na maximum; Euklides dowodzi tam, że ze wszystkich prostokątów o danym obwodzie największe pole ma kwadrat; algiebraicznie twierdzenie to orzeka, że iloczyn $x(a-x)$ ma wartość maximum przy $x=\frac{1}{2}a$.

Księgi VII, VIII i IX są wyłącznie poświęcone badaniom liczbowym. Księga VII bada własności liczb całkowitych; po ustaleniu pojęcia o liczbach pierwszych względem siebie, Euklides rozwija znany dziś pod jego nazwą algorytm znajdowania największego spólnego dzielnika dwuch liczb. Dalej idzie nauka o proporcjach, utworzonych z liczb, wyprowadzone zostają proporcje pochodne, potym następują rozważania o podzielności liczb. Księgi VIII i IX są dalszym ciągiem nauki o proporcjach. W księdze IX znajdują się, między innemi, twierdzenie o liczbie liczb pierwszych (tw. 20) i twierdzenie o liczbach doskonałych.

To ostatnie twierdzenie (36-te) orzeka: wśród sum

$$1+2,$$
$$1+2+4,$$
$$1+2+4+8$$

i t. d. są liczby pierwsze; jeżeli sumę, która jest liczbą pierwszą, pomnożymy przez ostatni jej składnik, to iloczyn okaże się liczbą doskonałą. Przy pomocy znakowania dzisiejszego dowodzimy tego twierdzenia z łatwością. Jakoż niech suma:

$$1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$$

będzie liczbą pierwszą; iloczyn $2^{n-1}(2^n-1)$ jest istotnie liczbą doskonałą, gdyż suma jego czynników, mniejszych od niego samego, wynosi:

$$\begin{aligned}1+2+4+\ldots+2^{n-1}+(2^n-1)+2(2^n-1)+4(2^n-1)+\ldots+2^{n-2}(2^n-1)&=\\ =2^n-1+(2^n-1)(1+2+\ldots+2^{n-2})&=\\ =2^n-1+(2^n-1)(2^{n-1}-1)=2^{n-1}(2^n-1).&\end{aligned}$$

Tą drogą otrzymujemy następujące przykłady liczb doskonałych:

$$2.3=6,\ 4.7=28,\ 16.31=496,\ 64.127=8128 \text{ i in.}$$

Cała księga X jest poświęcona teorji wielkości niespółmiernych.

Widzimy, że Elementy Euklidesa i dla historji arytmetyki mają znaczenie poważne.

Prace Archimedesa (287—212 przed Chr.) są przeważnie natury gieometrycznej, jednakże i rachunki zajmują w nich miejsce poważne. Podobnie, jak Euklides, przyobleka on rozumowanie liczbowe w szatę gieometryczną, operując odcinkami, zamiast liczb. Tak np. w dziele o linjach spiralnych Archidemes wygłasza twierdzenie, które właściwie jest twierdzeniem arytmetycznym o sumie kwadratów kolejnych liczb naturalnych od jedności do jakiejkolwiek; twierdzenie to w postaci gieometrycznej brzmi u Archimedesa, jak następuje: „Gdy weźmiemy dowolną liczbę odcinków, między któremi jest stała różnica [1]), równa najmniejszemu z odcinków, i gdy równorzędnie weźmiemy szereg tyluż odcinków, równych największemu z poprzednich odcinków, to suma kwadratów odcinków równych wraz z kwadratem największego z odcinków nierównych i z prostokątem, utworzonym z odcinka najmniejszego i z odcinka, równego sumie wszystkich odcinków nierównych, jest 3 razy większa, niż suma kwadratów odcinków nierów-

[1]) t. j., według słownictwa dzisiejszego, odcinków, których długości tworzą postęp arytmetyczny.

nych.“ Jeżeli oznaczymy przez a najmniejszy odcinek, i przez n liczbę odcinków w każdym z dwuch szeregów, to w dzisiejszej pisowni symbolicznej przedstawimy powyższe twierdzenie w następującej przejrzystej postaci:

$$(n+1)(na)^2+a(a+2a+\ldots+na)=3[a^2+(2a)^2+\ldots+(na)^2].$$

W pracy o mierzeniu koła Archimedes przytacza wiele przybliżonych wartości pierwiastków kwadratowych, jako to:

$$\tfrac{1351}{780} > \sqrt{3} > \tfrac{265}{153}$$

$$\sqrt{349450} = 591\tfrac{1}{8} \text{ z niedoborem,}$$

$$\sqrt{1373943\tfrac{33}{64}} = 1172\tfrac{1}{8} \text{ z niedoborem}$$

i in. Pozostaje niewiadomym, jaką drogą Archimedes doszedł do tych wyników. Ciekawym jest, że przytoczone granice wartości $\sqrt{3}$ są reduktami ułamka łańcuchowego, na który ten pierwiastek się rozwija. Nic też w tym względzie nie wyjaśnia późniejszy komentator Archimedesa Eutokius (VI w.); od tego ostatniego dowiadujemy się natomiast ciekawych szczegółów o starogreckiej technice mnożenia. Oto przykład—podnieść $210\frac{1}{6}$ do kwadratu:

$200 \cdot 200 = 40000$	$10 \cdot 200 = 2000$	$\frac{1}{6} \cdot 200 = 33\frac{1}{3}$	razem
$200 \cdot 10 = 2000$	$10 \cdot 10 = 100$	$\frac{1}{6} \cdot 10 = 1\frac{1}{2}\frac{1}{6}$	$44170\frac{1}{36}$
$200 \cdot \frac{1}{6} = 33\frac{1}{3}$	$10 \cdot \frac{1}{6} = 1\frac{1}{2}\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$	

W stosowaniu ułamków zasadniczych dostrzegamy wyraźny wpływ egipski.

Archimedes interesował się sprawą ujmowania bardzo wielkich liczb, wykraczających poza granice liczb, napotykanych w życiu potocznym. W traktacie p. t. „archai“ (podstawy) Archimedes rozwija układ liczb, w którym grupa ośmiu rzędów stanowi jednostkę wyższego rzędu, zwaną *oktadą.* Pierwsza oktada obejmuje liczby od 1 do mirjady mirjad, t. j. do $10000 \times 10000 = 10^8$. Ta ostatnia liczba stanowi pierwszą jednostkę drugiej oktady, dalej 10^{16} — pierwszą jednostkę trzeciej oktady i t. d. Archimedes tworzy oktady aż do 100.000.000-ej. Ogół liczb, zawartych w tych 10^8 oktadach stanowi pierwszy *okres;* po nim następuje drugi okres i t. d. Pierwszą jednostką drugiego okresu jest według tego liczba $10^{8.10^8}$, t. j. liczba, którą wyrazilibyśmy przez 1 z 800 miljonami zer. Archimedes stosuje te rozważania do rozwiązania zadania następującego: podać liczbę, którąby przewyższała liczbę ziarn piasku, wypełniającego kulę o promieniu, równym odległości środka ziemi od sklepienia gwiazd stałych. Według obliczenia Archimedesa taką liczbą jest np. 1000 jedności 7-ej oktady 1-go okresu (t. j. 10^{51}). Przykładem tym pragnie Archimedes pouczyć, jak można bardzo wielkie liczby wyrażać w sposób prosty i poglądowy.

O trzecim wielkim matematyku szkoły aleksandryjskiej Apolonjuszu z Pergi na tym miejscu mówić nie będziemy, gdyż prace jego należą niemal wyłącznie do zakresu gieometrji.

Euklides, Archimedes i Apolonjusz doprowadzili stan matematyki do takich wyżyn, że dla dalszego jej rozwoju już nie wystarczały teorje dotychczasowe. Aż do narodzin metody nieskończonostkowej, która była nową potężną dźwignią rozwoju matematyki, praca idzie przeważnie tylko w kierunku komentowania prac poprzedników lub opracowywania szczegółów, pozbawionych głębszego znaczenia. W wieku, który nastąpił po epoce rozkwitu, panował w matematyce greckiej zastój zupełny. W pewnej mierze ducha matematycznego rozbudził Heron z Aleksandrji, który żył około 100 roku przed Chr.; interesowały go przedewszystkim fizyka, technika i miernictwo, jednakowoż i dla matematyki prace jego mają pewną wartość.

Heron posiłkował się przybliżonemi wartościami pierwiastków kwadratowych, np. $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$, $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$. Dalej Heron zdobył się na rozumowanie liczbowe, wolne od postaci gieometrycznej, i niewątpliwie umiał uporać się z równaniem kwadratowym. Dowodzi tego następujące zagadnienie: obliczyć średnicę koła, gdy dana jest suma jego pola, długości okręgu i średnicy. Sumowanie wielkości różnych wymiarów nie ma, oczywiście, sensu gieometrycznego, należy przeto zadanie powyższe traktować, jako czysto rachunkowe. Oznaczając sumę daną przez S i średnicę koła przez d, otrzymamy zależność:

$$\frac{\pi}{4}d^2 + \pi d + d = S,$$

albo, biorąc $\pi = \frac{22}{7}$:

$$\frac{11}{14}d^2 + \frac{29}{7}d = S.$$

Jest to równanie kwadratowe względem niewiadomej d. Heron podaje rozwiązanie:

$$d = \frac{\sqrt{154S + 841} - 29}{11}.$$

W innym zadaniu Heron natknął się na pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej, lecz bez skrupułów zastąpił pod pierwiastkiem liczbę ujemną przez dodatnią, zmieniwszy znak — na +. Zasługą Herona jest, bądź co bądź, że zaczął operować liczbami, nie uciekając się do odcinków i pól, któreby je zastępowały.

---

8. Stan arytmetyki w epoce upadku nauki greckiej.

W roku 47 przed Chr. zwycięskie wojska Cezara zniszczyły Aleksandrję i oddały jej bogatą bibljotekę na pastwę płomieniom. Przeszło 400,000 tomów zostało wówczas zamienionych na popiół. W krótkim jednak czasie kraj otrząsnął się z grozy wojny i zaczął wracać do normalnego życia. Do Aleksandrji nanowo zaczęli zjeżdżać się ludzie ze wszystkich stron świata, i niebawem powstała w tym mieście druga akademja, gdzie przeważnie studjowano Platona, komentując go w duchu pitagorejskim. Studja matematyczne zostały wznowione, przyczym wbrew charakterowi poprzedniej epoki badania gieometryczne zeszły na plan drugi, ustępując miejsca arytmetyce.

Z nowej szkoły, zwanej neopitagorejską, wyróżnić należy przedewszystkim N i k o m a c h u s a z Gerazy (około 100 r. po Chr.), który zdziałał to dla arytmetyki, co w poprzednim okresie Euklides dla gieometrji. Jak biegłym na owe czasy rachmistrzem był Nikomachus, świadczy porównanie, które miało charakter przysłowiowy: rachuje, jak Nikomachus. Główne jego dzieło: „Wstęp do arytmetyki“ obejmuje całokształt ówczesnej wiedzy arytmetycznej, wyłożony w sposób zupełnie wolny od szaty gieometrycznej. Systematyczny wykład zaczyna się od klasyfikacji liczb całkowitych. Liczby parzyste Nikomachus dzieli na parzysto-parzyste (liczby typu 2^n, jakbyśmy dziś powiedzieli), parzysto-nieparzyste [typu $2(2m + 1)$] i nieparzysto-parzyste [typu $2^n(2m + 1)$]. Wiele miejsca Nikomachus poświęca liczbom figurowym, któremi tak chętnie zajmowali się Grecy. W końcu rozpatrzone są proporcje arytmetyczna, gieometryczna i harmoniczna.

Poza Nikomachusem wymienimy jeszcze T h e o n a ze Smyrny, który rozwijał przybliżony stosunek przekątnej kwadratu do jego boku i odkrył niektóre własności liczb całkowitych.

Pod koniec III wieku był czynnym P a p p u s z Aleksandrji, wybitny gieometra. Pappus pierwszy zaczął oznaczać liczby dowolne literami, i w tym celu posługiwał się wielkiemi literami alfabetu, gdyż małe litery miały znaczenia liczebne określone. Był to oczywiście pierwszy zaczątek późniejszej t. zw. arytmetyki literowej.

W tym samym czasie, co Pappus, albo na początku IV wieku żył D i o p h a n t u s (Διόφαντος). Zakres badań Djofantosa tak wysoko odbiega od poziomu pracy np. Nikomachusa, że historycy matematyki usilnie, acz bez powodzenia, doszukują się bądź zaginionych prac nieznanych jego poprzedników bezpośrednich, bądź też usiłują dopatrzeć się wpływu budzącej się wówczas do życia nauki indyjskiej.

Djofantos uczynił duży krok naprzód w kierunku ku dzisiejszej algiebrze.

Przedewszystkim podnieść należy swoisty jego system znakowania. Liczbę niewiadomą oznacza on literą ς' (sigma końcowe z akcentem); jedni tłumaczą to tym, że z całego alfabetu greckiego jedynie ta litera nie ma znaczenia liczbowego; inni przypuszczają, że to, co bierzemy za sigma końcowe, jest abrewiacją graficzną wyrazu ἄριθμος (liczba, w szczególności liczba niewiadoma). Znak ς' odpowiada więc naszemu x. Znak ten używany był również w liczbie mnogiej w formie ςς˜, np. ςς˜ $\bar{\gamma}$ odpowiadało dzisiejszemu $3x$. Jedność miała symbol μ^o, co było skróceniem nazwy μόνας. Liczba niewiadoma ze spółczynnikiem liczebnym tworzyła wyraz. Wyrazy napisane obok siebie dodawano. Odejmowanie λεῖψις oznaczano ⋔, t. j. odwróconą literą ψ (dla odróżnienia od liczby $\bar{\psi} = 700$). Przy pomocy tych środków Djofantos pisał równania, posiłkując się obok symbolów również wyrazami i dołączając do symbolów końcówki gramatyczne. Tak np. równanie:

$$\varsigma\varsigma^{o\grave{\iota}}\ \check{\alpha}\rho\alpha\ \bar{\iota}\ \mu^{o}\ \bar{\lambda}\ \check{\iota}\sigma o\iota\ \epsilon\grave{\iota}\sigma\grave{\iota}\nu\ \varsigma\varsigma^{o\hat{\iota}\varsigma}\ \overline{\iota\alpha}\ \mu o\nu\acute{\alpha}\sigma\iota\ \overline{\iota\epsilon}$$

jest właściwie zdaniem, ktore w dosłownym przekładzie brzmi:

„niewiadomych więc dziesięć i jedności trzydzieści równają się niewiadomym jedenastu i jednościom piętnastu“. Zdanie to wyraża równanie:

$$10x + 30 = 11x + 15.$$

Z powyższego przykładu widzimy, że używane przez Djofantosa znaki nie były właściwemi symbolami, lecz poprostu skróceniami językowemi, które doskonale zlewały się z pozostałym tekstem. Podnieść wszakże należy, że Djofantos umiał równania przekształcać, dodając lub odejmując jednakową liczbę od obudwuch stron oraz mnożąc lub dzieląc obie strony przez jedną liczbę.

Djofantos wprowadził dalej specjalne nazwy i skrócenia na kilka pierwszych potęg niewiadomej, a mianowicie:

kwadrat niewiadomej		δύναμις	w skróceniu	$\delta^{\tilde{\upsilon}}$
sześcian	„	κύβος	„	$\kappa^{\tilde{\upsilon}}$
4-a potęga	„	δυναμοδύναμις	„	$\delta\delta^{\tilde{\upsilon}}$
5-a „	„	δυναμόκυβος	„	$\delta\kappa^{\tilde{\upsilon}}$
6-a „	„	κυβόκυβος	„	$\kappa\kappa^{\tilde{\upsilon}}$

Z powyższych nazw Djofantos utworzył także nazwy na pierwsze sześć potęg odwrotności liczby niewiadomej, jako to: ἀριθμοστόν $\left(\frac{1}{x}\right)$, δυναμιστόν $\left(\frac{1}{x^2}\right)$, κυβοστόν $\left(\frac{1}{x^3}\right)$ i t. d. Djofantos wyprowadził reguły mnożenia tych różnych potęg niewiadomej. Specjalnego oznaczenia mnożenia Djofantos nie miał potrzeby, dzielenie wyrażał terminem ἐν μορίῳ albo μορίου. Tak więc wyrażenie:

$$\delta^{\tilde{\upsilon}}\,\bar{\zeta}\ \lambda\varepsilon\acute{\iota}\psi\varepsilon\iota\ \varsigma\varsigma^{\sim}\ \overline{\kappa\delta}\ \mu o\rho\acute{\iota}o\upsilon\ \delta^{\tilde{\upsilon}}\ \bar{\alpha}\ \mu^{\tilde{o}}\ \overline{\iota\beta}\ \lambda\varepsilon\acute{\iota}\psi\varepsilon\iota\ \varsigma\varsigma^{\sim}\ \bar{\zeta}$$

oznaczało:

$$\frac{7x^2-24x}{x^2+12-7x}.$$

System Djofantosa, jak widzimy, dalekim jest od nowoczesnej symbolicznej pisowni algiebraicznej, jest on raczej systemem uproszczeń w pisaniu zwykłego tekstu, niemniej jednak stanowi poważny krok w kierunku symboliki algiebraicznej.

We wstępie do swego dzieła „Arytmetyki ksiąg VI“ Djofantos kładzie nacisk na doniosłość dodawania i odejmowania dla chcących studjować rachunki. Sam też wykazuje w tych działaniach wielką biegłość, swobodnie dodając do siebie liczby, „które należy dodać“ i „które należy odjąć“. Liczby ujemnej, jako samoistnej, Djofantos nie zna; λεῖψις jest dla niego liczbą, którą należy odjąć, t. j. odjemnikiem. Zgodnie z tym sens dla niego mają tylko takie zadania i rachunki, które prowadzą do wyników dodatnich. Regułę mnożenia „odjemników“ przez „odjemniki“ i „odjemników“ przez „dodajniki“ Djofantos formułuje zupełnie ściśle. (Tu zauważymy, że poglądy na liczby ujemne w duchu Djofantosa nie zmieniły się aż do końca XV wieku).

Równania kwadratowe nie przedstawiały dla Djofantosa żadnych trudności. W wielu zadaniach Djofantos układa równania kwadratowe i podaje ich rozwiązania, nigdzie jednak wyraźnie nie wyjaśnia sposobu ich rozwiązywania. Stosownie do zakresu liczb, które Djofantos znał, musiał on z góry wyłączyć takie równania, które prowadzą do rozwiązań zespolonych lub niewymiernych, a nawet takie, które mają obadwa pierwiastki ujemne: takie liczby dla Djofantosa nie istniały. W jednym zadaniu mówi on wyraźnie, że jest możliwe tylko, gdy kwadrat połowy spółczynnika przy niewiadomej mniej iloczyn spółczynnika przy kwadracie niewiadomej przez wyraz wiadomy jest kwadratem zupełnym. Jest to, jak widzimy, warunek, aby wyróżnik równania był kwadratem zupełnym, t. j. aby pierwiastki były wymierne. Gdy z 2 pierwiastków równania jeden tylko jest dodatni, to Djofantos zupełnie pomija drugi pierwiastek, jako nieistniejący dlań; gdy zaś obadwa pierwiastki są dodatnie, to Djofantos zadowalnia się jednym z nich. Brak pojęcia o liczbie ujemnej, mającej znaczenie samoistne, skłania Djofantosa do rozważania trzech typów równania kwadratowego:

$$ax^2 + bx = c,$$
$$ax^2 = bx + c,$$
$$ax^2 + c = bx,$$

gdzie a, b i c są liczbami dowolnemi.

Równania kwadratowe już przed Djofantosem, acz nie w tak znacznym zakresie, były rozwiązywane przez Herona. Co natomiast spotykamy po raz pierwszy dopiero u Djofantosa, to równania nieoznaczone i układy równań nieoznaczonych pierwszego i wyższych stopni. Djofantos rozwiązuje mnóstwo zadań na tę klasę równań. Jednakowoż żadnej teorji ogólnej Djofantos nie wysnuł; niemal każde zadanie rozwiązane jest przez niego inną metodą, specjalnie do danego zadania przystosowaną. Można brak metody poczytywać za czynnik, osłabiający znaczenie Djofantosa dla rozwoju algiebry, mimo to jednak, a raczej właśnie wobec braku metody jednolitej, podziwiać należy niezwykłą sprawność jego w przezwyciężaniu trudności rachunkowych i pomysłowość w wynajdywaniu sposobów rozwiązywania każdego poszczególnego zadania.

Przy rozwiązywaniu równań nieoznaczonych Djofantos nie szukał pierwiastków całkowitych, szło mu jedynie o rozwiązania wymierne i dodatnie. Dlatego też równaniami nieoznaczonemi 1-go stopnia wogóle mało się interesował i cały swój spryt rachunkowy skierował na równania wyższych stopni. Przytym w żadnym wypadku nie szło mu o rozwiązanie w ogólnej postaci, t. j. o wyrażenie pierwiastków równania przez jego spółczynniki: Djofantos szukał zawsze *jednego* rozwiązania i ono mu wystarczało. Ażeby przedstawić poglądowo ducha rozumowania Djofantosa, przytoczymy jeden przykład, przyczym, zachowując bieg myśli oryginalny, zastosujemy jedynie pisownię dzisiejszą.

Znaleźć 3 liczby, aby ich suma, jak również suma każdych dwuch z nich były kwadratami. Sumę szukanych 3 liczb, która ma być kwadratem zupełnym, Djofantos oznacza przez $x^2 + 2x + 1$, co jest w porządku. Dalej dowolnie przyjmuje, że x^2 jest sumą pierwszych dwuch liczb, tak że na trzecią liczbę pozostaje $2x+1$. Następnie znowu dowolnie Djofantos oznacza sumę drugiej i trzeciej liczb, która też ma być kwadratem zupełnym, przez x^2-2x+ $+1$; stąd na drugą liczbę wypada $x^2 - 2x + 1$ mniej $2x + 1$, t. j. $x^2 - 4x$, a na pierwszą x^2 mniej $x^2 - 4x$, t. j. $4x$. Pozostaje spełnić warunek, aby kwadratem zupełnym była suma pierwszej i trzeciej liczb, t. j. $4x$ więcej $2x + 1$ czyli $6x + 1$. Djofantos kładzie znowu dowolnie $6x + 1 = 121$ i znajduje $x = 20$, tak że szukane liczby są: 80, 320 i 41. Widzimy, że przez szereg dowolnych, ograniczających założeń Djofantos osiągnął cel: znalazł liczby, czyniące zadość postawionym warunkom; możliwość innych rozwiązań zupełnie go nie obchodzi.

Nadmienimy jeszcze, że drogą odpowiednich podstawień Djofantos rozwiązuje równania typu

$$y^2 = a^2x^2 + bx + c$$

i typu:

$$y^2 = ax^2 + bx + c^2,$$

gdzie a, b i c są liczbami całkowitemi i dodatniemi, dalej układ typu

$$\begin{cases} y^2 = ax + c^2 \\ z^2 = bx + c^2, \end{cases}$$

gdzie a, b i c są również liczbami całkowitemi dodatniemi, podobnież układ typu

$$\begin{cases} y^2 = ax^2 + bx + c \\ z^2 = kx^2 + lx + m, \end{cases}$$

gdzie albo a i k albo c i m są kwadratami, i t. p.

Djofantos poruszał także kwestje z zakresu teorji liczb. Stwierdziwszy np., że liczba 65 w dwojaki sposób daje się przedstawić, jako suma dwu kwadratów, a mianowicie:

$$65 = 16 + 49 = 1 + 64,$$

Djofantos wyjaśnia, że dzieje się to dlatego, że 65 rozkłada się na czynniki 5 i 13, z których każdy jest sumą dwu kwadratów:

$$5 = 1 + 4,\ 13 = 4 + 9.$$

Niewątpliwie więc Djofantos znał, choć nie wygłosił w formie ogólnej, twierdzenie, zawarte we wzorze:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac \mp bd)^2 + (ad \pm bc)^2.$$

W zupełnie ogólnej formie Djofantos wypowiada twierdzenie, że każdy kwadrat może być dowolnie wielu sposobami rozłożony na sumę 2 kwadratów; dziś wyrażamy to wzorem:

$$a^2 = \left(\frac{2m}{m^2+1}a\right)^2 + \left(\frac{m^2-1}{m^2+1}a\right)^2,$$

gdzie m jest liczbą dowolną.

Znajdujemy też u Djofantosa twierdzenie, że liczba kształtu $4n+3$ nie może być sumą dwu kwadratów.

Jak już zaznaczyliśmy, Djofantos zjawił się, gdy już nauka grecka chyliła się ku upadkowi. Rozwój kulturalny Greków przetrwał wprawdzie ich niezawisłość polityczną, ale ich sprawność naukowa, nie mając warunków dalszego rozwoju, karłowaciała, aż w końcu istnieć przestała. Na Djofantosie zamyka się karta historji matematyki starożytnej Hellady.

---

9. Arytmetyka i algiebra u Indusów.

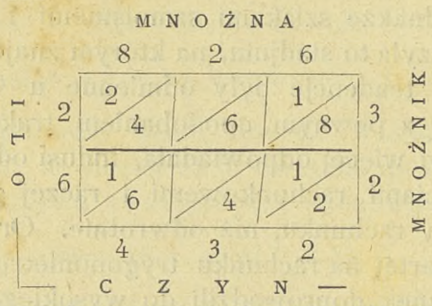
Matematyka indyjska, acz ujawniająca węzły pokrewieństwa z grecką, szła jednakże szlakami samoistnemi i w rozwoju swym znacznie przekroczyła to stadjum, na którym znajdowała się za Djofantosa. Ogólne tendencje były odmienne u Greków i u Indusów: gdy Grecy z pewnym upodobaniem traktowali gieometrję, która ich duchowi więcej odpowiadała, Indusi odznaczali się szczególnemi zdolnościami rachunkowemi i raczej gieometrję traktowali przy pomocy rachunku, niż odwrotnie. Oryginalnej gieometrji, nie licząc opartej na rachunku trygonometrji, Indusi nie stworzyli, za to rachunek doprowadzili do wysokiego stopnia rozwoju. W literaturze staroindyjskiej niema prac, specjalnie poświęconych matematyce; matematykę indyjską poznajemy z dzieł astronomicznych, w których wstępy i specjalne rozdziały mają treść matematyczną. Najsłynniejsi autorowie takich traktatów są: A r y a b h a t t a (żył w drugiej połowie V w. po Chr.), B r a h m a g u p t a (ur. 598) i B h a s k a r a (ur. 1114).

U Indusów napotykamy pierwsze cyfry, jako specjalne znaki, różne od liter, wyrażające liczby. Pierwotnie cyfr było 9, później przybyło zero; pierwszy ślad zera datuje z roku 738. Technika działań była już poniekąd zbliżona do dzisiejszej, przedstawiała jednakże pewne szczególne cechy. Gdy przy odejmowaniu cyfra odjemnika była większa od odpowiedniej cyfry odjemnej, to po „pożyczeniu“ jedności wyższego rzędu, zamiast zmniejszać o 1 następną cyfrę odjemnej, powiększano o 1 następną cyfrę odjemnika. Tak np. odejmowanie:

$$\begin{array}{r} 731 \\ -268 \\ \hline 463 \end{array}$$

mogło być wykonane w dwojaki sposób: albo liczono 8 od 11—3, 6 od 12—6 i 2 od 6—4, albo też 8 od 11—3, 7 od 13—6 i 3 od 7—4.

Mnożenie wykonywano według różnych schematów. Przy mnożeniu pamięciowym rozkładano mnożnik na składniki i tworzono sumę iloczynów cząstkowych. Mnożenie na piśmie było bardzo zbliżone do naszego obecnego. Przeważnie jednak mnożenie wykonywano według t. zw. metody mnożenia symetrycznego, a mianowicie, mając mnożną i mnożnik, pisano odrazu iloczyn ostateczny, obliczając w myśli kolejne jego cyfry. Inny sposób mnożenia indyjskiego ilustruje następujący schemat, dający mnożenie $826 \times 32 = 26432$.



Indusi umieli wykonywać rachunki z liczbami olbrzymiemi. Ułamkami posługiwali się swobodnie, nie ograniczając się na ułamkach z licznikiem 1. Pisali ułamek, kładąc licznik nad mianownikiem, ale nie oddzielając ich kreską. Przy działaniach na liczbach całkowitych i ułamkach wyrażano całkowitą, jako ułamek z mianownikiem 1. Liczby mieszane pisano, kładąc całkowitą nad ułamkiem, np. $\begin{matrix}2\\1\\5\end{matrix}$ oznaczało $2\frac{1}{5}$. Liczby, na których wykonywano działania, ujmowano w ramkę prostokątną, która odpowiadała naszym nawiasom. Za znak równości służyła zgłoska *pha*, dodawanie oznaczano przez zgłoskę *yu*, odejmowanie wyrażano krzyżem, dzielenie oznaczała zgłoska *bha;* mnożenia nie zaznaczano specjalnie, gdyż liczby napisane obok siebie, mnożono, gdy nie było po nich znaku innego działania. Indyjskie wzory:

$$\boxed{\begin{matrix}3 & 5\\ 1 & 1\end{matrix}\quad yu}\quad pha\ 8$$

$$\boxed{\begin{matrix}3 & 14\\ 7 & 1\end{matrix}}\quad pha\ 6$$

oznaczały więc:

$$3+5=8,\ \tfrac{3}{7}\times 14=6.$$

Jeden wspólny znak służył na oznaczanie zera i niewiadomej, które też jednakowo się nazywały; zjawisko to komentują w ten sposób, że dopóki liczba pozostaje niewiadomą, jej miejsce należy uważać za puste, niezajęte. W późniejszym czasie, już za Brahmagupty, znakowanie działań uległo zmianie, napozór drobnej, a jednakże mającej głębsze znaczenie. Mnożenie zaczęto oznaczać zgłoską *bha* (jak dawniej dzielenie [1]); liczby napisane obok siebie bez znaku dodawano. Odejmowanie oznaczano w ten sposób, że nad odjemnikiem kładziono kropkę i pisano go, jako dodajnik obok ujemnej. Liczba z kropką, nad nią umieszczoną, jest więc formalną liczbą ujemną. Indusi zdawali sobie doskonale sprawę z przeciwieństwa kierunkowego między liczbą zwyczajną i kropkowaną i na tym punkcie stali znacznie wyżej od Djofantosa, który umiał operować tylko różnicami, mającemi wartość dodatnią.

Wprowadziwszy liczbę zero, Indusi mieli pierwotnie naiwne reguły, dotyczące tej liczby, tak np., „zero, dzielone przez zero, jest niczym", „liczba, dzielona przez zero, jest ułamkiem o mianowniku zero." Późniejsi jednak, jak np. Bhaskara, mają już o zerze dokładne pojęcie. Bhaskara zupełnie ściśle poucza, co staje się z ułamkiem, gdy mianownik coraz bardziej maleje i w końcu staje się zerem; ustęp odnośny robi wrażenie wyjątku z podręcznika spółczesnego. Wobec tego dziwnie wygląda u Bhaskary naiwne i potwornie błędne postawienie i rozwiązanie następującego zadania: Znaleźć liczbę, czyniącą zadość takiemu warunkowi: gdy podzielimy tę liczbę przez zero, do ilorazu dodamy samą liczbę i odejmiemy 9, różnicę podniesiemy do kwadratu, dodamy pierwiastek kwadratowy tego kwadratu i sumę pomnożymy przez zero, to mamy otrzymać 90. Bhaskara rozumuje, że $\frac{x}{0}+x-9$ jest to samo, co $\frac{x}{0}$, kwadrat tej liczby jest $\frac{x^2}{0}$; suma $\frac{x^2}{0}+\frac{x}{0}$ po pomnożeniu przez zero daje x^2+x, skąd

---

[1]) *bha* jest pierwszą sylabą wyrazów *bhaga*—część i *bhawita*—wynik.

powstaje równanie:

$$x^2 + x = 90,$$

które daje: $x=9$.

Zadania arytmetyczne Indusi dzielili na grupy według metod rozwiązania. Dla charakterystyki stylu zadań przytoczymy kilka przykładów z Aryabhatty. Oto przykład zadania na odwracanie działań: „Piękna dzieweczko z błyszczącemi oczyma, powiedz mi, skoro rozumiesz metodę odwracania, co to za liczba, która pomnożona przez 3, zmniejszona o $\frac{3}{4}$ iloczynu, podzielona przez 7, zmniejszona o $\frac{1}{3}$ ilorazu, pomnożona przez samą siebie, zmniejszona o 52, po wyciągnięciu następnie pierwiastku kwadratowego, dodaniu 8 i podzieleniu przez 10 daje 2“. Obliczenie daje wynik 28.

A oto charakterystyczny przykład na proporcję: „Szesnastoletnia niewolnica kosztuje 32 niszki (jednostka pieniężna), co kosztuje dwudziestoletnia?“; do tego komentarz: „wartość stworzeń żyjących (niewolników i bydła) normuje się według ich wieku“ (im starsze, tym tańsze).

W sumowaniu szeregów Indusi nie posunęli się dalej od Greków. Kombinatorykę rozwinęli o tyle, że wyprowadzili wzory na liczbę przemian i na liczbę kombinacji.

Indusi z upodobaniem zajmowali się równaniami. Zadania indyjskie i w tym dziale odznaczają się właściwym Indusom stylem kwiecistym i domieszką poezji. U Bhaskary np. znajduje się następujące egzotyczne zadanie na równanie z jedną niewiadomą: „Piąta część roju pszczół osiadła na kwiecie kadamba, trzecia część na kwiecie silinda, pszczoły w liczbie trzykrotnej różnicy tych ilości poleciały na kwiat kutaja, jedna zaś pszczoła pozostała i latała w powietrzu to tu, to tam, nęcona powabem zarówno słodkiego zapachu jaśminu, jak kwiatu pandama. Powiedz mi, urocza niewiasto, liczbę pszczół.“

Indusi uprawiali także równania z wielu niewiadomemi; niewiadome nazywali wyrazami, oznaczającemi barwy, tak że gdy my wprowadzamy x, y, z i t. d., Indusi mówili: niewiadoma, niewiadoma niebieska, zielona i t. d.; pierwsze sylaby tych przymiotników odgrywały rolę odpowiednich symbolów.

Równania kwadratowe rozważane były tylko jednego typu ogólnego, operując bowiem liczbami ujemnemi, Indusi nie mieli potrzeby, jak Djofantos, rozważania 3-ch typów równania kwadratowego zupełnego. Jakkolwiek Indusi wiedzieli, że równanie kwadratowe może mieć pierwiastki ujemne, w praktyce pierwiastki te odrzucali. Bhaskara znał dobrze charakter pierwiastku kwadratowego, pisze bowiem: „kwadrat liczby zarówno dodatniej, jak i ujemnej, jest dodatni, stąd pierwiastek kwadratowy liczby dodatniej jest dwojaki: dodatni i ujemny, a pierwiastek kwadratowy liczby ujemnej nie istnieje, gdyż liczba taka nie jest kwadratem."

Przytoczymy 2 przykłady zadań na równania kwadratowe; zadania te znajdują się u Bhaskary. „Ósma część stada małp, podniesiona do kwadratu, pląsała na łące, bawiąc się, 12 pozostałych gawędziło na pagórku; z ilu osobników składało się stado?" Odpowiedź—48 albo 16. „Piąta część stada małp, zmniejszona o 3 i podniesiona do kwadratu, ukryła się w grocie, jedną małpę można było widzieć, gdyż wskoczyła na drzewo; ile ich było?" Bhaskara podaje obadwa rozwiązania: 50 i 5, ale nadmienia, że drugiego nie należy brać; sens tej uwagi jest ten, że gdyby małp było 5, to $\frac{1}{5}$ stada mniej 3 byłaby liczbą ujemną.

Bhaskara rozwiązywał także równania 3-go i 4-go stopni Umiał on również przekształcać pierwiastki złożone $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ na sumę dwu oddzielnych pierwiastków kwadratowych.

Nadzwyczajną zasługą Indusów jest, że w równaniach nieoznaczonych szukali rozwiązań całkowitych. Bhaskara znał warunek istnienia rozwiązań całkowitych równania nieoznaczonego pierwszego stopnia z dwiema niewiadomemi. Jego metoda obliczania jednej pary pierwiastków całkowitych takiego równania jest w istocie swej identyczna z dzisiejszą metodą rozwiązywania równań nieoznaczonych przy pomocy ułamków łańcuchowych. Bhaskara interesował się również równaniami nieoznaczonemi 2-go stopnia. Równanie kształtu

$$xy = ax + by + c$$

przy pomocy rozważań gieometrycznych w stylu euklidesowskim sprowadza do postaci:

$$(x-b)(y-a) = ab + c,$$

skąd staje się widocznym, że $x-b$ i $y-a$ należy szukać wśród czynników liczby $ab+c$. Rozwiązania tego równania są:

$$x = \frac{c + b(a+m)}{m}, \quad y = a + m$$

albo:

$$x=b+m,\ y=\frac{c+a(b+m)}{m}.$$

Rozwiązania te są całkowite, gdy m jest dzielnikiem liczby $ab+c$.

Bhaskara rozwiązuje także równanie kształtu:

$$ax^2+b=cy^2.$$

Racjonalne postawienie teorji równań nieoznaczonych doprowadziło do poważnego stawiania kwestji z dziedziny teorji liczb. Indusi nie bawili się, jak pitagorejczycy, liczbami doskonałemi, zaprzyjaźnionemi i t. p., liczby figuralne traktowali zlekka, natomiast interesowali się bardzo kwestją obliczania trójkątów prostokątnych o bokach wymiernych; wiedzieli oni, że liczby pewnego kształtu mogą być albo nie mogą być kwadratami lub sześcianami.

---

10. Rola Arabów w historji matematyki.

Matematyka grecka, jako organizm żywy, istnieć przestała; pozostała, niby spiż, w postaci poważnych zabytków literatury. Ziarna jej padły na żyzny grunt indyjski, gdzie rychło dały plon pyszny, ale zakątek, gdzie ten zasiew wzrastał, nie miał żadnej łączności z Europą, dokąd miał przenieść się główny ośrodek cywilizacji. Plon ten byłby niewątpliwie skazany na zagładę, a przynajmniej na długie zapomnienie, gdyby nie było powiewu wiatru, któryby zarodzie kultury grecko-indyjskiej przeniósł na daleki zachód, do Europy. Rola takiego pośrednika nauki przypadła w udziale Arabom. Niby gąbka, wchłonąwszy w siebie skarby nauki greckiej i indyjskiej, Arabowie następnie skarbami temi zraszali łany nowych krajów, gdzie nauka miała dopiero się rozwinąć. Od siebie Arabowie do tych skarbów niewiele dodali.

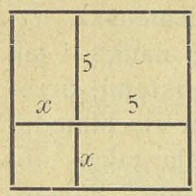
Z Indjami Arabowie zawsze utrzymywali stosunki handlowe, naukę indyjską mogli zatym poznać bezpośrednio. Tam też lub w Aleksandrji mogli oni otrzymać dostęp do zabytków greckich. Oczarowani nauką grecką, Arabowie skwapliwie zaczęli przyswajać sobie dzieła mistrzów, tłumacząc je na swój język rodzimy.

Na pierwszy ogień poszły dzieła Euklidesa i Ptolemeusza, następnie, w miarę, jak wzrastało zainteresowanie się nauką i jak studja nad autorami greckiemi stawały się coraz głębszemi, przetłumaczone zostały prace Djofantosa, Herona, potym Archimedesa, Apolonjusza i innych. Obok tłumaczeń powstała także obszerna literatura komentatorska. Ta praca tłumaczenia i komentowania mistrzów greckich trwała od VIII w. do końca X w. i odbywała się pod protektoratem kalifów; zwłaszcza kalifowie z dynastji Abbasydów: Almanzor, Harun-Arraszyd i Almamun sprzyjali tej pracy.

Pierwszym pisarzem arabskim w dziedzinie matematyki był Muhammed ibn Musa Alchwarizmi (pospolicie zwany Alkarismi), który żył około 830 roku. Łaciński przekład jego dzieła zaczyna się od słów „Dixit Algorithmi", i od tego przeinaczonego jego nazwiska powstał wyraz „algorytm", jak widzimy, zupełnie przypadkowo. Tytuł pracy Alchwarizmiego brzmi: „Aldżebr w' almukabala", co znaczy, „odtworzenie i przeciwstawienie." Terminów tych Alchwarizmi nie objaśnia, widocznie więc znaczenie ich było podówczas powszechnie znane. Z prac późniejszych autorów wiadomo, że „odtworzenie" oznaczało takie przekształcenie równania przez dodanie do obudwu stron jednakowej liczby, aby każda strona równania stała się liczbą dodatnią, „przeciwstawieniem" zaś nazywano przekształcenie równania, polegające na opuszczeniu po obudwu stronach wyrazów jednakowych i redukowaniu wyrazów z niewiadomą, z kwadratem niewiadomej i wyrazów wiadomych. Jakkolwiek treść pracy Alchwarizmiego nie jest oryginalną, a przynajmniej nie przyniosła nic zasadniczo nowego, jakkolwiek „odtworzenie" oznaczało, jak widzimy, tylko jeden szczegół w teorji równań i to szczegół za Alchwarizmiego pospolicie wiadomy, mimo to, znowu bez żadnej zasługi autora, pierwszy wyraz tytułu jego pracy dał nazwę wielkiej gałęzi matematyki. Stąd jednakże wziął źródło swe przesąd, jakoby Arabowie byli twórcami algiebry; przesąd ten jest, jak widzimy, nawskroś błędnym.

Treść dzieła Alchwarizmiego jest poświęcona głównie równaniom kwadratowym; rozważa on tylko pierwiastki rzeczywiste dodatnie. Przykłady liczebne są sprawdzane gieometrycznie. Niech np. będzie do rozwiązania równanie

$$x^2+10x=39.$$



Kreślimy kwadrat o boku x i na dwuch bokach sąsiednich wystawiamy prostokąty, których drugie boki są równe połowie spółczynnika przy x, t. j. 5. Gnomon, utworzony z tych dwuch prostokątów i z kwadratu x^2, ma pole x^2+10x, czyli 39. Jeżeli gnomon ten uzupełnimy do kwadratu przez dołączenie kwadratu o boku 5, to otrzymamy kwadrat, równy $39+25=64$, bok większego kwadratu jest zatym równy 8, stąd $x=8-5=3$.

Arabowie zajmowali się wiele teorją liczb. W znalezionym fragmencie większej pracy nieznanego autora szukane są trójkąty prostokątne o bokach wymiernych, nie mających wspólnego dzielnika; w pracy tej stwierdza się, że przeciwprostokątna musi wyrażać się liczbą nieparzystą i równać się sumie dwuch kwadratów; w szczególności przeciwprostokątna musi wyrażać się liczbą, mającą kształt $12m+1$ albo $12m+5$. W związku z tym zostało postawione i rozwiązane zadanie o znalezieniu kwadratu, który powiększony lub zmniejszony o daną liczbę daje znowu kwadrat.

Na początku X w. żył Abu Bekr Muhammed Alkarchi, który pisał o równaniach i o teorji liczb. Gdy a oznacza największą liczbę całkowitą, której kwadrat mieści się w A, i różnicę $A-a^2$ oznaczymy przez r, tak że r jest mniejsza od $2a+1$, to Alkarchi zaleca brać przybliżoną wartość pierwiastku kwadratowego z A równą $a+\frac{r}{2a+1}\cdot$ Rozważał on także równania trójmienne, dające się sprowadzić do kwadratowych.

Przechodzimy teraz do Europy, gdzie podówczas nauka wogóle, a w szczególności matematyka zupełnie prawie nie istniały.

II. Matematyka w Europie w wiekach średnich.

Bezpośrednim spadkobiercą matematyki greckiej było państwo bizantyjskie, gdzie jednakże warunki zupełnie nie sprzyjały kultowi tej nauki. W Rzymie matematyka była w zupełnym zaniedbaniu; w szkołach nauka matematyki sprowadzała się do praktycznej nauki rachunków głównie na abakusie i do szczupłej wiązanki praktycznych reguł gieometrji. Od VI w. do końca X

w. nauka zaledwie tliła się po klasztorach. Odpisy dzieł uczonych greckich i aleksandryjskich stawały się w Rzymie rzadkością coraz większą. Na początku VI w. Boethius napisał był podręczniki gieometrji i arytmetyki, zawierające luźne strzępki teorji i nieco przykładów liczbowych, i te książki były podstawowemi podręcznikami przez kilka wieków; to samo już wskazuje, jak nizkiemi były wymagania ówczesne, a że Rzym bądź co bądź uchodził za główny ośrodek cywilizacji, więc jest rzeczą jasną, że w innych krajach poziom nauki bynajmniej wyższym nie był. Pod koniec X w. Gerbert, późniejszy papież Sylwester II, napisał podręczniki arytmetyki i gieometrji o poziomie cokolwiek wyższym od dzieł Boecjusza, a także traktat o abakusie; przyrząd ten został przez Gerberta ulepszony, a mianowicie, zamiast kamieni jednakowych, Gerbert wprowadził kamienie, opatrzone cyframi (apices). W końcu XI w. lub na początku XII w. zaczęły powstawać uniwersytety średniowieczne, jako korporacje uczących się, uznawane przez władzę świecką lub kościelną; instytucje te, oprócz nazwy, nie miały nic wspólnego z dzisiejszemi uniwersytetami. Do uniwersytetów średniowiecznych wstępowali chłopcy, mający 11 lub 12 lat, i lata całe trawili na wykuwaniu gramatyki łacińskiej, djalektyki i retoryki; większość nie studjowała całego tego „trivium“, lecz zadowalniała się jedną gramatyką. Nieliczni po przestudjowaniu „trivium“ przechodzili do „quadrivium“, na które składały się: arytmetyka, muzyka, gieometrja i astronomja; łatwo się domyśleć, że arytmetyka i gieometrja w quadrivium były nędznemi strzępami. Uniwersytety średniowieczne były, jak widzimy, ckliwemi kagankami, które nie mogły, oczywiście, rozpraszać mroków ówczesnych. W XII wieku dopiero zaczęły padać słabe promienie, gdy do Europy zaczęły przedostawać się nauki Arabów i w ich opracowaniu dzieła mistrzów aleksandryjskich. Ta inwazja nauki arabskiej odbywała się przez Hiszpanję, dzięki stosunkom Maurów z Arabami. Praca kulturalna szła coraz żywiej w szkołach hiszpańskich, a stamtąd nauki sączyły się i do innych krajów europejskich.

Od XIII wieku matematyka jest już rozwijana przez europejczyków. Na początku tego wieku napisane zostało dzieło Leonarda z Pizy p. t. Liber Abaci. Autor wiele podróżował i dokładnie poznał arytmetykę arabską; w książce swej wyłożył całokształt ówczesnej nauki rachunków, zaczynając od opisu cyfr, które nazywa indyjskiemi. Przy pomocy cyfr pisze liczby według zasady położeniowej, posiłkując się zerem; uczy obliczać przybliżone wartości pierwiastków 2-go i 3-go stopni. Jeżeli a jest największą liczbą całkowitą, której sześcian mieści się w liczbie A, to na $\sqrt[3]{A}$ Leonardo zaleca brać wartość przybliżoną:

$$\sqrt[3]{A} = \frac{A-a^3}{3a^2+3a+1}.$$

Przystępny i szeroki wykład przedmiotu, traktowanego samodzielnie, musiał przyczynić się do ułatwienia nauki rachunków. Nie podrzędną też zasługą Leonarda było, że pracą swoją praktycznie wprowadził używanie w Europie cyfr arabskich i opartego na nich systemu pisania liczb.

W książce swojej Leonardo porusza wiele trudnych zagadnień. Tak np. rozwiązuje on zadanie: „znaleźć liczbę, której kwadrat zarówno powiększony o 5, jak i zmniejszony o 5, jest znowu kwadratem“; przez nadzwyczaj dowcipne rozumowanie Leonardo dochodzi do rozwiązania $\frac{41}{12}$. Podjąwszy rozwiązanie równania $x^3+2x^2+10x=20$, Leonardo stwierdza najprzód, że pierwiastek jego jest zawarty między 1 i 2, następnie oblicza go z przybliżeniem i przedstawia rezultat w ułamku sześćdziesiętnym $x=1^0\ 22'\ 7''\ 42'''\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 40^{VI}$; liczba ta w postaci ułamka dziesiętnego jest równa 1,3688081075 i różni się od dokładnego pierwiastku o mniej niż 10^{-9}. Sposobu rozwiązania tego równania Leonardo nie podaje.

Spółcześnie z Leonardem z Pizy żył Jordanus Nemorarius, dominikanin, autor dzieła „De numeris datis“, które również jest wykładem arytmetyki i algiebry. Nemorarius nie odznaczał się tym stopniem zdolności i rozległości wiedzy, co Leonardo, niemniej jednak zasługa jego była poważna, gdyż adepci szkół klasztornych i uniwersytetów przeważnie korzystali z książki Nemorariusa. Wybitna zasługa Nemorariusa polegała na wprowadzeniu oznaczenia literami nietylko liczb niewiadomych, ale i wiadomych.

W owym czasie Fryderyk II, założyciel uniwersytetu w Neapolu (w r. 1224), polecił tłumaczyć dzieła arabskie. Tłumaczenie dzieł arabskich i greckich trwało do końca XIII w., i odtąd ustało bezpośrednie przynajmniej oddziaływanie kultury arabskiej na europejską.

W ciągu XIV w. powstał szereg uniwersytetów niemieckich: w Pradze, Wiedniu, Heidelbergu, Kolonji i Erfurcie. Nauka odbywała się przeważnie w ten sposób, że profesor czytał ustępy książki, uczniowie zaś, mając przed sobą egzemplarze tego samego dzieła, słuchali czytania, przeplatanego dorywczemi komentarzami. Zakres nauki był nader mizerny.

Wiek XIV nie wydał uczonego tej miary, co Leonardo z Pizy. Uwagę na siebie zwraca jednakże Mikołaj Oresme, Francuz, który studja odbywał w Collège de Navarre w Paryżu. Oresme uczył graficznie wyrażać zależność między dwiema zmiennemi wielkościami, kreślił naprzykład krzywą temperatury w zależności od czasu; miał więc ideę późniejszej gieometrji analitycznej; dzisiejsze rzędne i odcięte nazywał szerokościami i długościami. Oresme dostrzegł, że w okolicach punktów, gdzie rzędne są największe lub najmniejsze, zmienność rzędnych jest najwolniejsza. Dalej, Oresme wprowadził potęgi ze spółczynnikami ułamkowemi i uzasadnił działania na takich potęgach.

W połowie XV w. został wynaleziony druk. Wynalazek ten stanowi punkt zwrotny w dziejach kultury.

Dotychczas przyczynki do rozwoju matematyki pochodziły od oddzielnych badaczy. Ich oddziaływanie wzajemne na siebie było utrudnione. Rozpowszechnianie nauki, demokratyzowanie jej znajdowało też trudności ogromne, dopóki książki potrzeba było przepisywać. Stosunki te zmieniają się radykalnie z chwilą wprowadzenia druku. Praca naukowa nabiera więcej charakteru usiłowań zbiorowych, i jednocześnie dzięki książkom, drukowanym w wielu egzemplarzach, nauki stają się dostępniejsze dla szerokich kół.

12. Rozwój arytmetyki i algiebry od początków epoki odrodzenia do końca XVI w.

Pierwsze druki matematyczne zaczęły ukazywać się po roku 1470, najprzód we Włoszech, potym w Niemczech. Po raz pierwszy w druku napotykamy znaki + i — w książce Johannesa Widmana, wydanej w r. 1489.

Pierwszą wybitniejszą drukowaną pracą XV w. jest dzieło Łukasza Paciuolo, p. t. „Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita", odbite w Wenecji w r. 1494 (i przedrukowane w r. 1523). Praca ta dzieli się na 2 części: arytmetykę i gieometrję. Część arytmetyczna rozpoczyna się od własności liczb i działań. Paciuolo podaje twierdzenie, że kolejne liczby doskonałe kończą się naprzemian cyfrą 6 lub 8, i nadmienia, że nie mogą kończyć się inną cyfrą, gdyż „smutnie żyją bezładni, dobrzy zaś i doskonali zachowują zawsze przepisany porządek". Paciuolo wymienia 7 działań: liczenie, dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, tworzenie postępów i wyciąganie pierwiastków; przytym Paciuolo zerwał z pewną rutyną średniowieczną, która nakazywała rozważać podwajanie i przepoławianie, jako dwa samoistne działania. Przy dodawaniu Paciuolo zaznacza, że kupcy sprawdzają to działanie, wykonywując je w odwrotnym kierunku, uczeni zaś robią próbę przy pomocy dziewiątki lub siódemki; Paciuolo zwraca przytym uwagę, że próba przez 7 jest pewniejsza, gdyż próba przez dziewiątkę nie wykrywa opuszczenia zera lub przestawienia cyfr. Dalej Paciuolo drobiazgowo wylicza znane mu algorytmy działań arytmetycznych, przyczym np. podaje aż ośm form schematu mnożenia. Pierwiastki kwadratowe Paciuolo oblicza z coraz większym przybliżeniem według następującego schematu, nie wyrażonego wprawdzie w postaci ogólnej, ale jasno przedstawionego na przykładach. Niech a będzie częścią całkowitą pierwiastku kwadratowego z A; oznaczając kolejne przybliżenia tego pierwiastku przez a_1, a_2,.., otrzymamy:

$$a_1 = a + \frac{A - a^2}{2a}, \quad a_2 = a_1 + \frac{A - a_1^2}{2a_1} \quad \text{i t. d.}$$

Dla $\sqrt{6}$ otrzymujemy następujące przybliżenia:

$$a = 2, \ a_1 = 2\tfrac{1}{2}, \ a_2 = 2\tfrac{9}{20}, \ a_3 = 2\tfrac{881}{1960};$$

kwadrat tej ostatniej liczby przewyższa 6 tylko o $\frac{1}{3841600}$. Szczególnym jest, że, posuwając tak daleko dokładność przy obliczaniu pierwiastków kwadratowych, Paciuolo ogranicza się przy pierwiastkach sześciennych tylko do pierwiastków wymiernych. Znak pierwiastku Paciuolo pisze w postaci przekreślonej litery R, kładąc obok niej cyfrę, wskazującą wykładnik pierwiastku. Ułamki

Paciuolo pisze zupełnie podług zwyczaju dzisiejszego, oddzielając licznik od mianownika kreską.

Wyżej, przy wzmiance o liczbach doskonałych, mieliśmy sposobność poznać, jak Paciuolo łączy wiedzę z naiwnością. W teorji ułamków znowu natrafiamy na podobnie naiwny sąd. „Czyż to nie sprzeczność“, rozumuje autor: „że ułamki przy mnożeniu wzajemnie się pomniejszają, skoro mnożenie, pomnażanie wskazuje na przyrost, jako jest powiedziane: rośnijcie, mnóżcie się i napełniajcie ziemię!“ Trudność tę Paciuolo usuwa przy pomocy następującego sofizmatu: „Większy jest to bardziej oddalony od jedności, oddalenie to zaś może się odbywać w dwu kierunkach: zarówno w kierunku liczb całkowitych, jak i w kierunku liczb ułamkowych“.

Objaśniwszy liczby dodatnie i ujemne, Paciuolo w następujący sposób dowodzi, że iloczyn liczby ujemnej przez ujemną jest dodatni. Różnica 10—2 jest liczbą dodatnią 8, iloczyn więc 10—2 przez 10—2 jest bezsprzecznie równy 64, ale z drugiej strony 10 razy 10 czyni 100, 10 razy —2 i znowu 10 razy —2 czynią razem —40, suma zatym tych części składowych jest 100—40, t. j. 60; stąd wynika, ze pozostały iloczyn —2 przez —2 musi być równy 4, aby całkowity iloczyn wynosił 64.

Z mnożeniem i dzieleniem pierwiastków Paciuolo daje sobie radę. Gorzej z dodawaniem i odejmowaniem: Paciuolo dodaje pierwiastki kwadratowe podług wzoru:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}},$$

przyczym, oczywiście, otrzymuje rezultat prosty tylko wówczas, gdy ab jest kwadratem zupełnym.

Przy rozwiązywaniu równań kwadratowych Paciuolo rozważa skrupulatnie wszelkie możliwe wypadki, przyczym wypadek, gdy wyróżnik jest ujemny, odrzuca, jako niemożliwy. Reguły rozwiązywania różnych wypadków równania kwadratowego Paciuolo ujął w formę wierszowaną, by ułatwić ich zapamiętanie.

Paciuolo rozwiązuje także równania trójmienne wyższych stopni typu

$$ax^{2n} + bx^{n} + c = 0;$$

dla równań trójmiennych, zawierających niewiadomą w potęgach 4-ej i 3-ej lub 3-ej i 2-ej, stwierdza on brak „dobrych“ reguł rozwiązania. „Gdzie poszczególne wyrazy“, pisze on: „nie wykazują proporcjonalności różnego stopnia, tam sztuka jeszcze nie dorosła do swego zadania, podobnie jak jeszcze nie została znalezioną kwadratura koła.“

Z powyższego streszczenia części arytmetycznej książki Paciuolo nie można wyrobić sobie o nim sądu, jako o wybitnym matematyku. Praca jego jest szerokim, systematycznym wykładem nauki według jej stanu ówczesnego. Będąc książką drukowaną, praca ta musiała odegrać ważną rolę w nauczaniu matematyki, czego poniekąd dowodem powtórne wydanie książki w 29 lat po pierwszym wydaniu.

Spółczesny Paciuolo lekarz francuski Nicolas Chuquet napisał w r. 1484 pracę p. t. „Le Triparty en la science des nombres“. Dzieło to zostało wydrukowane dopiero w r. 1880 w Bulletino Boncompagni t. XIII, było jednak w swoim czasie rozpowszechnione w odpisach. W pracy tej jest kilka głębszych pomysłów, mających znaczenie niepoślednie w perspektywie historycznej. Chuquet porównywa postęp gieometryczny: 2, 2^2, 2^3,... z postępem arytmetycznym: 1, 2, 3,... i spostrzega, że gdy kolejnym wyrazom pierwszego szeregu podporządkowane są odpowiednio kolejne wyrazy drugiego szeregu, to iloczynowi dowolnych dwuch wyrazów postępu gieometrycznego odpowiada suma odpowiednich dwuch wyrazów postępu arytmetycznego. W tym spostrzeżeniu tkwi, oczywiście, zalążek teorji logarytmów.

Dalej, nazywając wyraźnie własnym odkryciem, Chuquet podaje bez dowodu twierdzenie, że liczba $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ jest zawarta między liczbami $\frac{a_1}{b_1}$ i $\frac{a_2}{b_2}$. Własność tę Chuquet stosuje do rozwiązywania równań, a mianowicie: znalazszy dwie jakiekolwiek wartości przybliżone pierwiastku, jedną z niedoborem, drugą z nadmiarem, Chuquet tworzy coraz dokładniejsze przybliżenia i niekiedy dochodzi do wartości dokładnej pierwiastku. Rozwiązując np. równanie:

$$x^2+x=39\tfrac{13}{81},$$

znajduje on, że wartość $x=5$ jest za mała, a $x=6$ za duża, dalej wartość $\frac{5+6}{1+1}=\frac{11}{2}$ okazuje się za małą, wartość $\frac{11+6}{2+1}=\frac{17}{3}$ za małą, $\frac{17+6}{3+1} = \frac{23}{4}$ za małą, $\frac{23+6}{4+1} = \frac{29}{5}$ za dużą, $\frac{23+29}{4+5} = \frac{52}{9}$ daje dokładną wartość pierwiastku. Wprawdzie tę samą usługę oddać może wszelka inna przeciętna np. przeciętna arytmetyczna, jednakże metoda Chuqueta ma tę zaletę, że przy niej mianowniki wzrastają bardzo wolno.

Znak pierwiastku ma u Chuqueta postać przekreślonej litery R z wykładnikiem, umieszczonym po prawej jej stronie u góry. Pierwiastki kwadratowe Chuquet obliczał z przybliżeniem, o pierwiastkach zaś sześciennych pisze on, że można je wprawdzie również obliczać z przybliżeniem, uważa to jednak za „stratę czasu bez pożytku i potrzeby."

W równaniach wykładnik przy spółczynniku oznaczał potęgę liczby niewiadomej, np. 4^2 oznaczało nasze $4x^2$. Chuquet z całą świadomością i zrozumieniem rzeczy wprowadza po raz pierwszy potęgę zerową i potęgi ujemne niewiadomej; pojmuje on, że potęga zerowa jest niczym innym, jak jednością, a potęga ujemna jest tylko jednością, dzieloną przez odpowiednią potęgę dodatnią. Według wskazanej wyżej pisowni, Chuquet podaje, że 3^0 jest to samo, co 3; wiemy, że jego 3^0 odpowiada dzisiejszemu $3x^0$. Znak *mniej* Chuquet wyrażał, kładąc $\tilde{m}$ obok cyfry, a więc np. $2\tilde{m}$ oznaczało — 2; zgodnie z tym przez $7^{1\tilde{m}}$, $2^{3\tilde{m}}$ Chuquet wyraża: $7x^{-1}$ wzgl. $2x^{-3}$. Rozwija on też reguły działań na potęgach ujemnych. Łatwo domyśleć się, że, mając odwagę wprowadzenia liczb ujemnych do wykładników potęg, Chuquet nie lęka się pierwiastków ujemnych przy rozwiązywaniu równań; owszem, rozważa je na równi z dodatniemi i z całą świadomością zaznacza, że przez to „staje się prawdziwym rachunek, uważany przez innych za niemożliwy."

Widzimy u Chuqueta cały szereg nowych idej, stanowiących ziarna spółczesnej nam algiebry. Chuquet jedne rzeczy przejrzał, inne przeczuwał. Idee jego były jednakże na owe czasy zbyt śmiałe i nie zostały przez spółczesnych zrozumiane i ocenione. Wnosimy to choćby stąd, że gdy w 4 dziesięciolecia później (w r. 1520) Estienne de la Roche, zwany Villefranche, wydał drukiem arytmetykę, to okazało się, że „zapożyczył" całe strony z Chuqueta, ale pominął przytym właśnie wszystko to, co nas dziś szczególnie zastanawia i co było wtedy nowatorstwem.

W XVI w. studja matematyczne zaczynają stawać się poważniejszemi; na uniwersytetach poziom wykładów podnosi się; algiebra zaczyna wyzwalać się z naleciałości scholastycznych w rodzaju „podwajania“ i „przepoławiania“; zaczynają w praktyce utrwalać się stosowane dziś przez nas schematy działań arytmetycznych; dalej—ułamki dziesiętne, których zaczątku należy dopatrywać się w używanych bez przerwy od czasów babilońskich ułamkach sześćdziesiątkowych, zaczynają coraz wyraźniej zarysowywać się, jako system; wreszcie teorja równań robi ogromny krok naprzód. Wiek ten wydał szereg matematyków, których prace w mniejszym lub większym stopniu przyczyniły się do rozwoju naszej nauki; z nich zatrzymamy się tylko na tych, których nazwiska szczególniej dobitnie zaznaczyły się na kartach historji matematyki.

Michał Stifel, Niemiec, w dziele swym „Arithmetica integra“, wydanym w Norymberdze w r. 1544, rozwija tę samą ideę, którą już poznaliśmy u Chuqueta, a mianowicie: odpowiedniość między wyrazami postępów arytmetycznego i gieometrycznego. Stifel wskazuje, że obadwa szeregi ciągną się w obie strony w nieskończoność, i nazywa wyrazy postępu arytmetycznego wykładnikami (exponentes) odpowiednich wyrazów postępu gieometrycznego. Zaznacza on, że mógłby tu wstawić całe dzieło o własnościach liczb. Stifel ułożył tabliczkę liczb, które później zyskały miano spółczynników dwumianu Newtona; tabliczką tą Stifel posiłkuje się w celu wyciągania pierwiastków wyższych stopni. Używa on już znaku $\sqrt{}$, po którym kładzie symbol, wyrażający stopień pierwiastku. W teorji równań Stifel stoi poza Chuquetem: uznaje tylko pierwiastki dodatnie, rozważa więc jedynie równanie kwadratowe typu $ax^2=bx-c$, tymbardziej, oczywiście, nie dopuszczając możliwości, aby t. zw. wyróżnik był ujemny; zauważyć zresztą należy, że w Niemczech wszyscy poprzednicy Stifela tak samo uważali pierwiastek ujemny za dowód niemożliwości równania. Liczby ujemne wogóle Stifel nazywa *numeri absurdi*—liczby niedorzeczne, przeciwstawiając je liczbom dodatnim, które nazywa prawdziwemi: *numeri veri*. O zerze pisze: 0 i. e. nihil, quod mediat inter numeros veros et numeros absurdos. Przy liczbach niedorzecznych, pisze Stifel, wszystko dzieje się niedorzecznie czyli na opak (absurde sive inverse): gdy liczba „prawdziwa“, dodana do innej, powiększa ją, liczba „niedorzeczna“ ją zmniejsza i t. d.

We Włoszech kronika matematyczna XVI wieku jest zajęta historją odkrycia ogólnego rozwiązania równań 3-go i 4-go stopni i w związku z tym historją głośnego bezprzykładnego sporu między uczonemi. Arabowie uważali algiebraiczne rozwiązanie ogólnego równania 3-go stopnia za niemożliwe. Chuquet i Paciuolo stwierdzili po prostu, że rozwiązanie równania sześciennego jeszcze nie zostało odkryte. Pierwszy Scipione del Ferro, profesor w Bolonji (od 1496 do 1526), odkrył rozwiązanie równania kształtu $x^3+ax=b$ i rozwiązanie to zakomunikował swemu młodemu przyjacielowi Antoniomaria Fior (Floridus); według Cardano Fior otrzymał to rozwiązanie od Ferro w roku 1515, według zaś Tartaglii w roku 1506. Fior skorzystał z powierzonej mu metody rozwiązania i zwyczajem owych czasów wezwał publicznie znanego wtedy mistrza Nicolo Tartaglia (1500—1557), aby na wskazany termin rozwiązał wymienione w wezwaniu 30 zadań; zadania te wszystkie sprowadzały się do rozwiązania równania sześciennego typu $x^3+ax=b$. Tartaglii po mozolnych usiłowaniach udało się, jak utrzymuje, 12 lutego 1535 r., na 8 dni przed oznaczonym terminem, znaleźć wzór na rozwiązanie powyższego równania, a nazajutrz rozwiązał także równanie $x^3=ax+b$. We właściwym terminie Tartaglia ogłosił rozwiązania wszystkich 30 zadań, kategorycznie jednak odmówił ujawnienia swojej metody. Z ujawnieniem tej ostatniej Tartaglia ociągał się również, gdy spółczesny mu znakomity matematyk Hieronimo Cardano (1501—1576) usilnie go o to w listach swych prosił. Wreszcie Cardano osobiście przyjechał do Tartaglii, by go prosić o wskazanie sposobu rozwiązania równania sześciennego. Tartaglia podał wtedy Cardanowi swe rozwiązanie w formie wiersza, ułożonego tak niejasno, że Cardano niewiele z tego zrozumiał. Dopiero, gdy Cardano przysiągł mu, że dochowa tajemnicy, Tartaglia wyłożył mu swój sposób rozwiązania równania sześciennego (w r. 1539). W sześć lat później Cardano przysięgę złamał, ogłaszając w swym dziele „Ars magna de rebus algebraicis“ (Norymberga, 1545) rozwiązanie równania 3-go stopnia, przyczym jednak plagjatu nie popełnił, gdyż wymienił Ferro i Tartaglię, jako niezależnych od siebie autorów tego rozwiązania. Cardano mógł to zresztą uczynić choćby dlatego, że w r. 1542 wraz ze swym uczniem, gienjalnym Luigi Ferrari (1522—1565) widzial u Annibale della Nave, zięcia i następcy Ferro, pozostałe po tym ostatnim rękopisy, z których mógł poznać metodę Ferro i stwierdzić jej tożsamość z metodą Tartaglii. Prócz tego, skoro metodę Ferro od 30 lat znali Fior i della Nave, a może i inni, to o ścisłej tajemnicy wogóle nie mogło być mowy. Zaraz po ukazaniu się pracy Cardana Tartaglia rozpoczął przeciwko niemu namiętną kampanję. Cardano usunął się od bezpośredniej polemiki i pozostawił swemu uczniowi Ferrari rozprawianie się z Tartaglią. Przez kilka lat trwał gwałtowny spór, prowadzony w sposób niesłychanie obelżywy, po prostu brutalny, zupełnie niegodny ludzi nauki. W czasie tego sporu powstało podejrzenie, że Tartaglia wogóle nie odkrył samodzielnie bronionej, jako swą własność duchową, metody, lecz w zręczny sposób zdołał poznać ją z dorobku Ferro. Opinja spółczesnych skłaniała się na stronę Tartaglii, nowsza jednak krytyka przedstawia sprawę w oświetleniu mniej dla niego korzystnym. Największe prawdopodobieństwo ma przypuszczenie, że Tartaglia dowiedział się o metodzie Ferro rozwiązania równania typu $x^3 + ax = b$, sam zaś dodał rozwiązanie równań sześciennych innych typów.

Cardano wykorzystał wzór Ferro w sposób o wiele szerszy. Przedewszystkim dał on pierwszy dowód gieometryczny tego wzoru. Dalej pokazał, że przez podstawienie $x = y \pm \frac{a}{3}$, gdzie a jest spółczynnikiem przy x^2, można każde równanie ogólne trzeciego stopnia uwolnić od wyrazu, zawierającego kwadrat niewiadomej. Cardano poznał, że równanie 3-go stopnia ma 3 pierwiastki, i że suma tych pierwiastków jest równa spółczynnikowi przy x^2 [1]).

W wydanej w r. 1539 książce p. t. „Practica arithmeticae generalis" Cardano przy rozwiązywaniu równań dopuszcza pierwiastki ujemne (radices *fictae*), wyraźnie jednak nazywa niemożliwym wypadek, gdy w rozwiązaniu równania otrzymuje się pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej. Atoli w wydanej o kilka lat później Ars magna Cardano zdobywa się na pierwszą w historji matematyki próbę zastosowania liczb urojonych. Powód do tego daje Cardanowi zadanie: rozłożyć liczbę 40 na czynniki, których suma ma wynosić 10. Równanie:

$$x(10-x) = 40$$

---

[1]) Inne metody rozwiązywania równania sześciennego podali później: Vieta, Huygens, Tschirnhausen, Euler, Bézout, Girard, Eytelwein.

prowadzi do rozwiązań $5+\sqrt{-15}$ i $5-\sqrt{-15}$. Cardano nazywa te rozwiązania „per radicem $\tilde{m}$“ (symbol *m* czytał się: minus) i sprawdza ich prawdziwość przez formalne wykonanie mnożenia; zaznacza on przytym, że te radices minus są wielkościami czysto formalnemi (vero sophistica), gdyż „nie podlegają prawom działań rachunkowych i nie można ich w żaden sposób tłumaczyć.“

Po równaniach sześciennych przyszła kolej na równania 4-go stopnia. Według słów Cardana, ogólne równanie 4-go stopnia pierwszy rozwiązał Luigi Ferrari, mając niespełna 23 lata. [1])

Zbliżając się ku końcowi XVI w., wymienimy jeszcze następującvch uczonych. Rafael Bombelli, Włoch, w pracy „Algiebra“ (1572) rozwija pierwiastek kwadratowy na ułamek łańcuchowy i wykonywa swobodnie działania na liczbach urojonych. Simon Stevin, Holender, w dziele „Arithmétique“ (1585) operuje ułamkami dziesiętnemi, pisząc je w ten sposób, że liczba w nawiasie wskazuje miejsce każdej cyfry dziesiętnej, np. 237(0)5(1)7(2)8(3) oznacza 237,578. Joost Bürgi, Szwajcar, w dziele „Arithmetica“ (1592) pisze już ułamki dziesiętne, oddzielając przecinkiem część całkowitą od ułamkowej. Bürgi podaje sposób skróconego mnożenia, używany dziś powszechnie w arytmetyce handlowej. Wreszcie dochodzimy do francuskiego matematyka Franciszka Vieta, który kończy wiek XVI i zaczyna wiek XVII; Vieta wydał w r. 1591 dzieło „In artem analyticam isagoge“ i w r. 1615 „De aequationum recognitione et emendatione“. Vieta obok znaków $+$ i $-$ używa znaku $=$, lecz nie jako znaku równości, ale na oznaczanie różnicy dwuch liczb, gdy jest obojętna, która z nich jest większą; zamiast znaku równości Vieta pisze jeszcze aequatur, aequabitur, est. (Znak $=$, jako znak równości, wprowadził był w roku 1556 Anglik Robert Recorde). U Viety napotykamy pierwszy raz wyraz „coefficiens“ (spółczynnik). Cardano już wykrył był, że spółczynnik przy kwadracie niewiadomej w równaniu sześciennym jest równy sumie pierwiastków równania; Vieta rozwinął zależności między spółczynnikami i pierwiastkami równań aż do 5-go stopnia. Wyników prac matematyków włoskich w dziedzinie teorji równań Vieta jak gdyby zupełnie nie znał: znowu odrzuca pierwiastki ujemne,

---

[1]) Inne sposoby rozwiązania równania 4-go stopnia podali później: Descartes, Tschirnhausen, Euler, Bézout, Lagrange.

a o liczbach urojonych nawet wzmianki nie czyni. Za to zajmuje się dość szeroko przekształceniami równań ogólnych; wskazuje, że przy pomocy podstawienia $x = y \pm \frac{a}{n}$ można wyrugować z równania n-go stopnia wyraz, zawierający $(n-1)$-ą potęgę niewiadomej; Vieta podał własny sposób rozwiązania równania 4-go stopnia. Jedną z najważniejszych zasług Viety jest rozwinięcie rachunku literowego. Vieta oznacza literami nietylko liczby niewiadome, ale i wiadome, przytym dla oznaczania liczb niewiadomych używa wielkich samogłosek: A, E, I..., a dla oznaczania liczb wiadomych wielkich spółgłosek: B, C, D,... (nawiasem zauważymy, że dzisiejszy zwyczaj oznaczania wiadomych literami początkowemi alfabetu, a niewiadomych—literami końcowemi, pochodzi od Kartezjusza). Przed Vietą na oznaczenie każdej potęgi niewiadomej była oddzielna nazwa: causa (x), census (x^2), cubus (x^3), censocensus (x^4) i t. p. i odpowiednio do tego każda potęga niewiadomej miała swój odrębny znak; Vieta wprowadził uproszczenie, pisząc: *A*, *A quadratus*, *A cubus* lub w skróceniu: *A*, *Aq*, *Ac*, *Aqq* i t. d.

Doszliśmy do wrót XVII wieku, w którym zaczynają się rozwijać metody matematyki nowoczesnej.

Literatura.

Nowsze wydania *klasyków* są następujące:

Euclidis opera omnia, red. I. L. Heiberg i H. Menge, Lipsk, tomów 12, z których dotychczas wyszło 7; „Elementy" zawarte są w pierwszych 5 tomach; cena tych 5 tomów M. 24.60.

Część „Elementów" Euklidesa wyszła w polskim przekładzie Józefa Czecha p. t. „Euklidesa początków gieometrji ksiąg ośmioro, to jest sześć pierwszych, jedenasta i dwunasta z dodanemi przypisami i trygonometrją", Wilno, 1807. Drugie wydanie po śmierci tłumacza wyszło w r. 1817.

Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, red. I. L. Heiberg, 3 tomy, Lipsk 1880/1881, M. 18.

Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia, 3 tomy i suplement, Lipsk 1899/1903, M. 28.

Nicomachi Geraseni Pythagorei introductionis arithmeticae libri II, red. R. Hoche, str. 197, Lipsk 1866, M. 1.80.

Diophanti Alexandrini opera omnia cum graecis commentariis, red. P. Tannery, 2 tomy, Lipsk, 1893/1895, M. 10.

Dziełem podstawowym, nieodzownym przy poważnych studjach nad historją matematyki, jest:

Moritz Cantor: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ w 4 tomach: t. I od czasów najdawniejszych do 1200 r. po Chr., 3-e wydanie, str. 941, Lipsk 1907, M. 24; t. II od 1200 r. do 1668 r., 2-gie wydanie, str. 943, Lipsk 1900, M. 26; t. III od 1668 r. do 1758 r., 2-gie wydanie, str. 923, Lipsk 1901, M. 27; t. IV obejmie okres do 1800 i jest na ukończeniu. Materjał, objęty naszym artykułem, jest zawarty u Cantora w I-ym tomie i połowie II-go tomu. U Cantora czytelnik znajdzie wyczerpujące wskazania bibljograficzne, tak co do źródeł, jak i co do ich opracowań.

Z krótszych opracowań, mających związek z treścią naszego artykułu, wymienimy następujące:

W. W. Rouse Ball: „A short account of the history of mathematics“, str. 527, Londyn, 10 sh.

Tego samego autora: „A primer of the history of mathematics“, 2-e wydanie, str. 148, Londyn 1906, 2 sh.

Herm. Hankel: „Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelater“, str. 410, Lipsk 1874 (wyczerpane).

Ludwig Matthiessen: „Grundzüge der antiken und modernen Algebra“, 2-gie wydanie, str. 1001. Lipsk 1896, M. 8 (zawiera obszerny spis bibljograficzny).

Heinrich Suter: „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke“ str. 278, Lipsk 1900, M. 14.

Johannes Tropfke: „Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung“ w 2 tomach; t. I: „Rechnen und Algebra“ str. 332, Lipsk 1902, M. 8.

H. G. Zeuthen: „Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter“ str. 342, Kopenhaga 1896.

W końcu wymienimy jeszcze dwa czasopisma, poświęcone historji nauk matematycznych, wydawane przez firmę B. G. Teubner w Lipsku:

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, założone przez Moritza Cantora w r. 1877; jest to stale kontynuowany zbiór monografji historyczno-matematycznych.

Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften, pod redakcją G. Eneströma w Stockholmie; oprócz monografji uwzględnia również dział aktualny na polu badań historycznych i bibljograficznych w dziedzinie matematyki.

II.

Zarys rozwoju gieometrji w starożytności, wiekach średnich i epoce odrodzenia.

PRZEZ

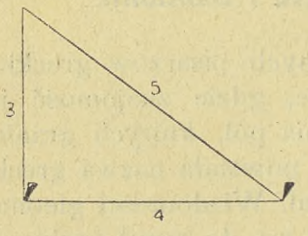
W. Smosarskiego.

Treść: I. Początki gieometrji w Egipcie i Babilonji. II. Gieometrja w Grecji przed Euklidesem. III. Rozkwit gieometrji w Grecji. IV. Dzieje późniejsze gieometrji greckiej i jej upadek. V. Gieometrja w wiekach średnich i epoce odrodzenia. VI. Dane bibljograficzne.

1. Początki gieometrji w Egipcie i Babilonji.

Według Herodota i innych starożytnych pisarzów greckich gieometrja najpierwej powstała w Egipcie, gdzie znajomość jej była niezbędna do bezustannego mierzenia pól, których granice rok rocznie rujnowały wylewy Nilu. Stąd powstała nazwa grecka tej nauki—gieometrja, czyli mierzenie ziemi. Wiadomości gieometryczne starożytnych Egipcjan ograniczały się do reguł praktycznych, potrzebnych w miernictwie i architekturze. Zachowały się one na papyrusie Ahmesa, pochodzącym z czasów około roku 1700 przed N. Chr. Znajdujemy tam przepis do obliczania śpichlerzy okrągłych, przepis do obliczania pól i t. p. Pole trójkąta równoramiennego o podstawie a i ramieniu b oblicza Ahmes podług wzoru $\frac{1}{2} \times a \times b$. Wzór ten jest oczywiście nieścisły, gdyż powinien mieć postać $\frac{1}{2} \times a \times \sqrt{b^2 - \frac{1}{4} a^2}$, jednakże do celów praktycznych był wystarczającym, zwłaszcza, że wyciąganie pierwiastka przedstawiało dla starożytnych zbyt wielkie trudności. To też użycie tego wzoru przybliżonego utrzymało się aż do czasów znacznie późniejszych u mierników greckich i rzymskich, kiedy gieometrja stała już na wysokim stopniu doskonałości. Podobnież oblicza Ahmes pole trapezu równoramiennego o podstawach *a* i *b* i ramionach *c* za pomocą wzoru nieścisłego $\frac{1}{2} \times (a + b) \times c$. Już i wtedy nie obcą była Egipcjanom kwadratura koła, dla której Ahmes przyjmuje kwadrat o boku równym $^8/_9$ średnicy koła danego, tak — że stosunek okręgu koła do średnicy wynosiłby $\pi = 3{,}1604...$; liczbę, jak na owe czasy bardzo dokładną. Zasługuje na wzmiankę w podręczniku Ahmesa grupa zadań, dotyczących piramidy; jednak nie jej objętości, lecz obliczenia stosunku pewnych wymiarów, który prawdopodobnie służył do budowania piramid podobnych; wiadomo bowiem, że w piramidach egipskich kąt, zawarty pomiędzy ścianą i podstawą, wynosi zawsze około 52^0; dowodzi to, że już Egipcjanom można przypisywać pewne początki trygonometrji.

Ze wzmianek pisarzów greckich (Demokryt) widać, że Egipcjanie znali też kąt prosty i sposób jego wykreślenia. Wynika to jeszcze stąd, że co do budowy świątyń w Egipcie istniały nader surowe przepisy, wymagające, aby jedna ze ścian była skierowana dokładnie na północ, a druga na wschód i zachód. Dla zbudowania kąta prostego stosowano sznur, na którym znajdowały się węzły w odległościach 3, 4 i 5 jeden od drugiego. Część środkową napinano na ziemi za pomocą kołków (rys. 1); jeżeli potym złączono końce sznura i naciągnięto, to trójkąt otrzymany był prostokątny. Tę własność trójkąta o bokach 3, 4 i 5 znali Egipcjanie bez uzasadnienia jej i przypisywali ją mistycznym właściwościom trójkąta.



Rys. 1.

W Babilonji początki gieometrji były również wczesne, jak w Egipcie. Posiadamy o nich nieco skąpych wiadomości z zabytków pisma klinowego. Babilończycy znali linje równoległe, kąt prosty, i wprowadzili podział koła na 360 części oraz mierzenie kątów w stopniach. Zauważyli astronomowie chaldejscy, że rok trwa około 360 dni i że słońce przesuwa się dziennie o $^1/_{360}$ część koła, które pozornie opisuje w ciągu roku na sklepieniu niebieskim. Stąd tłumaczy się powstanie rzeczonego podziału, jak i sześćdziesiątkowego systemu liczenia, pochodzącego również z Babilonu.

---

2. Gieometrja w Grecji przed Euklidesem.

Ojczyzną gieometrji, jako nauki, jest Grecja. Nie powstała ona odrazu i nie została stworzona przez jednego człowieka, lecz rozwój jej postępował stopniowo, w ciągu stuleci, koncentrując się w różnych, tak licznych ziemiach, zamieszkałych przez Greków. Najwcześniej rozwinęła się gieometrja na wybrzeżach Azji Mniejszej i wyspach przyległych w wieku VII przed Chr., w t. zwanej szkole Jońskiej. Mocniej wzrosła potym w Wielkiej Grecji (Italji południowej i Sycylji) w szkole Pitagorejczyków. Trzeci stopień rozwoju stanowi szkoła Ateńska. Wreszcie gieometrja ogniskuje się w Aleksandrji, gdzie w wieku III przed Chr. dochodzi do imponującego rozkwitu. Następnie zbogaca się już tylko drobnemi przyczynkami, a w wieku VI po N. Chr. zupełnie się chyli do upadku. Historja zapisała imiona wielu sławnych gieometrów greckich. Dzieła ich przeważnie zaginęły i wiemy o nich tylko ze wzmianek komentatorów, którzy żyli w pierwszych wiekach naszej ery. Niektóre przetrwały do nas, lecz w stanie ułamkowym lub w niedokładnym tłumaczeniu na język łaciński, arabski i hebrajski.

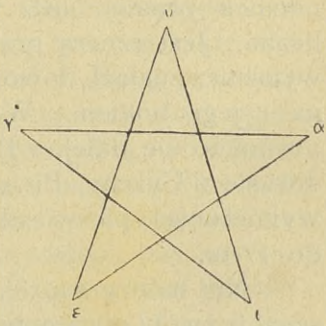
Pierwszym gieometrą greckim był T a l e s z Miletu, założyciel szkoły Jońskiej, urodzony około roku 640, zmarły około roku 548 przed N. Chr. Jako kupiec odbył podróż do Egiptu i tam u kapłanów wtajemniczył się w dziedziczone od wieków reguły gieometryczne. Po powrocie w strony rodzinne poświęcił się głębszemu zbadaniu wiadomości zdobytych, uczynił je przystępniejszemi i zbogacił nowemi spostrzeżeniami. Przypisywano mu następujące twierdzenia: kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe; kąty naprzeciwległe, utworzone przez 2 proste przecinające się, są równe; średnica dzieli koło na połowy; podstawa i 2 kąty przyległe wystarczają do wyznaczenia trójkąta. Z pomocą ostatniego twierdzenia Tales pierwszy umiał znajdować odległość okrętu na morzu, obserwując go w tym celu ze szczytu baszty. Wsławił się też tym, że mierzył wysokość piramid w Egipcie, porównywając długość ich cienia z cieniem pręta pionowego w chwili, gdy cień człowieka stawał się równym jego wzrostowi. Oto dorobek gieometryczny Talesa. Nie należy sądzić, że były to twierdzenia w dzisiejszym znaczeniu słowa, opatrzone ścisłemi dowodzeniami. Na ówczesnym poziomie umysłowym człowiek nie uczuwał jeszcze potrzeby takich dowodów, a prawdy gieometryczne Talesa były jedynie oparte na oczywistości i doświadczeniu.

Na właściwym gruncie naukowym postawił gieometrję Pitagoras (r. 580—500 przed Chr.), który po dłuższym pobycie w Egipcie założył słynną swoją szkołę w Krotonie, mieście Wielkiej Grecji. Szkoła ta ustaliła na wszystkie czasy zasady ogólne matematyki i konieczność dowodów, opartych na logice. Wynikało to z charakteru idealnego filozofji Pitagorasa, który widział istotę rzeczy w liczbie i formie, a nie w materji, jak filozofowie szkoły jońskiej.

Pitagorejczycy znali własności linji równoległych i zastosowali je do dowiedzenia, że suma kątów trojkąta wynosi 2 proste. Zajmowali się też obliczaniem pól figur i spostrzegli, że figury o polach równych mogą mieć obwody różnej długości, zależnie od kształtu.

Wzmianka ostatnia nabiera znaczenia ze względu na szczególny przesąd, zakorzeniony w umysłach ludzi nie tylko z epoki Pitagorasa, lecz i znacznie późniejszych. Naprzykład najcelniejszy z historyków greckich Tucydydes (r. 400 przed Chr.) szacuje powierzchnię wysp według czasu potrzebnego na ich opłynięcie dokoła, uważając najwidoczniej pole figury za proporcjonalne do jej obwodu. Celnicy w Palestynie w V wieku naszej ery dawali się oszukiwać w ten sposób, że przyjmowali od gmin, jako podatek, zamiast przepisanego zbioru, naprz., z pola mającego 40 łokci w kwadracie, zasiewy z dwu pól po 20 łokci w kwadracie każde, gdyż suma obwodów tych ostatnich wynosi 160 łokci, również jak i pierwszego. Tymczasem obszar tych dwu pól wynosi łącznie 800 łokci kwadratowych, czyli jest dwa razy mniejszy niż obszar pola, przepisanego przez prawo. O podobnej omyłce jednego Araba donoszą kroniki z X wieku.

Poważną rolę w gieometrji Pitagorejczyków grały wielokąty i wielościany foremne. Ozdoby, znalezione w Egipcie i Babilonie, wykazują znajomość kwadratu i sześciokąta foremnego już w bardzo głębokiej starożytności. Pitagorejczycy znaleźli konstrukcję pięciokąta foremnego, a musieli z niej być bardzo dumni, skoro uczynili pięciokąt foremny gwiaździsty (pentagram), utworzony z przekątnych pięciokąta foremnego (rys. 2), swoim godłem. Drugim godłem ich był wyraz ὑγεια (hygeja), oznaczający zdrowie. Pitagorejczycy łączyli te dwa godła, umieszczając głoski wyrazu obok wierzchołków pentagramu, i zwyczaj ten prawdopodobnie był zarodkiem weszłego później w użycie u Greków oznaczania wierzchołków figur i punktów głoskami. W stereometrji Pitagorejczycy zajmowali się bryłami foremnemi i znali je wszystkie pięć; zasługą ich jest odkrycie dwunastościanu foremnego, którego ściany są pięciokątami foremnemi. Zgodnie z charakterem swej filozofji szukali oni w naturze odpowiedników tych brył, przyrównywając je do żywiołów: ogień występuje według nich jako czworościan, powietrze składa się z ośmiościanów, woda z dwudziestościanów, ziemia z sześcianów, wreszcie ostatniej bryły—dwunastościanu użył bóg jako zarysu dla całości świata—kosmosu. Dlatego też Pitagorejczycy nazwali wielościany foremne kosmicznemi. Być może, że znali oni i pewne własności kuli, którą nazywali najdoskonalszą ze wszystkich brył.



Rys. 2.

Wreszcie przypisują Pitagorasowi słynne twierdzenie, znane pod jego imieniem, że w trójkącie prostokątnym kwadrat przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przyprostokątnych. Jednakże dowód tego twierdzenia, znajdujący się w Elementach Euklidesa, nie należy do Pitagorasa, lecz jest wynalazkiem Euklidesa. Odkrycie tego twierdzenia tłumaczy się w ten sposób, że Pitagoras przedewszystkim zauważył własność liczb 3, 4 i 5, według której suma kwadratów dwu pierwszych jest równa kwadratowi trzeciej: $9 + 16 = 25$. Z drugiej strony, wiedząc, że trójkąt o bokach 3, 4 i 5 jest prostokątny, co, jak zaznaczyliśmy wyżej, było wiadome różnym ludom już w odległej starożytności, połączył w umyśle swoim te dwie własności i doszedł tą drogą do twierdzenia ogólnego. Było to rzeczą całkiem naturalną, że twierdzenie to sprawdzano na różnych trójkątach prostokątnych, a przedewszystkim na trójkącie prostokątnym równoramiennym. Jeżeli długość ramienia tego trójkąta wynosiła jedność, to wymierzając długość przeciwprostokątnej, otrzymywali Pitagorejczycy mniej niż dwa i więcej niż jeden, lecz nie mogli dojść do żadnej oznaczonej liczby. W ten sposób odkryto wielkości niewymierne, odkryto zdumiewający dla filozoficznego umysłu Greków ten fakt paradoksalny, że każdej liczbie danej (całkowitej lub ułamkowej, gdyż innych liczb Grecy przedtym nie znali) odpowiada pewien odcinek prostej, lecz nie każdemu odcinkowi odpowiada jakaś liczba. Jest rzeczą prawdopodobną, że Pitagoras, starając się to wyjaśnić, znalazł dowód, że przekątna kwadratu jest niespółmierna z jego bokiem. Wynika stąd niewymierność $\sqrt{2}$. Z czasem posunięto się dalej, a Platon wspomina o swoim nauczycielu Teodorusie z Cyreny, Pitagorejczyku, że dowiódł gieometrycznie niewymierności pierwiastka kwadratowego z 3, 5 i innych liczb aż do 17-tu.

Nie należy sądzić, że szkoła Pitagorejska była jedynym miejscem rozwoju matematyki w wieku V-ym. Niezależnie od niej uprawiano matematykę i w innych miejscowościach. Tak O i n o p i d e s z Chiosu (r. 500-430) rozwiązał dwa zagadnienia, mianowicie: 1) z punktu, danego zewnątrz prostej, poprowadzić prostopadłą do prostej, i 2) w punkcie danym zbudować kąt, równy kątowi danemu. Znany filozof atomista, D e m o k r y t (r. 460—370), był też uważany za wielkiego gieometrę, lecz jego prace gieometryczne zaginęły całkowicie.

Z końcem wieku V-go przed Chr. głównym środowiskiem matematyki stają się Ateny, które podówczas zarówno w życiu umysłowym jak i politycznym zagarnęły hegiemonję w Grecji. Powstały wówczas blizko siebie dwie szkoły: jedna w samych Atenach, druga w Cyzyku, mieście Azji Mniejszej. Jakkolwiek w różnych miejscach położone, pozostawały one w stałych i ścisłych stosunkach wzajemnych. Działalność ich datuje się do końca wieku IV-go przed Chr. W epoce tej widzimy wybitny postęp w gieometrji pod dwu względami: po pierwsze, ustaliło się wśród gieometrów greckich przekonanie, że zupełną dokładność można osiągnąć jedynie przez systematyczne zestawienie twierdzeń w jedną całość — stąd powstały liczne zbiory twierdzeń nazywane Elementami (στοιχεῖα); po drugie, zakres badań rozszerzył się przez rozpatrywanie prócz prostej i koła jeszcze nowych linji, zwłaszcza przecięć stożkowych — elipsy, hiperboli i paraboli, tworząc w ten sposób zawiązek gieometrji wyższej.

Wybitniejszymi przedstawicielami szkoły Ateńskiej byli Hippokrates z Chiosu (urodzony 470 r. przed Chr.), Platon (429—348) i Teetetus; do szkoły w Cyzyku należeli jej założyciel Eudoksus (408—355), Menechmus (375—325) i Aristeus (około 320).

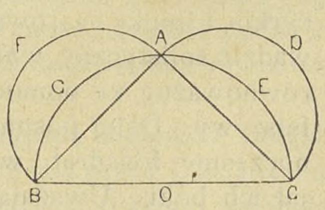
Hippokrates z Chiosu stoi w rzędzie największych gieometrów greckich. On to zebrał wszystkie znane wówczas twierdzenia gieometryczne i ułożył pierwsze „Elementa". Miał on wprowadzić oznaczanie figur literami, spotykamy u niego bowiem takie wyrażenia, jak „punkt, przy którym litera A stoi" i „linja, przy której AB jest naznaczone". Pomysł takiego użycia liter mógł wyjść, jak już zaznaczyliśmy wyżej, ze szkoły Pitagorejskiej. Od Hippokratesa datuje się użycie wyrazu „potęga" na oznaczenie ilości a^m, mianowicie, nazywał on kwadrat, zbudowany na danym odcinku prostej, „δύναμις" (po łacinie—potentia). Jego zasługą jest też rozpowszechnienie metody dowodzenia, zwanej „sposobem sprowadzenia do niedorzeczności" (reductio ad absurdum), której liczne zastosowania napotykamy w gieometrji Euklidesa, zwłaszcza do twierdzeń odwrotnych. Hippokrates zbogacił licznemi twierdzeniami naukę o kole, dowiódszy między innemi, że kąt wpisany w półkole jest prosty, kąt zaś zawarty w odcinku koła, większym lub mniejszym niż półkole, jest odpowiednio ostry lub rozwarty; że pola kół mają się do siebie jak kwadraty średnic; że odcinki kół podobne, mają się jak kwadraty cięciw, i inne. Hippokratesowi zawdzięczamy pierwszy tworzący całość wykład gieometrji; dosłowne urywki z pism tego gieometry zachował nam w swym dziele Eudemus, uczeń Arystotelesa, autor historji matematyki. Styl Hippokratesa odznacza się wprost nieznośną rozwlekłością i częstym powtarzaniem rzeczy znanych i prostych. Według przypuszczenia historyków, trudności, wynikające z ciągłego powtarzania najprostszych rzeczy lub uważania ich bez dowodu za znane, skłoniły Hippokratesa do napisania książki elementarnej, na którą w przyszłości wystarczałoby wprost się powoływać.

Zasługi Platona dla gieometrji polegają nie na nowych odkryciach lub pismach gieometrycznych, lecz na ogromnym wpływie, jaki wywierał na spółczesnych i późniejszych matematyków. Platon przyczynił się do podniesienia znaczenia matematyki; jak powiada Eudemus, „wskazywał przy każdej sposobności na szczególny związek pomiędzy matematyką a filozofją“. Nad wejściem do Akademji Platona miał być napis: „Niechaj nikt, nie umiejący gieometrji, nie wchodzi w moje progi“; a w pewnym przypadku młodzieniec, który nie znał gieometrji, nie został nawet przyjęty do Akademji. Rzecz prosta, że w szkole tego wielkiego filozofa musiano traktować ze szczególną starannością metody, używane w gieometrji. Jemu to prawdopodobnie należy przypisać, że późniejsi gieometrzy greccy zaczynali swój przedmiot od starannie dobranego szeregu określeń, postulatów (żądań) i pewników. W szczególności Platon zwrócił uwagę na znaczenie analizy. Metodę analityczną określa jeden z późniejszych pisarzów greckich słowami: „Uważać rzecz szukaną tak, jakby była dana, i iść od wniosków do wniosków, dopóki nie poznamy rzeczy szukanej jako prawdziwej.“ Metoda ta przeciwstawia się metodzie syntetycznej, w której, naodwrót, wychodzi się z twierdzeń uprzednio dowiedzionych i od wniosku do wniosku przechodzi się do nowej prawdy. Przykłady obu tych metod znajdujemy w każdym podręczniku gieometrji.

Eudoksus dowiódł wielu twierdzeń o odcinkach proporcjonalnych i znalazł, że objętość ostrosłupa lub stożka jest trzecią częścią objętości graniastosłupa lub walca o tej samej podstawie i tej samej wysokości. Jest on twórcą słynnej „metody wyczerpywania“, której gieometrzy greccy używali do porównywania ze sobą pól dwu figur lub objętości dwu brył, a która zastępowała im nowoczesną metodę nieskończonostkową. Metoda ta polega nie na dowodzeniu bezpośrednim, lecz na okazaniu, że przypuszczenie odmienne od tego, co się ma dowieść, jest niemożliwe, i zasadzało się na następującym twierdzeniu, które podajemy za Gieometrją Euklidesa, gdzie jest umieszczone na początku księgi XII (tłumaczenie J. Czecha). „Mając dwie nierówne wielkości dane, jeżeli od większej odjęta będzie część większa od jej połowy i od pozostałej odjęta znowu będzie część większa od jej połowy i podobne odejmowanie powtarzać się zawsze będzie, pozostanie się nakoniec wielkość mniejsza od danej wielkości mniejszej“. Metoda ta jest ścisła, lecz zawiła w zastosowaniu. Dla bliższego zaznajomienia się z nią odsyłamy czytelnika, naprzykład, do dowodzenia twierdzenia 2-go wspomnianej księgi XII Elementów Euklidesa, głoszącego, że kwadrat promienia jednego koła ma się tak do kwadratu promienia drugiego koła, jak pole pierwszego koła ma się do pewnego pola, które nie może być ani mniejsze ani większe, niż pole drugiego koła, i które przeto musi być dokładnie jemu równe.

Rozszerzając i udoskonalając stopniowo gieometrję, natknęli się matematycy greccy drogą naturalną na trzy zagadnienia, które, pomimo swej pozornej prostoty, zawierały trudności nie do przezwyciężenia, i dlatego na długo skupiły na sobie uwagę matematyków. Te trzy słynne zagadnienia starożytności są: kwadratura koła, podział kąta na trzy części równe (trysekcja kąta) i podwojenie sześcianu. One to stanowiły główny przedmiot zajęcia szkoły Ateńskiej i najbardziej przyczyniły się do jej sławy. Przedewszystkim musimy zaznaczyć, że Platon wprowadził zasadę, że do konstrukcji gieometrycznych dozwala się użycie tylko cyrkla i linijki, i dlatego rozwiązania za pomocą innych linji, niż koło i prosta, nie uważał za zadowalające. Dzięki autorytetowi Platona wspomniana zasada utrzymała się po dziś dzień. Jakkolwiek z tego punktu widzenia wszystkie trzy wymienione zagadnienia okazały się nierozwiązalnemi, jednakże stały się obfitym źródłem nowych wiadomości i metod, stały się źródłem gieometrji wyższej starożytnych.

Zagadnienie o kwadraturze koła polega na zbudowaniu kwadratu dokładnie równoważnego kołu danemu. Według podania, najwcześniejszy traktat o kwadraturze koła napisał A n a k s a g o r a s (r. 500—428), ostatni z filozofów szkoły Jońskiej. Pierwsze dokładne dane co do tego zagadnienia mamy o Hippokratesie z Chiosu. Szukał on rozwiązania za pomocą słynnych kwadratur księżyczków, zwanych jego imieniem. Nasamprzód znalazł pole księżyczka, zbudowanego na boku kwadratu, wpisanego w koło. Niechaj ABC (rys. 3) będzie trójkątem prostokątnym równoramiennym, wpisanym w półkole $BGAEC$. Na AB i AC opiszemy półkola, jako na średnicach. Wówczas, ponieważ



Rys. 3

kwadrat boku $BC =$ kwadrat boku $AC +$ kwadrat boku AB,

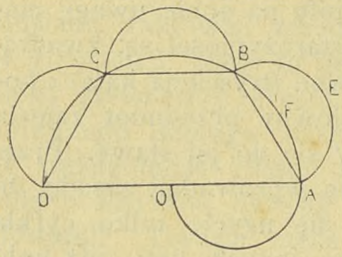
a pola kół mają się jak kwadraty średnic, przeto:

pole $\frac{1}{2}$ koła na $BC =$ pole $\frac{1}{2}$ koła na $AC +$ pole $\frac{1}{2}$ koła na AB.

Odejmijmy teraz części wspólne BGA i CEA, pozostanie:

pole $\triangle ABC =$ sumie pól księżyczków $AGBF$ i $AECD$.

Stąd pole księżyczka $AECD$ jest równe połowie pola trójkąta ABC. Teoremat ten jest godzien szczególnego zaznaczenia, jako najpierwsza kwadratura figury, ograniczonej linjami krzywemi. Znalazszy pole księżyczka, Hippokrates szukał dalej związku pomiędzy kołem i księżyczkiem w taki sposób (rys. 4): Wpisał połowę sześciokąta foremnego $ABCD$ w półkole ze środkiem w punkcie O, a na OA, AB, BC i CD, jako na średnicach, opisał półkola. Łatwo dowieść, że pole trapezu $ABCD$ jest równe 3 księżyczkom $AEBF + \frac{1}{2}$ koła na OA. Gdyby więc pole takiego księżyczka było znane, to byłoby wiadome pole półkola OA. Jednakże ten księżyczek jest inny, niż poprzedni, zbudowany na boku kwadratu, i kwadratura jego nie daje się wykonać. Hippokrates czynił jeszcze wiele prób w celu znalezienia pola tych księżyczków, ale wysiłki jego musiały pozostać bezskutecznemi.



Rys. 4.

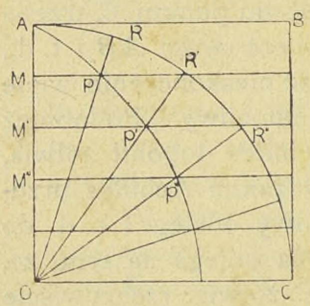
Na właściwą drogę, która wprawdzie nie daje dokładnego rozwiązania, ale umożliwiłaby obliczenie pola koła z dowolnym przybliżeniem, natrafili sofista Antyfon (r. 420 przed Chr.) i pitagorejczyk Bryson z Heraklei (r. 400 przed Chr.) Pierwszy z nich zaczął od wpisania w koło trójkąta foremnego; na każdym z boków wpisał w odcinek mniejszy koła trójkąt równoramienny i t. d.; otrzymane wielokąty foremne coraz bardziej zbliżały się do koła. Ponieważ każdy z tych wielokątów można zamienić za pomocą cyrkla i linijki na równoważny mu kwadrat, więc Antyfon wyprowadził sofistyczny wniosek, że i koło da się zamienić na kwadrat równoważny za pomocą cyrkla i linijki. Wniosek taki jednak jest fałszywy. Dalej posunął się Bryson przez to, że rozpatrywał jednocześnie kwadrat, wpisany w koło, i opisany na kole, i podwajał ich boki. Uważając, że każdy z tych wielokątów foremnych wpisanych jest mniejszy od koła, a każdy z opisanych jest większy, Bryson zrobił dziwaczny i błędny wniosek, że pole koła jest średnią arytmetyczną dwu wielokątów odpowiednich: wpisanego i opisanego. Widzimy, jak niedokładne były wyobrażenia Greków w tej dziedzinie. Następcom Antyfona i Brysona pozostawał już tylko jeden krok do właściwego postawienia kwestji, t. j. że koło (i wogóle wszelka krzywa) jest wielokątem o nieskończenie wielkiej liczbie boków, czyli dokładniej, że jest granicą wielokątów wpisanych lub opisanych, gdy liczba ich boków powiększa się nieograniczenie. Lecz zasada ta nigdy nie zjawiła się w pismach matematyków greckich; nie odpowiadałaby ona ich wymaganiom ścisłości w dowodzeniu; zamiast niej używali drogi okólnej w postaci metody wyczerpywania, ugruntowanej przez Eudoksusa, która też prowadzi do celu, ale na drodze zawilszej i dłuższej. Prawdopodobną przyczyną takiego obrotu rzeczy stała się ostra krytyka filozofów, z którą wystąpili przeciwko pojęciu nieskończoności. Że taka krytyka istniała rzeczywiście, dowodem znane paradoksy Zenona z Elei (r. 495—435), które miały dowodzić niemożliwości ruchu. Aby przebyć pewną drogę AB, trzeba naprzód dojść do jej środka C; lecz żeby dojść do punktu C, trzeba przedtym przejść połowę drogi AC czyli ćwierć drogi AB i t. d.; czyli aby dojść do punktu B, trzebaby przejść nieskończenie wiele dróg, a więc według Zenona ruch jest niemożliwy. Podobnież jest rzeczą niemożliwą, żeby szybkonogi Achilles dogonił żółwia, skoro tylko ten raz go już wyprzedza, gdyż zanim Achilles przebiegnie pierwszy odstęp, już żółw zyska nowy odstęp i t. d. do nieskończoności. Błąd w sofizmatach Zenona polega na tym, że, naprzykład, czas potrzebny na dopędzenie żółwia rzeczywiście składa się z nieskończenie wielu części, lecz odstępy czasu stają się coraz mniejsze i mniejsze (i to w postępie gieometrycznym), i suma ich wszystkich jest czasem skończonym: po upływie tego czasu Achilles dopędzi żółwia. Nie należy brać paradoksów Zenona dosłownie i przypuszczać, że istotnie zaprzeczał możliwości ruchu, co sprzeciwiałoby się oczywistości. Być może, że miał on na celu jedynie okazanie, do jakich sprzeczności doprowadza operowanie nieskończonościami.

Kwestja kwadratury koła nie przestawała niepokoić umysłów greckich. Dinostrjates w końcu IV stulecia przed Chr. rozwiązał ją za pomocą specjalnej krzywej—kwadratycy, o której pomówimy jeszcze później. Archimedes, posiłkując się metodą wyczerpywania, znalazł dla stosunku pola koła do kwadratu promienia:

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7}.$$

Dokładniejszym obliczeniem i właściwym charakterem liczby π zajmowano się przez wszystkie następne czasy. Dopiero niedawno, w roku 1882, został rozstrzygnięty czterotysiącoletni problemat o kwadraturze koła, przez dowiedzenie, że π jest t. zw. liczbą przestępną, t. j. nie może być pierwiastkiem żadnego równania algiebraicznego ze spółczynnikami wymiernemi; można okazać, że za pomocą cyrkla i linijki dają się rozwiązać tylko takie zagadnienia gieometryczne, które się dają sprowadzić do szeregu równań kwadratowych lub równań 1-go stopnia. Wynika więc z poprzedzającego, że kwadratura koła za pomocą cyrkla i linijki jest niemożliwa.

Zagadnienie podziału kąta na trzy części równe musiało się zrodzić w sposób naturalny w szkole Pitagorejskiej przy poszukiwaniu wielokątów foremnych i sposobu ich wykreślenia. Sofista Hippias z Elidy (około r. 420 przed Chr.) wynalazł specjalną krzywą, którą się posługiwał do tego podziału (rys. 5). Wyobraźmy sobie ćwiartkę koła AC i punkt R, poruszający się jednostajnie po jego okręgu, oraz prostą prostopadłą do OA, poruszającą się równolegle do samej siebie też jednostajnie. Punkt przecięcia tej prostej z promieniem punktu R opisuje krzywą Hippiasa. Ze sposobu tworzenia krzywej wynika, że odległość AM prostej ruchomej od AB jest proporcjonalna do kąta AOR. Jeżeli więc chcemy znaleźć trzecią część kąta AOR'', to przez punkt P'' przecięcia promienia OR'' z krzywą prowadzimy prostą $P''M''$ równolegle do prostej AB, na AM'' odmierzamy odcinek AM równy trzeciej części AM''; równoległa do AB, poprowadzona przez M, przetnie krzywą w punkcie P takim, że kąt AOP będzie kątem szukanym. Krzywą tę później zastosował Dinostrates do kwadratury koła, stąd otrzymała ona nazwę kwadratycy. Trysekcja kąta, jeżeli ją rozpatrywać analitycznie, sprowadza się do rozwiązania równania 3-go stopnia[1]). Otóż, ponieważ konstrukcja z pomocą kół, których równania są kształtu $x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$, i prostych, których równania są $ax + by + c = 0$, nie może prowadzić do równania 3-go stopnia, przeto zagadnienie o trysekcji kąta jest nierozwiązalne, jeżeli się ograniczyć do kół i prostych. Ostatecznie i ogólnie rozstrzygnął sprawę w wieku XIX matematyk niemiecki Gauss, który dowiódł, że

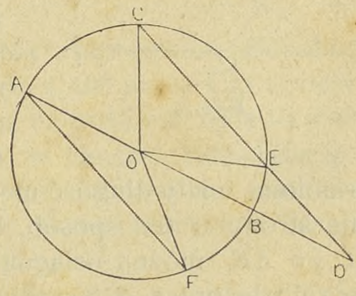


Rys. 5.

[1]) Istotnie, $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, czyli, oznaczając $\sin\alpha$ przez x, a $\sin 3\alpha$, jako dane, przez m, mamy: $4x^3 - 3x + m = 0$.

cyrklem i linijką można tylko wtedy zbudować wielokąt foremny o n bokach jeżeli $n-1=2^p$, gdzie n jest liczbą pierwszą, a p—dowolną liczbą całkowitą.

Do rozwiązania zadań nierozwiązalnych za pomocą cyrkla i linijki Grecy stosowali sposób przesunięcia. Oto jak Archimedes dzielił kąt na 3 części za pomocą tego sposobu. Niechaj będzie dany kąt AOC (rys. 6). Prowadzimy średnicę AB, następnie przez C sieczną, przecinającą koło w E, a średnicę AB w punkcie D, i przesuwamy ją tak, żeby $ED = r$, promieniowi koła. Wówczas jest łuk $BE = \frac{1}{3}$ łuku AC. Istotnie, kreślimy AF równoległą do CE, następnie promienie OE i OF i widzimy, że $\sphericalangle BOE = \sphericalangle EDO = \sphericalangle FAO = \frac{1}{2}$ łuku $FB = \frac{1}{3} \sphericalangle FOE = \frac{1}{3} \sphericalangle AOC$. Żądane przesunięcie siecznej można dla celów praktycznych łatwo uskutecznić, odmierzając na pasku papieru r i prowadząc go przez C, podczas gdy koniec odcinka r ślizga się po średnicy AB; podczas ruchu paska w pewnym położeniu drugi koniec odcinka r znajdzie się na okręgu, i w ten sposób wyznaczy się punkt E.

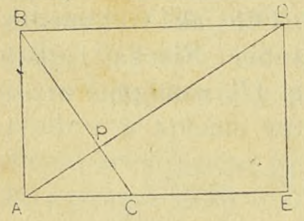


Rys. 6.

Trzecim zagadnieniem, którym bardzo żywo się zajmowali matematycy szkoły Ateńskiej, było podwojenie sześcianu. Polega ono na zbudowaniu sześcianu o objętości dwa razy większej niż objętość sześcianu danego.

Hippokrates z Chiosu spostrzegł, iż zagadnienie sprowadza się do znalezienia dwuch średnich proporcjonalnych. Jeżeli w podwójnej proporcji $a : x = x : y = y : b$, założymy $b = 2a$, to z proporcji $a : x = x : y$ znajdziemy $x^2 = ay$, a z proporcji $a : x = y : 2a$ będzie $y = \frac{2a^2}{x}$; podstawiając w poprzednim równaniu, otrzymamy $x^3 = 2a^3$, czyli że x jest krawędzią sześcianu o objętości dwa razy większej, niż objętość sześcianu, zbudowanego na a.

Ponieważ, jak widzimy, jest to zagadnienie, sprowadzające się do równania 3-go stopnia, więc nie można rozwiązać go za pomocą cyrkla i linijki. Platon rozwiązał je za pomocą przesunięcia. Wyobraźmy sobie prostokąt $ABDE$ (rys. 7); z wierzchołka B spuśćmy prostopadłą na przekątną AD, przecinającą ją w punkcie P, a bok AE w punkcie C; kładziemy $PD = b$, $PC = a$, $PB = y$, $PA = x$; z trójkąta prostokątnego ABD będzie $AP : BP = BP : PD$, czyli $x : y = y : b$, a z trójkąta ABC podobnież $PC : AP = AP : PB$. czyli $a : x = x : y$, łącząc te dwie proporcje, znajdujemy $a : x = x : y = y : b$, o co właśnie chodziło. Platon wymyślił przyrząd do znajdywania mechanicznego krawędzi sześcianu podwojonego. Składał się on z 3 boków stałych prostokąta AB, BD i AE i z krzyża $ADBC$, którego ramię $PD = 2a$, $PC = a$, pozostałe zaś dwa ramiona miały długość nieokreśloną. Przesuwając ten krzyż w różne strony w ten sposób, by koniec D ślizgał się po BD, a koniec C po AE, można osiągnąć takie położenie, że przedłużenie PD przejdzie przez A, przedłużenie zaś PC przez B. Matematyk aleksandryjski z 3-go wieku przed Chr., Eratostenes, w taki sposób opisuje w liście do Ptolemeusza Euergety, króla egipskiego, historję tego zagadnienia:



Rys. 7.

„Królowi Ptolemeuszowi życzy Eratostenes szczęścia i pomyślności. Powiadają, że według jednego ze starych tragiedjopisarzy, gdy król Minos kazał Glaukusowi wznieść nagrobek i usłyszał, że ten będzie miał z każdej strony po 100 stóp, rzekł:

Zbyt mały zamierzyłeś wznieść mi królewski grób,
Podwój go, lecz sześcianu nie zaniechaj.

Otóż i ze strony gieometrów badano, w jaki sposób możnaby podwoić jakąkolwiek daną bryłę, nie zmieniając jej kształtu, i nazwano zadanie tego rodzaju podwojeniem sześcianu, gdyż zakładając sześcian jako dany, starano się go podwoić. Otóż gdy przez długi czas wszyscy byli bezradni, odkrył najpierw Hippokrates z Chiosu, że gdyby się dało wyprowadzić dla dwu danych linji prostych, z których większa byłaby podwójną mniejszą, dwie średnie proporcjonalne w stosunku ciągłym, to możnaby podwoić sześcian; w ten sposób przekształcił swoją bezradność na inną niemniejszą bezradność. Po pewnym czasie, jak opowiadają, ponieważ Delijczyków nawiedziła choroba, stosownie do wyroczni, odebrali oni polecenie, by podwoili jeden ze swoich ołtarzów, i wpadli w ten sam kłopot. Otóż mieli oni obesłać wykształconych u Platona w Akademji gieometrów z życzeniem, czy nie zechcieliby wynaleźć im rzeczy żądanej. Ponieważ ci zabrali się do rzeczy z gorliwością i szukali dwu średnich dla dwu danych, miał je znaleźć Tarentyjczyk Archytas za pomocą półwalców, Eudoksus zaś za pomocą tak zwanych linji łukowych. Wogóle jednak mieli trudność w tym, że wprawdzie dowiedli swoich rysunków z gieometryczną oczywistością, nie mogli jednak łatwo wykonać ich ręcznie i wprowadzić w zastosowanie, z wyjątkiem chyba poniekąd Menechmusa, i to tylko z mozołem.“

Wspomnianego przez Eratostenesa rozwiązania Eudoksusa nie znamy. Archytas z Tarentu (około r. 400 przed Chr.) podwoił sześcian za pomocą linji przecięcia walca ze stożkiem; była to pierwsza linja przestrzenna (skośna) znana w nauce. Rozwiązanie to przynosi zaszczyt autorowi, dowodzi wielkiej łatwości orjentowania się w skomplikowanych utworach przestrzennych i licznych wiadomości z planimetrji i stereometrji.

Menechmus, uczeń Eudoksusa, słynie jako pierwszy badacz przecięć stożkowych, które też przez długi czas nazywano tryjadami Menechmusa. Podzielił te krzywe na 3 rodzaje i prawdopodobnie znał zasadnicze własności. Dał on dwa rozwiązania podwojenia sześcianu: jedno przez przecięcie dwu parabol, drugie przez przecięcie paraboli i hiperboli równobocznej.

Kończąc na tym historję szkoły Ateńskiej, musimy wspomnieć jeszcze o Arystotelesie, którego gienjusz filozoficzny znacznie przyczynił się do systematyczniejszego traktowania gieometrji.

„Metody, zarysowane przez Platona i jego uczniów“, powiada pewien wielki pisarz[1]), „były uprawiane z zapałem przez ich następców i dostarczyły materjału do bardzo wielu prac, w których zostały rozwinięte główne własności owych słynnych krzywych— przecięć stożkowych, które w dwa tysiące lat potym odegrały tak wielką rolę w mechanice wszechświata, skoro Kepler uznał je za prawdziwe orbity, przebiegane przez planety i satelitów, i gdy Newton odkrył w ich ogniskach te punkty właśnie, gdzie tkwią siły, ożywiające wszystkie ciała układu świata“.

---

[1]) Chasles

3. Rozkwit gieometrji w Grecji.

Po śmierci Aleksandra Wielkiego warunki polityczne Grecji uległy zasadniczej zmianie; jednocześnie zaczęły się chylić do upadku poezja, krasomówstwo i inne sztuki jakoteż filozofja. Wprost przeciwnie miała się rzecz z gieometrją, która właśnie wtedy doszła do nadzwyczajnego rozkwitu. W tym złotym okresie gieometrji greckiej, przypadającym na wiek 3-ci przed Chr., jej środek ciężkości przenosi się na długo, bo na 900 lat przeszło, do Aleksandrji, na ziemię Egipską, a więc tam, gdzie przed wiekami zrodziły się pierwsze początki gieometrji. Szkoła Aleksandryjska wydała w krótkim bardzo przeciągu czasu, bo w pierwszym zaraz stuleciu swojego istnienia, trzech gienjalnych mężów: Euklidesa, Archimedesa i Apollonjusza, największych matematyków starożytności, którym zawdzięcza swoją sławę.

Euklides, pierwszy z matematyków, nauczających w uniwersytecie Aleksandryjskim, żył około roku 300 przed Chr., i znany jest przedewszystkim jako autor „Elementów". Proklus, komentator z 5-go wieku naszej ery, w taki sposób przedstawia jego dzieło: „Euklides zebrał elementy, doprowadził do porządku wiele rzeczy, znalezionych przez Eudoksusa, udoskonalił to, co rozpoczął Teetetus, i dowiódł ściślej tego, czego przed nim dowiedziono zbyt słabo". Słowa te stwierdzają zdanie historyków, że dzieło tak doskonałe, jak Elementa Euklidesa, nie mogło powstać odrazu i samodzielnie, lecz musiało mieć pierwowzory w próbach, wcześniej przedsiębranych. Że książki tego rodzaju pisano rzeczywiście, to zaznaczyliśmy wyżej, mówiąc o szkole Ateńskiej. Praca osobista Euklidesa wyraziła się głównie w tym, żeby znany już materjał przedstawić dokładniej, niż to bywało dotychczas, zgodnie z surowszemi wymaganiami formalnemi, które tymczasem się wytworzyły.

Elementa Euklidesa składają się z 13 ksiąg. Można je podzielić na cztery części. W pierwszej części, obejmującej pierwsze sześć ksiąg, są wyłożone własności figur płaskich. Można w niej rozróżnić cztery działy, mianowicie: przedstawienie własności figur prostokreślnych i koła oraz równoważności figur prostokreślnych, zawarte w księgach 1-ej, 2-ej, 3-ej i 4-ej; teorję proporcji — treść księgi 5-ej; własności figur podobnych i inne zastosowania teorji proporcji—treść księgi 6-ej. Część druga obejmuje księgi 7-mą, 8-mą i 9-tą, zajmuje się nauką o liczbach i stanowi właściwie arytmetykę. Część trzecią tworzy księga 10-ta, gdzie się rozpatruje szczegółowo wielkości niespółmierne. Wreszcie na część czwartą przypadają trzy księgi ostatnie, poświęcone linjom prostym w przestrzeni, płaszczyznom i bryłom. Treść gieometryczna Elementów jest tak ogólnie znana, że byłoby rzeczą zbyteczną wyłuszczać ją tu szczegółowiej.

Układ dzieła i metoda dowodzenia są syntetyczne, wyróżniają się najsurowszą ścisłością i dokładnością i pod względem logicznym są nieposzlakowane. Wszystkie twierdzenia i zagadnienia, przynajmniej w obrębie każdej księgi, tworzą łańcuch nieprzerwany; każde twierdzenie i zagadnienie dowodzi się na zasadzie poprzedzających i stoi na tym miejscu, gdzie jest niezbędne dla następnego. Wobec tak konsekwentnego i kunsztownego spiętrzenia prawd gieometrycznych, nasuwa się pytanie, do jakiego kresu zmierza twórca tego wspaniałego gmachu naukowego i z jakich początków go wywodzi? Wspomniany Proklus nadmienia, że celem Elementów Euklidesa była konstrukcja brył kosmicznych, t. j. wielościanów foremnych; mniemanie takie o tyle tylko jest uzasadnione, że rzeczywiście twierdzenia końcowe księgi 13-tej są poświęcone temu zagadnieniu. Bliższym jednak prawdy wydaje się cel poważniejszy, polegający na przygotowaniu do studjowania dzieł o treści wyższej, między innemi i tych, które wyszły z rąk samego Euklidesa. Wywody w Elementach są ugruntowane na definicjach, pewnikach i postulatach. Pewniki, podane przez Euklidesa, tyczą wielkości wogóle; naprzykład, „wielkości równe tejże samej wielkości, są równe i między sobą“; „jeżeli do równych wielkości dodane będą wielkości równe, całe wielkości będą równe“ i t. d. Następnie musiał Euklides oprzeć się na pewnych najprostszych konstrukcjach gieometrycznych, których wykonanie uważa się poprostu za znane, i na pewnych pierwszych sądach gieometrycznych, których prawdziwość wynika wprost z oczywistości. Są to postulaty, podane przez Euklidesa w liczbie pięciu:

1. Linję prostą poprowadzić z jednego punktu do innego punktu.
2. Linję prostą ograniczoną przedłużyć w którąkolwiek stronę.
3. Koło zakreślić, mając dany środek i dany promień.
4. Wszystkie kąty proste są równe.
5. Jeżeli linja prosta, przecinająca dwie linje proste, tworzy kąty wewnętrzne i po tej że samej stronie położone, razem mniej-

sze od dwu kątów prostych; to te dwie linje proste, przedłużone do nieskończoności, przetną się z tej strony, z której suma kątów jest mniejsza od dwu kątów prostych.

Do tych postulatów trzeba dołączyć, jako szósty, jeszcze jeden, zaliczony niewłaściwie w Elementach do pewników, a mianowicie:

6. Dwie linje proste nie zamykają przestrzeni.

Postulaty te w gruncie rzeczy są stwierdzeniem tylko trzech zasadniczych prawd gieometrycznych: 1) że istnieje linja prosta i tylko jedna linja prosta, przechodząca przed dwa punkty dane; 2) że istnieje koło, mające środek dany i przechodzące przez punkt dany i 3) że dwie linje proste wyznaczają punkt, który jest ich punktem przecięcia. Na wyodrębnienie zasługuje postulat 5-ty; występowano przeciwko niemu we wszystkich czasach z wątpliwościami, które starano się usunąć przez jakie twierdzenie, dające się dowieść, dopóki w wieku XIX-ym nie poznano z prac Łobaczewskiego i Bolyai'a, że taki dowód jest niemożliwy, że można zbudować systematyczne gieometrje, tak zw. geometrje nieeuklidesowe, bez wspomnianego postulatu, które logicznie są tak samo uzasadnione, jak gieometrja Euklidesa.

Charakter Elementów jest nawskroś djalektyczny. Obcą im jest wszelkie zastosowanie praktyczne, tak dalece, że nie powiedziano nawet, jak urzeczywistnić żądane w postulatach poprowadzenie linji prostej i koła i nie wzmiankowano ani jednym słowem o linijce i cyrklu. Podobnież, są w Elementach podane pola i objętości figur, ale tylko we wzajemnym stosunku figur do siebie, naprzykład: trójkąt jest równoważny połowie równoległoboku o tej samej podstawie i wysokości, lub: graniastosłup jest równoważny trzem równoważnym między sobą ostrosłupom; lecz niema tam ani jednego rzeczywistego obliczenia pola lub objętości. Zato zyskały Elementa na jasności i konsekwencji logicznej, którą porównanie z ciałami materjalnemi rzeczywistemi mogłoby tylko zaciemnić. Zastosowania praktyczne stanowiły u Greków przedmiot osobnej umiejętności, zwanej gieodezją, którą uważali za niższą pod względem naukowym od gieometrji czystej.

Treść Elementów jest przybrana w nader odpowiednią formę zewnętrzną wykładu; księgi zaczynają się od definicji, postulatów i pewników, poczym następują w ścisłym porządku, pod ogólną nazwą podań, zagadnienia i twierdzenia; w każdym podaniu stale powtarza się jedna i ta sama postać: wypowiedziane jest twierdzenie lub zagadnienie, potym następuje wyłuszczenie, wykreślenie, dowód, wreszcie konkluzja, zakończona słowami: „co było do dowiedzenia“ lub „co było do wykreślenia“. Taki sposób wykładu stał się typowym i otrzymał nazwę Euklidesowego.

Z trzynastu ksiąg Elementów wprowadzono do nauczania tylko ośm: pierwsze sześć, 11-tą i 12-tą. Tłumaczenie tych ośmiu ksiąg na język polski, wykonane przez Józefa Czecha, ukazało się w dwu wydaniach w Wilnie w r. 1807 i 1817. W końcu XVIII stulecia zaczęto zastępować Euklidesa innemi podręcznikami; tylko w Anglji utrzymało się dotychczas używanie Elementów w nauczaniu.

Elementy, jako podręcznik gieometrji, spotykały się z rozmaitemi zarzutami. Oto ważniejsze z nich: 1) w definicjach, pewnikach i postulatach tkwią niedokładności, np. definicja: „linja jest długością bez szerokości“ w gruncie rzeczy nic nie określa i powiada tylko, że istnieje coś, co się nazywa linją; 2) nie jest wyjaśnione, dlaczego dowody mają tę, a nie inną postać, t. j. nie widać tych roztrząsań, czyli analizy, które do nich doprowadziły; 3) brak uogólnień, tak np., pojęcie kąta nie jest rozciągnięte na przypadek, kiedy kąt jest równy lub większy niż dwa kąty proste; 4) sposób nałożenia mógłby być częściej stosowany z pożytkiem, jako metoda dowodzenia; 5) klasyfikacja jest niedoskonała; 6) dzieło jest nad miarę długie i rozwlekłe.

Pomimo to Elementa pozostały wzorem klasycznym dokładności i ścisłości. Doczekały się tylu wydań i tłumaczeń, jak żadna inna książka z wyjątkiem Biblji, i żadne inne dzieło matematyczne nie wywarło takiego wpływu na życie duchowe ludzkości. W starożytności cieszyły się tak wielkim znaczeniem i rozpowszechnieniem, że wyparły wszystkie inne podręczniki gieometrji, tak że pamięć o nich zaginęła, a po Euklidesie nikt już z Greków nie próbował pisać nowych elementów.

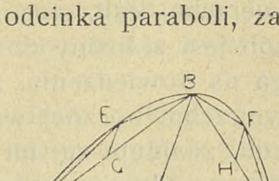
Teksty spółczesne Elementów są oparte na wydaniu, sporządzonym około r. 380 naszej ery przez Teona, ojca Hypatji, sławnej kobiety-filozofa. W Watykanie znajduje się kopja starszego tekstu; poza tym istnieją cytaty i wzmianki pisarzów z różnych czasów. Ze źródeł tych widać, że definicje, postulaty i pewniki były przestawiane i zmieniane przez późniejszych wydawców, lecz że podania same są w swej istocie takie, jak je napisał Euklides.

Elementa nie były jedyną pracą Euklidesa, zasługującą na podziw. Rozsunął on granice nauki i w innych pismach, z których całkowicie doszło nas tylko jedno, mniej ważne, pod tytułem „Dane"; jest to jakby dalszy ciąg Elementów, mający ułatwić korzystanie z nich i zastosowanie do różnych zagadnień gieometrycznych. Dalej napisał Euklides trzy księgi o „poryzmach"; księgi te zaginęły. Wielu matematyków z XVII i XVIII stulecia jak Fermat, Halley, Simson, znakomici znawcy gieometrji starożytnych, usiłowali odgadnąć znaczenie tych tajemniczych poryzmów. Zadanie to rozwiązał w r. 1860 wielki gieometra francuski Chasles, który, wychodząc z 38 twierdzeń, podanych przez Pappusa, gieometrę z końca III-go stulecia naszej ery, i mających uprzystępnić zrozumienie poryzmów, odtworzył to dzieło Euklidesa. Według Chaslesa, poryzmy były zestawieniem rozmaitych własności lub rozmaitych wyrażeń miejsc gieometrycznych, przedstawiającym zarazem przekształcenia tych własności jednych na drugie, i miały służyć starożytnym do rozwiązania następującego zagadnienia: „wyznaczywszy miejsce gieometryczne za pomocą wykreślenia wspólnego wszystkim jego punktom, odnaleźć inne wykreślenie, któreby czyniło zadość wszystkim punktom tego miejsca i dało poznać jego naturę i jego położenie". Charakterem swoim poryzmy miały być blizkie metodom nowoczesnej gieometrji analitycznej. Książka Euklidesa „O podziale figur", zachowana w przekładzie arabskim, jest zbiorem zagadnień w rodzaju: podzielić pole trójkąta lub czworokąta prostą, równoległą do prostej danej, w stosunku danym. Napisał też Euklides cztery księgi „o przecięciach stożkowych", ale dzieło to, zarówno jak i dwie księgi „o miejscach na powierzchni" zaginęły. Niema też żadnych danych, któreby świadczyły o udziale Euklidesa w trzech wielkich zagadnieniach starożytności, co ze względu na tak wielkiego matematyka jest godne zaznaczenia.

Gieometrja elementarna, w przedstawieniu Euklidesa, zawierała nie wszystkie te przedmioty, które obecnie do niej zaliczamy; przedewszystkim, brakowało tam obliczenia powierzchni walca i stożka, powierzchni i objętości kuli i jej części, wreszcie długości okręgu i pola koła. Zapełnienie tych luk jest jedną z zasług Archimedesa.

A r c h i m e d e s, urodzony w r. 287, zmarły w r. 212 przed Chr., kształcił się w uniwersytecie Aleksandryjskim i, chociaż przepędził życie w Sycylji, w swym mieście ojczystym Syrakuzach, jednakże pozostawał w stałych stosunkach z uczonymi aleksandryjskimi, i dlatego słusznie zalicza się do ich szkoły. Zdobył on sławę największego matematyka starożytności; przyczyniły się do tego w znacznej mierze jego odkrycia z mechaniki, ale i jego prace gieometryczne mają również wielką doniosłość. Z licznych dzieł Archimedesa o najrozmaitszej treści przetrwała do naszych czasów znaczna część w oryginale. Przedstawiają one zgoła odmienny obraz, niż dzieła Euklidesa. Podczas gdy Euklides pisał systematyczne traktaty, grupując i zaokrąglając materjał, stworzony w znacznej mierze przez innych gieometrów, to prace Archimedesa są raczej monografjami, poświęconemi pojedyńczym przedmiotom i zawierają wyłącznie jego własne odkrycia: przytaczając w razie potrzeby twierdzenia, dowiedzione przed nim, odsyła on do dzieł elementarnych, znanych za jego czasów. Archimedes, dążąc po nowych drogach, odkrytych dzięki własnemu gienjuszowi, wynalazł nową krzywą i nowe powierzchnie, podejmował zagadnienia o kwadraturach i stycznych. Jego siła twórcza najbardziej się objawiła w badaniach nieskończonostkowych, polegających na znalezieniu pola figur płaskich i powierzchni oraz objętości figur trójwymiarowych, do czego Eudoksus już stworzył nader pewny grunt w postaci metody wyczerpywania. Zagadnienia tego rodzaju, t. j. kwadratury i kubatury rozwiązuje się obecnie w sposób zupełnie ogólny za pomocą rachunku całkowego, który ugruntowali wielcy matematycy XVII-go stulecia, opierając się właśnie na pismach Archimedesa. Archimedes nie posiadał tak ogólnej metody i zastępował ją w każdym poszczególnym przypadku swą gienjalną pomysłowością.

W dziele pod tytułem „Kwadratura paraboli" Archimedes w sposób piękny i prosty wyprowadza pole odcinka paraboli, zawartego pomiędzy łukiem paraboli i cięciwą. Niech $AEBFC$ (rys. 8) będzie odcinek paraboli i BD—średnica paraboli, dzieląca na pół cięciwę AC; naprzód wpisujemy w dany odcinek trójkąt ABC; następnie w powstałe odcinki wpisujemy podobnież trójkąty AEB i BFC; potym odpowiednie trójkąty w 4 nowe odcinki i t. d. Posiłkując się najprostszemi własnościami paraboli, łatwo dowieść, że każdy trójkąt (jak AEB) w nowym



Rys. 8.

szeregu trójkątów jest równoważny $1/8$ trójkąta (jak *ABC*) w szeregu poprzedzającym; że zaś w każdym nowym szeregu jest dwa razy tyle trójkątów, co w poprzedzającym szeregu, więc otrzymujemy:

$$\text{pole odcinka paraboli } ABC = [1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{1}{4})^3 + \ldots].\ \triangle ABC = \tfrac{4}{3} \text{ pola } \triangle ABC.$$

Dowód jest przeprowadzony za pomocą metody wyczerpywania.

W dziele „O spiralnych“ Archimedes zajmuje się nową krzywą, nazwaną w czasach późniejszych „spiralną Archimedesa“, a opisywaną przez punkt, poruszający się z prędkością jednostajną po linji prostej, obracającej się z prędkością jednostajną dokoła punktu nieruchomego. Podane są: pole, zawarte pomiędzy jakimkolwiek łukiem spiralnej i dwoma promieniami, przechodzącemi przez jego końce i punkt nieruchomy, oraz sposób poprowadzenia stycznej do spiralnej w punkcie jakimkolwiek.

Dzieło „Konoidy i sferoidy“ traktuje o powierzchniach utworzonych przez obrót paraboli, hiperboli i elipsy około osi. Archimedes oblicza objętości brył, ograniczonych częścią powierzchni i jakąkolwiek płaszczyzną sieczną; dzieli bryłę płaszczyznami, poprowadzonemi w równych odstępach równolegle do podstawy, na elementy; każdy element jest mniejszy niż walec, na nim opisany, i większy niż walec, wpisany weń; objętość całej bryły jest mniejsza od sumy objętości walców opisanych i większa od sumy objętości walców wpisanych, skąd za pomocą metody wyczerpywania znajduje się objętość bryły. W tymże dziele jest obliczone pole elipsy.

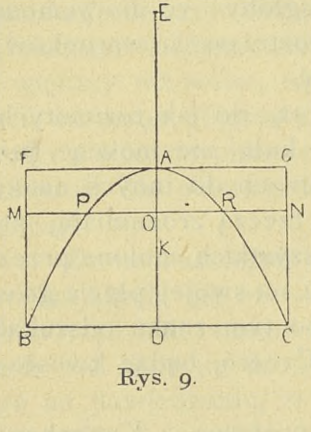
Za najważniejsze ze wszystkich obliczeń Archimedesa, sprowadzających się do całkowania, jest uważane wyznaczenie powierzchni kuli, stanowiące przedmiot pracy „Kula i walec“. Sposób jest zbliżony do używanego obecnie w podręcznikach i polega na dowiedzeniu, że powierzchnia pasa kulistego równa się powierzchni bocznej walca opisanego na nim. Mając powierzchnię kuli, znajduje się łatwo objętość kuli, oraz wycinka i odcinka kulistego. Idąc za wzorem Euklidesa, Archimedes nie używa jednostki miary, stąd wszystkie wyznaczenia objętości zarówno w tym, jak i poprzedzającym dziele, polegają na zbudowaniu walców i stożków równoważnych. Oto jak naprzykład wygląda twierdzenie o kuli: „kula jakakolwiek jest czterokrotnością stożka, mającego podstawę równą kołu wielkiemu tej kuli i wysokość równą promieniowi tejże samej kuli"; równie charakterystyczne są twierdzenia o powierzchniach walca i stożka, np.: „powierzchnia walca prostego jakiegokolwiek, wyłączając podstawy, jest równa powierzchni koła, którego promień jest średnio proporcjonalny między bokiem walca i średnicą jego podstawy".

W drugiej księdze tegoż dzieła rozpatruje Archimedes różne zagadnienia, tyczące znalezionych wielkości, między innemi takie: podzielić kulę płaszczyzną na dwa odcinki, których objętości byłyby w stosunku danym. Archimedes doszedł, że rozwiązanie tego zagadnienia sprowadza się do znalezienia odcinka prostego, którego długość czyni zadość równaniu sześciennemu postaci: $x^3 - ax^2 + \frac{4}{9}a^2b = 0$, co jest możliwe jeżeli $b < {}^a/_3$. Fakt ten jest wielce ważny, gdyż równania 3-go stopnia występują w historji matematyki europejskiej dopiero w tysiąc przeszło lat potym. Archimedes obiecuje rozwiązać to równanie później, ale tego zapowiedzianego rozwiązania nie posiadamy. W związku z tym rozwiązaniem, jak przypuszczają historycy, ma pozostawać ostatnie w tej księdze twierdzenie, że ze wszystkich możliwych odcinków kulistych, mających powierzchnię daną, największą objętość ma półkula; mianowicie, twierdzenie to mogłoby być dioryzmem powyższego zagadnienia, czyli służyć do roztrząsania warunków, przy których zagadnienie daje się rozwiązać.

Z tego pobieżnego przeglądu widać już, do jak rozmaitych badań prowadzi wyznaczenie powierzchni kuli, nie mówiąc już o zastosowaniach praktycznych i zastosowaniach do innych nauk, jak np. gieografji. Z tych względów jest rzeczą zrozumiałą, że dzieło „Kula i walec" było najbardziej ze wszystkich cenione przez Archimedesa, który też dlatego kazał wyryć na swojej płycie grobowej kulę z opisanym na niej walcem; po tym znaku odszukał później i odnowił grobowiec Archimedesa Cycero, będąc kwestorem w Sycylji.

Bardzo niedawno, bo w roku 1906, profesor z Kopenhagi M. Heiberg odkrył w pewnym palimpseście, znalezionym w Palestynie, nieznany przedtym traktat Archimedesa, zatytułowany. „O pewnych twierdzeniach mechanicznych czyli o metodzie": Traktat ten rzucił całkiem nowe światło na prace Archimedesa, i to ze strony szczególnie interesującej. Człowiekowi nowoczesnemu, biorącemu do rąk dzieło klasyczne starożytne, chodzi nie tylko o zrozumienie rezultatów matematycznych w nim zawartych, lecz i o poznanie, jaką drogą autor doszedł do nich; niestety, nieliczne prace matematyczne starożytnych, które przetrwały do naszych czasów, zawierają tylko ostateczne ściśle dowiedzione rezultaty, i pytanie o ich powstaniu pozostaje zagadką. Otóż, nowoodkryty traktat stanowi pod tym względem wyjątek, nabierający tym większego znaczenia, że dotyczy gienjusza, najbardziej wzbudzającego podziw; dzięki temu pismu zyskujemy pewien pogląd na sposób dochodzenia prawd Archimedesa, na metodę, która go prowadziła do nowych odkryć.

W. przedmowie, zaadresowanej do Eratostenesa, Archimedes pisze, że, znając jego zamiłowanie do matematyki, podaje mu pewną nową metodę, prowadzącą do wykrycia niektórych prawd matematycznych za pomocą mechaniki; metoda ta, powiada, jest niemniej pożyteczna do dowiedzenia tych prawd, gdyż choć sama nie daje dowodu prawdziwego, jednak łatwiej jest, znalazszy zapomocą tej metody pewne dane co do zagadnienia, wymyśleć dowodzenie, aniżeli bez żadnych wiadomości uprzednich. Dla zapoznania się z metodą Archimedesa najlepiej będzie przytoczyć jakikolwiek przykład z jego dzieła. Niech będzie (rys. 9).



Rys. 9.

BAC — odcinek paraboloidy obrotowej,
AD—jej oś;
BC—koło prostopadłe do osi, ograniczające odcinek;
$BCFG$—walec, opisany na odcinku;
MN—jakakolwiek plaszczyzna prostopadła do osi, przecinająca walec według koła MN, a paraboloidę według koła PR;
$AE = AD$.

Z powszechnie znanej własności paraboli wynika:

$$\overline{BD}^2 : \overline{PO}^2 = AD : AO, \text{ skąd}$$
$$\overline{MO}^2 : \overline{PO}^2 = AE : AO \text{ czyli}$$
$$\text{pole koła } MN : \text{pole koła } PR = AE : AO.$$

Uważajmy teraz ED za wagę lub dźwignię, podpartą w punkcie A; zostawmy koło MN na jego miejscu, a koło PR przenieśmy na koniec dźwigni tak, żeby jego środek ciężkości był umieszczony w punkcie E; wówczas, według zasadniczego prawa dźwigni, waga będzie w równowadze. To samo stosuje się do wszystkich innych kół, otrzymanych w ten sam sposób. „Napełnijmy“, powiada Archimedes, „kołami podobnemi walec i odcinek paraboloidy; w całości walec, pozostając na miejscu, równoważy się z odcinkiem paraboloidy, umieszczonym w E jako w środku ciężkości“. Wówczas, jeżeli K jest środkiem ciężkości walca, to:

$$\text{walec: odcinek paraboloidy} = AE:AK,$$

a że $AK = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AE$, więc objętość odcinka paraboloidy jest równa połowie objętości walca opisanego.

W podobnie prosty sposób wyznacza Archimedes objętość kuli i mnóstwo innych brył i powierzchni. Jeżeli objętość jest znana skądinąd, to za pomocą tejże metody można znaleźć środek ciężkości. Ta metoda jest godna uwagi ze względu, że twierdzenia z mechaniki stosuje do gieometrji, co całkiem sprzeciwiało się ówczesnym doktrynom szkolnym; ale jeszcze jest godniejsza uwagi śmiałość, z jaką bezustannie się w niej operuje wyobrażeniami, że powierzchnia „składa się“ z linji, a bryła z kół lub jest przez nie „wypełniona“; jest to w gruncie rzeczy nowoczesny rachunek całkowy, którym więc już Archimedes posługiwał się jako metodą, podczas gdy wogóle w matematyce greckiej pojęcie nieskończoności jest surowo wyłączone, jako nie dające się ująć ściśle, a więc niebezpieczne. Dlatego też Archimedes zaznacza, wielokrotnie, że te rozumowania nie są dowodzeniami, lecz dają tylko prawdopodobne przypuszczenia, które wymagają dowodu gieometrycznego, opartego na wyczerpywaniu, żeby mogły być wygłoszone. Niektóre z twierdzeń są dowiedzione powtórnie za pomocą wyczerpywania w tymże traktacie „O metodzie“; pozostałe zaś zostały podane w postaci ścisłej w dziełach napisanych później: „Konoidy i sferoidy“ oraz „Kula i walec“. Rzecz ciekawa, że w dziele. „O metodzie“ Archimedes znalazł naprzód objętość kuli jako $^2/_3$ walca opisanego, i utrzymując, że kula jest równa stożkowi, mającemu za podstawę powierzchnię kuli, a za wysokość jej promień, wyprowadza powierzchnię kuli; w „Kuli i walcu“ zaś naodwrót, wyprowadza naprzód bezpośrednio powierzchnię kuli, a z niej dopiero objętość.

Pozostało nam do rozpatrzenia jeszcze jedno dzieło Archimedesa; zaczniemy od kilku słów wyjaśnienia. W epoce, którą obecnie przedstawiamy, wskutek rozwoju nauk w Grecji, szczególniej astronomji, dawał się coraz bardziej odczuwać brak rozmaitych danych liczebnych z gieometrji, które, jak zaznaczaliśmy, gieometrzy greccy wyłączyli stanowczo jako nieodpowiednie w nauce czystej, a najważniejszą z tych danych był stosunek okręgu do średnicy. Dość przypomnieć znaczenie tej liczby ze względu chociażby na pierwszy pomiar długości południka, dokonany w Egipcie przez Eratostenesa. Brak ten mógł się dać uczuć i Archimedesowi, gdy pisał rzecz na owe czasy niezwykłą, bo coś w rodzaju dziełka popularnego p. t. „Rachmistrz piasku“, w którym postawił sobie za zadanie obliczyć liczbę ziarnek piasku, mogącą wypełnić cały wszechświat, t. j. według ówczesnych wyobrażeń astronomicznych, kulę, zakreśloną z ziemi promieniem, równym odległości ziemi od słońca; do rachunku tego, rzecz prosta, potrzebna mu była znajomość owego stosunku. Tej ważnej potrzebie czyni właśnie zadość dzieło: „Mierzenie koła“. Zawiera ono dwa twierdzenia: naprzód jest dowiedzione przez wyczerpywanie, że koło jest równoważne trójkątowi, mającemu za podstawę długość okręgu, a za wysokość promień; w ten sposób kwadratura koła zostaje sprowadzona do wymierzenia okręgu; następnie jest okazane, że obwód 96-ciokąta foremnego wpisanego w koło jest większy niż $3\frac{10}{71}$ jego średnicy, a obwód takiegoż wielokąta opisanego jest mniejszy niż $3\frac{1}{7}$ średnicy; pomiędzy temi granicami musi leżeć i długość okręgu, skąd otrzymuje się stosunek okręgu do średnicy, czyli liczba, w nowszych czasach nazwana głoską π,

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7}.$$

Obliczenie wspomnianych wielokątów wymaga wielokrotnego wyciągania pierwiastka kwadratowego z przybliżeniem, co dla matematyków greckich było połączone ze zbyt wielkiemi trudnościami, i tym się tłumaczy stosunkowo późne ukazanie się tego obliczenia, podczas gdy, jak pamiętamy, już w 5-tym wieku przed Chr. Antyfon i Bryson wpadli na pomysł rozpatrywania wielokątów foremnych wpisanych i opisanych na kole. Archimedes musiał posiadać jakiś własny, nieznany nam sposób wyciągania pierwiastków, którego nie podaje.

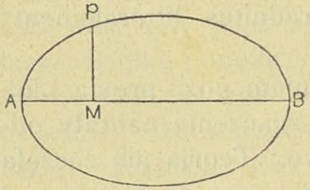
Oprócz wymienionych napisał Archimedes jeszcze wiele innych dzieł gieometrycznych, które przepadły, między innemi o siedmiokącie wpisanym w koło i o bryłach półforemnych, przezwanych później ciałami Archimedesa.

Dla uzupełnienia działalności Archimedesa nadmienimy jeszcze, że on to wprowadził do gieometrji, jako postulat, tę własność linji prostej, że jest najkrótszą odległością pomiędzy dwu punktami.

Dzieła Archimedesa po dziś dzień nie utraciły swego znaczenia i mogą być z wielkim pożytkiem czytane przez miłośników matematyki. Pierwsze wydanie dzieł Archimedesa w języku żyjącym stanowią: „Oeuvres d'Archimède traduites littéralement“ przez F. Peyrard, Paryż, 1807.

Z pośród linji krzywych, których badaniem poza prostą i kołem zajmowano się w Grecji, największego znaczenia nabrały odkryte przez Menechmusa przecięcia stożkowe. Teorja ich zaczęła szybko się rozwijać zaraz po odkryciu, a jej rozrost bynajmniej nie był dziełem przypadku, lecz naturalnym następstwem szerokiego zastosowania, do jakiego się nadawały w różnych zagadnieniach, jak podwojenie sześcianu, podział kąta na 3 części i inne, sprowadzające się algiebraicznie do równań 3-go i 4-go stopnia. Oprócz Menechmusa pisali o przecięciach stożkowych Euklides, a przed nim Aristeus. Wszystkie te prace zaginęły; o ich zakresie możemy się dowiedzieć z wielkiego dzieła Apollonjusza z Pergi, podobnie jak gieometrję elementarną Greków poznajemy dzięki Euklidesowi.

A p o l l o n j u s z z Pergi, trzeci z wielkich matematyków Aleksandryjskich, żył w latach 260—200 przed Chr. i wykładał w Aleksandrji. Napisał traktat „O przecięciach stożkowych“ w 8 księgach, z których pierwsze 4 doszły do nas w języku greckim, 3 następne w tłumaczeniu arabskim, ostatnia zaś zaginęła. W dziele tym, opierając się na pracach dawniejszych i na własnych badaniach, wyłożył systematyczną teorję przecięć stożkowych, a tak szczegółową, że następcom jego niewiele pozostało do uzupełnienia. Pierwsze cztery księgi są niejako elementami teorji przecięć stożkowych i zawierają ich główniejsze własności, niezbędne przy rozwiązywaniu różnych zagadnień i do szczegółowszych dociekań; następne księgi zawierają już treść bardziej specjalną. Dawniejsi pisarze otrzymywali przecięcia stożkowe z trzech stożków o różnej rozwartości, przecinając je płaszczyznami prostopadłemi do tworzącej, i nazywali je: „przecięcie stożka ostrokątnego, prostokątnego i rozwartokątnego“. Apollonjusz wywodzi wszystkie trzy przecięcia jako przekroje płaskie jednego i tego samego stożka kołowego i pierwszy nadaje im nazwy: elipsa, parabola i hiperbola. Spuśćmy z jakiegokolwiek punktu P elipsy albo hiperboli prostopadłą PM na jej oś AB; stosunek $\overline{PM}^2 : \overline{AM}.\overline{MB}$ jest stały bez względu na położenie punktu P; w przypadku paraboli będzie stosunek $\overline{PM}^2 : AM$ stały; Apollonjusz zaczyna od dowodu tego twierdzenia w postaci zresztą nieco ogólniejszej, niż podaliśmy tu dla prostoty, i z tej jedynej podstawowej własności wysnuwa wszystkie inne własności przecięć stożkowych. Poza wiadomościami ogólnemi w I księdze jest mowa o stycznych i o ich wykreśleniu oraz o parach średnic sprzężonych. W księdze II znajdują się własności asymptot hiperboli, (t. j. linji prostych, które coraz więcej i więcej zbliżają się do ramion hyperboli, nigdy się z niemi nie spotykając) i dowiedziono, że prosta, łącząca punkt przecięcia dwu stycznych ze środkiem odpowiedniej cięciwy, przechodzi przez środek stożkowej czyli jest jej średnicą. W księdze III dowiedziono, że średnica ta jest podzielona przez te same dwa punkty, t. j. punkty przecięcia ze stycznemi i cięciwą, w stosunku harmonicznym podług wyrażenia nowoczesnego, i przedstawiono różne stosunki iloczynów ze stycznych i siecznych, następnie ogniska elipsy i hyperboli oraz twierdzenie o stałości sumy promieni ogniskowych dla punktów elipsy, odpowiednio — różnicy dla punktów hiperboli. Ogniska paraboli Apollonjusz nie znał. Księga IV traktuje o liczbie punktów, w których dwa przecięcia stożkowe mogą się przecinać. Księga V pozostawia poprzedzające daleko poza sobą; treść jej najbardziej wkracza w dziedzinę spółczesnej gieometrji; Apollonjusz rozpatruje w niej najkrótsze i najdłuższe linje proste, które można poprowadzić do obwodu przecięcia stożkowego z jakiegokolwiek punktu danego; linja taka jest prostopadła do stycznej, przeprowadzonej przez ten sam punkt obwodu, czyli jest normalna. Apollonjusz znajduje, że istnieją takie punkty, z których można poprowadzić w ogólności 4 normalne do przecięcia stożkowego, oraz takie, z których można poprowadzić tylko dwie normalne, i wyznacza punkty, odgraniczające odpowiednie części płaszczyzny; punkty te są to zwane obecnie środki krzywizny przecięcia stożkowego, a ich miejsce gieometryczne jest krzywą, zwaną obecnie rozwiniętą. Księ-



Rys. 10.

ga VI mówi o przecięciach stożkowych podobnych. Księga VII zawiera różne własności średnic sprzężonych, jak: pole trójkąta, utworzonego z pary średnic sprzężonych i cięciwy odpowiedniej, jest stałe; w elipsie suma, a w hiperboli różnica kwadratow średnic sprzężonych jest stała, i inne. Księga ta była przygotowaniem do zagadnień, które się miały znajdować w zaginionej księdze VIII. Dzieło odznacza się konsekwentną budową i jest oparte na przewodniej zasadzie wspólności własności wszystkich trzech przecięć stożkowych. Rozwlekłe i nużące wywody mogłyby odstraszyć czytelnika spółczesnego, lecz rozumowanie jest nieposzlakowane, to też dzieło to słusznie podawano za koronę gieometrji greckiej. Kunsztowny splot twierdzeń i nienaturalność dowodów, zwłaszcza w księdze V, skłania badaczów do przypuszczenia, że Apollonjusz posiadał jakąś tajemniczą metodę do wynajdywania twierdzeń, dla których potym wyszukiwał swe sztuczne dowody, i że metoda ta była zbliżona do metody naszej gieometrji analitycznej.

Oprócz tego wielkiego dzieła Apollonjusz napisał wiele innych, z których pozostało do naszych czasów tylko jedno „O przecięciach stosunkowych“, poświęcone następującemu zagadnieniu: dane są na płaszczyźnie dwie proste *Aa* i *Bb*, przechodzące przez dane punkty *A* i *B*; poprowadzić przez punkt *O* prostą *Oab*, przecinającą je w punktach *a* i *b* tak, żeby *Aa* było do *Bb* w stałym stosunku; zagadnienie to rozwiązuje Apollonjusz za pomocą przecięć stożkowych. Praca „O stycznościach“ zawierałá słynne zagadnienie o zbudowaniu koła stycznego do trzech kół danych, znane pod nazwą Apollonjusza. Inne dzieła Apollonjusza były: „O przecięciach przestrzennych“, „O pochyleniach“, „O miejscach płaskich“. Apollonjusz dał też swój sposób znalezienia dwu średnich proporcjonalnych, a zatym i podwojenia sześcianu. *)

Prace Archimedesa i Apollonjusza wkraczają w zakres gieometrji wyższej, reprezentują jednak dwa odmienne kierunki w gieometrji; dały podwalinę do dwu różnych wielkich zagadnień, które zajmowały matematyków we wszystkich epokach. Pierwsze z tych wielkich zagadnień — to kwadratura figur krzywolinijnych, z której zrodził się w następstwie rachunek nieskończonostkowy, wynaleziony przez Newtona i Leibniza; drugie z zagadnień stano-

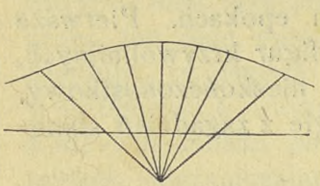
*) Dzieła Apollonjusza zostały wydane przez J. L. Heiberga w dwuch tomach (Lipsk, 1890, 1893) i przez E. Halleya (Oksford, 1706 i 1710).

wi teorja przecięć stożkowych, która doprowadziła do rozwoju metod perspektywy i poprzecznych i wogóle tak zwanej gieometrji rzutowej, zajmującej się jedynie kształtem i położeniem figur, a posługującej się tylko przecięciami linji lub powierzchni i stosunkiem odcinków prostolinijnych.

4. Dzieje późniejsze gieometrji greckiej i jej upadek.

Z końcem trzeciego wieku przed Chr. gieometrja grecka przekroczyła szczyt swego rozwoju. W ciągu trzech do czterech następnych stuleci kilku znakomitych matematyków zbogacało w dalszym ciągu gieometrję nowemi odkryciami i teorjami, jednakże nie byli to gieometrzy tej miary, co Archimedes i Apollonjusz; przez trzy jeszcze późniejsze stulecia występowali tylko komentatorzy, którzy przekazali potomności dzieła i imiona starożytnych gieometrów wreszcie nastąpiły wieki ignorancji, kiedy gieometrja drzemała u Arabów i innych ludów wschodnich, aż do odrodzenia nauk w Europie.

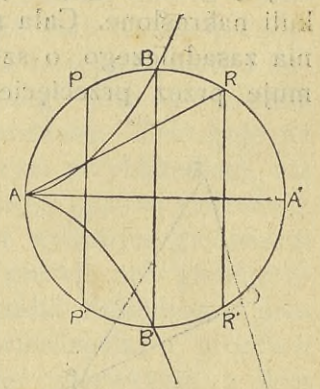
Epoka, następująca bezpośrednio po Archimedesie i Apollonjuszu, a którą obecnie mamy przedstawić, charakteryzuje się przedewszystkim rozwojem zastosowań gieometrji do astronomji i wogóle do zagadnień praktycznych, które, jak widzieliśmy, były zupełnie wykluczone z gieometrji klasycznej. Nie brakło jednak i zwolenników gieometrji czystej, którzy prowadzili dalej dzieło swych wielkich poprzedników w dziedzinie krzywych wyższego rzędu. Na drugie stulecie przed N. Chr. przypadają dwaj wybitni gieometrzy N i k o m e d e s i D i o k l e s. Pierwszy z nich odkrył krzywą, zwaną konchojdą (muszlą) Nikomedesa, drugi—cysojdę (linję bluszczową), zwaną imieniem Dioklesa. Krzywe te służyły do podziału kąta na trzy części równe i do podwojenia sześcianu, którym to zagadnieniom zawdzięczają swoje wprowadzenie do nauki.


Rys. 11.

Konchojda Nikomedesa jest miejscem gieometrycznym końców odcinków równych, odłożonych na promieniach pęku promieni od punktów przecięcia tych promieni z jakąkolwiek prostą stałą (rys. 11). Nikomedes zbudował też przyrząd do narysowania swej krzywej jednym ciągiem.

Krzywą tą posługiwał się potym Newton w swoich badaniach nad równaniami 3-go stopnia.

Cysojdę (rys. 12) określa się tak: niech AA' i BB' będą dwiema średnicami koła, prostopadłemi do siebie; prowadzimy dwie cięciwy jakiekolwiek PP' i RR' w równej odległości od BB' i równoległe; miejsce gieometryczne punktów przecięcia prostej AR z PP' jest cysojdą. Krzywa ta znajduje zastosowanie w teorji rachunku różniczkowego i całkowego. Diokles rozwiązał zagadnienie Archimedesa o podziale kuli płaszczyzną w stosunku danym, posiłkując się przecięciami stożkowemi. Trzecim wybitniejszym gieometrą, również z drugiego stulecia, jest Hypsikles, który napisał między innemi dziełko o wielościanach foremnych, dołączane dawniej do Elementów Euklidesa, jako księga XIV-ta. Wprowadził on do gieometrji podział koła na 360 stopni na modłę Babilończyków; od niego rozpowszechniło się stosowanie do rachunków w astronomji i trygonometrji wyłącznie systemu sześćdziesiątkowego.

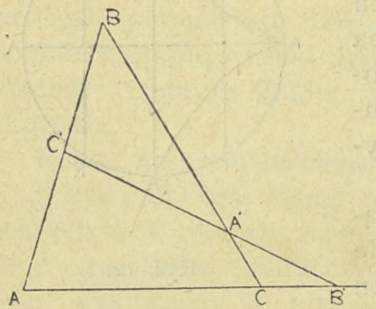


Rys. 12.

Rozkwit astronomji w Grecji pociągnął za sobą z konieczności powstanie trygonometrji, niezbędnej do obliczeń astronomicznych, i gieometrji sferycznej.

Za twórcę trygonometrji jest uważany Hipparch, największy z astronomów greckich, urodzony około r. 160 przed Nar. Chr. Obliczył on pierwszą tablicę cięciw, zawierającą długości cięciw koła, odpowiadających danym kątom środkowym, która, praktycznie biorąc, jest tablicą wstaw (sinusów) naturalnych; umiał też obliczać niektóre trójkąty kuliste. Hipparch położył jeszcze inne zasługi, wprowadził on oznaczanie położenia miejsca na ziemi za pomocą szerokości i długości gieograficznej. W podobny sposób wyznaczał położenie gwiazd na niebie; był to pierwszy przykład stosowania w nauce spółrzędnych, które w czasach nowożytnych nabrały pierwszorzędnego znaczenia w gieometrji. Znając spółrzędne kuliste, można sporządzić model kuli niebieskiej albo kuli ziemskiej na sztucznej kuli. Oprócz tego sposobu odwzorowywania kuli na kuli, Hipparch stworzył metodę odwzorowywania kuli na płaszczyźnie. Wyobraźmy sobie na kuli równik i jeden z biegunów, z bieguna poprowadźmy proste do punktów danych na półkuli przeciwnej; punkty przecięcia tych prostych z płaszczyzną równika, czyli rzuty tych punktów, utworzą obraz półkuli na płaszczyźnie równika. Ten interesujący i ważny w gieometrji i kartografji sposób odwzorowywania kuli na płaszczyźnie, stosowany przez Hipparcha, nazywa się rzutem stereograficznym.

Dalszy swój rozwój zawdzięcza gieometrja kulista Menelausowi, matematykowi z pierwszego wieku nowej ery; napisał on dzieło pod tytułem „Sferyka", w którym podaje różne własności trójkąta kulistego, t. j. figury, utworzonej przez koła wielkie na kuli nakreślone. Cała sferyka Menelausa wywodzi się z twierdzenia zasadniczego o sześciu odcinkach łukowych, które się otrzymuje przez przecięcie trójkąta kulistego łukiem koła wielkiego.



Rys. 13.

Podobne twierdzenie podał Menelaus i dla trójkąta płaskiego: jeżeli w trójkącie poprowadzimy poprzeczną, to odetnie ona na bokach trójkąta sześć odcinków, z których iloczyn trzech odcinków sobie nieprzyległych jest równy iloczynowi trzech odcinków pozostałych," czyli (rys. 13)

$$AB' \times BC' \times CA' = A'B \times B'C \times C'A.$$

Jest to znane „twierdzenie Menelausa" czyli „twierdzenie o sześciu wielkościach". Zarówno prace Hipparcha jak i Menelausa zaginęły, zostały jednak spożytkowane przez sławnego astronoma Klaudjusza Ptolemeusza z Aleksandrji, zmarłego w roku 168 n. ery, który doprowadził dzieło tych swoich poprzedników do końca. Stworzył on do użytku astronomicznego trygonometrję w postaci tak skończonej, że przez cały tysiąc lat nie została zastąpiona przez lepszą i nie mniej, a z lepszym wynikiem, opanowała naukę, niż znana pod nazwą układu Ptolemeusza nauka o ruchach ciał niebieskich. Obadwa dzieła, zarówno astronomiczne, jak trygonometryczne, są zawarte w 13 księgach „Wielkiego Zestawienia", znanego powszechnie pod zepsutą nazwą arabską „Almagest". Jest tam obliczona tablica cięciw kątów od $\frac{1}{2}^0$ do 180^0 co każde $\frac{1}{2}^0$; Ptolemeusz dzieli średnicę koła na 120 równych części, w których wyraża długości cięciw, posiłkując się ułamkami sześćdziesiątkowemi o mianownikach 60 i 60. 60, nazywanych w tłumaczeniu łacińskim „partes minutae primae“ i „partes minutae secundae“, skąd weszły w użycie minuty i sekundy. Przedewszystkim oblicza Ptolemeusz w sposób nader dowcipny cięciwę dla $\frac{1}{2}^{0}$, następnie łatwe do znalezienia, jako boki wielokątów foremnych, cięciwy dla 120^{0}, 90^{0}, 72^{0}, 60^{0} i 30^{0}; wreszcie z tych danych, za pomocą twierdzenia, znanego pod jego imieniem: „w czworoboku wpisanym w koło iloczyn przekątnych jest równy sumie iloczynów boków przeciwległych“, oblicza pozostałe cięciwy. Wiadomości z trygonometrji płaskiej nie są wyłożone w Almageście systematycznie, lecz tylko jako środek pomocniczy do obliczeń, potrzebnych w sferyce; za to trygonometrja kulista w zakresie trójkąta kulistego prostokątnego jest opracowana wyczerpująco na podstawie twierdzenia Menelausa. Zasługuje na zaznaczenie, że Ptolemeusz używał π z lepszym przybliżeniem, niż Archimedes, a mianowicie, $\pi=3.8.30$, t. j. $\pi=3\frac{8}{60}\,\frac{30}{3600}=3{,}141666....$

Z Almagestu widać, że Ptolemeusz był wybitnym gieometrą; napisał pomiędzy innemi pracami dziełko, poświęcone gieometrji czystej, w którym proponował usunąć postulat Euklidesa o prostopadłej i pochyłej i starał się dowieść twierdzenia o prostych równoległych bez tego postulatu. Był więc pierwszym z licznego szeregu późniejszych matematyków, którzy nie uznawali oczywistości wzmiankowanego postulatu i których prace zostały uwieńczone w XIX wieku nowemi odkryciami.

Jeśli astronomja przyczyniła się do rozwoju gieometrji i do powstania nowych jej gałęzi w tej epoce, to nie można tego powiedzieć o innych naukach stosowanych: ziemiomiernictwie i mechanice praktycznej. Dziedziny te zostały oparte na podstawie naukowej przez słynnego ze swych pomysłów mechanicznych matematyka Herona z Aleksandrji, który żył według jednych danych w pierwszym wieku przed Nar. Chr., a według innych dopiero w drugim wieku naszej ery.

Pozostały po nim liczne rozprawy gieometryczne, które prawdopodobnie stanowiły pierwotnie jedno większe dzieło o miernictwie, mające na celu zastąpienie używanych w praktyce, a pochodzących jeszcze z Egiptu, reguł niedokładnych przez ściślejsze, a jednak dogodne do zastosowania praktycznego. W rękach późniejszych przepisywaczy dzieło to rozpadło się dopiero na poszczególne traktaty; przedmiotem ich jest wyznaczanie pól figur, znajdywanie objętości niektórych brył z zastosowaniem do teatrów, kąpieli, sal i t. d., wymierzanie wysokości przedmiotów niedostępnych. W dziełku, zatytułowanym „Dioptra“ i poświęconym opisowi przyrządu, z którego z czasem wytworzył się obecny teodolit, wyprowadza Heron znany pod jego imieniem wzór na pole trójkąta:

$$\triangle = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

gdzie p jest połowa obwodu, zaś a, b, c boki trójkąta. Szukając, w jaki sposób potroić siłę rzutu katapulty, znalazł Heron, że zadanie to zależy od znalezienia dwu średnich proporcjonalnych, do którego, jak wiemy, sprowadza się podwojenie sześcianu, i podaje swój sposób rozwiązania tego zagadnienia. Dzieła Herona służyły godnie przez wiele wieków do nauki gieodezji i miernictwa.

W ogólnym zastoju, który nastąpił w gieometrji greckiej z początkiem naszej ery, nawet te nowe kierunki, które mogłyby się rozwinąć z nauk stosowanych, nie znalazły pracowników, którzyby je dalej uprawiali. Tylko jeszcze około końca trzeciego stulecia naszej ery spotykamy się z matematykiem niepospolitego znaczenia, jakkolwiek nie tej miary, co wielcy gieometrzy z epoki rozkwitu—P a p p u s e m z Aleksandrji. Napisał on kilka dzieł, z których doszło do nas tylko jedno i to częściowo. W dziele tym, zatytułowanym „Zbiór“, Pappus zamierzył przedstawić treść pism matematycznych, które w owych czasach cieszyły się uznaniem; zamieścił tam też i własne odkrycia, przeważnie w postaci luźnych twierdzeń. Pierwsza księga zaginiona miała zawierać arytmetykę; w czterech dalszych księgach znajduje się gieometrja bez przecięć stożkowych, w szóstej astronomja z trygonometrją i optyką, w siódmej teorja przecięć stożkowych, wreszcie w ósmej mechanika. „Zbiór“ Pappusa ma ogromne znaczenie historyczne, jako wierne przedstawienie prac gieometrów greckich, skądinąd mało znanych. Przytaczamy ważniejsze nowe rezultaty gieometryczne, znajdujące się w pracy Pappusa. Oprócz pola, wyznaczonego przez spiralną Archimedesa, obliczono powierzchnię, ograniczoną linją spiralną, nakreśloną w sposób odpowiedni na kuli; za podstawę wzięto przytym sposób Archimedesa wyznaczenia powierzchni kuli. Rzut linji krzywej, otrzymanej przez przecięcie powierzchni śrubowej płaszczyzną, poprowadzoną przez jedną z tworzących, na płaszczyznę podstawy jest kwadratycą. Pappus przypisuje sobie ważne twierdzenie, że objętość bryły, powstałej z obrotu jakiejkolwiek figury około osi, jest równa iloczynowi pola figury przez długość łuku, opisanego przez jej środek ciężkości; twierdzenie to jest obecnie znane pod nazwą Guldina, przez którego zostało na nowo odkryte w XVII stuleciu. Wspomnimy wreszcie o tak zwanym „zagadnieniu Pappusa“: na płaszczyźnie mamy kilka prostych, znaleźć miejsce gieometryczne takiego punktu, że jeżeli z niego poprowadzimy prostopadłe (e) lub ogólniej proste pod danemi kątami do owych prostych, to iloczyn pewnych z nich ma być w stosunku stałym do iloczynu pozostałych, np. dla czterech prostych

$$\frac{e_1 e_2}{e_3 e_4} = k;$$

miejscami dla trzech i czterech prostych są przecięcia stożkowe. Te dwa przypadki zostały rozwiązane jeszcze w starożytności. Pappus uogólnił zagadnienie, nie podaje jednak żadnej własności krzywej, przedstawiającej to miejsce, któraby wykraczała poza jego określenie; krzywa ta stała się punktem wyjścia dla Descartesa w gieometrji analitycznej.

Wszystkie ważniejsze rezultaty, przedstawione w „Zbiorze“ Pappusa, zawdzięczają swe powstanie jeszcze wielkim gieometrom greckim albo też epoce bezpośrednio po nich następującej. Przez 500 lat od czasów Apollonjusza do Pappusa gieometrja nie zbogaciła się o żadne donioślejsze odkrycie; jednocześnie poziom wiedzy i rozumienie dawnych dzieł uległy obniżeniu, o czym świadczą zebrane przez Pappusa komentarze i twierdzenia pomocnicze, które wyjaśniają wiele rzeczy podrzędnych, a nic nie mówią o znaczeniu całości.

Przyczyny, które sprowadziły zanik gieometrji greckiej, są po części natury zewnętrznej: mniejsza dbałość ze strony ostatnich Ptolemeuszów o dobro uniwersytetu Aleksandryjskiego, opanowanie Aleksandrji przez Rzymian w połowie ostatniego stulecia przed Chr., pożary w bibljotece Aleksandryjskiej, spory religijne. Ale przedewszystkim szukać należy tych przyczyn w samym charakterze starożytnych pism gieometrycznych; z obawy przed naruszeniem ciągłości logicznej usuwali ich twórcy wszystko, co mogłoby je uprzystępnić, dać pogląd ogólny na całość lub wyjaśnić cel oddzielnych rozważań; dzięki temu pismom swym nadali piętno doskonałego wykończenia, ale to wykończenie właśnie zniechęcało do dalszych prac samodzielnych, które przynajmniej z początku musiałyby być mniej wolne od zarzutów.

Od Greków gieometrja przeszła do innych narodów, lecz nigdzie nie stanęła na tym wysokim poziomie, do którego się wzniosła w kraju macierzystym.

Rzymianie, zdobywcy i prawodawcy świata, nie mieli skłonności do badań ścisłych; czytali oni i tłumaczyli niektóre dzieła greckie, nie dodali jednak żadnego nowego odkrycia; znaczenie gieometrów rzymskich, a raczej mierników, tak zwanych agrimensores, polega na tym, że przez wiele stuleci byli jedynymi nauczycielami ludów północnych.

Indusi, posiadający szczególny dar do arytmetyki i algiebry, nie posunęli naprzód gieometrji; tylko w trygonometrji zrobili poważny krok naprzód, wprowadzając zamiast cięciw, których używał Ptolemeusz, połowy cięciw w zależności od kątów przepołowionych, t. j. właściwe wstawy (sinusy).

---

5. Gieometrja w wiekach średnich i epoce odrodzenia.

Bezpośrednimi spadkobiercami starożytnej gieometrji greckiej byli Grecy bizantyjscy. Odziedziczone skarby stały się jednakże dla samych Greków bezużyteczne. Dzieła wielkich gieometrów greckich leżały zapomniane i zagrzebane, nie przynosząc żadnego pożytku. Jednakże na schyłku średniowiecza udało się je odszukać, i wówczas zaczęły one służyć dla dobra kultury europejskiej. To się stało jednak dopiero wtedy, gdy niektóre z tych dzieł, a co ważniejsza, zainteresowanie się matematyką grecką i odpowiednie przygotowanie do jej zrozumienia przyszło do Europy Zachodniej na innej drodze, za pośrednictwem Arabów.

Podbicie w VII wieku Egiptu przez Arabów zaznaczyło się wielkim ciosem, zadanym nauce greckiej: z rozkazu kalifa Omara został doszczętnie spalony uniwersytet Aleksandryjski wraz z ocalałemi z poprzednich pożarów resztkami bibljoteki. Ale w jakie dwieście lat potym Arabowie przekonali się o swej ignorancji, zrozumieli potrzebę wiedzy i sami przedsięwzięli odbudowanie nauki greckiej, którą przedtym ich fanatyzm religijny starał się zniszczyć. Przetłumaczyli oni na swój język Herona, Ptolemeusza, Euklidesa, Archimedesa i Apollonjusza; a ponieważ nie poprzestali na rzeczach łatwiejszych, lecz stopniowo przyswoili sobie i najtrudniejsze, więc dowodzi to i samodzielnych studjów z ich strony nad matematyką, bez których zrozumienie i ocenienie dzieł wielkich gieometrów greckich nie byłoby możliwe.

Pomimo to gieometrja pozostała w ich rękach niezmienioną: prace ich ograniczały się do podziwiania i komentowania dzieł greckich, jak gdyby one były najwyższym i najszczytniejszym wyrazem tej nauki. Tylko trygonometrja zrobiła u Arabów wielki krok naprzód. Wprowadzili oni, podobnie jak Indusi, sinusy zamiast cięciw; a sam ten termin jest tłumaczeniem łacińskim pewnego wyrazu arabskiego, który powstał z przekręcenia nazwy indyjskiej dla wstawy. Arabowie nie poprzestali jednak na tablicach wstaw; A b u l W a f a, wielki astronom i matematyk z drugiej połowy X wieku, obliczył tablicę stycznych. Arabskie tablice wstaw były obliczone co 10 minut kąta z przybliżeniem do $^1/_{60}{}^4$, a tablice stycznych Abula Wafy nawet z przybliżeniem do $^1/_{60}{}^5$.

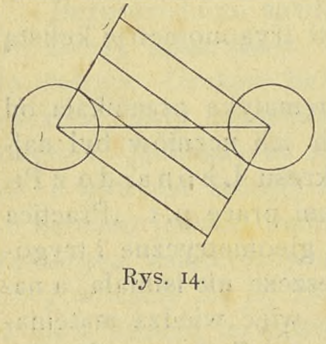
A l b a t t a n i (X-ty wiek) podał zasadniczy wzór dla trójkąta kulistego jakiegokolwiek:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

G e b e r w XI-tym wieku również zbogacił trygonometrję kulistą nowemi wzorami.

W ciągu wieków 12-go do 15-go matematyka przenikała od Arabów do Europy. Jednym z pierwszych ich uczniów był największy z matematyków europejskich tego okresu L e o n a r d o z Pizy (1180—1250), który napisał między innemi pracę p. t. „Practica geometriae“, zawierającą różne zagadnienia gieometryczne i trygonometryczne. Ponieważ sztuka drukarska jeszcze nie istniała, a nauczanie stało na bardzo nizkim poziomie, więc wiedza matematyczna rozchodziła się tylko w słabym zakresie. Z gieometrji ograniczano się do powierzchownego zaznajomienia się z niektóremi księgami Elementów Euklidesa, o których miano tak niedokładne wiadomości, że niektórzy uważali Elementa za oryginalne dzieło arabskie. W epoce odrodzenia ożywiła się matematyka. Śród wielu wybitnych pisarzów na początku tego okresu najbardziej się wyróżnia matematyk niemiecki J o h a n n e s M ü l l e r, znany pod imieniem R e g i o m o n t a n u s (r. 1436—1476). Jest on twórcą trygonometrji spółczesnej; pierwszy zaczął traktować trygonometrję jako samodzielną gałąź matematyki, a nie jako narzędzie pomocnicze astronomji. Książka jego ma tytuł: „De triangulis omnimodis libri quinque“; podczas gdy poprzedni pisarze zajmowali się głównie trójkątami prostokątnemi, z których dają się utworzyć i inne trójkąty, to Regiomontanus rozpatruje zarówno na płaszczyźnie, jak i na kuli, trójkąty jakiekolwiek. Obliczył on pierwsze tablice wstaw w systemie dziesiątkowym; obejmują one kąty co 1 minutę, a wstawy są wyrażone w 10^7 częściach promienia, tak że dokładność ich jest taka sama, jak obecnych tablic siedmiocyfrowych, a różnią się tylko zewnętrznie, gdyż ułamków dziesiętnych wówczas jeszcze nie znano.

Koniec wieku XV-go i początek XVI-go odznaczają się wielkim rozwojem algiebry, wobec którego gieometrja uległa zaniedbaniu, jakkolwiek nie brak było matematyków, którzy i jej poświęcali należną uwagę. Między innemi uprawiano z zamiłowaniem zagadnienia konstrukcyjne, oparte na zastosowaniu jednego otwarcia cyrkla. Dla przykładu przytoczymy jedno z zagadnień, które podaje Tartaglia w swoim „General trattato di numeri et misure“: podzielić odcinek na dowolną daną liczbę części równych. Na końcach odcinka (rys. 14) opisujemy pewnym odstępem cyrkla koła i odmierzamy na nich od punktu przecięcia z odcinkiem po jednym łuku, zawierającym 60°, na jednym kole do góry, na drugim na dół; środki kół łączymy teraz z końcami tych łuków promieniami, które będą równoległe; przedłużamy je n razy (naprz. 3 razy); proste, łączące punkty odpowiednie na tych równoległych, przecinają odcinek dany w punktach szukanych.



Rys. 14.

Pierwsze wybitniejsze postępy w gieometrji od czasu wielkich matematyków greckich występują w pracach francuskiego matematyka Viète'a (r. 1540 — 1603). Poczyniwszy ważne udoskonalenia w algiebrze, wsławił się on wprowadzeniem jej do nauki o przestrzeni. W dziele zatytułowanym: „In artem analyticam isagoge“ podaje Viète konstrukcję gieometryczną równań 2-go i 3-go stopnia oraz różne zastosowania algiebry do gieometrji, czyniąc pierwszy krok na drodze ściślejszego zespolenia pomiędzy algiebrą i gieometrją, które z czasem doprowadziło do wielkiego odkrycia Descartesa i stało się pierwszorzędnym i powszechnym czynnikiem w matematyce.

Dokonał też Viète ważnego odkrycia w trygonometrji kulistej, polegającego na rozpatrywaniu obok trójkąta kulistego danego innego trójkąta, którego kąty w pewien sposób odpowiadają bokom, a boki kątom trójkąta danego. Ten szczęśliwy pomysł Viète'a okazał się bardzo płodnym; późniejsi matematycy, zwłaszcza Snell (XVII wiek), udoskonalili go przez badanie t. zw. trójkąta biegunowego lub dopełniającego, jako zasadę ogólną bardzo pożyteczną do odkrywania nowych własności trójkąta kulistego danego; w wieku XIX-tym zaś zrodziła się stąd w zastosowaniu już do całej gieometrji wielka „zasada dwoistości", według której wszelka własność przestrzeni przejawia się pod dwu postaciami w ten sposób, że punktom i płaszczyznom jednej figury odpowiadają płaszczyzny i punkty innej figury, zależnej od pierwszej.

Viète był znawcą starożytnej gieometrji greckiej i odtworzył zaginiony traktat Apollonjusza „O stycznościach", w którym pierwszy rozwiązał zagadnienie o kole stycznym do trzech kół danych. Spółczesny mu sławny matematyk Adrianus Romanus rozwiązał to zagadnienie, na jego propozycję, stosując dwie hiperbole, co się sprzeciwiało wymaganiom dobrej metody, gdyż do rozwiązania wystarcza linja prosta. Zagadnieniem tym zajmowało się potym jeszcze wielu największych matematyków, jak Fermat, Newton, Euler. Nowe metody gieometryczne, stanowiące plon już XIX-go stulecia, dają jego rozwiązanie bardzo proste i łatwe, i dziś zagadnienie to ma jedynie znaczenie historyczne ze względu na świetne imiona, które są z nim związane.

Wiek XVI-ty można scharakteryzować jako okres, w którym matematycy europejscy wyrabiali swe siły, zaznajamiając się z wielką spuścizną gieometrów greckich. Dopiero w następnym stuleciu matematycy, czerpiąc ciągle z tego samego źródła, zaczęli otwierać nowe widnokręgi dzięki nadzwyczajnym odkryciom, rozpoczynającym erę matematyki nowożytnej.

U w a g a. Wiadomości o gieometrji w Polsce znajdzie czytelnik w przytoczonych niżej dziełach S. Dicksteina i I. Badowskiego.

Przy pisaniu powyższego zarysu posiłkowaliśmy się głównie następującemi dziełami:

a) w językach obcych:

H. G. Z e u t h e n, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Kopenhaga, 1896;

M. C a n t o r, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Lipsk, 1894.

M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. Paryż, 1875;

W. W. Rouse Ball, A short account of the history of Mathematics. Londyn, 1908;

b) w języku polskim:

S. Dickstein, Gieometrja elementarna. Warszawa, 1889, odbitka z Encyklopedji Wychowawczej;

Gino Loria, Przeszłość i stan obecny najważniejszyoh teorji gieometrycznych. Warszawa, 1889. Przekład S. Dicksteina.

I. Badowski, Gieometrja elementarna. Warszawa, 1894.

III.

Rozwój matematyki od początku w. XVII.

OPRACOWAŁ

Stefan Kwietniewski.

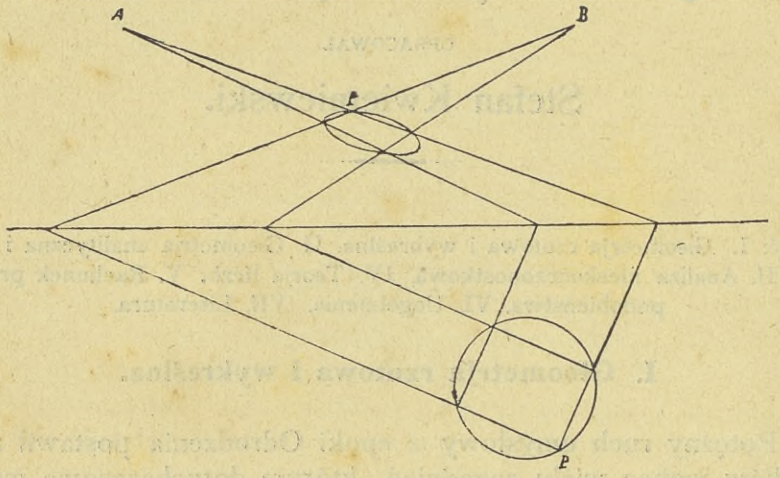
Treść: I. Gieometrja rzutowa i wykreślna. II. Gieometrja analityczna i algiebra. III. Analiza nieskończonostkowa. IV. Teorja liczb. V. Rachunek prawdopodobieństwa. VI. Uogólnienia. VII. Literatura.

I. Gieometrja rzutowa i wykreślna.

Potężny ruch umysłowy z epoki Odrodzenia postawił matematyków wobec wielu zagadnień, którym dotychczasowe metody sprostać nie mogły. Już sam jeden układ heljocentryczny wszechświata, obmyślony przez Kopernika, dostarcza wielkiego szeregu bardzo ponętnych, jasno określonych zagadnień matematycznych; jednakże wiedza ówczesna okazuje się niewystarczającą do ich rozwiązania; należało obmyśleć nowe metody badania. Jan Kepler (1571—1630), który podobnie jak Kopernik wychodził z przypuszczeń, że świat jest zbudowany podług praw jak najprostszych, doszedł do wniosku, że drogami ciał niebieskich są przecięcia stożkowe, co spowodowało ogólne zainteresowanie się matematyków temi linjami krzywemi.

Od czasów Apollonjusza nauka o przecięciach stożkowych bardzo mało posunęła się naprzód; to też Kepler, wyprowadzając nowe twierdzenia, za pomocą których badał drogi planet, posiłkował się przeważnie trudną i uciążliwą metodą Apollonjusza. Wkrótce jednak zaczęto stosować dwie odrębne metody, które okazały się bardzo korzystne w tych badaniach i w krótkim czasie stały się wprost niezbędne w różnych gałęziach matematyki. Jedną z nich — metodą spółrzędnych — zajmiemy się w innym rozdziale, tutaj pomówimy o metodzie rzutu środkowego, która powstała z czysto praktycznej nauki perspektywy i której następstwem stała się t. zw. dawniej gieometrja nowa, znana dziś pod nazwą gieometrji rzutowej lub rzadziej—gieometrji syntetycznej.

O wysokim stanie nauki perspektywy w owych czasach świadczy książka, wydana w r. 1600 pod tytułem „Perspectiva“,

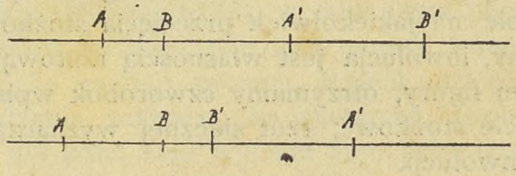


Rys. 1.

której autorem był G u i d o U b a l d o (1545 — 1607). Znajdujemy tu między innemi dokładnie opisany sposób odwzorowania jakiejkolwiek figury płaskiej na inną płaszczyznę. Za punkt wyjścia służy tutaj odwzorowanie różnych układów linji równoległych jednej płaszczyzny za pomocą pęków promieni drugiej płaszczyzny, przyczym wierzchołki wszystkich pęków leżą na prostej równoległej do prostej przecięcia obu płaszczyzn. Jeżeli płaszczyznę figury pokryjemy siecią, utworzoną przez dwa układy linji równoległych, to na drugiej płaszczyźnie obraz tej sieci stanowić będą dwa pęki promieni. Każda prosta spotyka się ze swoim obrazem na linji przecięcia obu płaszczyzn. Ażeby otrzymać obraz punktu P (rys. 1), prowadzimy przez P proste należące do obu układów równoległych; odpowiadające im proste w drugiej płaszczyźnie przecinają się w punkcie P', który jest szukanym obrazem punktu P.

Ubaldo zaznacza, że konstrukcję można wykonać, nie znając położenia środka perspektywy, jeżeli tylko wiadome jest położenie obu wierzchołków pęków promieni A i B, odpowiadających dwu danym układom linji równoległych. Mamy tu więc już konstrukcję dwu figur w zależności kolineacyjnej, określonej przez oś kolineacji i przez dwa punkty jednego układu, odpowiadające dwu nieskończenie odległym punktom drugiego układu. W ten sposób jako obraz koła powstaje elipsa.

Sposobu wyrażania się, jakiego użyłem w przedostatnim zdaniu, Ubaldo jeszcze nie znał. Pojęcia elementów nieskończenie oddalonych i t. p. wprowadził Girard Desargues (1593—1662), którego „Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan“ (1639) stanowi fundament nowej gieometrji. Metoda rzutu środkowego doprowadza Desargues'a do wniosku, że wszystkie nieskończenie odległe punkty płaszczy-



Rys. 2.

zny leżą na linji prostej; że walec jest stożkiem, mającym wierzchołek w nieskończoności; że dwie parabole o wspólnej osi są względem siebie styczne w nieskończoności i t. d. Dzięki tym nowym zupełnie pojęciom Desargues z nadzwyczajną sprawnością wyprowadza cały szereg twierdzeń. Tak np. z jednego tylko faktu, że środek koła jest biegunem linji prostej nieskończenie oddalonej, można wyprowadzić różne własności rzutów środkowych koła, czyli przecięć stożkowych.

Desargues rozpatruje własności rzutowe figur, to jest takie zależności między elementami figury, że odwzorowania tych elementów za pomocą rzutu środkowego są związane takiemiż samemi zależnościami. Do takich własności należy i inwolucja, o której pierwsze wiadomości znajdują się już u Pappusa, ale której całkowitą teorję dał dopiero Desargues. Trzy pary punktów na prostej AA', BB', CC' tworzą inwolucję, jeżeli jest na tej prostej taki punkt O, że

$$OA.\ OA' = OB.\ OB' = OC.\ OC'.$$

Punktowi O odpowiada punkt nieskończenie oddalony. Desargues rozróżnia dwa rodzaje inwolucji: w jednym każda para przedziela punkty każdej innej pary, w drugim pary się nie przedzielają (rys. 2),—i dowodzi, że w tym drugim przypadku inwolucja ma dwa punkty podwójne, względem których każda inna para inwolucji leży harmonijnie. Że wreszcie inwolucja jest własnością rzutową, czyli, że rzut trzech par punktów inwolucji stanowi także trzy pary punktów inwolucji, dowodzi Desargues za pomocą twierdzenia Menelausa o odcinkach boków trójkąta, wyznaczonych przez sieczną.

Twierdzeniem Desargues'a nazywa się zwykle twierdzenie następujące: jeżeli w koło wpiszemy czworobok i poprowadzimy sieczną, to punkty, wyznaczone przez sieczną na bokach czworoboku i na kole, tworzą inwolucję. Dowodzenie opiera się na wyżej wzmiankowanym twierdzeniu Menelausa i na twierdzeniu o potędze punktu względem koła. Metoda Desargues'a pozwala uogólnić to twierdzenie na jakiekolwiek przecięcia stożkowe, gdyż, jak już zauważyliśmy, inwolucja jest własnością rzutową; biorąc więc rzut wymienionej figury, otrzymamy czworobok wpisany w jakiekolwiek przecięcie stożkowe; rzut siecznej wyznacza znowu trzy pary punktów inwolucji.

W innych pracach Desargues'a spotykamy ważne twierdzenia o zależności figur, którą teraz nazywamy kolineacją. Tak nazywa się zależność, przy której każdemu punktowi i każdej prostej jednej figury odpowiada pewien punkt i pewna prosta drugiej, przyczym proste, łączące dwa punkty odpowiednie, przechodzą wszystkie przez pewien punkt stały, i każde dwie odpowiadające sobie proste przecinają się na osi stałej. Desargues dowodzi, że dwa trójkąty, mające jedną z tych własności, mają także i drugą; oraz, że czworokąt zupełny (t. j. figura złożona z sześciu prostych, łączących każdą parę z czterech punktów danych) jest w kolineacji z drugim czworokątem zupełnym, jeżeli punkty przecięcia każdego z pięciu boków pierwszego z jednym z boków drugiego czworokąta leżą wszystkie na jednej prostej. Te twierdzenia są oczywiste, jeżeli figury dane nie leżą na jednej płaszczyźnie; osią kolineacji jest wtedy linja przecięcia obu płaszczyzn. Jeżeli obie figury leżą na tej samej płaszczyźnie, wtedy dowodzenie opiera się na twierdzeniu Menelausa.

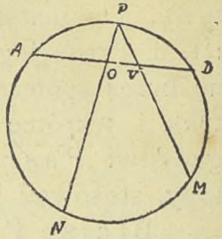
Wyszczególnione tu przykłady charakteryzują dostatecznie twórczość Desargues'a, który zresztą był w równej mierze technikiem jak matematykiem, i, opierając się w rozważaniach teoretycznych na praktycznym doświadczeniu, umiał też odwrotnie zastosować wyniki teoretyczne do celów praktycznych: do perspektywy, rzeźbiarstwa, budowy zegarów słonecznych (kompasów) i t. d. Prace jego nie były jednak należycie zrozumiane i ocenione przez spółczesnych; przeciwnie, spotkały się one z ostrą krytyką i wkrótce uległy zapomnieniu. Jedynie spółcześni Desargues'owi Pascal i Fermat, poznawszy doniosłość nowej metody, stosowali ją w niektórych swoich pracach.

Blaise Pascal (1623—1662), mając zaledwie 16 lat wieku, wydaje niewielką co do objętości rozprawę zatytułowaną „Essai sur les coniques", w której w znakomity sposób podąża śladami Desargues'a. W pracy tej jest następujące twierdzenie, znane pod nazwą twierdzenia Pascala: jeżeli sześć jakichkolwiek punktów przecięcia stożkowego uczynić w dowolnym porządku wierzchołkami sześciokąta, to wszystkie trzy punkty przecięcia boków przeciwległych leżą na linji prostej. Pascal, nie podając szczegółowego dowodzenia, zaznacza, że wystarczy dowieść prawdziwości twierdzenia dla koła; stąd wypada jego prawdziwość i dla rzutów koła, czyli przecięć stożkowych. Również bez dowodzenia mówi Pascal, że stąd wyprowadzić można wszystkie twierdzenia o średnicach, stycznych i t. d., jak również sposób wykreślania przecięcia stożkowego przechodzącego przez pięć punktów danych lub też określonego za pomocą innych warunków.

W mniejszym stopniu zajmował się tym przedmiotem Piotr Fermat (1601—1665). Na uwagę zasługuje tutaj następujące twierdzenie, z którego łatwo wyprowadzić twierdzenie Desargues'a: Linje proste łączące dwa punkty stałe koła M i N z jego punktem ruchomym P (rys. 3) przecinają cięciwę AD równoległą do MN w ten sposób, że wielkość $\frac{AO \, . \, DV}{AV \, . \, DO}$ jest stała dla każdego punktu P. Nadając punktowi P dwa różne położenia i biorąc jakikolwiek rzut środkowy figury, otrzymamy stąd twierdzenie Desarguesa. To twierdzenie Fermata jest jeszcze ciekawe z tego względu, że wymieniona w nim wielkość $\frac{AO \, . \, DV}{AV \, . \, DO}$ jest tym, co dzisiaj nazywamy stosunkiem podwójnego podziału punktów O, V, względem

A, *D*, i co w dalszym rozwoju gieometrji tak ważną odgrywa rolę.

Metoda gieometrji rzutowej, odsunięta początkowo na plan dalszy wobec silnego rozwoju Gieometrji Analitycznej, została na nowo podjętą i udoskonaloną przez Monge'a. Gaspard Monge (1746 — 1818) wydał w r. 1795 dzieło p. t. „Leçons de géométrie descriptive", w którym wprowadza do gieometrji czystej pojęcia elementów urojonych. To daje mu możność wypowiedzenia szeregu nowych twierdzeń, tyczących się powierzchni oraz linji krzywych. Obok rzutu środkowego Monge używa również rzutów prostopadłych w tej postaci, w jakiej one są dziś w powszechnym użyciu.



Rys. 3.

Gieometrja wykreślna, której celem jest to, co się dzieje w przestrzeni, przedstawić na płaszczyźnie w sposób zupełnie dokładny i jednocześnie poglądowy, ułatwiła niezmiernie badania figur stereometrycznych i wykryła szereg zależności pomiędzy bryłami i figurami płaskiemi.

Początków gieometrji wykreślnej nie należy poszukiwać w dziełach naukowych, ale bądź w zabytkach architektury, bądź też w zachowanych dotychczas planach budowli starożytnych. Rzut poziomy i pionowy używany był oddawna w Egipcie*). W „Description de l'Egypte" (Paryż 1809—13) zamieszczono kilka reprodukcji planów, pochodzących z pierwszego wieku przed Narodzeniem Chrystusa; przypuszczać jednak należy, że metoda rzutów używana była już znacznie dawniej. Wielkie świątynie starożytne były budowane z kamieni uprzednio dokładnie ociosanych, co nie byłoby możliwe bez szczegółowych planów.

Pierwsze dzieło, w którym rzuty równoległe zostały opracowane teoretycznie, napisał Frézier (1682—1773) p. t. „La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, ou traité de stereotomie" (1738—39).

Frézier rozpatruje rzuty na dwie płaszczyzny krzywych linji i powierzchni, jak walca, stożka, kuli, a także niektórych powierzchni skośnych. Wyznacza on linje przecięcia dwu powierzchni za pomocą układu płaszczyzn równoległych. Każda z tych płaszczyzn

---

*) Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie.

przecina obie powierzchnie wzdłuż pewnych linji, których punkty przecięcia są punktami linji szukanej.

Gaspard Monge uczynił z gieometrji wykreślnej naukę samodzielną i nadał jej postać zupełnie nowożytną. Jego „Leçons de géométrie descriptive“ (1795) zawierają liczne udoskonalenia dawniejszych metod oraz wielką ilość nowych zagadnień. Spotykamy tu po raz pierwszy oś rzutów i przedstawienie płaszczyzny za pomocą dwu śladów, co prowadzi do bardzo prostego sposobu wyznaczania prostopadłej do płaszczyzny.

Monge znajduje odległości pomiędzy punktami, przecięcia i kąty pomiędzy prostemi i płaszczyznami, jak również płaszczyzny styczne do powierzchni krzywych, linje przecięcia dwu powierzchni; wykreśla rzuty brył, zbudowanych podług danych warunków, i t. d. Rozpatrywał on również powierzchnie ze strony teoretycznej, tak np. linje krzywizny były po raz pierwszy badane przez Monge'a.

Jeżeli wiadomości o rzutach prostopadłych poszukiwać należało w zabytkach budownictwa, to o stanie perspektywy w odległych czasach można nabrać pojęcia przez badanie zabytków malarstwa i sztuki dekoracyjnej. Za miarodajną należy tu przyjąć znajomość punktu zbieżności. W zabytkach sztuki egipskiej takiej znajomości dopatrzeć się niepodobna; lepiej pod tym względem przedstawia się malarstwo rzymskie; na niektórych malowidłach pompejańskich można wykryć linje poziomu, gdyż odwzorowania prostych poziomych wznoszą się lub opadają, zależnie od tego, czy są one położone poniżej czy powyżej linji poziomu. Spotykają się tu również odwzorowania kół pod postacią zbliżoną do elipsy. Brak jednak jeszcze konsekwentnie przeprowadzonej zasady, mamy tu jedynie do czynienia z wynikami bezpośredniej obserwacji.

Witruwjusz, budowniczy rzymski, który żył w pierwszym wieku naszej ery, wspomina w swojej „Architekturze“ o scenografji, która polegała na odwzorowywaniu budynków na płaszczyźnie na użytek sceny, i która znaną już była za czasów Aeschylosa (525—456 przed Chr.) Z niezbyt jasnego opisu domyślać się można, że punkt zbieżności w zasadzie już znano.

Wieki średnie nic nowego w tym względzie nie przyniosły; w malarstwie przeważał rzut równoległy. Dopiero w wieku XV budowniczy Brunelleschi (1377—1446) i malarz Massaccio (1401—1443), należący do szkoły florenckiej, dzięki badaniom przyrody oraz sztuki starożytnej, odkryli na nowo perspektywę, wprowadzając ją już na stałe do malarstwa.

Pierwszą książkę o perspektywie napisał budowniczy włoski Battista Alberti (1404—1472); została ona wydaną p. t. „De pictura" w r. 1511. Alberti rozpatruje obraz jako przecięcie płaszczyzną ostrosłupa utworzonego przez promienie widzenia, wychodzące z oka, i podaje szereg przepisów praktycznych bez uzasadnienia teoretycznego.

Albrecht Dürer (1471—1528) w książce zatytułowanej „Underweysung der Messung mit Zirckel und richtscheyt, in Linien, Ebenen und gantzen Corporen" (1525) wykreśla obraz perspektywiczny oraz cienie za pomocą rzutu pionowego i poziomego. Ogromny postęp uczynił Ubaldo, który traktuje ten przedmiot teoretycznie, jak to już widzieliśmy na początku tego rozdziału.

Sposób przedstawiania prostej lub płaszczyzny za pomocą śladu i punktu lub prostej znikania podał Brook Taylor (1685—1731); J. H. Lambert (1728—1777) używał śladu i punktu lub prostej zbieżności, za pomocą których wykreślał rzut przedmiotu podług danych wielkości odcinków i kątów. Wykreślał on cienie, kontury światła odbitego, i t. d. oraz podał rozwiązania wielu zagadnień gieometrycznych. Książka jego, zatytułowana „Freye Perspektive, oder Anweisung jeden perspektivischen Aufriss von Freyen Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen" wyszła w r. 1759.

Wraz z rozwojem nauk technicznych w wieku XIX potężnieją metody i środki gieometrji wykreślnej, oraz powstają nowe gałęzi tej nauki, jak fotogramometrja i nauka o oświetleniu powierzchni (Beleuchtungslehre). Pierwsza z nich ma na celu wykreślanie rzutów przedmiotów podług ich zdjęć fotograficznych (G. Hauck, Neue Constructionen der Perspective und Photogrammetrie, Journ. f. reine u. angew. Math. 1884),—druga zajmuje się badaniem natężenia oświetlenia różnych punktów powierzchni pod wpływem znanego źródła światła (Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen, 1871).

Kończąc ten rozdział, wymienię jeszcze kilka dzieł z wieku XIX, które miały wielkie znaczenie w rozwoju gieometrji rzutowej i wykreślnej:

Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Paryż 1822.

Möbius, Der barycentrische Calcul, Lipsk 1827.
Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigheit geometrischer Gestalten von einander, Berlin 1832.
von Staudt, Geometrie der Lage, Norymberga 1847.
von Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, Norymberga 1856—1860.
Chasles, Traité de Géomêtrie supérieure, Paryż 1852.
W. Fiedler, Darstellende Geometrie, Lipsk 1871.
von Peschka, Darstellende une projektive Geometrie, Wiedeń 1883.
Ch. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Lipsk 1834 — 1887.
S. Finsterwalder. Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresbericht der Deutsch. Math.-Ver. Rocznik 6-ty, 1897.

II. Gieometrja Analityczna i Algiebra.

Kto przyjętym w szkołach średnich zwyczajem uczy się przez szereg lat oddzielnie algiebry i oddzielnie gieometrji, jako przedmiotów zupełnie odrębnych, i dopiero w gieometrji analitycznej spotyka wzajemną zależność tych dwu nauk,—łatwo mógłby przypuścić, że nauki te rozwijały się niezależnie jedna od drugiej, i że z zastosowania wydoskonalonej już algiebry do badań gieometrycznych powstała nowa nauka, wiążąca algiebrę z gieometrją. Takie przypuszczenie byłoby najzupełniej błędne. Algiebra dopiero jednocześnie z powstaniem Gieometrji Analitycznej (w początkach XVII wieku) zaczęła się rozwijać jako nauka samodzielna. Wprawdzie już w starożytności były rozpatrywane zagadnienia, nie mające nic wspólnego z gieometrją, ale brak systematycznego znakowania algiebraicznego zmuszał do posiłkowania się pojęciami gieometrycznemi. W dzisiejszym języku algiebraicznym mamy jedynie ślady tego, np. w nazwie kwadrat, zamiast drugiej potęgi; ale język ten rozwijał się bardzo powoli. Tak np. Viète (1540—1603), który sam bardzo dużo uczynił w kierunku rozwoju symbolistyki algiebraicznej, pisał równanie

$$A^3 + 3\ BA = D$$

w ten sposób:

A cubus + *B* planum in *A* 3, aequatur *D* solido.

Z przykładu tego widać, że symbolistyka ówczesna była bardzo niedogodna do zawiłych przekształceń wzorów; ale widać z niego również, że już bardzo niewiele brakowało, ażeby osiągnąć tę prostotę i przejrzystość, jaką posiadają dzisiaj używane znaki algiebraiczne. Ten doniosły krok w rozwoju matematyki uczynił Kartezjusz, słusznie uważany za twórcę Gieometrji Analitycznej. Zastosowanie prostych, konsekwentnych, podatnych do wszelkich przekształceń i nadewszystko bardzo ogólnych wzorów do również bardzo ogólnie pojętych miejsc gieometrycznych punktów, określonych za pomocą spółrzędnych, było przyczyną nadzwyczajnego powodzenia nowej nauki; tymbardziej, że badanie przecięć stożkowych, do którego ta metoda najbardziej była odpowiednia, stanowiło wówczas, dzięki Keplerowi, zagadnienie bardzo aktualne. Kartezjusz spółrzędnych bynajmniej nie wymyślił. Określanie położenia punktu na powierzchni za pomocą dwu liczb, lub za pomocą dwu przecinających się linji, było z dawien dawna praktykowane. Południki i równoleżniki stanowią układ spółrzędnych; układami spółrzędnych są również sieci linji prostych, jakiemi Ubaldo (str. 222) pokrywa płaszczyznę figury i płaszczyznę obrazu. Spółrzędne były oddawna używane przy obliczaniu powierzchni, podobnie jak to dziś robimy.

W odmiennej nieco formie używa spółrzędnych Apollonjusz przy badaniu przecięć stożkowych. Spółczesny Kartezjuszowi Fermat używał również spółrzędnych.

Przypatrzmy się jego pracom.

Sposób opisywania linji krzywej u Fermata jest dość zbliżony do sposobu Apollonjusza. Apollonjusz używał linji prostej stałej (osi odciętych) i rozpatrywał jej ruchomy punkt przecięcia z prostą, tworzącą z pierwszą jakikolwiek kąt, i posuwającą się nie zmieniając kierunku. Na tej prostej przesuwa się punkt (koniec rzędnej), opisujący rozpatrywaną krzywą. Zamiast równania, symptoma wyrażało zależność między temi dwoma jednoczesnemi ruchami. Fermat mówi już wyraźnie o dwu niewiadomych równania, z których jednej nadaje stały początek i kierunek, i w końcu pierwszej umieszcza początek drugiej niewiadomej, nachylając ją do pierwszej pod kątem stałym; koniec tak utworzonej linji łamanej opisuje krzywą, odpowiadającą danemu równaniu. Rozpatrując równania stopnia 1 i 2, Fermat przychodzi do wniosku, że pierwszym odpowiadają linje proste, drugim w ogólności przecięcia stożkowe. Fermat wyprowadza (znane już w zasadzie Apollonjuszowi) równania przecięć stożkowych w odniesieniu do osi, średnic sprzężonych, asymptot, i równania wierzchołkowe, i sprowadza następnie ogólniejsze równania do jednej z tych postaci szczególnych za pomocą przekształcania układu spółrzędnych. Np. równanie

$$2x^2 + 2xy + y^2 = a^2$$

można tak napisać:

$$(x + y)^2 + x^2 = a^2.$$

Przyjmując przeto $x + y = 0$ i $x = 0$ za nowe osi spółrzędnych, otrzymamy nowe spółrzędne $x_1 = x\sqrt{2}$, $y_1 = x + y$, jak to łatwo odczytać z figury, skąd wypadnie:

$$y_1^2 + \frac{x_1^2}{2} = a^2$$

albo

$$\frac{2a^2 - x_1^2}{y_1^2} = 2.$$

Równanie to, jak to już było wiadomym Apollonjuszowi, jest „symptomatem" elipsy, dla której nowe osi spółrzędnych stanowią parę średnic sprzężonych.

Przedstawiwszy w krótkości sposób postępowania Fermata, przechodzimy do Kartezjusza, który właściwie nazywał się René Descartes (1596 — 1650). Jego epokowe dzieło „Essays philosophiques", wydane w roku 1637, składa się z czterech części, z których ostatnia została poświęcona gieometrji. Zapoznajmy się z tą pracą.

Kartezjusz stara się uczynić algiebrę niezależną od gieometrji, szukając dla algiebry punktu wyjścia w rachunkach arytmetycznych, nie zaś w pojęciach i działaniach gieometrycznych, jak to było dotychczas — od Euklidesa do Fermata. Uważając działania arytmetyczne za prostsze, wprowadza je do gieometrji w następujący sposób.

„Jak cała arytmetyka składa się tylko z czterech lub pięciu działań, mianowicie dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia i wyciągania pierwiastków, tak samo w gieometrji, ażeby znaleźć odcinki, których się szuka, trzeba tylko inne dodawać albo odejmować; albo mając odcinek, który, ażeby go łatwiej połączyć z liczbami, nazwę jednością, i który można w ogólności wybrać dowolnie, i oprócz niego dwa inne, znaleźć czwarty, który tak się ma do jednego z dwuch jak drugi do jedności, co jest toż samo, co mnożenie; albo znaleźć czwarty, który tak się ma do jednego z dwuch, jak jedność do drugiego, co jest toż samo, co dzielenie; albo wreszcie znaleźć jedną albo dwie albo więcej średnich proporcjonalnych do jedności i innego odcinka, co jest toż samo, co wyciąganie pierwiastków i t. d. I nie waham się, ażeby być bardziej zrozumiałym, wprowadzić tych wyrażeń arytmetycznych do gieometrji."[1])

Mamy tu dokładne określenia działań arytmetycznych, niezależne od tego, czy wielkości rozpatrywane są wymienione czy nie—oparte zresztą faktycznie na euklidesowskiej nauce o proporcjach. Dzięki tym określeniom można np. iloczyny dwuch lub trzech odcinków uważać za odcinki, nie za powierzchnie lub bryły. Wzory, otrzymane z tych działań, mają zawsze pewne znaczenie, chociażby nie były jednorodne, jak to było wymagane jeszcze u Viète'a. Dla uczynienia wyrażenia jednorodnym wystarczy domyślać się istnienia jedności tam, gdzie zajdzie tego potrzeba. Np., ażeby wyciągnąć pierwiastek stopnia 3-go z $a^2b^2 - b$, należy sobie wyobrazić, że a^2b^2 jest podzielone przez jedność, zaś b dwa razy pomnożone przez jedność. Wzory jednorodne są niezależne od wyboru jedności—niejednorodne, jak to Kartezjusz wyraźnie zaznacza, odpowiadają zawsze pewnej oznaczonej jedności.

Sposób pisania wzorów algiebraicznych, wprowadzony przez Kartezjusza, powstał przez udoskonalenie znakowania Viète'a i mało się różni od tegoczesnego. Końcowe litery alfabetu oznaczają wielkości zmienne, początkowe wielkości stałe, które mogą być niewymierne, ale muszą być dodatnie (to ograniczanie zniósł Hudde w r. 1658). Wykładniki potęgi pisane są tak jak dzisiaj.

Ogólną metodę rozwiązywania zadań Kartezjusz podaje w ten sposób. Uważając zadanie za rozwiązane, oznaczamy za pomocą liter wszystkie zawarte w nim wielkości, wiadome i niewiadome; na zasadzie warunków zadania wyrażamy pewną wiel-

---

[1]) Cytowane podług Zeuthen'a. Geschichte d. Mathematik in XVI u. XVII Jahrh. str. 204.

kość dwoma różnemi sposobami, skąd otrzymujemy równanie. Równań należy utworzyć tyle, ile jest niewiadomych; jeżeli to nie jest możliwe, w takim razie zadanie jest nieoznaczone.

Po tych uwagach ogólnych Kartezjusz rozwiązuje równania oznaczone stopnia drugiego za pomocą koła i prostej, poczym rozpatruje zadanie Pappusa, w którym poszukiwane jest miejsce gieometryczne punktów, mających tę własność, że iloczyn odległości każdego punktu od n prostych danych jest w stosunku stałym do iloczynu jego odległości od n lub $n-1$ innych prostych danych. Odległości mogą być wzięte pod dowolnym kątem, niekoniecznie prostym. Przyjmując jedną z tych prostych za oś odciętych, zaś odległości od niej za rzędne, otrzymuje się równanie nieoznaczone n-go stopnia z dwiema niewiadomemi (zmiennemi). Stopień n pochodzi stąd, że odległości od prostych są w zależności stopnia pierwszego od spółrzędnych. Jak widać układ spółrzędnych, używany przez Kartezjusza, nie jest w ogólności prostokątny.

W rozdziale drugim „Gieometrji“ Kartezjusz dowodzi, że równanie stopnia drugiego z dwiema zmiennemi odpowiada przecięciom stożkowym. Myśl przewodnia dowodzenia jest taka. Po rozwiązaniu równania względem jednej zmiennej dostaniemy wyrażenie postaci:

$$y = ax + b + \sqrt{cx^2 + dx + a}.$$

$y - ax - b$, pomnożone przez jakąś wielkość stałą, przedstawia odległość punktu od prostej, której równaniem jest $y = ax + b$. Biorąc więc tę ostatnią prostą za nową oś odciętych, i nie zmieniając kierunku rzędnych, dostaniemy nowe równanie krzywej w tej postaci:

$$y^2 = Ax^2 + Bx + C,$$

którą już łatwo sprowadzić do „symptomatów“ Apollonjusza.

Rozdział trzeci i ostatni „Gieometrji“ zawiera teorję równań algiebraicznych i sposoby graficzne ich rozwiązania. Np. równanie stopnia czwartego:

$$z^4 = pz^2 + qz + r$$

rozwiązuje się zapomocą stałej paraboli $z^2 = x$

i koła:

$$(z - \tfrac{1}{2} q)^2 + (x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} p)^2 = \tfrac{1}{4} q^2 + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} p)^2 + r.$$

Jak widać z tych przykładów, treść książki jest bardzo obfita i różnorodna. Gdybyśmy jednak mieli w kilku słowach scharakteryzować, na czym polegała reforma Kartezjusza, to należałoby przedewszystkim zwrócić uwagę na dwa punkty:

1. Wprowadzenie dogodnej pisowni algiebraicznej.

2. Ustanowienie prostego związku między równaniami algiebraicznemi i formami gieometrycznemi (dotychczas tworzono tylko związki między różnemi wielkościami).

Nie są to odkrycia faktów objektywnych, ale raczej wynalazki, polegające na najzupełniej dowolnych podporządkowaniach pojęć i znaków, ułatwiające niezmiernie poznawanie faktów z dziedziny gieometrji, algiebry i wogóle wszystkiego tego, co się da wyrysować, zmodelować, zliczyć albo zmierzyć. Jak spektroskop jest aparatem uniwersalnym, za pomocą którego można badać skład chemiczny wszelkich ciał, nie uciekając się do mozolnych prób z różnemi odczynnikami, i w dodatku czynić można te badania z odległości miljardów mil; podobnie gieometrja analityczna prowadzi napewno do celu, usuwając potrzebę próbowania rozmaitych poszczególnych sposobów, i sięga nawet tam, gdzie wszystkie dawniejsze metody były zupełnie bezsilne.

Słusznie też dopatruje się tutaj Zeuthen[1]) podobnego przełomu, jaki stanowiło przejście od rękodzielnictwa do przemysłu maszynowego. Podobny przełom, jakkolwiek mniejszej doniosłości, stanowi gieometrja Desargues'a, który pokazał, jak można za pomocą rzutu środkowego otrzymywać niezliczoną ilość twierdzeń gieometrycznych. Znacznie donioślejszy przełom poznamy później w rachunku nieskończonostkowym.

Po tym, co było powiedziane, zbytecznym jest dowodzić, że reformy takie nie powstają nagle, ale przygotowują się drogą powolnej ewolucji.

Pomimo rozgłosu i bardzo przychylnego przyjęcia przez ogół matematyków, metoda Kartezjusza nie mogła oczywiście odrazu zastąpić nauki Apollonjusza i wyrugować jego bądź co bądź wysoko rozwiniętej metody badania przecięć stożkowych. To też jeszcze Izaak Newton (1642—1727) w swym sławnym dziele, wydanym w r. 1687 p. t. „Philosophiae naturalis principia mathematica", przy badaniu dróg planet jako przecięć stożkowych,

---

[1]) Zeuthen l. c. str. 216.

opiera się na twierdzeniach Apollonjusza i wyprowadza nowe twierdzenia podobną metodą. Ale już późniejsza jego praca „Enumeratio linearum tertii ordinis“ (1704) traktuje o linjach wyższego rzędu w sposób zupełnie nowożytny—przy pomocy spółrzędnych, równań algiebraicznych i rzutu środkowego, zastosowanych w sposób mistrzowski.

W dziele tym po raz pierwszy spotykamy określenie stopnia linji krzywej, jako ilości jej punktów przecięcia z prostą. „Linje gieometryczne najlepiej jest rozróżniać rzędami podług wymiaru równania, przez które jest określona zależność między rzędnemi i odciętemi, albo, co jest toż samo (quod perinde est), podług liczby punktów, w jakich one mogą być przecięte przez linję prostą. Linją pierwszego rzędu jest w ten sposób jedynie linja prosta; linjami drugiego albo kwadratowego rzędu będą przecięcia stożkowe i koło, zaś trzeciego albo kubicznego rzędu są parabola kubiczna, parabola Neil'a, cysoida starożytnych i inne, które wyliczyć zamierzamy. Newton odkrywa szereg własności krzywych wyższego rzędu, analogicznych do własności przecięć stożkowych. Np. twierdzeniu, że średnica przecięcia stożkowego dzieli cięciwy równoległe na części równe, odpowiada następująca własność odkrytych przez Newtona średnic krzywej rzędu trzeciego: jeżeli przez jakikolwiek punkt P średnicy poprowadzić w pewnym oznaczonym (stałym dla każdej średnicy) kierunku sieczną przecinającą krzywą w punktach A, B, C, to $PA = PB + PC$.

Gałęzie krzywej, dążące do nieskończoności, mogą być hiperboliczne lub paraboliczne, zależnie od tego, czy mają asymptotę, czy też nie. W pierwszym przypadku styczną w punkcie nieskończenie oddalonym jest asymptota, — w drugim styczna „usuwa się do nieskończoności, niknie i już się nigdzie nie ukazuje“. Do klasyfikacji krzywych trzeciego rzędu Newton dochodzi w taki sposób.

Jeżeli na nieograniczoną płaszczyznę, oświetloną przez jeden punkt świecący, padają cienie (rzuty środkowe) różnych figur, to cienie przecięć stożkowych są znowu przecięciami stożkowemi, cienie krzywych trzeciego rzędu są krzywemi trzeciego rzędu, i. t. d. Jeżeli z koła można otrzymać w ten sposób wszystkie krzywe drugiego rzędu, to wszystkie krzywe trzeciego rzędu są cieniami pięciu różnych paraboli (kubicznych).

Ogólna postać równania takiej paraboli trzeciego rzędu jest:

$$y^2=ax^3+bx^2+cx+d.$$

Przyjmując $y=o$, otrzymamy równanie, z którego można wyznaczyć przecięcia krzywej z osią odciętych. Równanie to może mieć: 1) 3 pierwiastki rzeczywiste i różne, krzywa ma dwie gałęzi oddzielne; 2) dwa pierwiastki urojone, krzywa ma jedną gałąź; 3) dwa pierwiastki równe, krzywa ma albo punkt podwójny, albo też 4) punkt odosobniony; i wreszcie 5) trzy pierwiastki równe, krzywa ma punkt zwrotny (ostrze). Rzuty, otrzymane z tych pięciu krzywych, Newton klasyfikuje jeszcze na grupy, stosownie do ilości i rodzaju ich gałęzi, dążących do nieskończoności.

We wszystkich tych pracach z gieometrji analitycznej konieczne były nieraz dość zawiłe przekształcenia równań, przyczym nieraz traci się z oczu obraz gieometryczny, operując wyłącznie znakami algiebraicznemi. W ten sposób urabia się samodzielna nauka o równaniach, i początki tej nauki widzieliśmy już w trzeciej części „Gieometrji" Kartezjusza. W dalszym ciągu jej rozwoju wielu matematyków podejmuje podstawowe zagadnienie, w jaki sposób wyrazić za pomocą wzoru algiebraicznego pierwiastki równania 5-go lub wyższego stopnia z jedną niewiadomą, jak to już było znane dla pierwszych czterech stopni. Próby czynione w tym celu polegały przeważnie na tym, ażeby za pomocą stosownych przekształceń usunąć pewną liczbę wyrazów, i otrzymać tą drogą równanie prostsze, dające się rozwiązać. W a l t e r T s c h i r n h a u s (1651—1708) podaje następujący sposób. Ażeby rozwiązać równanie

$$x^n+a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+\ldots a_n=o,$$

przyjmujemy

$$y=x^p+b_1x^{p-1}+\ldots b_{p-1} x+b_p,$$

gdzie $p<n$. Po wyrugowaniu z tych równań niewiadomej x, dostaniemy równanie n-go stopnia względem y. Wielkości $b_1, b_2 \ldots b_p$ możemy teraz wybrać w ten sposób, ażeby p spółczynników nowego równania były zerami.

Czyniąc $p=n-1$ możnaby było skasować wszystkie wyrazy, z wyjątkiem pierwszego i ostatniego, i obliczyć y przez proste wyciągnięcie pierwiastka. Jednakże spółczynniki nowego równania zawierają iloczyny wielkości b; czyniąc te spółczynniki zerami, dostaje się równania wyższych stopni względem b_1, b_2... b_p, których znowuż rozwiązać nie można; to też metoda Tschirnhausa w przypadkach ogólnych zastosować się nie da.

Zagadnienie to zostało rozstrzygnięte dopiero w wieku XIX, kiedy Henryk Abel (1802—1829) dowiódł, że równania stopni wyższych aniżeli 4-ty w ogólności nie dadzą się rowiązać algiebraicznie.

Karol Fryderyk Gauss (1777—1855) dowiódł w r. 1799, że każde równanie algiebraiczne ma pierwiastek rzeczywisty albo zespolony, oraz podał dowód twierdzenia, wypowiedzianego bez ścisłego dowodzenia przez Eulera w r. 1742, że każde wyrażenie algiebraiczne może być rozłożone na czynniki stopnia 1-go i 2-go ze spółczynnikami rzeczywistemi.

Oprócz wymienionych w tekście, następujące dzieła z XVIII i XIX wieku wywarły znaczny wpływ na rozwój gieometrji analitycznej i algiebry:

Euler, Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748.

Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen (1828—31).

Gauss, Werke, herausgegeben von der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen (1870 — 1903).

Dalsze postępy omawianych nauk zawarte są w szeregu monografji, których odszukanie ułatwi bibljografja, podana w końcu artykułu.

Z dzieł polskich wymienić należy Jana Śniadeckiego, „Rachunku algiebraicznego teorja, przystosowana do linji krzywych", Kraków 1783.

III. Analiza nieskończonostkowa.

Wpływ badań przyrodniczych na matematykę nie ograniczał się bynajmniej do stawiania zagadnień, które matematyka winna była rozwiązywać w miarę posiadanych środków. W tym rozdziale będziemy mieli sposobność przekonać się, jak ogromne postępy wiedza matematyczna poczyniła dzięki temu, że matematycy poczęli stosować nawet do najbardziej abstrakcyjnych badań też same metody, jakiemi posiłkowano się przy opisywaniu zjawisk dostrzeżonych w przyrodzie. Ażeby dać przykład klasyczny metody doświadczalnej z epoki odrodzenia, opiszę w kilku słowach, używając dla krótkości wyrażeń nowożytnych, w jaki sposób Galileusz wyprowadził prawo spadku ciał.

Jeżeli ciało porusza się z prędkością jednostajną, to, przyjmując zmienny czas za odciętą, prędkość za rzędną pewnego punktu na płaszczyźnie, otrzymamy prostą równoległą do osi odciętych. Powierzchnia prostokąta, ograniczonego temi dwiema linjami oraz rzędnemi: początkową i końcową, mierzy się iloczynem czasu przez prędkość, a więc równa się drodze przebytej. Jeżeli prędkość nie jest jednostajna, wtedy na płaszczyźnie otrzymamy jakąś inną linję. „Najnaturalniejszym" przypadkiem będzie ten, w którym linja, nie będąc już równoległą do osi odciętych, nie przestanie jednak być prostą; wtedy prędkość będzie proporcjonalną do czasu, zaś droga przebyta mierzyć się będzie powierzchnią trójkąta prostokątnego, zawartego między rozpatrywaną prostą, osią odciętych i rzędną końcową, a więc równa się połowie iloczynu czasu przez prędkość, ponieważ zaś prędkość jest proporcjonalna do czasu, przeto droga będzie w stałym stosunku do połowy kwadratu czasu.

Mamy tu więc jasno określoną zależność funkcjonalną, którą możemy wyrazić za pomocą równań prędkości i ruchu:

$$v=gt;\quad s=\frac{vt}{2}=\frac{gt^2}{2}.$$

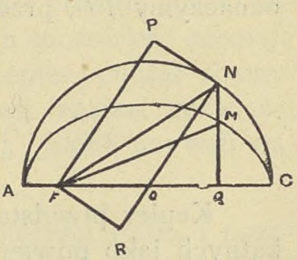
Galileusz powziął przypuszczenie, że tym właśnie „naturalnym" ruchem spadają ciała na ziemię; przypuszczenie to udało mu się stwierdzić pośrednio za pomocą doświadczeń, których tu opisywać nie będę.

Pominąwszy specjalne trudności tego zagadnienia, sama metoda postępowania przedstawia się tak. O zjawisku zauważonym, ale nie badanym jeszcze, przypuszczamy, że ono odbywa się podług pewnego prawa, i że to prawo jest możliwie najprostsze. Obmyśliwszy takie prawo, badamy tę stronę zjawiska, która może je potwierdzić lub obalić; jeżeli prawo zostanie stwierdzone przez szereg doświadczeń, uważamy je za zgodne z rzeczywistością.

Tą metodą otrzymywał Kepler nietylko prawa astronomiczne, ale też abstrakcyjne wzory matematyczne; posługiwał się nią również Newton z tym doniosłym uzupełnieniem, że starał się następnie znaleźć ścisły dowód, lub też jeżeli prawo lub wzór okazał się niezupełnie ścisłym, to nie odrzucał go całkowicie, ale wprowadzał poprawki, dzięki którym osiągał pożądaną dokładność.

Tą drogą odkryto znaczną liczbę prawd matematycznych, których ścisłe uzasadnienie mogło być podane dopiero przez późniejszych uczonych.

Ażeby poznać, w jaki sposób obliczał Kepler, zobaczmy, jak powstało prawo, że czas, zużywany przez planetę na przebycie łuku elipsy CM tak się ma do całkowitego czasu obiegu, jak suma promieni wodzących, poprowadzonych z ogniska F do punktów łuku CM, do sumy promieni wodzących całej elipsy („Astronomia nova", 1609).



Rys. 4.

Z dzieł Archimedesa wiadomo, że stosunek powierzchni wycinka elipsy CFM do powierzchni całej elipsy równa się stosunkowi ukośnego wycinka koła CFN do powierzchni całego koła. Zamiast rozpatrywać ruch punktu M po obwodzie elipsy, można więc rozpatrywać ruch odpowiedniego punktu N koła, z czym Kepler już był lepiej obznajmiony, probując, czy ruch planet odbywa się po obwodzie koła, którego środek leży zewnątrz słońca. Kepler dowiódł na sposób starożytny, że promień wodzący FM równa się FF, to jest odległości ogniska F od stycznej do koła w punkcie N. Ta wielkość jest więc wysokością trójkąta, którego wierzchołkiem jest F, a podstawą element łuku w N; powierzchnia tego trójkąta mierzy się więc połową iloczynu elementu łuku przez promień wodzący, czyli, jakbyśmy to dziś napisali, $\frac{1}{2} r . a\, d\varphi$, gdzie $\varphi = \sphericalangle CON$, $a = OC = ON$, $r = FM = RN$. Powierzchnię wycinka obliczymy przeto z dowolnym przybliżeniem, dzieląc łuk CN lub kąt CON na odpowiednią liczbę części równych i biorąc sumę odpowiadających im iloczynów; jeżeli jednak chodzi tylko o stosunek powierzchni, to można czynnik stały $\frac{1}{2} d\varphi$ opuścić i pozostanie jedynie suma promieni wodzących. Zauważyć tu należy, że, jak to słusznie czyni Kepler, dzielić trzeba na części równe łuk koła CN, nie zaś łuk elipsy CM, coby doprowadziło do błędnego rezultatu.

Wykonawszy w ten sposób szereg obliczeń, na podstawie obserwacji astronomicznych, Kepler przekonał się, że im bliżej siebie wybrane będą punkty podziału, tym bardziej stosunek tych sum zbliżać się będzie do stosunku odpowiednich czasów.

Sumowanie to jest przybliżonym obliczeniem całki oznaczonej $\int_0^{\psi} r a d\psi$, albo, ponieważ $r = ON + RO = a + c\cos\psi$, jeżeli przez c oznaczymy FO, przeto całka ta może być też napisana:

$$\int_0^{\psi} a(a + c\cos\psi)\, d\psi.$$

Kepler przedstawia ją też w układzie spółrzędnych prostokątnych jako powierzchnię, zawartą między krzywą, osią odciętych i dwiema rzędnemi, przyjmując długość łuku CN za odciętą, zaś promień wodzący FM za rzędną.

Że całka powyższa, wyrażająca powierzchnię wycinka CFN, równa się $a^2\psi + ac\sin\psi$, można to odczytać wprost z figury, rozkładając wycinek ten na wycinek środkowy CON i trójkąt FON, i obliczając powierzchnię każdej z tych figur zosobna.

Na innym miejscu znajdujemy ciekawy rezultat, który dzisiaj napisalibyśmy:

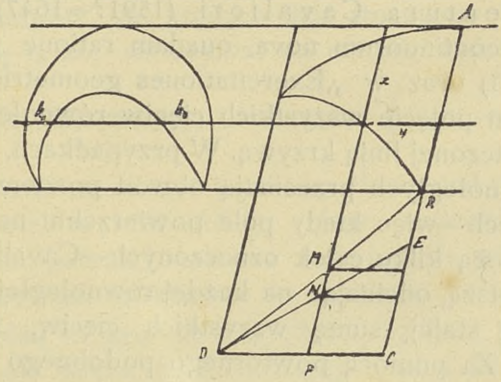
$$\int_0^{\psi} \sin\psi\, d\psi = 1 - \cos\psi,$$

a który Kepler znajduje bez uzasadnienia teoretycznego, a jedynie tylko drogą doświadczalną. Obliczywszy przy pomocy tablic dla pewnego łuku ψ sumę $\sin 1^0 + \sin 2^0 + \ldots\ldots \sin\psi$, i pomnożywszy ją przez długość łuku, odpowiadającego jednemu stopniowi, Kepler powtarza toż samo działanie dla kilku różnych łuków; a zauważywszy, że przy $\psi = o$ i $\psi = 90^0$ suma tak znaleziona równa się sinus versus ψ, to jest $1 - \cos\psi$, przypuszcza, że taż sama zależność będzie prawdziwa i dla innych łuków, a stwierdziwszy to na kilku przykładach, wnosi, że jest ona prawdziwą zawsze. Dodać tu trzeba, że Kepler, w ten sposób postępując, otrzymywał wzory, o których wiedział, że dają jedynie wartości przybliżone; tak naprzykład przyjmował, że obwód elipsy w przybliżeniu równa się iloczynowi π przez połowę sumy obu osi.

Przejdźmy teraz do innego dzieła Keplera, zatytułowanego „Stereometria doliorum“ (1615). Ponieważ dzieło to stanowi podstawę dla wszystkich późniejszych pomiarów objętości, przeto dobrze jest wiedzieć, w jaki sposób ono powstało.

W roku 1612 Kepler przyjechał do Linz i trafił tam na niezwykle obfity urodzaj wina, które też było sprzedawane po bardzo nizkiej cenie. Kepler kupił kilka beczek i przy tej sposobności zauważył, że kupcy, nie mając dokładnych sposobów, oceniają objętości beczek bardzo powierzchownie. Kepler począł rozmyślać nad tym zagadnieniem i po trzech dniach znalazł rozwiązanie, nie mające nic wspólnego ze sposobami, jakich używali starożytni przy obliczaniu objętości.

Objętość beczki składa się ze znanej objętości walca i pozostającej do obliczenia objętości ciała obrotowego (pierścienia). Otóż Kepler podaje ogólny sposób obliczenia objętości bryły, która po-



Rys. 5.

wstała z obrotu jakiejkolwiek figury płaskiej dokoła osi, leżącej w płaszczyźnie figury. Poprowadźmy na tej figurze równolegle do osi obrotu szereg cięciw w jednakowych odległościach jedna od drugiej, dzieląc w ten sposób powierzchnię figury na bardzo małe elementy linjowe (segmenta aequelata minima, quasi linearia). Każdy punkt takiej cięciwy opisuje przy obrocie koło, którego długość jest równa $2\pi r$, jeżeli przez r oznaczymy odległość między osią i cięciwą; każda cięciwa opisuje więc walec, który po rozwinięciu daje prostokąt, mający cięciwę za podstawę, a $2\pi r$ za wysokość. Wszystkie te prostokąty, ustawione na odpowiednich cięciwach prostopadle do płaszczyzny figury obrotowej, będą zawarte wewnątrz walca, mającego figurę obracającą się za podstawę i ściętego płaszczyzną, której kąt nachylenia względem podstawy równa się *arctg* 2π. Im więcej cięciw poprowadzimy, tym bardziej prostokąty te będą wypełniały wnętrze walca, z czego Kepler wnosi, że objętość bryły obrotowej musi się równać objętości walca, a więc może być obliczona tym dokładniej, im więcej użyjemy cięciw. W pewnych przypadkach zresztą można tą drogą otrzymać wzory ścisłe, mianowicie wtedy, jeżeli walec otrzymany jest sumą lub różnicą innych walców, odpowiadających bryłom obrotowym, których objętości skądinąd są znane.

Stereometria doliorum zawiera jeszcze dużo cennego materjału; tutaj wybrałem jedynie to, co może dać wskazówkę, w jaki sposób powstawał rachunek całkowy.

W tym samym kierunku i pod wpływem Keplera pracował dalej Bonawentura Cavalieri (1591?—1647) w „Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota" (1635, powtórnie 1653) oraz w „Exercitationes geometricae sex" (1647). Wprowadza on pojęcie wszystkich cięciw równoległych w figurze płaskiej, ograniczonej linją krzywą. W przypadkach, w których pewne z tych równoległych przecinają obwód powierzchni więcej niż w dwu punktach—więc kiedy pole powierzchni należałoby przedstawić za pomocą kilku całek oznaczonych—Cavalieri przekształca figurę na prostszą, odcinając na każdej równoległej, począwszy od pewnej prostej stałej, sumę wszystkich cięciw, leżących na tej równoległej. Za pomocą powtórnego podobnego przekształcenia można otrzymać figurę równoważną danej, ograniczoną dwiema prostemi DC i CR oraz krzywą DMR. Dzięki takiemu przekształceniu Cavalieri dowodzi ogólnie, że pola figur płaskich podobnych mają się do siebie, jak kwadraty odcinków odpowiednich.

W sposób analogiczny traktuje Cavalieri bryły i wypowiada twierdzenie, noszące do dziś jego miano, że jeżeli każda z płaszczyzn, równoległych do pewnej płaszczyzny stałej, wyznacza na dwu bryłach przekroje równoważne, to objętości brył są równe; jeżeli te przekroje mają stosunek stały, to objętości brył są w tym samym stosunku.

Fermat również osiąga rezultaty, które dziś otrzymujemy przy pomocy rachunku całkowego, przyczym jednak nie używa pojęć nowszych, ale trzyma się wzorów starożytnych i dba starannie o ścisłość dowodzenia. Znalazł on kwadraturę paraboli $y=x^n$ — wielkość, którą dziś obliczamy za pomocą całki oznaczonej

$$\int_0^a x^n dx$$

zarówno dla wykładników całkowitych, jak i ułamkowych, dodatnich i ujemnych. Za pomocą prostych przekształceń potrafił on sprowadzić do poprzedniego przypadku całkowanie niektórych funkcji bardziej złożonych, jak np.:

$$\int_0^\infty \frac{a^2}{x^2+a^2} dx.$$

O pracach Pascal'a, który bardzo daleko posunął się w rozwiązywaniu zagadnień, do których dziś stosujemy rachunek całkowy, nadmienię tylko, że używał on metod, które mu zastępowały znany wzór całkowania przez części $\int u dv = uv - \int v du$.

Nie będę również zatrzymywał się dłużej nad pracami Christiana Huygens'a (1629—1695). Jego najważniejsze dzieło „De horologio oscillatorio“ zawiera rozwiązanie wielu zagadnień z mechaniki metodami zbliżonemi do rachunku całkowego.

Na szczególną uwagę, ze względu na metodę badania, z pośród matematyków wieku XVII zasługuje John Wallis (1616—1703). Zachęcony powodzeniem, jakie osiągnęli Kepler i Cavalieri przez stosowanie metody doświadczalnej (indukcji niezupełnej), Wallis w swojej „Arithmetica infinitorum“ (1655) używa jej świadomie i systematycznie nietylko do wykrywania nowych twierdzeń, ale też do wyprowadzania wzorów podanych już poprzednio przez innych autorów. Zwykłym sposobem Wallisa jest tak zwana przez niego interpolacja — właściwie analogja — polegająca na stosowaniu do liczb ujemnych lub ułamkowych twierdzeń, dowiedzionych jedynie dla liczb całkowitych. Tak np. w celu obliczenia π Wallis posiłkuje się metodą, którą w znakowaniu nowożytnym można tak streścić. Półkole o średnicy równej 1, czyli $\frac{\pi}{8}$, ma wartość całki $\int\limits_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$. Zamiast niej obliczamy całkę

$\int\limits_0^1 (x - x^2)^n\, dx$, której wartości przy $n = 0, 1, 2, 3$ i t. d.

będą odpowiednio $1, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{2.3} \cdot \frac{4}{4.5}, \frac{1}{2.3} \cdot \frac{4}{4.5} \cdot \frac{9}{6.7}$ i t. d., skąd przez indukcję zupełną wypadnie wzór

$$\int\limits_0^1 (x - x^2)^n\, dx = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(n!)^2}{(2\,n)!},$$

a przyjmując $n = \frac{1}{2}$ i stosując dość zawiłą interpolację, Wallis otrzymuje:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ \ 9.\ .\ .}{2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ .\ .}.$$

Dla ścisłości zaznaczę, że wykładników ujemnych i ułamkowych Wallis jeszcze nie znał; wprowadzone one zostały dopiero przez Newtona. Tymbardziej podziwiać należy sprawność jego i poczucie prawdy matematycznej, dzięki któremu wszystkie ważniejsze rezultaty, osiągnięte przez niego tak niepewną drogą, okazały się prawdziwemi i przy ściślejszym badaniu. Mniejsze uznanie należy się naśladowcom Wallisa z XVIII wieku, gdyż ci mieli do rozporządzenia udoskonaloną pisownię matematyczną oraz wypracowane już metody badań nieskończonostkowych, które pozwalały na ściślejsze traktowanie przedmiotu.

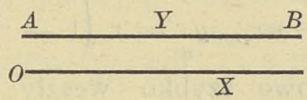
W rozpatrywanych dotychczas przypadkach całkowania starano się przeważnie przedstawić wielkość szukaną algiebraicznie za pomocą wielkości danych, lub, o ile to nie było możliwe — sprowadzić zagadnienie do kwadratury koła, hyperboli, albo w niektórych razach do innych krzywych znanych. Później zaczęto przedstawiać całki pod postacią szeregów nieskończonych i stosowano tę metodę zwłaszcza do obliczania logarytmów.

John Neper (1550 — 1617) i Jobst Bürgi (1552—1632) wynaleźli logarytmy jednocześnie, jeden niezależnie od drugiego.

Bürgi wydał w r. 1620 „Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen“, w których wyrazom postępu arytmetycznego 0, 10, 20 . . . są podporządkowane wyrazy 100 000 000, 100 010 000, 100 020 001,... postępu gieometrycznego. Liczby pierwszego szeregu są wydrukowane kolorem czerwonym, liczby drugiego czarnym. Tablicy tej można używać jak dzisiejszej tablicy logarytmowej, gdyż „liczby czerwone“ są tu logarytmami odpowiednich „liczb czarnych“ podzielonych przez 10^8, wziętemi przy zasadzie

$$\sqrt[10]{1,0001}.$$

Tablice Naper'a zawierają logarytmy funkcji trygonometrycznych. Wyszły one z druku w r. 1614 p. t. „Canonis mirifici descriptio; w r. 1619 wydany został sposób obliczenia tych tablic p. t. „Constructio canonis mirifici“. Neper przyjmuje dwa punkty X i Y poruszające się wzdłuż dwu prostych z punktów O i A; X porusza się jednostajnie, zaś prędkość punktu Y jest zmienna i tak się ma do prędkości punktu X jak YB do AB. Wtedy odcinek



OX przedstawia logarytm odcinka YB. Oznaczmy $OX=x$, $YB=y$, $AB=r$, wtedy zależność powyższą moglibyśmy tak przedstawić:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{r}.$$

Całkując to równanie, i uwzględniając, że przy $x = 0$ jest $y = r$, dostaniemy:

$$\frac{x}{r} = -\log\frac{y}{r},$$

gdzie log oznacza logarytm naturalny. Wielkość x, określona przez Neper'a jako logarytm zmienny, jest więc w bardzo prostym związku z logarytmem naturalnym. Przy obliczaniu tablicy należało przedewszystkim znaleźć logarytm x dla liczby $y=r-1$, przedstawiającej punkt, którego odległość od A jest równa 1. Jeżeli punkty X i Y przechodzą przez A i O z prędkością jednakową, to odległość $r - y$, przebyta z prawej strony punktu A, będzie mniejsza od x, zaś w tym samym czasie przebyta odległość z lewej strony od A byłaby większa od x. Stosownie do określenia odległość ta będzie $\frac{r}{y}(r - y)$, czyli

$$r - y < x < \frac{r}{y}(r - y),$$

a kładąc $y = r - 1 = r\left(1 - \frac{1}{r}\right)$, $x = x_1$:

$$1 < x_1 < \frac{r}{r-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}.$$

Przyjmując $r = 10^7$, znajdziemy:

$$1 < x_1 < 1{,}000\,000\,1\,000\,000\,1\ldots$$

Neper bierze przybliżoną wartość średnią $x_1 = 1{,}000\,000\,05$. Jest to dokładność wystarczająca, i jakkolwiek tablice Neper'a zawierały błąd, ale był to tylko błąd rachunkowy. Dalsze wartości można już obliczać stopniowo przy pomocy wzorów:

$$x_n = nx_1;\ y_n = r\left(1 - \frac{1}{r}\right)^n.$$

Tablice logarytmowe szybko weszły w użycie; Henry Briggs (1561 — 1630) nadał im jeszcze większe znaczenie praktyczne, przyjmując za zasadę logarytmów 10. Tablica Briggsa ukazała się po raz pierwszy w r. 1617, a następnie, rozszerzona, w r. 1624 w „Arithmetica logarithmica".

Mikołaj Mercator (Kaufmann) ogłosił w r. 1667 w swojej „Logarithmotechnia" proste rozwinięcie logarytmu na szereg, nie troszcząc się jednak jeszcze o zbieżność tego szeregu.

Bierze on hyperbolę, mającą równanie $y = \frac{1}{1+x}$, a wykonywając dzielenie otrzymuje:

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots.,$$

skąd całkując od $x = 0$ do $x = a$ znajdziemy powierzchnię, zawartą między osią odciętych, hyperbolą i dwiema rzędnemi, której wielkość, jak to już było wiadomo, równa się logarytmowi naturalnemu $(1 + a)$; będzie więc

$$\log(1 + a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots.$$

Było to zupełnie nowe zastosowanie kwadratury; ale ścisłość jest jeszcze niewystarczająca, tym bardziej, że na rysunku podanym przez Mercator'a przyjęto $a > 1$, a więc w tym przypadku szereg nie byłby wcale zbieżnym. Warunki zbieżności tego szeregu oraz wielu innych rozpatrywał Wiliam Brouncker (1620 — 1684). Jednakże systematyczne badanie zbieżności szeregów powstało dopiero w wieku XIX.

Jednocześnie z kwadraturami i kubaturami nastręczały się, niezależnie od nich, zagadnienia, które dziś rozwiązujemy za pomocą rachunku różniczkowego. Należy tu wyznaczanie prędkości punktu, stycznej do krzywej, oraz wartości największych i najmniejszych pewnej funkcji. Torricelli i Roberval, niezależnie jeden od drugiego, zastosowali równoległobok ruchu do wyznaczania kierunku stycznej.

Ewangielista Torricelli (1608 — 1647), uczeń Galileusza, w książce p. t. „Opera geometrica" (1644 r.) znajduje kierunek stycznej do paraboli w następujący sposób. Jeżeli ciało, rzucone w kierunku poziomym, opisuje parabolę $x^2 = 2py$, to stosunek prędkości pionowej do poziomej, jak to już wiadomo było Galileuszowi, jest $\frac{x}{p}$ czyli $\frac{2y}{x}$; a ponieważ prędkość wypadkowa w każdym punkcie musi mieć kierunek stycznej do paraboli, można więc tę styczną wykreślić za pomocą równoległoboku ruchów. Podobną metodą posługiwał się Giles Personne (1602—1672), znany pod przybranym nazwiskiem Roberval'a, przy wyznaczaniu stycznej do konchoidy, cykloidy i innych krzywych.

Ogólniejszego sposobu używa Kartezjusz, który wydoskonalił już należycie algiebrę, ażeby mogła służyć do takich celów. Jeżeli w jakimkolwiek punkcie P krzywej danej mamy wyznaczyć normalną do tej krzywej, to wyobraźmy sobie koło, przechodzące przez P i którego środek leży na przecięciu normalnej z osią odciętych. To koło ma dwa połączone punkty przecięcia z krzywą w P; z tych warunków można za pomocą metody spółczynników nieoznaczonych wyznaczyć położenie środka koła, a łącząc ten punkt z punktem P otrzymamy szukaną normalną.

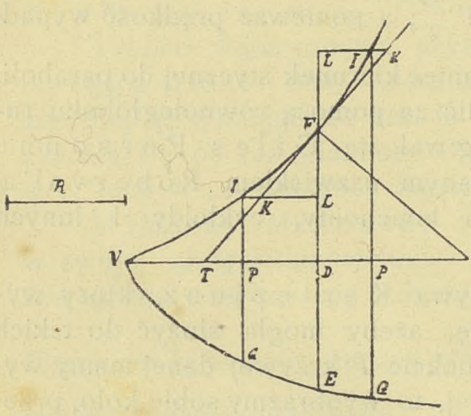
Fermat postępuje w sposób bardziej zbliżony do dzisiejszego. Ażeby znaleźć maximum lub minimum funkcji, tworzy on różnicę dwu wartości funkcji, odpowiadających różnym wartościom argumentu, dzieli tę różnicę przez różnicę argumentów i otrzymany iloraz przyjmuje równym zeru, czyniąc jednocześnie różnicę argumentów zerem. Tworzy on więc równanie

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

w którym $h = o$. W podobny sposób oblicza Fermat kierunek stycznej do krzywej w punkcie danym.

Nie wiemy, w jaki sposób Fermat doszedł do swojej metody; zaznaczyć jednak należy, że już przed nim K e p l e r zauważył, iż funkcja nie zmienia się w tym punkcie, w którym osiąga wartość największą lub najmniejszą, i że znalazł na tej zasadzie, jak wpisać w kulę walec o największej objętości.

K a r t e z j u s z i inni matematycy spółcześni mu rozpatrywali też zagadnienia, które dziś rozwiązujemy przez całkowanie równań różniczkowych. W zagadnieniach tych poszukiwaną była linja krzywa, której styczne mają pewną własność daną. Dzięki tym badaniom wykryto zależność wzajemną pomiędzy różniczkowaniem i całkowaniem.



Rys. 6.

I z a a k B a r r o w (1630 — 1677), nauczyciel Newtona, rozpatruje na dwu krzywych $VIFI$ i $VGEG$ dwa odpowiednie punkty F i E mające wspólną odciętą VD. Rzędna jednego z nich DF, pomnożona przez wielkość stałą R, równa się powierzchni VDE ograniczonej przez drugą krzywą, oś odciętych i rzędną DE. Zależność między obiema krzywemi wyrazilibyśmy więc, oznaczając przez x odciętą i przez y i v rzędne, następującym równaniem:

$$Ry = \int_0^x v\,dx.$$

Barrow dowodzi, że w tych warunkach podstyczna $DT = R.\ \frac{DF}{DE}$.

Jest to zależność, którą można tak wyrazić:

$$R\,\frac{dy}{dx} = v.$$

Dowodzenie opiera się na metodzie Torricelli'ego. Niech będzie $VIFI$ drogą punktu ruchomego F, którego rzut na oś odciętych porusza się z prędkością jednostajną R, zaś rzędna y wzrasta z prędkością równą rzędnej v drugiej krzywej; oznaczając więc czas przez t, otrzymamy:

$$\frac{dx}{dt} = R;\ \frac{dy}{dt} = v.$$

Styczna będzie przekątną prostokąta, którego boki są proporcjonalne do tych dwu prędkości — skąd wypada prawdziwość powyższego twierdzenia.

Barrow podaje również dowodzenie gieometryczne tegoż samego twierdzenia.

Rozwój analizy nieskończonostkowej, jaki dotychczas rozpatrywaliśmy, wykazuje rozwiązanie znacznej liczby zagadnień z gieometrji i mechaniki za pomocą rozmaitych odrębnych sposobów, jakie nastręczały się w poszczególnych przypadkach. Metody ogólnej różniczkowania i całkowania jeszcze nie było. Zasługę stworzenia takiej metody, za pomocą której możemy dzisiaj bez poważniejszych przeszkód różniczkować i całkować dowolne funkcje, należy przypisać N e w t o n o w i i L e i b n i z o w i.

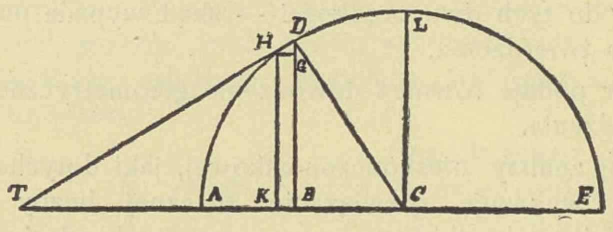
Newton uważa różniczkowanie jako działanie, które można wykonywać podług pewnych stałych reguł i za pomocą którego otrzymywać można całe szeregi kwadratur. Tak ogólnie postawione zagadnienie jest nowym źródłem prawd matematycznych, z którego czerpać można bez końca, czy to w celu uzupełnienia wiedzy abstrakcyjnej, czy też dla celów praktycznych. Jest to podobne rozszerzenie zakresu wiedzy, jakiego dokonał Kartezjusz w dziedzinie algiebry i gieometrji analitycznej.

Metody Newtona mają ścisłą łączność z używanemi poprzednio. Podobnie jak Wallis, rozwija on funkcje na szeregi, kierując się indukcją; postępuje jednak ściślej od Wallisa, gdyż w poszczególnych przypadkach bada, czy rozwinięcie jest prawdziwe. Poszczególne wyrazy szeregu całkuje Newton za pomocą znanych już wzorów.

Dla przykładu przytaczam tłumaczenie rozdziału „Longitudines Curvarum invenire“ z pracy zatytułowanej „De Analysi per Aequationes numero Terminorum infinitas“.

Znaleźć długości krzywych.

Niech będzie $ADLE$ półokrąg i AD jego łuk, którego długość jest do znalezienia. Prowadzę styczną DHT, uzupełniam prostokąt nieskończenie mały $HGBK$ i przyjmuję $AE=1=2AC$. Będzie, że



Rys. 7.

BK, czyli GH, moment podstawy AB (x) do HD momentu łuku AD

$$= BT : DT = BD\left(\sqrt{x-xx}\right) : DC\ (\tfrac{1}{2}) = 1\ (BK) : \frac{1}{2\sqrt{x-xx}}\ (DH).$$

Przytym $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ czyli $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$ jest momentem łuku AD. Co po uproszczeniu będzie $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}} + \frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$, i t. d. Stąd, podług drugiego prawidła, długość łuku AD jest $x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$, i t. d. czyli $x^{\frac{1}{2}}$ przez $1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 + \frac{63}{2816}x^5$ i t. d.

Nie mniej, przyjąwszy CB za x, a promień CA za 1, znajdziesz, że łuk LD jest $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, i t. d.

Ale trzeba zaznaczyć, że ta jedność, którą podstawiamy zamiast momentu, jest powierzchnią, gdy mamy do czynienia z bryłami, linją—gdy z powierzchniami i punktem—z linjami (jak w tym przykładzie).

Przy różniczkowaniu Newton posiłkuje się, podobnie jak jego poprzednicy, pojęciami, zapożyczonemi z mechaniki. Traktuje on jednak tę rzecz odrazu w sposób bardzo ogólny, jak to widać z następującej definicji, podanej w pracy p. t. „Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum", napisanej w głównych zarysach w r. 1671, wydanej jednak dopiero w r. 1736.

„A teraz będę nazywał na przyszłość fluentes (płynącemi, zmiennemi) takie wielkości, które rozpatruję jako stopniowo i nieoznaczenie rosnące i które będę oznaczał ostatniemi literami alfabetu u, y, x i z, ażeby je można było odróżnić od innych wielkości, które w równościach rozważa się jako znane i oznaczone i które z tego powodu oznaczane bywają pierwszemi literami alfabetu a, b, c i t. d. Prędkości zaś, o które powiększają się poszczególne zmienne przy ruchu ogólnym, (które to prędkości nazywać będę fluxiones, albo prościej, velocitates, celeritates, prędkościami), oznaczają się temi samemi literami z dodaniem kropki: $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ i $\dot{z}$; to znaczy, że prędkość wielkości u oznaczam przez $\dot{u}$ i tak samo prędkości innych wielkości x, y, z będę oznaczał odpowiednio przez $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.".

„Fluentes" są to więc jakiekolwiek zmienne, „fluxiones" są ich pochodnemi względem czasu, przyjętego za zmienną niezależną. Iloraz $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ oznacza więc dokładnie to samo, co dziś, metodą Leibniza, piszemy $\frac{dy}{dx}$.

Newton całkuje równania różniczkowe postaci

$$M\dot{x} + N\dot{y} = 0,$$

gdzie M i N są funkcjami całkowitemi wymiernemi zmiennych x, y, rozwijając $\dot{y}$ na szereg. Następnie stosuje swoją metodę do wyznaczania maximum i minimum, stycznych do krzywych w różnych układach spółrzędnych, do obliczania pól i długości łuków, promieni krzywizny i punktów przegięcia.

Nie będziemy tu rozpatrywali treści słynnego dzieła Newtona „Philosophiae naturalis principia mathematica" („Podstawy matematyczne nauki o przyrodzie" 1686 — 87), gdyż należy ona raczej do fizyki i astronomji [1]); wypadnie nam jedynie przyjrzeć się, jakich metod matematycznych Newton tutaj używa. Jak już zaznaczyliśmy, dowodzenia twierdzeń gieometrycznych nie opierają się na gieometrji analitycznej Kartezjusza; podobnie różniczkowanie i całkowanie wykonywa Newton niezależnie od swojej metody fluksji, która już była wypracowana, ale jeszcze nie ogłoszona drukiem. Należy jednak mniemać, że wyniki otrzymane zostały pierwotnie drogą analityczną, dowodzenia zaś syntetyczne zostały później obmyślane w tym celu, ażeby książce nadać cechę większej ścisłości.

Ażeby scharakteryzować sposób, w jaki Newton operuje wielkościami nieskończenie małemi, przytoczę dwa twierdzenia podług wydania niemieckiego „Mathematische Principien der Naturlehre" (1872) w tłumaczeniu Wolfersa.

„T w i e r d z e n i e. Jeżeli w dowolną figurę *AacE*, ograniczoną linjami prostemi *Aa*, *AE* i krzywą *acE*, wpisać dowolną ilość równoległoboków *Ab*, *Bc*, *Cd* i t. d., mających równe podstawy *AB*, *BC*, *CD* i t. d. oraz boki *Bb*, *Cc*, *Dd* i t. d. $\parallel$ *Aa*; dodać

---

[1]) Ob. S. K r a m s z t y k „Dzieje astronomji" i L. B r u n e r „Rys rozwoju fizyki". Dzieje myśli t. I zeszyt I.

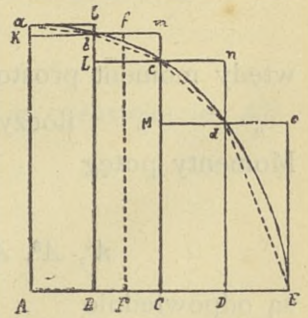
następnie równoległoboki $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$ i t. d.; potym zmniejszać szerokość $AB=BC=CD$ i t. d. tych równoległoboków i zwiększać jednocześnie ich liczbę aż do nieskończoności, to ostatecznie figura wpisana staje się równą opisanej i równą figurze krzywolinjowej, t. j.

$$AKbLcMdD = AalbmcndoE = AabcdE.$$

Różnica figury wpisanej i opisanej jest mianowicie:

$$= akbl + bLcm + cMdn + dDeo = AalB,$$

gdyż $AB=BC=CD=DE$. $AalB$ staje się jednak przez to, że jego szerokość AB zmniejsza się do nieskończoności, mniejszą od każdej wielkości, jaka może być daną; przeto figury wpisana i opisana, a tymbardziej zawarta między niemi krzywolinjowa, stają się sobie równe, co było do dowiedzenia“ (Księga I, rozdział I, § 2).


Rys. 8.

„T w i e r d z e n i e. Moment utworzonej (genita) otrzymuje się, mnożąc moment każdej poszczególnej wielkości tworzącej przez jej wykładnik i spółczynnik i dodając znalezione iloczyny.

Utworzoną (genita) nazywam każdą wielkość, która powstaje z pewnych wyrazów w arytmetyce przez mnożenie, dzielenie i wyciąganie pierwiastka, w gieometrji przez wynajdywanie zawartości i boków, albo skrajnych i średnich wielkości proporcjonalnych, bez dodawania i odejmowania. Wielkościami tego rodzaju są: iloczyny, ilorazy, pierwiastki, prostokąty, kwadraty, sześciany, boki kwadratów, krawędzi sześcianów i t. p. Te wielkości rozpatruję tutaj jako nieoznaczone i zmienne, rosnące albo malejące, jak gdyby przez ciągły ruch czy prąd. Ich chwilowy przyrost lub ubytek oznaczam przez nazwę m o m e n t, tak że przyrosty uważam za momenty dodatnie, ubytki za momenty ujemne. Momenty przestają być momentami, jeżeli osiągną wielkość skończoną. Należy przez nie rozumieć właśnie powstające początki wielkości skończonych i rozważa się w tym twierdzeniu nie wielkości momentów, tylko ich stosunek, kiedy właśnie powstają. Na jedno wyjdzie, czy zamiast momentów rozumieć prędkości zwiększania i zmniejszania (które również możnaby nazwać ruchami, zmianami i „fluksjami“ wielkości), czy też dowolne wielkości skończone, proporcjonalne do tych prędkości.

S p ó ł c z y n n i k każdego wyrazu tworzącego jest ilorazem, jaki się otrzymuje, dzieląc utworzoną przez ten wyraz.

Znaczenie tego twierdzenia jest więc następujące: Jeżeli momenty albo prędkości zmiany wielkości

A, B, C, i t. d.

malejących albo rosnących wskutek ciągłego ruchu, oznaczyć przez

a, b, c, i t. d.,

wtedy moment prostokąta $AB = Ab + aB$

„ „ iloczynu $ABC = ABc + AbC + aBC$.

Momenty potęg

$$A^2,\ A^3,\ A^4,\ A^{\frac{1}{2}},\ A^{\frac{3}{2}},\ A^{\frac{1}{3}},\ A^{\frac{2}{3}},\ \frac{1}{A},\ \frac{1}{A^2},\ \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$$

są odpowiednio

$$2aA,\ 3aA^2,\ 4aA^3,\ \tfrac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}},\ \tfrac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}},\ \tfrac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}},\ \tfrac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}, -aA^{-2},$$

$$-2aA^{-3},\ -\tfrac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}.$$

W ogólności jest moment dowolnej potęgi

$$A^{\frac{n}{m}}$$

$$\text{równy } \frac{n}{m}A^{\frac{n-m}{m}}.$$

Dalej moment utworzonej A^2B

równy $2aAB + A^2b$.

Moment utworzonej $A^3B^4C^2$ jest $= 3aA^2B^4C^2 + 4A^3bB^3C^2 + 2A^3B^4cC$

„ „ $\dfrac{A^3}{B^2} = 3aA^2B^{-2} - 2A^3bB^{-3}$ i t. d.

Dowodzenie twierdzenia prowadzi się w następujący sposób.

P r z y p a d e k p i e r w s z y. Prostokąt AB, rosnący przez ciągły ruch, był, kiedy boki były mniejsze o połowy momentów $^1/_2 a$ i $^1/_2 b$

$$(A - \tfrac{1}{2}a)(B - \tfrac{1}{2}b) = AB - \tfrac{1}{2}aB - \tfrac{1}{2}Ab + \tfrac{1}{4}ab,$$

i stanie się równym, jeżeli A i B o też same połowy momentów wzrosną

$$(A + \tfrac{1}{2}a)(B + \tfrac{1}{2}b) = AB + \tfrac{1}{2}aB + \tfrac{1}{2}Ab + \tfrac{1}{4}ab.$$

Odejmując od drugiego prostokąta pierwszy, otrzymamy resztę

$$aB + Ab.$$

Całe przyrostki a i b wywołują więc w prostokącie AB przyrostek

$$aB + Ab,$$

co było do dowiedzenia.

. . . .

P r z y p a d e k c z w a r t y. Ponieważ

$$\frac{1}{A}.\ A = 1, \text{ więc będzie}$$

$$A \text{ moment} \frac{1}{A} + a.\ \frac{1}{A} = \text{moment } 1 = 0;$$

więc

$$\text{moment } \frac{1}{A}, \text{ t. j. moment } A^{-1} = -\frac{a.\ \frac{1}{A}}{A} = -\frac{a}{A^2} = -aA^{-2}$$

Wogóle, ponieważ

$$\frac{1}{A^n}.\ A^n = 1$$

$$A^n.\ \text{moment} \frac{1}{A^n} + \frac{1}{A^n}.\ na\ A^{n-1} = 0, \text{ a więc:}$$

$$\text{moment } \frac{1}{A^n} = \text{moment } A^{-n} = -\frac{na}{A^{n+1}} = -na\ A^{-n-1},$$

co było do dowiedzenia". (Tamże, księga II, rozdział II, § 10).

Pozostałe przypadki opuszczamy.

Jak widać z zamieszczonych przykładów, Newton posiadał już ustaloną metodę rachunku nieskończonostkowego, brakło mu jednak jeszcze dogodnej terminologji i znakowania, które sam wielokrotnie zmieniał w swoich pracach. Pod tym względem szczęśliwszym był Leibniz, który obmyślił sposób znakowania, jakiego dziś jeszcze używamy. Dzięki temu nowa nauka mogła się z łatwośeią rozwijać, podobnie jak algiebra rozwijała się na podstawie prac Kartezjusza.

Wilhelm Leibniz (1646—1716) osiągnął w rachunku różniczkowym podobne rezultaty, co i Newton, w kilka lat później, nie czytając jednak prac Newtona, które wówczas jeszcze nie były opublikowane. Punktem wyjścia dla Leibniza był „trójkąt charakterystyczny", jakiego już Pascal używał w zastosowaniu do koła, a za pomocą którego Leibniz starał się znaleźć styczną do jakiejkolwiek krzywej danej. Jest to trójkąt, utworzony przez różnice odciętych i rzędnych dwu punktów nieskończenie blizkich oraz przez łuk zawarty między niemi, a więc przez wielkości, które później Leibniz oznaczał przez dx, dy, ds. Trójkąt ten jest podobny do trójkąta utworzonego przez podstyczną, rzędną i styczną. Notatki Leibniza, dotyczące tego przedmiotu, pochodzą z roku 1673.

Zagadnienie odwrotne — znając różnicę rzędnych, wyznaczyć rzędne — Leibniz, podobnie jak Barrow, łączy z kwadraturami, opierając się przytym na pracach Cavalieri'ego. W r. 1675 wprowadza on nowe znaki w następującej notatce: „pożytecznie będzie pisać $\int$ zamiast *omnia*, czyli $\int l$ zamiast *omn. l*, ażeby oznaczyć sumę wszystkich l; okazuje się tu nowy rodzaj rachunku. Jeżeli zaś jest dane $\int l = ya$, to natrafiamy na rachunek odwrotny, oznaczony przez $l = \frac{ya}{d}$; jeżeli mianowicie $\int$ wymiary powiększa, to d zmniejsza je, ale $\int$ oznacza sumę, d—różnicę".

Wkrótce później przeniósł Leibniz d z mianownika do licznika, oraz wprowadził różniczkę pod znak całki jako czynnik.

Podstawy nowego rachunku zostały ogłoszone drukiem po raz pierwszy w roku 1684 w „Acta eruditorum" p. t. „Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus". Ukazanie się tej pracy, która odrazu zyskała ogromny rozgłos, rozpoczyna nową epokę w dziejach matematyki.

Jak Leibniz zapatrywał się na wielkości nieskończenie małe, możemy sądzić z następującego wyjątku z rozprawy, zatytułowanej „Teńtamen de motuum coelestium causis" (1689): „Przyjąłem w dowodzeniu wielkości niezrównanie małe, np. różnicę dwu wielkości prawie jednakowych (duarum quantitatum communium), która z wielkościami samemi nie da się porównać. Tak można to, jeśli się nie mylę, najwyraźniej wykazać. Jeżeli więc ktoś nie chce używać nieskończenie małego, to może przyjąć tak małe, jak mu się wydaje wystarczającym, ażeby powstały stąd błąd nie przekraczał danej wielkości. Jak ziemię uważa się za punkt, średnicę ziemską za linję nieskończenie małą, jeżeli rozpatruje się całe niebo, tak samo można dowieść, że kąt, którego ramiona mają między sobą podstawę, względem nich nieporównanie małą, musi być niezrównanie małym, i że różnica obu ramion nie da się porównać z ramionami, wykazującemi tę różnicę". Dalej mówi, że odpowiadające sobie cięciwy, łuki i styczne mają różnice, nie dające się z niemi samemi porównać. „Jeżeli one same są nieskończenie małe, wtedy różnice ich są nieskończenie razy nieskończenie małe (infinities infinite parvae)... Jest nieskończenie wiele stopni zarówno nieskończenie wielkiego, jak nieskończenie małego".

Z odkryć Leibniza, do których posłużył mu rachunek różniczkowy i całkowy, wymienię następujące. Wykazał on, w jaki sposób odróżnić maximum od minimum; wprowadził wielkości przestępne, t. j. takie, które nie dadzą się określić za pomocą równania algiebraicznego oznaczonego stopnia. Dalej wprowadził on pojęcie spółrzędnych krzywolinjowych oraz zajmował się całkowaniem równań różniczkowych za pomocą szeregów.

Jednocześnie z Leibnizem, korzystając z wynalezionej przez niego metody, pracowało w tym samym kierunku wielu wybitnych uczonych, między któremi na pierwszym planie wymienić należy braci Jakóba (1654—1705) i Jana (1667—1748) Bernoulli.

Rachunek różniczkowy stał się wkrótce niezbędnym środkiem dla każdego matematyka, i już w roku 1696 Guillaume François

Marynis de l'Hospital (1661—1704) wydał pierwszy podręcznik tej nauki p. t. „Analyse des infiniment petits“. Dalsze ważniejsze odkrycia z tej dziedziny przeszły do podręczników, jakich dziś używamy, z niewielkiemi zmianami. Wobec ogromnej obfitości materjału nie możemy ich tu szczegółowo rozpatrywać; wystarczy wskazać najważniejsze daty z tej epoki.

W roku 1715 Brook Taylor (1685—1731) ogłosił szereg, znany pod jego nazwiskiem, jak również tę szczególną postać tego szeregu, która później otrzymała miano szeregu Maclaurina.

Leonard Euler (1707—1783) wydał znakomity podręcznik rachunku różniczkowego p. t. „Institutiones calculi differentialis“ (1755).

Joseph Louis Lagrange (1736 — 1813) starał się wyrugować z rachunku różniczkowego wielkości nieskończenie małe, opierając go na analizie algiebraicznej, ażeby tym sposobem osiągnąć większą ścisłość w rozumowaniu. Rozpoczyna on najnowszy okres w dziejach matematyki; rezultaty, osiągnięte w wiekach XVII i XVIII drogą, którą można nazwać doświadczalną, zostają teraz poddane ścisłej rewizji. Powodzenie w zupełności usprawiedliwia swobodę, z jaką operowali Cavalieri, Kepler i Leibniz wielkościami nieskończenie małemi, zaś Wallis i Newton szeregami; jednakże uzasadnienia teoretycznego oraz wyznaczenia granic, w jakich stosowanie metody jest możliwe, jeszcze brakło. To było przedmiotem badań wieku XIX.

Teorja liczb.

Rozpatrywanie własności liczb naturalnych stanowiło zawsze dla matematyków przedmiot mniej lub więcej głębokich badań. U Greków najwybitniejsze rezultaty osiągali w tym względzie Pitagorejczycy, później zaś Dyofant. Indusi już w wieku VI umieli rozwiązywać równania nieoznaczone stopnia 1-go i 2-go. Pozatym u różnych narodów zawsze przytrafiały się w znacznej ilości oddzielne zagadnienia, których treść matematyczną stanowiły pewne własności liczb całkowitych. Bachet de Méziriac (1587—1638), matematyk i poeta, wybitny znawca języka i literatury greckiej, zebrał ogromną ilość zadań tego rodzaju w jedną całość i wydał p. t. „Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres“ (1612; wydanie drugie uzupełnione w r. 1624). Zasługa jego polega nietylko na zgromadzeniu materjału, ale jeszcze bardziej na naukowym traktowaniu tego przedmiotu. Spotykamy tu po raz pierwszy metodyczne rozwiązywanie równań nieoznaczonych st. 1-go w liczbach całkowitych. Oprócz tej książki wydał Bachet tłumaczenie dzieł Dyofanta, opatrzone licznemi komentarzami. Te dwie prace stały się podwaliną późniejszej teorji liczb.

W „Problèmes plaisans“, oprócz różnych kwadratów magicznych i sposobów odgadywania liczb, czyniących zadość warunkom danym, spotykamy zadania w tym rodzaju:

„Biedna kobieta z koszem jajek, które chciała sprzedać na targu, została przez kogoś potrącona, tak że koszyk upadł na ziemię i jajka się potłukły. Tamten chce biednej kobiecie wynagrodzić stratę i pyta, wiele było jajek. Tego ona sobie przypomnieć nie może, ale pamięta, że jeżeli układała je po 2, albo po 3, albo po 4, albo po 5, albo po 6, zawsze jedno pozostawało; gdy jednak układała po 7, wtedy nic nie pozostawało”. Bachet podaje takie rozwiązanie zadania, które można zastosować i do innych liczb, i zaznacza, że liczby, jakie weźmiemy zamiast 2, 3, 4, 5, 6, powinny być pierwszemi względem liczby, wziętej zamiast 7, wtedy zadanie będzie miało nieskończenie wiele rozwiązań.

„Dwaj towarzysze mają 8 kwart wina w dzbanku, mogącym właśnie pomieścić 8 kwart. Chcą oni podzielić tych 8 kwart wina na dwie części równe, i mogą do tego użyć jeszcze dwu dzbanków, z których jeden może pomieścić 5 kwart, drugi 3. Jak to wykonać?“

„41 osób, zarówno mężczyzn, jak kobiet i dzieci, bierze udział w obiedzie, który kosztuje razem 40 sous. Przytym płacono za każdego mężczyznę 4 sous, za każdą kobietę 3 sous i za każde dziecko $\frac{1}{3}$ sous. Ile było mężczyzn, ile kobiet i ile dzieci?“.

Bachet wypowiada twierdzenia ogólne w rodzaju następującego. Liczby, które względem dzielników danych mają jednakowe reszty, tworzą postęp arytmetyczny, którego różnicą jest najmniejsza wspólna wielokrotna tych dzielników. Wystarczy więc znaleźć tylko jednę z tych liczb, mniejszą od najmniejszej wspólnej wielokrotnej—co da się bezpośrednio zastosować do pierwszego z przytoczonych zadań.

Rozwiązanie trzeciego zadania w nowoczesnej pisowni tak się przedstawia:

Równania do rozwiązania są:

$$x + y + z = 41$$

$$4x + 3y + \tfrac{1}{3}z = 40.$$

Jeżeli $3y + \frac{1}{3}z = 40 - 4x$, to

$$9y + z = 120 - 12x,$$

a ponieważ $y + z = 41 - x$, więc po odjęciu otrzymujemy:

$$8y = 79 - 11x, \text{ czyli } y = 9\tfrac{7}{8} - 1\tfrac{3}{8}x,$$

$$z = 41 - x - y = 31\tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8}x.$$

Dla każdego dowolnie obranego x można więc znaleźć odpowiednie z i y. Ponieważ rozwiązania muszą być dodatnie, więc $9\frac{7}{8} - 1\frac{3}{8}x > 0$, skąd $x < 7\frac{2}{11}$; a ponieważ tylko całkowite wartości x odpowiadają warunkom zadania, można więc za x przyjmować wartości całkowite od 1 do 7. Przytym $31\frac{1}{8} + \frac{3}{8}x$ musi być również liczbą całkowitą, a więc $1 + 3x$ musi być podzielne przez 8; ten warunek spełnia $x = 5$, skąd $y = 3$, $z = 33$.

W drugim wydaniu „Problèmes plaisans" jest szereg twierdzeń ogólnych, jak np. twierdzenie, że jeżeli liczby a, b, c... nie mają czynników wspólnych, i jeżeli n_1 i n_2 są liczbami mniejszemi od iloczynu abc..., a po podzieleniu każdej z nich przez a, b, c... pozostają reszty $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$... i $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$..., to układy tych reszt muszą się różnić jeden od drugiego.

Dzieła Bacheta wywarły znaczny wpływ na F e r m a t a, który posunął się bardzo daleko w badaniu własności liczb całkowitych. Fermat prowadził ożywioną korespondencję w tym przedmiocie z wieloma uczonemi, jak Descartes, Pascal, F r é n i c l e d e B e s s y (1602? — 1675), dzięki czemu wytworzyło się pewne współpracownictwo. Jednakże pomimo to bardzo mało mamy wiadomości o tym, jaką drogą Fermat dochodził do swoich znakomitych odkryć, stanowiących i dziś jeszcze punkt wyjścia do dalszych badań. Same rezultaty, bez dowodzeń, pozostały we wspomnianych listach oraz pod postacią krótkich uwag, zanotowanych na marginesie egzemplarza „Dyofanta" w wydaniu Bacheta. Uwagi te zostały wydrukowane w nowym wydaniu Dyofanta, dokonanym już po śmierci Fermata, w roku 1670, przez jego syna. Inne notatki oraz listy wydane zostały w r. 1679 p. t. „Opera varia". Fermat do tego stopnia przewyższał innych matematyków, pracujących w tej gałęzi wiedzy, że nietylko nie możemy dziś zrozumieć, jaką drogą doszedł do swych rezultatów, ale nawet, pomimo licznych wysiłków najwybitniejszych uczonych, niektóre z jego twierdzeń do dziś jeszcze nie zostały ani dowiedzione, ani obalone.

Stosownie do zwyczaju ówczesnego Fermat posyłał innym uczonym zadania do rozwiązania. Zadania takie często były dawane w celu przekonania się, czy inni matematycy posiłkowali się metodami ogólnemi, czy też jedynie odpowiednio ułożonemi tablicami. Dlatego też Fermat nieraz umyślnie stawiał żądania niemożliwe do wypełnienia, jak np. znaleźć trójkąt prostokątny z bokami wymiernemi, którego pole mierzy się liczbą kwadratową, lub też znaleźć dwie czwarte potęgi, których suma jest również czwartą potęgą.

Frénicle sądził, że do tej kategorji zaliczyć należy następujące zadanie Fermata: znaleźć trójkąt prostokątny, w którym zarówno przeciwprostokątna, jak i suma przyprostokątnych, są liczbami kwadratowemi. Tymczasem Fermat posłał mu prawdziwą odpowiedź: boki trójkąta szukanego są: 4687 298 610 289; 4565 486 027 761; 1061 652 293 520.

Z twierdzeń Fermata największą sławę zyskało następujące:

„Niemożliwym jest rozłożyć sześcian na dwa sześciany, czwartą potęgę na dwie czwarte potęgi, i wogólności jakąkolwiek potęgę, z wyjątkiem kwadratu, na dwie potęgi z tym samym wykładnikiem. Na to odkryłem prawdziwie cudowny dowód, ale margines jest zbyt wązki, ażeby go pomieścić".

To znaczy: równanie

$$x^n + y^n = z^n$$

przy wymiernych wartościach x, y, z nie da się rozwiązać dla innych wartości całkowitych n, jak tylko $n=2$.

Jakiego rodzaju był dowód tego twierdzenia, o tym nie mamy żadnego wyobrażenia. Późniejszym matematykom nie udało się dotychczas dowieść go w całej rozciągłości, ale liczne próby, podejmowane w tym kierunku, każą przypuszczać, że ono jest prawdziwe[1]). Można mniemać, że Fermat mylił się, sądząc, że ma dowód zupełny. Takie mniemanie usprawiedliwiłby do pewnego stopnia fakt, że jedno z twierdzeń, podanych przez Fermata, jest błędne; sam Fermat zresztą miał pewną wątpliwość, co do dostateczności posiadanego dowodu owego twierdzenia. Mam tu na myśli twierdzenie, podane w r. 1654 w liście do Pascala, opiewające, że $2^{2^n}+1$ zawsze jest liczbą pierwszą.

Fermat daje następujące przykłady: $2^2+1=5$, $2^4+1=17$, $2^8+1=257$, $2^{16}+1=65537$, i pisze dalej: „Jest to własność, za której prawdziwość ręczę; dowodzenie jest bardzo nieprzyjemne i przyznaję, że nie mogłem go jeszcze w zupełności wykonać. Nie proponowałbym Panu poszukiwania dowodu, gdybym sam z nim się był załatwił“. Gdyby Fermat obliczył z kolei następną liczbę tej postaci, uniknąłby błędu, gdyż $2^{32}+1=4294967297=$ $=641\times6700417$.

Inne słynne twierdzenie, znane pod nazwą twierdzenia Fermata, głosi, że każda liczba pierwsza n, która nie jest dzielnikiem liczby a, jest dzielnikiem liczby $a^{n-1}-1$.

Na uwagę zasługuje również zadanie Fermata, żądające rozwiązania równania

$$ax^2+1=y^2$$

w liczbach całkowitych. Nie wiadomo, jak Fermat rozwiązywał to równanie. Późniejsze rozwiązanie, znalezione przez Brounckera i Wallisa, mylnie przypisano Pell'owi, dzięki czemu zagadnienie to nosi dziś miano równania Pella. — Zadaniem tym zajmowali się już Grecy starożytni, a później Indusi.

Ogólne zainteresowanie analizą nieskończonostkową odsunęło badania nad liczbami całkowitemi na plan dalszy i przez długi czas ważniejszych odkryć w tym kierunku nie dokonano. Dopiero około połowy w. XVIII Leonard Euler (1707—1783) ogłosił w rocznikach Akademji Petersburskiej szereg prac, stanowiących dalszy ciąg badań Fermata. Spotykamy tu dowodzenia

[1]) Najdalej w tym względzie posunął się Edward Kummer (1810 — 1893), który dowiódł prawdziwości powyższego twierdzenia dla bardzo obszernych grup wykładników. Dowiódł on między innemi, że twierdzenie Fermata jest prawdziwe dla wszystkich wykładników mniejszych od 100. Odpowiednie prace Kummera były drukowane w „Journal für Mathematik“ w latach 1837 i 1850.

niektórych twierdzeń Fermata; dowód niemożliwości rozwiązania równania $x^n + y^n = z^n$ przy $n = 3$ i 4; sprostowanie w sposób przypadkowy mylnego twierdzenia, że $2^{2^n} + 1$ jest zawsze liczbą pierwszą; liczne badania nad podzielnością liczb; rozwiązanie ogólne równania nieoznaczonego st. 2-go i t. d.

Józef Ludwik Lagrange (1736—1813) dowiódł, że każda liczba da się przedstawić pod postacią sumy czterech lub mniejszej ilości kwadratów liczb pierwszych. Jemu również zawdzięczamy ścisły dowód, że równanie $x^2 - ay^2 = 1$ da się zawsze rozwiązać w liczbach całkowitych, oraz wiele twierdzeń o liczbach pierwszych.

W dalsze szczegóły, dotyczące teorji liczb, wdawać się tu nie możemy, odsyłamy natomiast czytelnika do prac następujących:

P. G. Lejeune-Dirichlet. Vorlesungen über Zahlentheorie, wyd. R. Dedekinda, Brunświk. Wyd. 4-te, 1894.

P. Bachmann. Zahlentheorie w 3-ch częściach; część I: „Die Elemente der Zahlentheorie" str. XII, 264. Lipsk 1892, cena M. 6.40.

O wyższej teorji liczb (teorji ciał liczbowych) traktuje:

D. Hilbert. Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1897.

Rachunek prawdopodobieństwa.

Metoda rachunku prawdopodobieństwa powstała przy rozważaniu wartości wypłat warunkowych. Ktoś płaci pewną sumę i wzamian za to ma otrzymać inną sumę, lub jej nie otrzymać, zależnie od tego, czy jakieś z góry określone zdarzenie odbędzie się, czy się nie odbędzie. Jaka powinna być zależność między obiema sumami? Tego rodzaju zagadnienia nastręczały się oddawna przy grach i zakładach. W wieku XVII, kiedy w Holandji weszły w życie renty dożywotnie, zrodziło się poważniejsze pytanie: ile należy zapłacić, ażeby otrzymać prawo pobierania takiej renty?

Pierwsze zadanie tego rodzaju, mające znaczenie historyczne rozwiązał Pascal, którego i w innych rozdziałach spotykaliśmy jako jednego z najpierwszych. Lubił on grać, ale niekiedy spędzał czas przy grze w kości pożyteczniej, aniżeli wielu innych przy mozolnym ślęczeniu nad książką. Jeden z towarzyszów gry dał mu do rozwiązania zadanie tej treści: pewną sumę otrzyma ten z dwu graczy, który wygra oznaczoną liczbę partji. Po kilku partjach gra zostaje przerwana przed rozstrzygnięciem; pytanie, jak należy podzielić sumę, która była do rozegrania? Pascal rozwiązuje to zadanie w następujący sposób. Przypuśćmy, że gra ma być rozstrzygnięta przez trzykrotną wygraną, i że podział dokonywa się w chwili, kiedy jeden z graczy *A* wygrał raz jeden, drugi *B* wcale nie wygrał. Gdyby *A* miał dwie wygrane, *B* jedną, to przy następnej grze mogłoby się zdarzyć, że *A* znowu wygra, zdobywając tym sposobem całą stawkę, lub też *B* wygra i zrówna się przez to z *A*, zdobywając prawo do połowy stawki. *A* otrzyma więc w każdym razie połowę stawki; pozostaje do rozegrania druga połowa, którą należy podzielić równo między obu graczów, jeżeli gra zostanie przerwaną; *A* otrzymałby zatem $^3/_4$, *B* $^1/_4$ stawki. Gdyby *A* miał za sobą dwie wygrane, zaś *B* żadnej, wtedy przy nowej partji *A* może wygrać i zdobyć całą stawkę, lub też *B* może wygrać;—i wtedy powrócilibyśmy do poprzedniego przypadku, w którym *A* otrzymuje $^3/_4$ stawki; taką sumę zdobędzie on więc w każdym razie, do rozegrania zaś pozostaje tylko $^1/_4$, którą należy równo podzielić w razie zaprzestania dalszej gry; *A* należy się więc $^7/_8$, *B* $^1/_8$ stawki. Jeżeli wreszcie, jak tego wymagają warunki zadania, *A* miał jedną wygraną, *B* żadnej, to przy następnej partji, jeżeli *A* wygra, otrzymamy poprzedni przypadek, w którym *A* dostałby $^7/_8$ stawki, gdyby zaś *B* wygrał, wtedy obaj gracze staliby jednakowo, i każdy dostałby połowę; w tej partji rozstrzyga się więc należność wynosząca $^7/_8 - ^1/_2 = ^3/_8$ stawki, z czego, w razie jeżeli gra nie dojdzie do skutku, każdemu graczowi należy się połowa, czyli $^3/_{16}$ stawki. Całą stawkę należy więc podzielić w ten sposób, że *A* dostanie $^{11}/_{16}$, *B* $^5/_{16}$.

Rozwiązanie to pochodzi z r. 1654. Później Pascal znalazł inne za pomocą t. zw. trójkąta arytmetycznego, noszącego jego imię a obmyślonego przezeń już dawniej. Pascal układa swój trójkąt w taki sposób. W szeregu poziomym umieszcza pewną ilość jedynek, każdą w oddzielnej kratce; drugi szereg poziomy ma o jedną kratkę z prawej strony mniej od pierwszego, trzeci o jednę mniej od drugiego, i t. d. W pierwszej kratce każdego szeregu jest jedynka, zaś w każdej z pozostałych liczba, równa sumie liczby, położonej z lewej strony, oraz liczby, leżącej nad tą kratką. Np. w czwartej kratce trzeciego szeregu jest umieszczona suma $6+4=10$. Przekątne tych kratek, idące od lewej strony z dołu ku prawej u góry, tworzą tak zwane podstawy trójkąta.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Oznaczając liczbę, umieszczoną w k-tej kratce r-tego szeregu przez $(r)_k$, i, co za tym idzie, przez $(r)_{k-1}$ liczbę, położoną z lewej strony, a przez $(r-1)_k$ — położoną nad liczbą $(r)_k$, można wyrazić sposób tworzenia trójkąta Pascala przez równanie:

$$(r)_k = (r-1)_k + (r)_{k-1}.$$

(Pascal tego sposobu pisania nie znał; wskaźniki (indices) zostały wprowadzone dopiero później przez Leibniza). Powyższa zasada wyraża się u Pascala tak: „le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle.“ Pascal stosował swój trójkąt do wyznaczania liczby połączeń (kombinacji); łatwo zauważyć, że wszystkie liczby, leżące wzdłuż jednej z podstaw trójkąta, są liczbami wszystkich połączeń z jednej i tej samej ilości elementów. Pascal zna ważniejsze własności tych liczb, jak np.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

gdzie $\binom{n}{k}$ oznacza liczbę połączeń z n elementów po k.

Ten układ liczb daje Pascalowi możność rozwiązania powyżej wzmiankowanego zadania jeszcze innym sposobem, przy zastosowaniu indukcji zupełnej. [1])

Fermat, który jednocześnie z Pascalem pracował w tym kierunku, tak rozwiązywał tož same zadanie: jeżeli 3 partje wygrane decydują, i jeżeli A wygrał 1, B 0 partji, to najwyżej po 4 dalszych partjach stawka zostanie rozegraną. Jeżeli każdą partję, wygraną przez A, oznaczymy literą a, i odpowiednio przez b partję, którą wygrywa B, to możliwych jest 16 następujących przypadków: *aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb, baaa, baab, baba, babb, bbaa, bbab, bbba, bbbb*. Z tych 5 jest korzystnych dla B i 11 dla A: w tym stosunku należy więc podzielić stawkę.

Christian Huygens (1629—1695) stara się sprowadzić rozwiązanie zagadnień tego rodzaju do wyliczenia średniej arytmetycznej. Jeżeli w p przypadkach do wypłaty przypada suma a, zaś w q innych przypadkach suma b, to w każdym poszczególnym przypadku wartość oczekiwania [2]) (aestimatio exspectationis) wyniesie $\frac{ap+bq}{p+q}$. Jeżeli ktoś za wyrzucenie kością szóstki ma otrzymać wygraną a, to z sześciu możliwych przypadków jeden daje sumę a, pozostałe 0, wartość oczekiwania jest więc $\frac{1.a+5.0}{1+5}=\frac{a}{6}$. Dalej Huygens postępuje w sposób Pascalowski: jeżeli ktoś ma prawo rzucić kość dwa razy, to w jednym z możliwych sześciu przypadków za pierwszym rzutem otrzyma on wygraną a, w każdym pozostałym przypadku może mieć nadzieję wygrania w drugim rzucie; wartość tej nadziei jest $\frac{a}{6}$, więc „aestimatio exspectationis" wyrzucenia szóstki w jednym z dwu rzutów będzie:

$$\frac{1.a+5.\frac{a}{6}}{1+5}=\frac{11}{36}a.$$

[1]) Przy sposobności nadmieniam, że Pascal pierwszy używał metody indukcji zupełnej.

[2]) Pojęcie to obecnie nazywamy „nadzieją matematyczną."

Tej samej metody Huygens używa i w bardziej złożonych przypadkach.

Ogólniejsze obliczanie prawdopodobieństw stało się możliwe dzięki kombinatoryce, opracowanej przez Leibniza. Nie miał on na celu rozpatrywania zagadnień praktycznych; jego „Ars combinatoria“ stanowiła raczej drobną cząstkę bardzo szeroko zakreślonych planów nauki ogólnej (scientia generalis), obejmującej wszystkie gałęzie wiedzy ludzkiej i za pomocą której wszelkie myśli byłyby wyrażane z taką samą ścisłością, jak w matematyce przez wzory algiebraiczne. Plan ten oczywiście nie był urzeczywistniony; ale poszczególne próby, podjęte przez Leibniza w tym kierunku, stanowią bardzo cenny materjał zarówno pod względem filozoficznym, jak i matematycznym.

Leibniz oblicza ilość możliwych połączeń różnych pojęć i rozpatruje „variationes“ (podług dzisiejszej terminologji: permutacje, przestawienia, przemiany) i „complexiones“ (kombinacje, połączenia), znajdując szereg nowych twierdzeń.

Jednocześnie z temi dociekaniami abstrakcyjnemi powstaje bardzo realne zagadnienie: ile kosztować powinno prawo otrzymywania renty dożywotniej w oznaczonej wysokości? Renty takie były już w użyciu, ale obliczano je na podstawie założeń, nie uzasadnionych dostatecznie. Jan de Witt (1625—1672) w pracy swej, zatytułowanej: „Wartość rent dożywotnich w stosunku do rent zwyczajnych“ (Waerdge van lyfrenten nar proportie van losrenten, 1671) wychodzi z dowolnego założenia, że w czasie od 4 do 53 roku życia jednakowo jest prawdopodobne, że ktoś umrze w roku następnym lub że nie umrze. Od 54 do 64 lat prawdopodobieństwo przeżycia roku stanowić ma $^2/_3$ poprzedniego, od 64 do 74 lat $^1/_2$, od 74 do 81 lat $^1/_3$; ludzi mających więcej niż 81 lat jest tak mało, że można ich nie brać w rachubę. Na tej zasadzie Witt oblicza wartość renty, przyjmując procent składany 4%.

Znacznie więcej ścisłości wprowadził do podobnych rachunków Edmund Halley (1656—1742) przez swoją rozprawę, zatytułowaną: „An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives“ (1693). Halley oparł swoje obliczenia na wykazach urodzeń i śmierci we Wrocławiu w ciągu pięciolecia 1687—1691.

Okazało się, że liczba urodzeń nieznacznie tylko przewyższała liczbę wypadków śmierci, oraz że różnica ta pozostawała z roku na rok prawie bez zmiany (średnio 64). Z wykazów wynika, że z 1238 noworodków 348 umiera w ciągu pierwszego roku, pozostałych 890 rozpoczyna drugi rok życia; z każdego 1000 osiągnie więc drugi rok 855. Podobnie można wyliczyć, że z 855 dzieci dwuletnich 798 dożyje trzeciego roku i t. d. Stąd można wnosić, że na każde 1000 noworodków przypada osób

w 1 roku życia	1000
2 „ „	855
3 „ „	798
. . . .	
82 „ „	28
83 „ „	23
84 „ „	20
Razem	34000.

Halley przyjmuje, że ta suma 34000 przedstawia ilość mieszkańców miasta, przypadającą na każde 1000 noworodków rocznie; to przypuszczenie byłoby oczywiście tylko wtedy słuszne, gdyby liczba urodzeń i śmierci od 84 lat pozostawała bez zmiany. Na zasadzie powyższej tablicy Halley oblicza prawdopodobieństwo przeżycia jednego roku dla osób różnego wieku; np. różnica między pierwszą i drugą liczbą jest 1000—855=145, skąd wypada, że dla dziecka, będącego w pierwszym roku życia, prawdopodobieństwo dożycia drugiego roku jest 145 : 855, albo w przybliżeniu 1 : 6. Z pośród 1238 noworodków tylko 616 dochodzi do 17 lat; nie można więc, podług Halleya, narzekać na przedwczesną śmierć, jeżeli ktoś umrze, mając więcej niż 17 lat wieku.

Taż sama tablica służy Halleyowi do obliczenia renty dożywotniej, a także prawdopodobieństwa przeżycia jednej osoby przez drugą, będącą w innym wieku.

Jakób Bernoulli (1654—1705) pierwszy napisał książkę, traktującą w ogólny sposób rachunek prawdopodobieństwa. Książka ta, zatytułowana „Ars conjectandi“, wydana została dopiero w r. 1713. Rozdział I zawiera pracę Huygensa o grze w kości z licznemi uzupełnieniami. W rozdziale II traktowaną jest kombinatoryka w sposób bardzo obszerny i w znacznej mierze nowy. W rozdziale III Jakób Bernoulli stosuje kombinatorykę do rachunku prawdopodobieństwa i rozwiązuje szereg poszczególnych zagadnień. Najważniejszy rozdział IV pozostał niedokończony. Tytuł jego zapowiada zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa do badania stosunków państwowych, moralnych i społecznych. Prawdopodobieństwo określa Bernoulli jako stopień pewności, od której ono się różni, jak część od całości (*probabilitas est gradus certitudinis et ab hoc differt ut pars a toto*). W zastosowaniach do badań różnych zjawisk nie można się posiłkować prawdopodobieństwem *a priori*, gdyż tutaj nie da się, jak przy grach, obliczyć ilości sprzyjających i wogóle możliwych wypadków; można jednak wywnioskować prawdopodobieństwo *a posteriori* przez porównanie z licznemi podobnemi przypadkami (*quod a priori elicere non datur, saltem a posteriori, hoc est ex eventu in similibus exemplis multoties observato eruere licebit*). Bernoulli wypowiada i udowadnia t. zw. *prawo wielkich liczb*, do którego doprowadziło go badanie, czy przy gromadzeniu coraz większej ilości spostrzeżeń prawdopodobieństwo wykrycia właściwego stosunku pomiędzy ilością sprzyjających i niesprzyjających wypadków tak wzrasta, że przewyższa każde dane prawdopodobieństwo, czy też zadanie to, według słów Bernoulliego „ma niby asymptotę."

Powyższe prawo zostało uogólnione przez Poisson'a (1781—1840) w r. 1836

Dalszy swój rozwój teorja prawdopodobieństwa zawdzięcza pracom Moivre'a, Euler'a, Daniela Bernoulliego, Lagrange'a, Laplace'a i Gaussa. W szczególności Laplace dał uważane dziś za klasyczne określenie prawdopodobieństwa: nazywamy prawdopodobieństwem jakiegoś zdarzenia ułamek, którego licznik jest liczbą wypadków, sprzyjających danemu zdarzeniu, a mianownik — liczbą wszystkich wypadków w założeniu, że one są jednakowo możliwe. Nowsze badania nad teorją prawdopodobieństwa nie nadają się do krótkiego zreferowania. Czytelnicy znajdą wskazówki historyczne w dziele W. Gosiewskiego p. t. „Zasady rachunku prawdopodobieństwa" (Warszawa 1906, str. XIV, 265), zawierającym też szczegółowy wykaz prac, dotyczących tego przedmiotu.

Uogólnienia.

W szkicu, który rozwinęliśmy w poprzednich rozdziałach, staraliśmy się wykazać, jak pod wpływem zagadnień z życia praktycznego lub z nauk doświadczalnych powstawały nowoczesne metody matematyczne. Okazało się przytym, że tak różnorodne dziedziny, jak np. astronomja i malarstwo, prowadzą wspólnie do teorji przecięć stożkowych; gra w kości zblazowanych próżniaków, troska skrzętnych pracowników o byt rodziny i dociekania głębokiego myśliciela, pragnącego stworzyć naukę powszechną, stają się źródłami metody rachunku prawdopodobieństwa. Metoda, która powstała z najróżnorodniejszych źródeł, musi się posiłkować bardzo ogólnym językiem i wytworzyć sobie własny świat pojęć oderwanych. Świat ten będzie w ogólności tym bardziej abstrakcyjny, im liczniejsze i różnorodniejsze będą jego zastosowania praktyczne; często zatraca się zupełnie właściwe pochodzenie metody, czasami jest ono dostrzegalne tylko dzięki jakiejś pozostałości językowej czy innej, jak np. zgodność pomiędzy nazwami niektórych palców i niektórych liczb, dająca się wykryć w wielu językach, lub też podział okręgu koła na 360 stopni, równych w przybliżeniu łukowi, jaki opisuje w ciągu dnia słońce na ekliptyce. [1])

Pojęcia, tak utworzone, dzięki stopniowemu uogólnianiu metod lub dzięki rozszerzaniu zakresu badań, stają się z biegiem czasu same przedmiotem badań, często bez względu na to, czy można spodziewać się stąd wyników, dających się zastosować w praktyce, czy też nie.

Cele, do których matematyka dąży w tych badaniach, można podzielić na trzy główne grupy:

1) Poznanie własności pojęć już utworzonych i związków między niemi. Przykłady takich dążeń spotykaliśmy w każdym rozdziale tego artykułu.

2) Tworzenie nowych pojęć, ogólniejszych, dzięki którym powstają nowe metody lub nauki o szerszym zakresie. Za przykład może służyć nauka o mnogościach (Mengenlehre), względem której nauki o liczbach i elementach gieometrycznych są tylko szczególnemi przypadkami. Tę naukę zapoczątkował G. C a n t o r, który ogłosił w *Journal für Mathematik* i w *Mathematische Annalen* szereg prac w tym przedmiocie. O innych przykładach później będzie mowa.

---

[1]) Porów. str. 182.

3) Oparcie całokształtu wiedzy matematycznej na jak najracjonalniejszym, a więc możliwie prostym i jednocześnie ścisłym układzie pojęć zasadniczych, faktów doświadczalnych i założeń dowolnych, z których można odbudować, jako konieczną konsekwencję, całą naukę w jej stanie dzisiejszym. Dążeniem jest przytym unikać powoływania się na źródła, z których ta wiedza faktycznie powstała, a które niezawsze dadzą się wykryć, i rzadko prowadzą najprostszą drogą do celu. Ta praca u podstaw jest cechą dzisiejszej doby w rozwoju matematyki i do historji jeszcze nie należy. Jako przykład można wymienić to, co Kronecker nazwał arytmetyzacją matematyki, jak również ciągłe doskonalenie układu pewników gieometrycznych.

Zbytecznym byłoby udowadniać, że do wszystkich tych trzech głównych celów nauka dąży wspólnemi drogami, oraz że pod wpływem wzmiankowanej „pracy u podstaw" niektóre pojęcia i teorje matematyczne ulegają stopniowym zmianom.

Rozpatrzymy teraz w krótkości dwa wybitne przykłady uogólnień matematycznych i podstaw, które do nich zostały następnie dostosowane. Mówić będziemy o liczbach urojonych i o gieometrjach nieeuklidesowskich.

Cardano[1]) wprowadził liczby urojone do rachunku, rozwiązując zagadnienie: rozłożyć liczbę 10 na dwie części, których iloczyn = 40. Znajduje on, że szukane liczby są $5+\sqrt{-15}$ i $5-\sqrt{-15}$, i sprawdza ten rezultat przez mnożenie, dodaje jednak, że są to wielkości „sofistyczne", których znaczenia nie można badać.

Powodzenie usprawiedliwiło ten krok. Wiele zadań, nie dających się rozwiązać w układzie liczb rzeczywistych, stało się teraz rozwiązalnemi. Nie szukając, lub nie znajdując odpowiedzi na pytanie, czym są takie liczby, zaczęto coraz częściej niemi operować. Okazało się, że działania nad niemi, wzorowane na zwykłych działaniach algiebraicznych, nie prowadzą do niekonsekwencji i że za ich pośrednictwem można ustanowić związek między różnemi funkcjami. Euler w swojej „Introductio" wykrył tym sposobem związek między funkcją wykładniczą i funkcjami goniometrycznemi, później zaś określił logarytmy liczb ujemnych i wykazał, że logarytm jest funkcją okresową.

---

[1]) Porów. str. 176.

Wobec tych wyników byt liczb urojonych w matematyce stał się zapewnionym; ale ciągle jeszcze nie umiano sobie wytłumaczyć, co one znaczą. C. F. Gauss obiecywał uzasadnić wprowadzenie ich, obietnicy jednak nie wypełnił; za to pozostawił ilustrację gieometryczną liczb urojonych, czyli zespolonych, jak je później nazywał, podporządkowując każdej liczbie $x + y\sqrt{-1}$ punkt na płaszczyźnie, mający spółrzędne x, y. Tym sposobem liczby urojone zyskały odwzorowanie rzeczywiste.

Dalej jeszcze posunął się w tym względzie W. R. Hamilton, który (w r. 1837) określił liczby zespolone arytmetycznie, odbierając im zupełnie dotychczasowy charakter tajemniczy. Wprowadza on parę liczb (a, α), która w szczególnym przypadku, jeżeli druga liczba α jest zerem, staje się równą pierwszej liczbie a, t. j. $(a, 0) = a$; dwie pary (a, α) i (b, β) nazywa równemi, jeżeli $a = b$ i $\alpha = \beta$; suma dwóch par określa się za pomocą wzoru:

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta),$$

zaś iloczyn przez wzór

$$(a, \alpha).\ (b, \beta) = (ab - \alpha\beta,\ a\beta + b\alpha).$$

Przyjmując wyrażenie $a + i\alpha$ jedynie za inny sposób oznaczania pary (a, α), napiszemy ostatni wzór tak:

$$(a + i\alpha).\ (b + i\beta) = ab - \alpha\beta + (a\beta + b\alpha)\, i$$

skąd w szczególnym przypadku przy $a = b = 0$, $\alpha = \beta = 1$ łatwo wyprowadzić znaną skądinąd zależność:

$$i.\ i = i^2 = -1.$$

Jak widzimy, liczby zespolone można z powodzeniem zastąpić przez Hamiltonowskie pary liczb; ten ostatni system ma tę wyższość nad pierwszym, że nie daje powodów do jakichkolwiek wątpliwości.

Odmienne zupełnie są dzieje gieometrji nieeuklidesowskich. Te uogólnienia nie powstały przy rozwiązywaniu zagadnień, ale raczej przy próbach ściślejszego uzasadnienia gieometrji. Już w starożytności uważano, że postulat V „Elementów“ Euklidesa nie jest dość oczywisty, ażeby go można było przyjąć bez dowodzenia. Postulat ten brzmi:

„Jeżeli dwie proste, leżące na jednej płaszczyźnie, tworzą z trzecią prostą, po tej samej jej stronie kąty, których suma jest mniejsza od dwu kątów prostych, to dane 2 proste, dostatecznie przedłużone, spotykają się.“

Jest on równoważny twierdzeniu, że przez punkt, leżący zewnątrz prostej, można poprowadzić tylko jedną równoległą do tej prostej.

Wybitni matematycy różnych epok starali się znaleźć dowodzenie tego postulatu, ale wszelkie usiłowania okazały się bezskutecznemi i prowadziły co najwyżej do zastąpienia go innym równoważnym pewnikiem lub postulatem. W a l l i s np. znalazł, że postulat V da się dowieść, jeżeli przyjmiemy za pewnik, że do każdego trójkąta można zbudować dowolnej wielkości trójkąt podobny. Do tegoż samego rezultatu doszedł później G a u s s, jak to widać z listu, pisanego w r. 1799 do W o l f g a n g a B o l y a i (1775—1856), który również próbował sił swoich w tym kierunku. Oto wyjątek z listu:

„Ja sam w pracach swych nad tym przedmiotem daleko się posunąłem, ale droga, na którą wszedłem, prowadzi nie tyle do celu pożądanego, a który osiągnąłeś, jak to zapewniasz, ile raczej do wzbudzenia wątpliwości w prawdziwość gieometrji.

„Wprawdzie to, na co natrafiłem, uchodziłoby u wielu za dowód, ale w moich oczach dowodzi to tyleż co i nic.

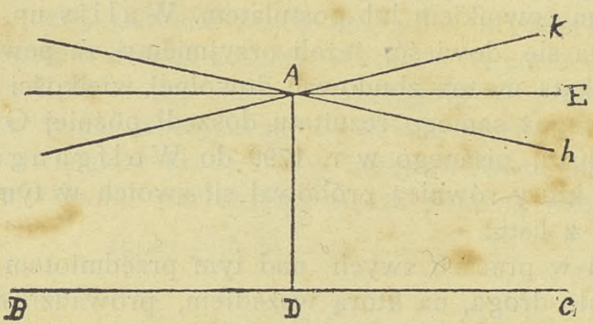
„Naprzykład gdyby można było dowieść, że jest możliwy trójkąt prostolinjowy, którego pole byłoby większe, aniżeli każde pole dane, wtedy byłbym w stanie całą gieometrję dowieść zupełnie ściśle.

„Większość zgodziłaby się uważać to za pewnik, ja nie; byłoby przecież możliwe, że jakkolwiek daleko jeden od drugiego przyjąć wierzchołki trójkąta w przestrzeni, jednakże pole zawsze pozostawałoby mniejsze od pewnej danej granicy.“

Zwątpienie, o którym Gauss wspomina, zaczęło powstawać również w umysłach innych matematyków. Zrodziło się pytanie, czy gieometrja, którą Euklides nam pozostawił, jest jedynie możliwa, czy też można zbudować inną gieometrję, niezależną od postulatu V? Odpowiedź, stwierdzającą tę drugą możliwość, dali M i k o ł a j Ł o b a c z e w s k i j (1793—1856), J a n B o l y a i (1802—1860) i B e r n h a r d R i e m a n n (1826—1866).

W gieometrji Euklidesa pierwszych 28 twierdzeń dowodzi się bez pomocy postulatu V; te twierdzenia pozostają więc bez zmiany. Dalej jednak Łobaczewskij przyjmuje hipotezę, że, mając na płaszczyźnie prostą BC i punkt A, nie leżący na tej prostej, można przez punkt A poprowadzić nieskończęnie wiele prostych, nie przecinających prostej BC i leżących w tej samej płaszczyznie. Wszystkie te proste są odgraniczone od prostych, przecinających BC, dwiema prostemi h i k, które również prostej BC nie przecinają. W gieometrji Euklidesa kąt, utworzony przez prostą AE, równoległą do BC, i prostą AD, prostopadłą do BC, jest kątem

Rys. 9.



prostym; u Łobaczewskiego proste h i k tworzą z AD kąty ostre, leżące po przeciwnych stronach tej ostatniej prostej; wielkości tych kątów są zależne od odległości AD. Łatwo stąd wyprowadza się wniosek, że suma kątów w trójkącie jest mniejsza od dwu prostych.

Łobaczewskij wyprowadza wzory trygonometryczne, odpowiadające powyższemu założeniu; wzory trygonometrji, oparte na gieometrji euklidesowskiej, stanowią przypadek szczególny tamtych. Pragnąc wreszcie zbadać, jaki jest stosunek tej hipotezy do faktów doświadczalnych, Łobaczewskij rozpatruje bardzo wielkie trójkąty, z jakiemi ma do czynienia astronomja. Z badania trójkąta, którego wierzchołkami są Słońce, Ziemia i Syrjusz, wynika, że jeżeli ten trójkąt różni się od euklidesowskiego, to w każdym razie różnica ta musiałaby być bardzo nieznaczna. Dla tego też Łobaczewskij widzi się zmuszonym przyjąć, że w granicach, zakreślonych przez doświadczenie, postulat Euklidesa jest prawdziwy.

Ażeby nie wzbudzać wątpliwości, zaznaczyć tu wypada, że doświadczalnie niepodobna stwierdzić własności przestrzeni, lecz tylko własność materji. Trójkąt Słońce-Ziemia-Syrjusz nie jest trójkątem matematycznym, ale raczej jego podobizną materjalną. To też spostrzeżenia Łobaczewskiego nie dowodzą bynajmniej, ażeby przestrzeń koniecznie musiała być euklidesowską, lub co najwyżej nieznacznie różnić się od niej; stwierdzają one jedynie, że gieometrja euklidesowska, która powstała z jak najprostszych doświadczeń i która tak dobrze opisuje zjawiska, wywoływane końcem ołówka na kawałku papieru, nadaje się równie dobrze do opisywania o wiele potężniejszych zjawisk, odbywających się w przyrodzie. Ale jeżeli ta gieometrja jest w praktyce najdogodniejsza, to nie staje się ona przez to „prawdziwszą" od innych, podobnie jak prostokąt nie jest „prawdziwszy" od płaszczyzny, jakkolwiek pierwszy można zmodelować cały, drugiej tylko część, znikomo małą w porównaniu z całością. [1])

Inną gieometrję obmyślił Riemann. Przyjmuje on, że niema na płaszczyźnie dwu prostych, nie przecinających się. Linje proste nie są nieskończenie długie, ale są linjami zamkniętemi, podobnie jak koła wielkie na powierzchni kuli. Do zbudowania tej gieometrji posłużyły badania nad najkrótszemi linjami (gieodetycznemi), jakie dadzą się przeprowadzić na powierzchni krzywej od jednego jej punktu do drugiego. Okazało się, że niektóre powierzchnie mogą być uważane pod wieloma względami za odwzorowanie euklidesowskie płaszczyzn nieeuklidesowskich; jednakże w nowszych czasach dowiedziono (Hilbert, Liebmann), że niema w przestrzeni euklidesowskiej powierzchni, którąby miała wszystkie cechy płaszczyzny nieeuklidesowskiej.

Wymieniam dla przykładu dwa twierdzenia, wynikające z hipotezy Riemanna:

1. Suma trzech kątów trójkąta jest większa od dwu kątów prostych.

2. Wszystkie proste, prostopadłe do jednej prostej, przecinają się w jednym punkcie.

Łatwo spostrzec, że gieometrja Euklidesa, w której suma kątów trójkąta równa się dwu prostym, zajmuje miejsce pośrednie między gieometrjami Riemanna i Łobaczewskiego.

Prace Riemanna położyły kres wysiłkom, ciągnącym się przez dwadzieścia stuleci, wynika z nich bowiem, że postulat V Euklidesa jest od innych postulatów i pewników niezależny, że przeto

---

[1]) Porów. *Poincaré.* Nauka i hipoteza, rozdz. III (Gieometrje nieeuklidesowskie).

dowiedzionym być nie może. Nie powinna być brana w rachubę mniejsza lub większa oczywistość pewnika, jak mniemali starożytni, lecz jedynie jego zależność lub niezależność od innych pewników.

Powodzenie zachęciło do innych prób w tym rodzaju. W rezultacie, głównie pod wpływem F. Kleina, który zachęcał do poddania i innych pewników podobnej krytyce, powstał cały szereg różnych gieometrji o dowolnym ugrupowaniu pewników. Pracują nad tym obecnie Hilbert, Dehn i inni; gieometrja euklidesowska jest traktowana, jako bardzo szczególny przypadek gieometrji ogólnej.

Jednocześnie zakres badań gieometrycznych zostaje rozszerzony w dwu innych kierunkach, przez wprowadzenie przestrzeni („rozmaitości") wielowymiarowych oraz elementów urojonych. Nie można określić, kiedy powstała myśl o gieometrji wielowymiarowej; była ona przewidywana już dawniej, ale formę matematyczną nadał jej dopiero Riemann. Jego „rozmaitości" (Mannigfaltigkeiten) wielowymiarowe dadzą się popularnie tak przedstawić. Linja prosta, którą mierzymy tylko w jednym kierunku, jest rozmaitością jednowymiarową punktów. Wyobraźmy sobie punkt, nie leżący na danej linji prostej, i połączmy go ze wszystkiemi jej punktami linjami prostemi; powstanie rozmaitość jednowymiarowa prostych, która wypełnia całkowicie płaszczyznę; a ponieważ każda prosta jest rozmaitością jednowymiarową punktów, — płaszczyzna więc będzie rozmaitością dwuwymiarową punktów. Obierając dalej jakikolwiek punkt, leżący zewnątrz płaszczyzny, i łącząc go ze wszystkiemi punktami płaszczyzny, otrzymamy rozmaitość dwuwymiarową prostych, wypełniającą całą przestrzeń, która więc będzie rozmaitością trójwymiarową punktów. Teraz pomyślmy, nie troszcząc się o wyobrażenia materjalne, punkt, leżący zewnątrz przestrzeni trójwymiarowej, i połączmy go prostemi ze wszystkiemi punktami tej przestrzeni. Powstanie rozmaitość trójwymiarowa prostych, z których każda jest rozmaitością jednowymiarową punktów; wszystkie te proste wypełnią więc nowy rodzaj przestrzeni, która będzie rozmaitością czterowymiarową punktów. Postępując tak w dalszym ciągu, można tworzyć rozmaitości o dowolnej liczbie wymiarów. Przestrzeń, której używamy do opisywania zjawisk w przyrodzie, stanowi przypadek szczególny tych rozmaitości: jest to rozmaitość trójwymiarowa punktów. Dla matematyka nie jest ona ani prawdziwsza, ani dogodniejsza do badania, aniżeli ogólna, n-wymiarowa.

Rozmaitości wielowymiarowe próbowano również stosować do opisywania zjawisk, odbywających się w przyrodzie. Podobnie, jak można na płaszczyznie rozpatrywać cienie lub przekroje brył, czy figur, położonych w przestrzeni, można też przez analogję uważać ciała, spotykane w przyrodzie, za coś w rodzaju cieniów lub przekrojów rozmaitości, położonych zewnątrz badanej przestrzeni; jednakże istotnych korzyści dla nauki tą drogą nie osiągnięto.

Elementy urojone wprowadzili do gieometrji Gaspard Monge (1746—1818) i J. V. Poncelet (1788—1867). Wychodzą oni z założenia, że pewne własności figur nie giną, jeżeli figury te poddawać stopniowo „zmianom ciągłym". Naprzykład prosta przecina okrąg koła w dwu punktach, wyznaczających na niej cięciwę. Jeżeli odsuniemy prostą od środka koła na odległość, większą od promienia, to punkty przecięcia znikną; można jednak pomyśleć sobie punkty przecięcia „idealne" i odpowiadającą im cięciwę „idealną", której długość można obliczyć metodą gieometrji analitycznej. Długość ta oczywiście wyrazi się liczbą urojoną.

Trwalszą podstawę tej teorji dał v. Staudt, stawiając i rozwiązując zagadnienie następujące: „elementy urojone określić za pomocą rzeczywiście istniejących tworów gieometrycznych, i to w taki sposób, ażeby one były zupełnie równouprawnione (gleichberechtigt) z elementami rzeczywistemi."

Punkt urojony określa v. Staudt za pomocą inwolucji szeregu punktów z parami rozdzielającemi się wzajemnie, a więc nie mającej punktów podwójnych. Podobne określenia otrzymują proste i płaszczyzny urojone. Dzięki tym określeniom elementy urojone gieometryczne zyskują równie realną podstawę, jak liczby urojone dzięki określeniom Hamiltona.

W analizie najnowszą fazę stanowi ścisły przegląd krytyczny pojęć zasadniczych liczby, funkcji, własności różnych funkcji i t. d. Coraz wyraźniej, zwłaszcza dzięki impulsom, danym przez Cauchy'ego, Kronecker'a, Weierstrass'a, Dirichlet'a, Dedekind'a i innych, występuje „arytmetyzacja matematyki"; prąd ten dąży do tego, by wszelkie definicje analizy oprzeć na związkach między liczbami naturalnemi. [1])

---

[1]) Porówn. *M. Feldblum*, Algiebra elementarna, Warszawa, 1907; rozdział: „Liczby niewymierne".

Czytelnika, któryby chciał bliżej zapoznać się z poruszonemi tu zagadnieniami, odsyłamy do dzieł następujących:

W. R. Hamilton. Lectures on quaternions. Dublin, 1853.

J. V. Poncelet. „Traité des propriétés projectives des figures,“ Paryż, 1822, wyd. II—1865—1866.

v. Staudt. Beiträge zur Geometrie der Lage. Część I. Norymberga, 1856.

Augustin Cauchy. Cours d'analyse de l'école polytechnique. Paryż, 1821.

Dirichlet-Dedekind. Vorlesungen über Zahlentheorie, wyd. 4. Brunświk, 1894.

L. Kronecker. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Berlin, 1882.

F. Klein. Ueber Arithmetisierung der Mathematik. Göttinger Nachr. 1895.

Н. И. Лобачевскiй. Полное собранiе сочиненiй по геометрiи. Kazań, 1886.

Fr. Engel u. P. Stäckel. Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. 2 tomy:

I. *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij*, zwei geometrische Abhandlungen (przekład z rosyjskiego). Lipsk 1899.

II. *Wolfgang und Johann Bolyai*. Geometrische Untersuchungen. Lipsk (w druku).

Prof. D. H. Liebmann. Nichteuklidische Geometrie. Lipsk. M. 6.50.

R. Bonola. Die nicht-euklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. (Przekład z włoskiego H. Liebmanna). Lipsk, 1908. M. 5.—

P. Mansion. (Polski przekład *S. Dicksteina*). Pierwsze zasady metagieometrji czyli gieometrji ogólnej. Warszawa, r. 1897, str. 46.

B. Riemann. Ueber die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Werke, 2 wyd. 1892, str. 272—287.

Helmholtz. Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. Werke. Lipsk, 1883, t. II, str. 610—617.

F. Klein. Vorlesungen über die nichteuklidische Geometrie. Göttingen, 1893.

D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Lipsk, 3 wyd., 1909. Mk. 6.

H. Poincaré. (Przekł. polski M. H. Horwitza). Nauka i hipoteza. Warszawa 1908, rb. 1 k. 50

Veronese. Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen; tł. A. Schepp, Lipsk 1894, str. 710, M. 20.

W. Killing, Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Lipsk, 1885.

Wyczerpującą literaturę, dotyczącą każdej kwestji matematyki czystej i stosowanej, czytelnik znajdzie przy odpowiednim artykule w imponującym wydawnictwie, wychodzącym nakładem B. G. Teubnera w Lipsku w języku niemieckim (i jednocześnie w Paryżu w języku francuskim): „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.“ Kierownictwo tej encyklopedji mają akademje naukowe w Gietyndze, Lipsku, Monachjum i Wiedniu. Układ artykułów oparty jest na klasyfikacji rzeczowej. Tytuły oddzielnych części są następujące:

Cz. I arytmetyka i algiebra w 2 tomach;
„ II analiza w 3 tomach;
„ III gieometrja w 3 tomach;
„ IV mechanika w 4 tomach;
„ V fizyka w 3 tomach;
„ VI gieodezja, gieofizyka i astronomja;
„ VII historja, filozofja i dydaktyka matematyki.

Dotychczas w całości wyszła Arytmetyka i Algiebra, oraz znaczna ilość zeszytów z pozostałych działów. Artykuły wychodzą z pod pióra najwybitniejszych specjalistów i przedstawiają rozwój historyczny i stan obecny każdej kwestji. Zwięzłość tekstu czyni encyklopedję dostępną tylko dla specjalistów.

Wymieniamy jeszcze ważniejsze dzieła, dotyczące historji matematyki:

M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Bruksela 1837; 2 wyd. Paryż, 1875.

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Lipsk.

H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im 16 und 17 Jahrhundert, Lipsk 1903.

W końcu zwracamy uwagę na dzieła matematyczno-bibljograficzne:
Dr. Ernst Wölffing: Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographien des 19 Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. 2 tomy. Wyszedł t. I, obejmujący czystą matematykę; 1903, str. 416. M. 14.

Żebrowski Teofil. Bibljografja piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki oraz ich zastosowań na obchód 400-letniej rocznicy urodzin Kopernika. Nakł. Bibl. Kórnickiej. Kraków, 1873, str. 618, z tabl.

Dodatek do Bibljografji piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki oraz ich zastosowań, wydanej w 1873. Nakł. Bibl. Kórnickiej. Kraków, 1886, str. 155, z tabl.

Wydawnictwa i komisy Księgarni Naukowej

do nabycia w księgarni G. Centnerszwera i S-ki

w Warszawie, Marszałkowska 143.

	Rb.	k.
Aveling E. Teorja Darwina	—	80
Barbanell A. Rewizja etyki	1	20
Bellamy E. W wieku XXI	—	50
Bem Antoni Gustaw. Szkice literackie. Wydanie pośmiertne z port. aut. i przedm. Ign. Chrzanowskiego	3	20
Brückner A. Cywilizacja i język	—	80
„ Starożytna Litwa. Szkice histor. i mitolog.	1	20
„ Różnowiercy polscy	1	80
Bücher K. Szkice ekonomiczne	—	80
Czechow A. Wolna szkoła	—	20
Daszyńska-Golińska Z. Teoretyczne podstawy polityki społecznej	—	50
„ Alkoholizm i i społeczeństwo	—	10
Fagnot. Związki zawodowe w Anglji	—	30
Feldman W. O twórczości Wyspiańskiego i Żeromskiego	1	—
Garszyn W. Czerwony kwiatek, wyd. II	1	—
Geijerstam G. Książka o małym braciszku w przekł. M. Posner-Garfeinowej	1	20
Gide K. O Kooperatywach spożywczych	1	—
Gliński. Spiżowe dźwięki	—	80
Gorkij. Zburzona tama	—	05
Heilpern M. O ziemi, słońcu i gwiazdach. Wyd. III.	—	60
Hryniewiecki B. Nasze lasy	—	15
Janke O. Zasady higjeny szkolnej	1	80
Jak prowadzić początkowe nauczanie	—	10
Jezierski W. Jak się powinny ubierać dziewczęta w wieku szkolnym	—	10
Kalksteinówna. Program historji Polski	—	10
Karpowicz St. Zabawy i gry pod względem wychowawczym	—	40
Karpowicz i Szycówna. Nasza literatura dla młodzieży	—	60
Katalog informacyjny. Zeszyt I. Literatura dla dzieci i młodzieży	—	20
„ Zeszyt II. Nauki matematyczne i przyrodnicze	—	50
„ rozumowany „Poradnika dla Samouków“	—	05
Kautsky K. Narodowość i jej początki	—	10
„ Kwestja rolna w Rosji	—	15
Key Ellen. Stulecie dziecka, przekład J. Moszczeńskiej. Wyd. II	1	50
„ Nauczanie religji	—	30
Klebanowski. Skrót matematyki niższej. Arytmetyka	—	30
Kny. Wrażliwość w państwie roślinnym	—	20
Koszutski St. Nasz przemysł wielki na początku XX stulecia	—	80
Kramsztyk St. Szkice przyrodnicze. Zbiór I.	1	20
Krauz K. Demokracja w nowoczesnym ustroju państwowym	—	50
„ Portrety zmarłych socjologów	1	20
Krzeczkowski K. Czytelnictwo wśród Student. Uniw. Warsz.	—	40
Krzywicki L. Systemat. kurs antropologji. II. Rasy psychiczne (z ilustr.)	1	20
„ Cerebracja żywiołowa. Przyczynek do psychologji spirytyzmu	—	35
„ Nasze potrzeby naukowe	—	20
„ Żmudź Starożytna	1	20
Lafargue. Praca umysłowa wobec maszyny. Wyd. II	—	20
Leszczyńska Stef. Program arytmetyki	—	20
Lippert J. Jak się ludzie nauczyli gotować?	—	15
Lipska. Zbudzony rycerz	—	75
Loeb J. Wstęp do fizjologji i psychologji porównawczej	1	80
Mangasarian. Nowy katechizm	—	30
Marks K. Praca najemna i kapitał	—	15
Menzel. Systemy prawa wyborczego	—	15
Minkiewicz R. O dysharmonjach w naturze ludzkiej	—	40
Moszczeńska I. Czego nie wiemy o naszych synach	—	50
„ Zasady wychowania	2	—
Multatuli. Wybór pism w przekładzie Posner-Garfeinowej	1	50

	Rb. k.
Nałkowski W. Dookoła Alp (z ilustracjami)	— 60
Niemojewski A. Bajka	— 60
Oker-Blom. Na wsi u wuja doktora (o uświadomianiu dzieci)	— 15
Pietkiewicz Z. Siły i środki ludu naszego	1 30
Poradnik dla samouków. Część I rb. 1, III 80 k., IV 1.20	— —
„ Część V Świat i człowiek, z. I w. II	1 35
„ Część V Świat i człowiek, z. II	2 —
„ Część VI Dzieje myśli, Tom I zeszyt I	1 50
„ Część VI Dzieje myśli, Tom II zeszyt I	2 —
„ Część VI Dzieje myśli, Tom I zeszyt II	1 50
„ Część VI Dzieje myśli, Tom II zeszyt II	1 50
Posner S. Ruch etyczny I	— 15
„ W sprawie handlu żywym towarem	— 50
„ Japonja. Państwo i prawo	— 80
„ Nauki społeczne w szkole wyższej	— 60
Programy nauk przyrodniczych	— 20
Przepisy o wynagrodzeniu robotników (wyd. nieurzęd.)	— 15
Rundsztein Sz. O skutkach karnych zerwania umowy pracy	— 30
S. K. W naturze nic nie ginie	— 20
Silberstein L. Wstęp do dziedziny zjawisk elekt.-magnet. Część 1. Niezmienne pole magnetyczne (z ilustr.)	1 —
Silberstein L. Wykłady Zakopiańskie z dziedz. fizyki teoret. (z ilustr.)	1 20
Sombart W. Proletarjat	— 40
Sujkowski A. Rys gieograficzny ziem Europy środkowej	— 20
Sully J. Psychologja wychowawcza	3 60
Szumowska W. Gramatyka francuska	— 50
Szycówna A. Zadania nauki języka polskiego w szkole ludowej	— 10
Thomas. Związki zawodowe w Niemczech	— 35
Tołstoj L. Wiatronogi, w przekładzie G. Daniłowskiego	— 60
„ Zmartwychwstanie, 2 tomy, przekład St. Stępowskiego	— 75
Verworn M. Kwestje zasadnicze w naukach przyrodniczych	— 20
„ Przyrodoznawstwo i pogląd na świat	— 30
de Vries Hugo. Nowa teorja powstawania gatunków z ilustracjami	— 50
Walewska C. Moje służby	1 —
Washington Booker. Wyzwolenie. Autobiogr. murzyna	1 20
karton	1 40
Wernic Dr. Tablice higjeny szkolnej:	
„ I. Walka z chorobami zakaźnemi w domu i szkole	— 15
„ II. Higjena pracy uczniowskiej w szkole i higjena snu	— 15
„ III. Rozkład zajęć szkolnych i plan wakacji	— 15
Weryho-Radziwiłłowiczowa M. Nauka o rzeczach	1 50
Z. J. Kwestja kobieca	— 20

Bibljoteka spółczesna.

Chwalewik. Wielkie miasta i ich rozwój	— 20
Daszyńska-Golińska Z. Miasta i cechy w dawnej Polsce	— 30
E. B. Japonja, kraj i ludzie	— 15
Gąsiorowska-Grabowska. Rewolucja francuska	— 70
Kowalewska Z. Chłopski uniwersytet w Szwecji	— 15
Kozłowski Wł. M. Zarys rozwoju włościan we Francji	— 20
Krakowski Wł. Nowa Zelandja	— 20
„ Norwegja	— 25
L. W. Ziemie polskie pod berłem pruskim	— 20
„ Zarys stosunków galicyjskich	— 20
„ Austrja spółczesna	— 20
„ Litwa i jej ludy	— 20
Ławska H. Szwajcarja i Szwajcarowie	— 20
Posner S. Demokratyzacja Finlandji	— 10
„ Deklaracja praw człowieka i obywatela	— 10
Sempołowska St. Żydzi w Polsce	— 15
Szpotański S. Początki polskiego socjalizmu	— 15
Unszlicht-Bernsteinowa. Organizacja oświat. w Stanach Zjednoczonych	— 25
Witkowska H. Historja ustroju Polski w zarysie	— 40

15.3.60.