



POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki
Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej
Katedra Inżynierii Elektrycznej



Dziedzina: Nauk Inżynieryjno-Technicznych

Dyscyplina: **Automatyka, Elektronika, Elektrotechnika i Technologie Kosmiczne**

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr inż. Waław MACIOŁEK

**DIAGNOSTYKA WIRNIKÓW MASZYN INDUKCYJNYCH KLATKOWYCH
W OPARCIU O MODEL MONOHARMONICZNY**

Promotor:
dr hab. inż. Maciej Sułowicz, prof. PK

Kraków, 2024

SPIS TREŚCI

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW	5
STRESZCZENIE	7
ABSTRACT	8
1. WSTĘP	9
1.1. Wprowadzenie	9
1.2. Zagadnienia poruszane w pracy	11
1.3. Zakres i główna teza rozprawy	12
1.4. Przegląd literatury	13
1.5. Zawartość pracy	15
2. MODELE OBWODOWE SILNIKA INDUKCYJNEGO KLATKOWEGO	17
2.1. Wprowadzenie	17
2.2. Model matematyczny silnika asynchronicznego z niesymetrią rezystancyjną klatki uwzględniający wyższe harmoniczne	17
2.3. Równania stanu ustalonego silnika asynchronicznego z niesymetrią rezystancyjną klatki uwzględniającego wyższe harmoniczne	26
2.4. Monoharmoniczne równania stanu ustalonego silnika asynchronicznego z niesymetrią rezystancyjną klatki	38
2.5. Definicja współczynników niesymetrii klatki w monoharmonicznym modelu silnika klatkowego	41
2.6. Pełny opis modelu obwodowego silnika indukcyjnego klatkowego w współrzędnych fazowych	46
2.6.1. Założenia	46
2.6.2. Model obwodowy silnika jednoklatkowego we współrzędnych fazowych	46
2.6.3. Transformacja modelu silnika do współrzędnych składowych symetrycznych	49
2.6.4. Równania bilansu harmonicznych	50
2.6.5. Model monoharmoniczny całkowalny numerycznie z pełnym odwzorowaniem klatki wirnika	53
2.6.6. Zasady redukcji modelu	56
2.6.7. Porównanie wyników obliczeń dla modeli	60
3. MODEL POŁOWY SILNIKA INDUKCYJNEGO KLATKOWEGO	82
3.1. Wprowadzenie	82
3.2. Weryfikacja modelu i uzupełnienie schematu obwodowego	87
3.3. Zakres analiz numerycznych dla modelu połowego	88
4. BADANIA LABORATORYJNE I WERYFIKACJA MODELI	98
4.1. Wprowadzenie	98
4.2. Opis badań laboratoryjnych	99
4.2.1. Określenie reaktancji rozproszenia stojana i wirnika	99
4.2.2. Wyznaczenie parametrów schematu zastępczego	100
4.2.3. Stanowisko pomiarowe i program badań	101
4.3. Analiza wyników pomiarów	107

5. PODSUMOWANIE	122
5.1. Ocena przydatności i stosowalności opracowanych modeli uproszczonych na podstawie przeprowadzonych badań.....	122
5.2. Redukcja schematów modelu dla składowej zgodnej i przeciwnej	123
5.3. Możliwości zastosowania modelu zredukowanego w diagnostyce silników indukcyjnych.....	128
5.4. Wnioski końcowe	130
LITERATURA	132
ZAŁĄCZNIKI	138

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW

- a** - reprezentacja wektorowa szeregu Fouriera
- A** - macierz układu równań
- A**** - macierz układu równań w formie reprezentacji macierzowej szeregu Fouriera
- D** - współczynnik tarcia
- E** - wektor jednostkowy, macierz jednostkowa
- g** - grubość szczeliny powietrznej
- i** - prąd w funkcji czasu
- i** - wektor prądów
- I**** - wektor prądów w formie reprezentacji wektorowej szeregu Fouriera
- j** - jednostka urojona
- J** - moment bezwładności
- k_u** - współczynnik uzwojenia
- L** - indukcyjność
- L**** - macierz indukcyjności
- L**** - macierz indukcyjności w formie reprezentacji macierzowej szeregu Fouriera
- M** - indukcyjność wzajemna
- N** - liczba żłobków, liczba prętów
- p** - liczba par biegunów
- q** - liczba żłobków na biegun i fazę
- r** - średni promień szczeliny powietrznej
- R** - rezystancja
- R**** - macierz rezystancji
- R**** - macierz rezystancji w formie reprezentacji macierzowej szeregu Fouriera
- R** - rezystancja w składowych symetrycznych
- S**** - macierz składowych symetrycznych
- s** - poślizg
- t** - czas
- T** - okres
- T**** - macierz transformacji
- T_{em}** - moment elektromagnetyczny
- T_m** - moment mechaniczny
- U** - napięcie w funkcji czasu
- u** - wektor napięcia

- U** - wektor napięcia w formie reprezentacji wektorowej szeregu Fouriera
- x** - wektor współrzędnych
- x** - wektor współrzędnych w formie reprezentacji wektorowej szeregu Fouriera
- z_s - liczba zwojów na fazę uzwojenia stojana
- Z** - zbiór liczb całkowitych

Symbole greckie

- $\alpha, \beta, \varepsilon$ - kąty rozwarcia cewek lub uzwojeń
- φ - kąt obrotu wirnika
- ρ - rząd harmonicznej
- φ_0 - kąt początkowy położenia wirnika
- Λ - przewodność magnetyczna dla strumienia głównego
- μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni
- δ - delta Kroneckera
- Ψ - wektor strumieni skojarzonych
- ω - prędkość kątowa wirnika
- Ω - pulsacja
- Ω - macierz pulsacji

Indeksy dolne i górne

- σ - indukcyjność rozproszenia
- m - indukcyjność magnesująca
- b - rezystancja, indukcyjność pręta klatki
- z - rezystancja, indukcyjność segmentu zwierającego klatki
- o - rezystancja, indukcyjność oczka klatki wirnika
- s - stojan
- r - wirnik
- sr - indeks indukcyjności wzajemnych stojan-wirnik
- w - wirnik
- k_s - numer składowej symetrycznej stojana, $k_s=0, 1, 2$
- k_w - numer składowej symetrycznej wirnika, $k_w=0, \dots, N$
- k - numer oczka klatki, współczynnik uzwojenia

STRESZCZENIE

Niewielkie koszty oraz niezawodność od lat sprawiają, że silniki indukcyjne klatkowe są najliczniejszą grupą maszyn wykorzystywanych w układach napędowych. Jednym z najtrudniej do zdiagnozowania stanem awaryjnym silnika klatkowego jest uszkodzenie klatki. W literaturze możemy znaleźć wiele prac, w których używane są zaawansowane modele silników klatkowych uwzględniające dowolne uszkodzenie klatki bazujące na widmie Fouriera prądów fazowych stojana. Na podstawie tych modeli analizowane są dwa sygnały diagnostyczne, które są składowymi prądu stojana o częstotliwościach $f_0(1-2s)$ oraz $f_0(1+2s)$. Przeprowadzone na podstawie tych dwóch sygnałów analizy nie są jednoznaczne i w prosty sposób pozwalające porównać różne przypadki uszkodzeń. Ponadto zastosowanie zaawansowanych modeli wymaga używania wysokowydajnych narzędzi obliczeniowych.

Głównym celem rozprawy jest opracowanie zredukowanego modelu diagnostycznego silnika indukcyjnego klatkowego dla małych poślizgów. Na potrzebę realizacji tego celu, pełne równania obwodów wirnika zastąpiono współczynnikami odzwierciedlającymi niesymetrię elektryczną prętów klatki, tym samym sprowadzając układ równań do wymiaru silnika pierścieniowego.

W pracy opracowano i zaprezentowano prosty monoharmoniczny model silnika indukcyjnego klatkowego, w którym wprowadzono zdefiniowane współczynniki asymetrii klatki. Wprowadzenie tych współczynników pozwala uzyskać model z czterema równaniami analogiczny jak dla silnika indukcyjnego pierścieniowego. Zaproponowany model został zwalidowany wieloharmonicznym i monoharmonicznym modelem obwodowym, modelem polowym oraz pomiarami laboratoryjnymi.

W wyniku przeprowadzonych wieloprzekrojowych analiz numerycznych, obliczeń polowych oraz badań laboratoryjnych w rozprawie pokazano, że możliwe jest opracowanie zredukowanego modelu matematycznego silnika klatkowego do wymiaru maszyny pierścieniowej z niesymetrią elektryczną wirnika.

Za główne osiągnięcie, autor uznaje opracowanie wskaźników diagnostycznych dla uproszczonego modelu monoharmonicznego silnika indukcyjnego oraz zbadanie możliwości stosowania tych wskaźników w różnych stanach pracy silnika do określenia uszkodzenia klatki wirnika. Przeprowadzone w rozprawie badania poszerzają aktualny stan wiedzy na temat zastosowania prostych modeli obwodowych do diagnostyki maszyn elektrycznych. Wyniki przedstawione w rozprawie stanowią podstawę dla dalszych prac nad zagadnieniem i implementację praktyczną w systemach diagnostycznych.

ABSTRACT

Low cost and reliability have made squirrel cage induction motors the most numerous group of machines used in drive systems for years. One of the most difficult to diagnose failure conditions of a squirrel cage motor is cage failure. In the literature, we can find many works that use advanced models of squirrel cage motors that take into account any cage failure based on the Fourier spectrum of stator phase currents. Based on these models, two diagnostic signals are analyzed, which are components of the stator current with frequencies $f_0(1-2s)$ and $f_0(1+2s)$. The analyses carried out on the basis of these two signals are not unambiguous and easily allow comparison of different damage cases. In addition, the use of advanced models requires the use of high-performance computational tools.

The main objective of the dissertation is to develop a reduced diagnostic model of a squirrel cage induction motor for small slips. For the purpose of achieving this goal, the full rotor circuit equations were replaced by coefficients reflecting the electrical non-symmetry of the cage bars, thereby reducing the system of equations to the dimension of a ring motor.

In this dissertation, a simple monoharmonic model of a squirrel-cage induction motor is developed and presented, in which defined coefficients of cage asymmetry are introduced. The introduction of these coefficients makes it possible to obtain a model with four equations analogous to that of a ring induction motor. The proposed model was validated with a multiharmonic and monoharmonic circuit model, a field model and laboratory measurements.

As a result of multiscale numerical analyses, field calculations and laboratory tests, the dissertation shows that it is possible to develop a reduced mathematical model of a squirrel-cage motor to the dimension of a ring machine with rotor electrical asymmetry.

As the main achievement, the author considers the development of diagnostic indices for the simplified monoharmonic model of the induction motor and the investigation of the possibility of using these indices in different states of motor operation to determine the damage of the rotor cage. The research carried out in the dissertation extends the current state of knowledge on the application of simple circuit models to the diagnosis of electric machines. The results presented in the dissertation provide a basis for further work on the issue and practical implementation in diagnostic systems.

1. WSTĘP

1.1. Wprowadzenie

Silniki indukcyjne o budowie jednoklatkowej pomimo ciągłego rozwoju innych konstrukcji maszyn prądu przemiennego pozostają ciągle kluczowym elementem większości napędów elektrycznych. Maszyny asynchroniczne tego typu są budowane w szerokim zakresie stosowanych napięć i mocy. Standardowo silniki niskonapięciowe mają wirniki odlewane o różnych kształtach żłobków w zależności od pożądanych właściwości eksploatacyjnych. Maszyny przeznaczone do pracy przy napięciach przekraczających 1kV posiadają na ogół klatki spawane ze żłobkami wykonanymi jako prostokątne. Wyjątek wśród silników niskonapięciowych stanowią maszyny wykorzystywane w systemach napędowych walcerek – tzw. układ samotokowy, gdzie wirnik jest zbudowany z prętów okrągłych (lutowanych) i materiału charakteryzującego się dużą rezystancją. Nierzadko wirniki spawane, a przede wszystkim odlewane w celu zminimalizowania negatywnych skutków oddziaływania momentów synchronicznych z punktem synchronizmu przy postoju, wyposaża się w pierścień pośredni. Innym ważnym zabiegiem konstrukcyjnym poprawiającym cechy ruchowe może być wykonanie prętów ze skosem najczęściej stosowanym dla silników indukcyjnych z wirnikami odlewanyymi.

Duże znaczenie maszyn indukcyjnych oraz konieczność zachowania wysokiej niezawodności w warunkach przemysłowych stało się początkiem rozwoju wielu metod i układów monitorujących ich stan techniczny bez konieczności przerywania pracy napędu. Statystycznie wśród najczęściej występujących awarii zaliczane są głównie uszkodzenia uzwojeń stojanów, łożysk oraz pozostałych elementów przenoszących moment napędowy. Zniszczenie łożysk i sprzęgieł jest zwykle przyczyną niesymetrii elektromagnetycznych takich jak ekscentryczność statyczna, dynamiczna i mieszana. Ze względu na sposób wykonania wirników maszyn małej oraz średniej mocy, pęknięcie prętów klatki ma miejsce wyłącznie w wyniku wadliwego procesu technologicznego. Inaczej wygląda typ maszyn z klatką spawaną, ponieważ do uszkodzenia wirnika dochodzi pod wpływem naprężeń elektrotermicznych wywołanych długotrwałymi stanami przejściowymi w układach napędowych o dużej bezwładności. Dlatego niezbędne jest również okresowe badanie stanu obwodu wirnika. Ocena stanu uzwojeń stojana będzie znacznie utrudniona nawet, gdy uszkodzenia spowodowane niesymetrią wewnętrzną - zwarciami zwojowymi są rozległe, ponieważ zmianie jakościowej nie ulega pomiarowo dostępne widmo prądu dla oceny diagnostycznej tej części silnika. Zauważalne mogą być wyłącznie efekty ilościowe, które nie gwarantują właściwego wskazania przyczyn występującej asymetrii prądów stojana, co ma miejsce, jeżeli dochodzi do przerwania fazy zasilania lub nierównomiernego

rozkładu napięć zasilających. Inaczej wygląda praca silnika z uszkodzonym obwodem klatki dlatego, że zgodnie z zasadą o zmianach jakościowych prądu fazowego stojana decydują sprzężenia elektromagnetyczne w funkcji kąta obrotu elektrycznego wprowadzając nowe składowe mające charakter diagnostyczny. Z tego wynika, że obserwacja zawartości widma prądu stojana jest skutecznym narzędziem w poszukiwaniu i ocenie stanu technicznego wirnika. Jednak, aby to było możliwe należy posiadać właściwe wzorce diagnostyczne związane z rodzajem rozważanej niesymetrii. Do takich wzorców zaliczane są m.in. zbiory otrzymane metodami modelowania matematycznego. Wszystkie z nich otrzymuje się wychodząc od najbardziej złożonej reprezentacji równań opisujących wieloharmoniczny rozkład przestrzenny pola w szczeliny powietrznej. W zależności od analizowanych zjawisk wspomniany model podlega kolejnym modyfikacją polegającym na sprowadzeniu równań z zmiennymi współczynnikami do postaci stałej dogodnej przy rozważaniu także oddziaływań elektromechanicznych. Dla takiego układu równań wyróżnia się powszechnie modele, w których macierze indukcyjności wzajemnych zawierają wyłącznie skończoną liczbę harmonicznym przepływu. Wyeliminowanie z dalszych rozważań wyższych składowych przestrzennych czyni rozwiązywany układ równań uniwersalnym opisem dowolnej maszyny indukcyjnej. W wielu zagadnieniach, gdy silnik posiada cechy konstrukcyjne minimalizujące udział wyższych harmonicznym przepływu takie podejście można uznać za uzasadnione, ponieważ wynik końcowy obliczeń zależy głównie od składowej podstawowej.

Otrzymany w ten sposób model dla niesymetrii rezystancyjnej wirnika pomimo znacznych uproszczeń pozwala na wyznaczenie składowych widma prądu stojana i momentu o największym znaczeniu diagnostycznym. Ważną zaletą modelu zredukowanego jest możliwość jego łatwego dostosowania do problemu nieliniowości typu parametrycznego oraz strukturalnego z zastosowaniem standardowych procedur numerycznych lub analitycznych bez nadmiernego rozbudowania układu równań. Prócz tego model monoharmoniczny w celu poprawy własności ilościowych da się uzupełnić o efekty związane z wypieraniem prądu i powiększeniem szczeliny powietrznej (żłobkowanie powierzchni obwodu magnetycznego stojana, jak również wirnika) za pomocą dodatkowych współczynników. Z tym, że w ustalonym stanie pracy silnika blisko przedziału poślizgów skupionych wokół wartości znamionowej główną rolę odgrywa właściwe odwzorowanie przebiegu prądu biegu jałowego. Zjawisko wypierania prądu dla małych poślizgów praktycznie nie ma większego znaczenia, a więc powinno być brane pod uwagę, gdy rozważane są dynamiczne i nieustalone stany pracy. Obok wspomnianych już zalet wynikających z łatwości w modyfikowaniu modelu monoharmonicznego kluczowe staje się także zredukowanie wymiaru

układu równań za pomocą współczynników asymetrii rezystancyjnej wirnika, co w znacznym stopniu przyspiesza obliczenia mogące być wykonywane nawet w czasie rzeczywistym.

1.2. Zagadnienia poruszane w pracy

Problematykę pracy skupiono wokół możliwości skutecznego rozpoznania uszkodzeń prętów obwodu wirnika w silniku jednoklatkowym na podstawie utworzonego modelu obwodowego stanowiącego uniwersalny wzorzec diagnostyczny. W celu sformułowania równań odwzorowujących niesymetrię klatki wirnika zdefiniowano współczynniki redukujące rozwiązywany układ do wymiaru maszyny pierścieniowej. Model o tych wymiarach przy ewentualnym pominięciu równania mechanicznego jest układem liniowym rozwiązywalnym analitycznie bez konieczności używania zawansowanych metod numerycznych. W przypadku uwzględnienia części elektromechanicznej oraz rzeczywistej charakterystyki magnesowania, równania modelu stają się układem nieliniowym strukturalnie i parametrycznie. Jednym z wielu znanych wariantów jego rozwiązania są metody całkowania numerycznego lub przekształcenia operatora różniczkowania do postaci algebraicznej. Zdecydowanie gorsze efekty uzyskuje się przy próbie zastosowania metod analitycznych jak np. rozwinięcie w szereg potęgowy Taylora, który po eliminacji składników o potędze większej niż jeden linearyzuje układ równań. Wykorzystanie aproksymacji równania mechanicznego szeregiem potęgowym wiąże się z założeniem, że wahania prędkości spowodowane niesymetrią parametryczną będą małym odchyleniem od wartości średniej. W praktyce rozwiązanie analityczne tym sposobem jest ograniczone tylko do nieliniowości strukturalnej. Niemniej jednak, bez względu na metodę rozwiązania, model silnika klatkowego z obniżonym wymiarem układu równań, można nazwać szybkim generatorem zbioru cech opisujących niesymetrię elektryczną wirnika, co stanowi jego główną zaletę.

Punktem wyjścia w formułowaniu modelu ze zmodyfikowanym wymiarem są zwyczajne równania różniczkowe o zmiennych współczynnikach, a dla szczególnej sytuacji ustalonej pracy silnika indukcyjnego równania z okresowo zmiennymi współczynnikami. Założenie wynikające z przyjęcia do opisu maszyny drugiego z wymienionych typów równań różniczkowych pozwala wyprowadzić wymienione wstępnie współczynniki, jeżeli silnik pracuje z małym poślizgiem tj. wtedy, gdy zjawiska związane z niesymetrią obwodu klatki zależą wyłącznie od rezystancji modelującej przerwę w prętach. Oznacza to, że indukcyjności rozproszeń uzwojeń stojana i wirnika kształtujące własności silnika w stanach dynamicznych mogą być bez popełnienia większego błędu pominięte. Znaczenie tego uproszczenia jest uzasadnione ogólnymi zasadami oceny poziomu niesymetrii elektrycznej, która zwykle odbywa się przez badania jakościowe i ilościowe widm Fouriera. Zjawiska o największym znaczeniu diagnostycznym mają postać

składowych niskoczęstotliwościowych prądu i momentu elektromagnetycznego, a więc do ich wyznaczenia wystarczy rozważyć tylko monoharmoniczny rozkład przestrzenny pola.

1.3. Zakres i główna teza rozprawy

Głównym celem rozprawy jest opracowanie zredukowanego modelu diagnostycznego silnika indukcyjnego klatkowego dla małych poślizgów. Na potrzebę realizacji tego celu, pełne równania obwodów wirnika zastąpiono współczynnikami odzwierciedlającymi niesymetrię elektryczną prętów klatki, tym samym sprowadzając układ równań do wymiaru silnika pierścieniowego. W pracy pominięto wyprowadzenie analogicznych współczynników uszkodzenia segmentów pierścienia zwierającego tzn. pominięto część poosiową wnoszącą dodatkowe modyfikacje ilościowe otrzymywanych wyników obliczeń. Przekształcone w ten sposób równania silnika, poddano analizie porównawczej z następującymi modelami:

1. obwodowym wieloharmonicznym, utworzonym na podstawie metody bilansu harmonicznego przy zadanej stałej prędkości wirowania wirnika, linowej charakterystyce magnesowania i teoretycznie nieskończonym widmie składowych przestrzennych,
2. obwodowym monoharmonicznym całkownym numerycznie z równaniem mechanicznym oraz odkształceniem charakterystyki magnesowania wyrażonej za pomocą indukcyjności głównej w funkcji prądu biegu jałowego,
3. polowym, uwzględniającym dwuwymiarową geometrię silnika i oddziaływania elektromechaniczne oraz nieliniowość typu parametrycznego,

Generalnie dla każdego wyżej wymienionego modelu poczyniono takie same założenia odnośnie do sposobu połączenia uzwojeń stojana jak i zasilania oraz zaniedbania zjawisk dodatkowych.

Wśród nich należy wymienić:

- skojarzenie w gwiazdę bez przewodu zerowego dla uzwojeń symetrycznych wewnątrz, czyli takich które można rozpatrywać jako skupione,
- pełne odwzorowanie obwodu klatki wirnika,
- pominięcie strat wiropędowych, a także histerezowych wywołanych przemagnesowaniem rdzenia przy odkształconym przebiegu prądu biegu jałowego,
- nieuwzględnienie zjawisk krańcowych, w konsekwencji istnienia sprzężeń elektromagnetycznych między oczkami i poszczególnymi segmentami pierścienia zwierającego klatkę wirnika oraz efektu wypierania prądu z prętów.

W wyniku przeprowadzonych badań analitycznych jak również numerycznych oraz laboratoryjnych, autor uważa za słuszną następującą tezę:

Istnieje możliwość opracowania zredukowanego modelu matematycznego silnika klatkowego do wymiaru maszyny pierścieniowej z niesymetrią elektryczną wirnika.

1.4. Przegląd literatury

Zagadnienia związane z modelowaniem niesymetrii wewnętrznych maszyn asynchronicznych, w tym uszkodzeń uzwojeń wirnika, mimo intensywnego rozwoju metod oraz algorytmów diagnostycznych pozostają nadal aktualnym problemem. Przyczyną tego stanu rzeczy jest ciągle dążenie do otrzymania niezawodnych wzorców służących jako integralny zbiór cech, charakteryzujących awaryjne stany pracy silnika klatkowego. Dzieje się tak, ponieważ dysponując dopiero odpowiednim modelem można budować rozbudowane systemy, których podstawowym zadaniem będzie wczesne wykrycie i lokalizacja uszkodzenia. W wielu przypadkach skuteczność takiego systemu zależy od szybkości działania oraz zdolności adaptacji modelu do maszyn o odmiennych parametrach konstrukcyjnych. Współcześnie za wysokowydajne systemy diagnostyczne uznaje się układy czasu rzeczywistego wspomagane algorytmami sztucznych sieci neuronowych i zbiorów rozmytych. W tym podejściu wiedza ekspercka zostaje sprowadzona do obserwacji poprawności procesu zbierania danych i ich przetwarzania. Nie zmienia to faktu, że nadal o skuteczności wspomnianych systemów decyduje zbiór informacji wejściowych w postaci zbioru rozwiązań użytego modelu matematycznego.

Do najbardziej rozpowszechnionych prac obejmujących metody formułowania równań maszyn asynchronicznych z niesymetrią elektryczną wirnika, zalicza się opracowania z zakresu modelowania obwodowego [52], [60], [65-66], ponieważ tylko taki model umożliwia dowolne odwzorowanie dodatkowych zjawisk. Ze względu na intensywny rozwój metod obliczeń polowych aktualnie bardzo często modele FEM są wykorzystywane w analizach.

W literaturze jest wiele prac opisujących od strony praktycznej statystyki oraz analizy uszkodzeń silników indukcyjnych klatkowych. Jako przykład takich artykułów można wskazać pozycje: [18], [19], [20], [26]. Nieplanowane postoje procesów technologicznych w przemyśle z tytułu uszkodzeń silników mogą generować bardzo duże straty, dlatego uzasadnione jest finansowanie badań nad opracowaniem skutecznych metod oceny celem poprawy technik diagnostycznych dla maszyn indukcyjnych klatkowych. Zagadnienia związane z modelowaniem niesymetrii wewnętrznych maszyn asynchronicznych, w tym uszkodzeń uzwojeń wirnika, mimo intensywnego rozwoju metod oraz algorytmów diagnostycznych pozostają nadal aktualnym problemem. Przyczyną tego stanu rzeczy jest ciągle dążenie do otrzymania niezawodnych

wzorców służących jako integralny zbiór cech, charakteryzujących awaryjne stany pracy silnika klatkowego. Dzieje się tak, ponieważ dysponując dopiero odpowiednim modelem można budować rozbudowane systemy, których podstawowym zadaniem będzie wczesne wykrycie i lokalizacja uszkodzenia. W wielu przypadkach skuteczność takiego systemu zależy od szybkości działania oraz zdolności adaptacji modelu do maszyn o odmiennych parametrach konstrukcyjnych. Do najbardziej rozpowszechnionych prac obejmujących metody formułowania równań maszyn asynchronicznych z niesymetrią elektryczną wirnika, zalicza się opracowania z zakresu modelowania obwodowego [3], [22], [36], [51], [60], [61], [65], [67], [69], [70], [76]. Przewidziane widmo prądu stojana silnika z uszkodzoną klatką z modelu matematycznego jest wykorzystywane do diagnostyki stanu klatki wirnika przez analizę składowych $f_0(1-2s)$ i $f_0(1+2s)$ w widmie prądu stojana. Amplituda komponent $f_0(1-2s)$ pojawiającego się bezpośrednio w wyniku niesymetrii oraz pośrednio $f_0(1+2s)$ zależą nie tylko od rodzaju uszkodzenia klatki (liczby uszkodzonych prętów oraz rozmieszczenia na klatce względem siebie), ale również obciążenia, bezwładności, nieliniowości głównego obwodu magnetycznego. W zamieszczonej literaturze autorzy rozpatrują uszkodzenie klatki w różnych warunkach. Wpływ bezwładności na składowe prądu stojana charakterystyczne dla uszkodzonej klatki jest analizowany w pracach [4], [11], [38], [44]. Zależność obciążenia na sygnały diagnostyczne zawarte w widmie prądu stojana prace [1], [11], [34] ponadto w pracy [13] pokazano, że niskoczęstotliwościowe drgania momentu obciążenia mają podobny wpływ jak uszkodzenie klatki na zawartość widmową prądu. Współtowarzyszenie uszkodzeniu klatki przez ekscentryczności pokazano [23], [33], [63], [76], [83]. Zwarcie w uzwojeniu stojana [33], [63], niesymetrię zasilania [82], nieliniowość [44], [72], [86], [87]. Efekty luzu na sprzęgle napędowym pokazano w pracy [23]. W większości wymienionych powyżej prac pokazany jest wpływ ilości uszkodzonych prętów na sygnał diagnostyczny. Praca [72] pokazuje, że nie tylko ilość uszkodzonych prętów ma znaczenie, ale również rozmieszczenie na obwodzie klatki. Na podstawie dwóch uszkodzonych prętów położonych w różnych odległości od siebie pokazano zmieniający się efekt w widmie prądu stojana. W zamieszczonej literaturze podjęto również temat przeglądu metod diagnostycznych [78], porównania różnych sygnałów diagnostycznych mówiących o stanie klatki [5], [9], [16], [25]. Autorzy prac [56], [58] diagnostykę klatki przeprowadzają w warunkach zasilania dwufazowego silnika. Podejście to jest mało atrakcyjne, ponieważ nie jest możliwa diagnostyka w czasie normalnej eksploatacji maszyny. Jedną z prac [32] dokładniej wchodzi uszkodzenie pręta przez modelowanie zachodzącej tam korozji. Rozpoznawanie wzorców poruszają prace [31], [50]. Dla diagnostyki stanu klatki często obecnie są zastosowane metody sztucznej inteligencji, gdzie autorzy prac [24], [37], [77] wykorzystują sztuczne sieci neuronowe.

Do przeprowadzenia bardziej precyzyjnych analiz pracy maszyn stosuje się model polowy, który wykorzystuje złożone metody analizy przestrzennej pola elektromagnetycznego, bazując na rozkładach pól magnetycznych, elektrycznych oraz prądów w całym obszarze maszyny. W modelu tym bierze się pod uwagę fizyczne właściwości materiałów oraz ich interakcje z polami, co pozwala na bardziej dokładne odwzorowanie rzeczywistego działania silnika. Wadami tego modelu są:

- złożoność i długi czas obliczeń,
- wymaga większej ilości danych wejściowych oraz bardziej zaawansowanego sprzętu i oprogramowania,
- złożona interpretacja wyników.

Pośrednią metodą modelowania silników indukcyjnych klatkowych pozwalającą połączyć zalety modelowania obwodowego i polowego jest zastosowanie modelu obwodowo-polowego. Jest to kombinacja obu metod, w której:

- model obwodowy odpowiada za analizę prostych zależności elektrycznych w maszynie, takich jak prądy w uzwojeniach stojana czy moment elektromagnetyczny,
- model polowy jest wykorzystywany tam, gdzie konieczne jest szczegółowe modelowanie zjawisk elektromagnetycznych, np. w klatce wirnika.

W zamieszczonej literaturze w pracach [12], [15], [16], [30], [53], [79] zastosowano model polowy lub obwodowo-polowy. W tej pracy model polowy został zastosowany do potwierdzenia tezy pracy, że opracowany zredukowany model matematyczny silnika klatkowego o wymiarze maszyny pierścieniowej z niesymetrią elektryczną wirnika jest wystarczająco dokładny dla rozpatrywanych stanów pracy. W pracy zastosowane współczynniki niesymetrii klatki pozwalają porównać różne rodzaje uszkodzeń klatki oraz pokazać powagę stopnia uszkodzenia. Zamieszczona literatura również podejmuje temat współczynników niesymetrii klatki w pracach [6], [30], [44], [68], [70], [71], [72].

1.5. Zawartość pracy

Rozprawę podzielono na pięć rozdziałów, w których opisano kolejne etapy realizacji prac badawczych nad zredukowanym modelem silnika jednoklatkowego do celów diagnostycznych.

Rozdział 1: Zawiera wstęp i uzasadnienie podjętego tematu. W tym rozdziale sformułowano główną tezę rozprawy oraz przedstawiono założenia jakie przyjęto przy ocenie właściwości utworzonego modelu. Następnie w zakończeniu dokonano przeglądu aktualnej literatury.

Rozdział 2: W rozdziale drugim omówiono model obwodowy silnika jednoklatkowego wychodząc z wieloharmonicznej reprezentacji układu równań opisywanego równaniami różniczkowymi o okresowo zmiennych współczynnikach dla stałej prędkości kątowej wirnika i liniowym obwodzie magnetycznym. Utworzony w ten sposób model przekształcono do postaci rzeczywistej całkownej numerycznie z uwzględnieniem równania mechanicznego. W dalszej kolejności wyprowadzono model zredukowany ze współczynnikami aproksymującymi niesymetrię rezystancyjną obwodu klatki wirnika. Opracowany rodzaj równań silnika poddano analizie jakościowej i ilościowej. Dla tego modelu na podstawie przeprowadzonych badań numerycznych wskazano jego zakres użyteczności.

Rozdział 3: Opisuje dwuwymiarowy model polowy silnika jednoklatkowego z niesymetrią wewnętrzną obwodu wirnika. W następnych podpunktach przeprowadzono analizę wyników obliczeń numerycznych otrzymanych za pomocą modelu polowego, potwierdzając zgodność uzyskanych danych ze zredukowanym modelem obwodowego.

Rozdział 4: Przedostatnią część rozprawy poświęcono badaniom laboratoryjnym mających za zadanie weryfikację pomiarową modelu z współczynnikami aproksymującymi niesymetrię rezystancyjną wirnika. W pierwszym podpunkcie opisano budowę stanowiska oraz program wykonanych pomiarów. Kolejny podpunkt zawiera analizę otrzymanych wyników eksperymentalnych dla wybranych do analizy uszkodzeń prętów klatki wirnika, które można porównać z obliczeniami teoretycznymi.

Rozdział 5: W ostatnim rozdziale podsumowano wykonane prace badawcze wraz z podaniem inżynierskich schematów zastępczych na potrzebę szybkiej implementacji zredukowanego modelu matematycznego. Określono dalszy rozwój zaproponowanych metod oraz algorytmów formułowania równań silnika klatkowego z niesymetrią wewnętrzną. W końcowej części rozdziału sformułowano wnioski końcowe.

2. MODELE OBWODOWE SILNIKA INDUKCYJNEGO KLATKOWEGO

2.1. Wprowadzenie

W rozdziale tym zostaną omówione modele silnika indukcyjnego klatkowego. Punktem wyjścia będzie wieloharmoniczny model obwodowy silnika indukcyjnego opisany układem równań różniczkowych o okresowo zmiennych współczynnikach dla stałej prędkości kątowej wirnika i liniowym obwodzie magnetycznym. Następnie przedstawiony zostanie model silnika i równania stanu ustalonego silnika asynchronicznego z niesymetrią rezystancyjną klatki uwzględniającego wyższe harmoniczne. W dalszej kolejności wyprowadzono model zredukowany ze współczynnikami aproksymującymi niesymetrię rezystancyjną obwodu klatki wirnika. Podano definicję współczynników niesymetrii klatki w monoharmonicznym modelu silnika klatkowego jako pierwszy sposób redukcji modelu.

Drugi sposób redukcji modelu zakładał wyjście od pełnego opis modelu obwodowego silnika indukcyjnego klatkowego w współrzędnych fazowych, transformację modelu silnika do współrzędnych składowych symetrycznych i zapis równania bilansu harmonicznym. Następnie model ten zostanie przekształcony do postaci rzeczywistej całkownej numerycznie z uwzględnieniem równania mechanicznego.

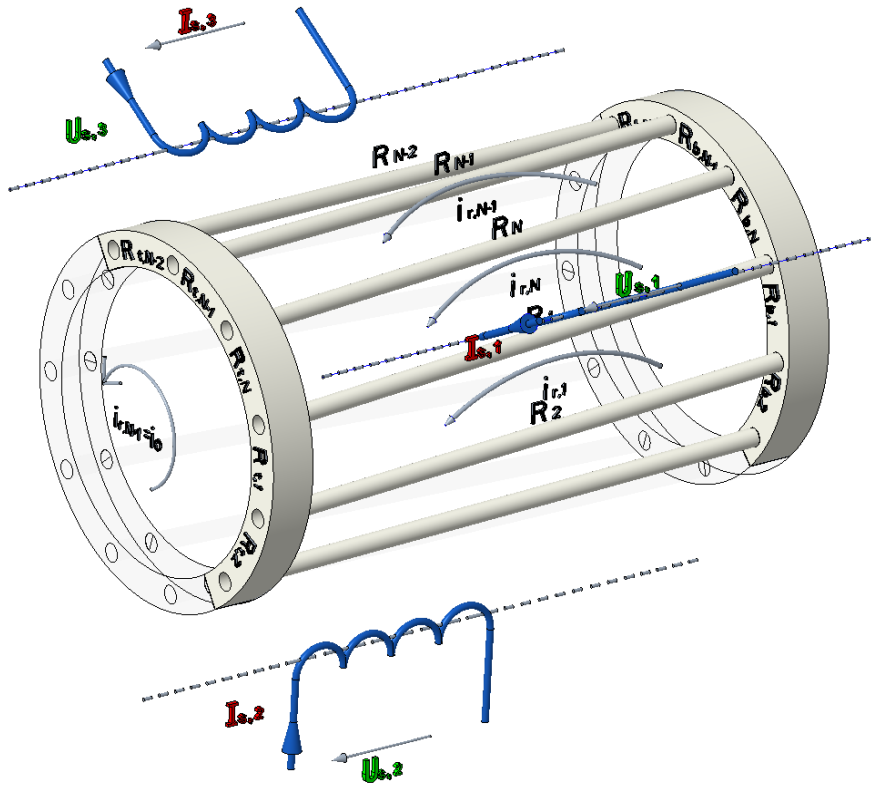
W ostatniej części zostanie przedstawiony model monoharmoniczny całkowny numerycznie z pełnym odwzorowaniem klatki wirnika, który posłuży do wieloprzekrojowych porównawczych analiz diagnostycznych.

2.2. Model matematyczny silnika asynchronicznego z niesymetrią rezystancyjną klatki uwzględniający wyższe harmoniczne

Rozważania w rozprawie zostaną rozpoczęte od przedstawienia dobrze znanego modelu matematycznego silnika klatkowego, który posiada na stojanie symetryczne uzwojenie 3-fazowe, a klatka wirnika umieszczona jest w symetrycznie rozłożonych jednakowych żłobkach, przy czym dopuszcza się różne rezystancje poszczególnych jej elementów. Ponadto dla modelu przyjęto następujące założenia upraszczające:

- założono liniowość obwodu magnetycznego,
- pominięto spadki napięcia w jarzmach stojana i wirnika,
- pominięto straty mocy w żelazie,
- założono, że szczelina powietrzna jest równomierna, a użłobkowanie stojana i wirnika uwzględniono zastępczo przez współczynnik Cartera.

Równania modelu matematycznego we współrzędnych fazowych można zapisać na podstawie schematycznego zobrazowania uzwojeń stojana i wirnika przedstawionego na Rys.2.1.



Rys. 2.1. Oznaczenie oczek i rezystancji w klatce wirnika.

Równanie silnika asynchronicznego można zapisać następująco [65]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r & \mathbf{R}_{r,N+1} \\ 0 & (\mathbf{R}_{r,N+1})^T & R_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \\ i_{N+1} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} & 0 \\ (\mathbf{L}_{sr})^T & \mathbf{L}_r & \mathbf{L}_{r,N+1} \\ 0 & (\mathbf{L}_{r,N+1})^T & L_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \\ i_{N+1} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Powyższa forma zawiera 3+N+1 równań, w których 3 opisują stojan, dla którego wektory napięć i prądów mają postać:

$$\mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} u_{s,1} \\ u_{s,2} \\ u_{s,3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{i}_s = \begin{bmatrix} i_{s,1} \\ i_{s,2} \\ i_{s,3} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Przez N równań opisano wirnik, dlatego wektor prądów wirnika zawiera N elementów:

$$\mathbf{i}_r = \begin{bmatrix} i_{r,1} \\ i_{r,2} \\ \vdots \\ i_{r,N} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Symbolem i_{N+1} oznaczono prąd oczka N+1.

Macierz rezystancji stojana:

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} R_s & & \\ & R_s & \\ & & R_s \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Macierz rezystancji klatki wirnika:

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} R_{p,1} + R_{p,2} + R_{sg,1} + R_{sd,1} & -R_{p,2} & \dots & \dots & -R_{p,1} \\ -R_{p,2} & R_{p,2} + R_{p,3} + R_{sg,2} + R_{sd,2} & -R_{p,3} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_{p,1} & \dots & \dots & -R_{p,N} & R_{p,N} + R_{p,1} + R_{sg,N} + R_{sd,N} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

gdzie:

$R_{p,1}, R_{p,2}, \dots, R_{p,N}$ - rezystancje prętów klatki,

$R_{sg,1}, R_{sg,2}, \dots, R_{sg,N}$ i $R_{sd,1}, R_{sd,2}, \dots, R_{sd,N}$ - rezystancje segmentów pierścieni łączących pręty klatki, po stronie górnej i dolnej.

Macierz rezystancji klatki wirnika dla oczka N+1:

$$\mathbf{R}_{r,N+1} = [R_{sg,1} \quad R_{sg,2} \quad \dots \quad R_{sg,N}]^T \quad (2.6)$$

Rezystancja oczka N+1:

$$\mathbf{R}_{N+1} = \left[\sum_{n=1}^N R_{sg,n} \right] \quad (2.7)$$

Macierz indukcyjności dla faz stojana:

$$\mathbf{L}_s = \mathbf{L}_s^\sigma + \mathbf{L}_s^\mu \quad (2.8)$$

Macierz indukcyjności rozproszeń stojana:

$$\mathbf{L}_s^\sigma = \begin{bmatrix} L_s^\sigma & M_s^\sigma & M_s^\sigma \\ M_s^\sigma & L_s^\sigma & M_s^\sigma \\ M_s^\sigma & M_s^\sigma & L_s^\sigma \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

gdzie:

L_s^σ - indukcyjność rozproszenia fazy stojana,

M_s^σ - indukcyjność wynikająca z strumieni rozproszenia żłobkowego oraz połączeń czołowych.

Elementy macierzy indukcyjności wzajemnych uzwojeń stojana są opisane jedną funkcją L_s^μ , które są przesunięte wzajemnie o kąt $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ dla strumienia głównego.

$$\mathbf{L}_s^\mu = \begin{bmatrix} L_s^\mu(0) & L_s^\mu(-p\alpha) & L_s^\mu(-2p\alpha) \\ L_s^\mu(p\alpha) & L_s^\mu(0) & L_s^\mu(-p\alpha) \\ L_s^\mu(2p\alpha) & L_s^\mu(p\alpha) & L_s^\mu(0) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Macierz indukcyjności dla oczek klatki wirnika:

$$\mathbf{L}_r = \mathbf{L}_r^\sigma + \mathbf{L}_r^\mu \quad (2.11)$$

Macierz indukcyjności rozprożeń klatki wirnika:

$$\mathbf{L}_r^\sigma = \begin{bmatrix} L_{p,1}^\sigma + L_{p,2}^\sigma + L_{sg,1}^\sigma + L_{sd,1}^\sigma & -L_{p,2}^\sigma & \dots & \dots & -L_{p,1}^\sigma \\ -L_{p,2}^\sigma & L_{p,2}^\sigma + L_{p,3}^\sigma + L_{sg,2}^\sigma + L_{sd,2}^\sigma & -L_{p,3}^\sigma & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -L_{p,1}^\sigma & \dots & \dots & -L_{p,N}^\sigma & L_{p,N}^\sigma + L_{p,1}^\sigma + L_{sg,N}^\sigma + L_{sd,N}^\sigma \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

gdzie:

$L_{p,1}^\sigma, L_{p,2}^\sigma, \dots, L_{p,N}^\sigma$ - indukcyjności rozprożeń prętów

$L_{sg,1}^\sigma, L_{sg,2}^\sigma, \dots, L_{sg,N}^\sigma$ i $L_{sd,1}^\sigma, L_{sd,2}^\sigma, \dots, L_{sd,N}^\sigma$ - indukcyjności rozprożeń segmentów pierścieni łączących pręty klatki, po stronie górnej i dolnej.

Macierz indukcyjności własnych klatki wirnika posiada elementy, które można wyznaczyć za pomocą jednej funkcji zależnej od $\varepsilon = \frac{2\pi}{N}$

$$\mathbf{L}_r^\mu = \begin{bmatrix} L_r^\mu(0) & L_r^\mu(-\varepsilon) & L_r^\mu(-2\varepsilon) & \dots & L_r^\mu(2\varepsilon) & L_r^\mu(\varepsilon) \\ L_r^\mu(\varepsilon) & L_r^\mu(0) & L_r^\mu(-\varepsilon) & L_r^\mu(-2\varepsilon) & \dots & L_r^\mu(2\varepsilon) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ L_r^\mu(-\varepsilon) & L_r^\mu(-2\varepsilon) & \dots & L_r^\mu(2\varepsilon) & L_r^\mu(\varepsilon) & L_r^\mu(0) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Elementy macierzy indukcyjności wzajemnych (stojana i klatki wirnika) wyznaczone są przez jedną funkcję.

$$\mathbf{L}_{sr} = \begin{bmatrix} L_{sr}^{\mu}(p\varphi) & L_{sr}^{\mu}(p(\varphi - \varepsilon)) & \cdots & L_{sr}^{\mu}(p(\varphi - (N-1)\varepsilon)) \\ L_{sr}^{\mu}(p\varphi + \alpha) & L_{sr}^{\mu}(p(\varphi - \varepsilon) + \alpha) & \cdots & L_{sr}^{\mu}(p(\varphi - (N-1)\varepsilon) + \alpha) \\ L_{sr}^{\mu}(p\varphi + 2\alpha) & L_{sr}^{\mu}(p(\varphi - \varepsilon) + 2\alpha) & \cdots & L_{sr}^{\mu}(p(\varphi - (N-1)\varepsilon) + 2\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

gdzie:

L_s^{μ} , L_{sr}^{μ} , L_r^{μ} - funkcje opisujące zmianę indukcyjności wzajemnej dwóch odpowiednich uzwojeń od kąta jakie tworzą osie symetrii tych uzwojeń.

Macierz indukcyjności dla oczka N+1 klatki wirnika:

$$\mathbf{L}_{r,N+1} = \mathbf{L}_{r,N+1}^{\sigma} + \mathbf{L}_{r,N+1}^{\mu} \quad (2.15)$$

Macierz indukcyjności rozproszeń dla oczka klatki wirnika:

$$\mathbf{L}_{r,N+1}^{\sigma} = \begin{bmatrix} L_{sg,1}^{\sigma} \\ L_{sg,2}^{\sigma} \\ \vdots \\ L_{sg,N}^{\sigma} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$L_{N+1} = L_{N+1}^{\sigma} + L_{N+1}^{\mu} \quad (2.17)$$

$$L_{N+1}^{\sigma} = \left[\sum_{n=1}^N L_{sg,n}^{\sigma} \right] \quad (2.18)$$

gdzie: L_{N+1}^{μ} indukcyjność N+1 oczka klatki dla strumienia poosiowego

Równania silnika asynchronicznego o symetrycznej budowie uzwojeń znacznie się upraszczają przy opisie w składowych symetrycznych, dlatego za pomocą macierzy transformacji (2.19) i (2.20) dokonuje się transformacji:

- dla stojana:

$$\mathbf{T}_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

gdzie: $a = e^{j\alpha}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

- dla wirnika:

$$\mathbf{T}_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \mathbf{b} & \dots & \mathbf{b}^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \mathbf{b}^{N-1} & \dots & \mathbf{b}^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

gdzie: $b = e^{j\frac{2\pi}{N}}$

Równanie maszyny po transformacji do składowych symetrycznych przyjmuje postać [65]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}^r & \mathbf{R}_{N+1}^r \\ 0 & (\mathbf{R}_{N+1}^r)^* & \mathbf{R}_{N+1}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}^s \\ \mathbf{i}^r \\ i_{N+1}^r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{L}^s & \mathbf{L}^{sr} & 0 \\ (\mathbf{L}^{sr})^* & \mathbf{L}^r & \mathbf{L}_{N+1}^r \\ 0 & (\mathbf{L}_{N+1}^r)^* & \mathbf{L}_{N+1}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}^s \\ \mathbf{i}^r \\ i_{N+1}^r \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Wektory:

- napięć stojana:

$$\mathbf{u}^s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ u_s^1 \\ u_s^2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_s \begin{bmatrix} u_{s,1} \\ u_{s,2} \\ u_{s,3} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

- prądów stojana:

$$\mathbf{i}^s = \begin{bmatrix} i_s^0 \\ i_s^1 \\ i_s^2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_s \begin{bmatrix} i_{s,1} \\ i_{s,2} \\ i_{s,3} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

- prądów wirnika:

$$\mathbf{i}^r = \begin{bmatrix} i_r^0 \\ i_r^1 \\ \vdots \\ i_r^N \end{bmatrix} = \mathbf{T}_r \begin{bmatrix} i_{r,1} \\ i_{r,2} \\ \vdots \\ i_{r,N} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

gdzie:

$$m_\rho = M_\rho e^{j\rho\varphi} \quad ; \quad M_\rho = \frac{1}{2} \frac{3}{2} A \left(\frac{w_s k_{s,\rho}}{\rho} \right) \left(\frac{k_{r,\rho}}{\rho} \right) \quad (k_{r,\rho} \text{ jest współczynnikiem uzwojenia}).$$

Jeśli współczynnik Fouriera indukcyjności wzajemnej pomiędzy fazą stojana i klatką wirnika różni się od zera $M_\rho \neq 0$, wówczas element szeregu m_ρ pojawia się w kolumnie ρ (modulo N), w wierszu, ρ (modulo 3) przy numeracji kolumn (0,1, ..., N-1) oraz wierszy (0,1,2). Istotny jest fakt, że każdy wyraz m_ρ pojawia się w tej macierzy jedynie raz. W pełni symetryczne uzwojenia stojana wytwarza tylko nieparzyste numery harmoniczne, które o numerach ze zbioru $\rho \in \{p(1+2l)\}$ dla $l \in \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$. Biorąc powyższe pod uwagę można stwierdzić, że struktura macierzy L_{sr} w istotny sposób zależy od liczby par biegunów p oraz liczby prętów wirnika N , a rozpatrywane widmo Fouriera przepływu uzwojenia stojana pozostaje bez zmian w przypadku uszkodzeń klatki przez zmianę rezystancji jej elementów.

Macierze rezystancji klatki po transformacji do składowych symetrycznych przyjmują formę:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^r = & \begin{bmatrix} R_t^0 & R_t^{N-1} & \dots & R_t^1 \\ R_t^1 & R_t^0 & \dots & R_t^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_t^{N-1} & R_t^{N-2} & \dots & R_t^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_b^0 & R_b^{N-1} & \dots & R_b^1 \\ R_b^1 & R_b^0 & \dots & R_b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_b^{N-1} & R_b^{N-2} & \dots & R_b^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R^0 & R^{N-1} & \dots & R^1 \\ R^1 & R^0 & \vdots & R^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{N-1} & R^{N-2} & \vdots & R^0 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & b^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b^{-(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^0 & R^{N-1} & \dots & R^1 \\ R^1 & R^0 & \dots & R^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{N-1} & R^{N-2} & \vdots & R^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & b & & \\ & & \ddots & \\ & & & b^{N-1} \end{bmatrix} + \\ & - \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & b^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b^{-(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^0 & R^{N-1} & \dots & R^1 \\ R^1 & R^0 & \dots & R^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{N-1} & R^{N-2} & \dots & R^0 \end{bmatrix} + \\ & - \begin{bmatrix} R^0 & R^{N-1} & \dots & R^1 \\ R^1 & R^0 & \dots & R^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{N-1} & R^{N-2} & \dots & R^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & b & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{N-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{R}_o^r = \mathbf{T}_r \mathbf{R}_{or} = \sqrt{N} \begin{bmatrix} R_t^0 \\ R_t^1 \\ \vdots \\ R_t^{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Rezystancje dla składowych symetrycznych R^n , R_t^n and R_b^n (gdzie $n \in \{0,1,\dots,N-1\}$) są określone w następujący sposób (dla każdego indeksu dolnego).

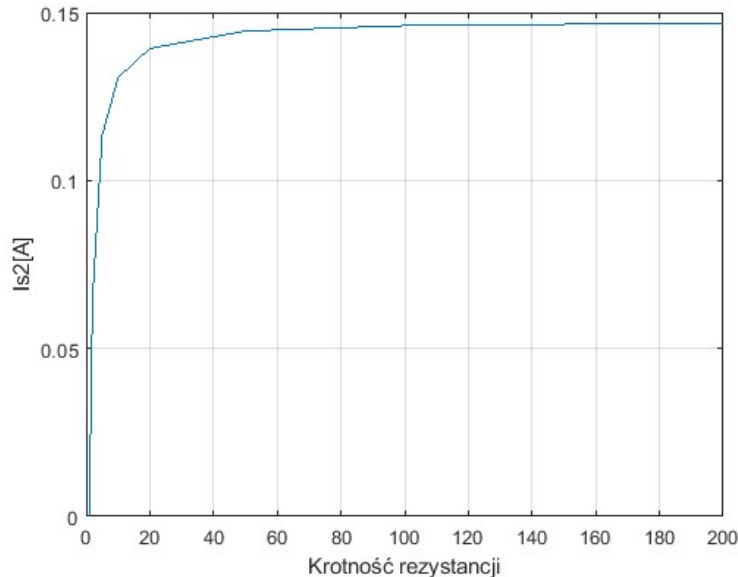
$$\begin{bmatrix} R^o \\ R^1 \\ \vdots \\ R^{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & b & \dots & b^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & b^{N-1} & \dots & b^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

W modelu z uszkodzoną klatką, rezystancje uszkodzonych elementu klatki są odpowiednio zwiększane. W powyższych macierzach występują trzy zestawy rezystancji:

- rezystancje prętów klatki R_1, R_2, \dots, R_N ,

- rezystancje segmentów zawierających pręty klatki po obydwu jej stronach $R_{11}, R_{12}, \dots, R_{1N}$

i $R_{b1}, R_{b2}, \dots, R_{bN}$. W przeprowadzonych symulacjach dla uszkodzenia jednego pręta wykazano, że zwiększenie 20 krotne rezystancji pręta jest wystarczające dla pojawienie na odpowiednim poziomie składowej $f_0(1-2s)$, która informuje o niesymetrii klatki [69].



Rys. 2.2. Zależność składowej $I_{1,-2p}^{s,2}$ prądu stojana od krotności rezystancji uszkodzonego pręta.

Na Rys. 2.2. przedstawiono zależność tej składowej prądu stojana od krotności rezystancji uszkodzonego pręta.

2.3. Równania stanu ustalonego silnika asynchronicznego z niesymetrią rezystancyjną klatki uwzględniającego wyższe harmoniczne

W podrozdziale tym przedstawiono równania stanu ustalonego silnika klatkowego z niesymetrią rezystancyjną klatki. Wynikają one z zastosowania metody bilansu harmonicznym do równań silnika w składowych symetrycznych wyprowadzonych w poprzednich podrozdziałach. Rozpatrywany jest stan ustalony przy założeniu stałej prędkości obrotowej $\omega = const$ oraz przy zasilaniu faz stojana symetrycznym trójfazowym układem napięć. W tych warunkach równania silnika tworzą liniowy układ równań różniczkowych o okresowo-zmiennych współczynnikach oraz o mono-harmonicznym wymuszeniu. Wektor napięć fazowych w składowych symetrycznych przyjmuje postać [65]:

$$\mathbf{u}^s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ u_s^1 \\ u_s^2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} U \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{j\omega_o t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-j\omega_o t} \right) = \mathbf{u}_1^s + \mathbf{u}_{-1}^s \quad (2.31)$$

jest więc superpozycją dwóch wymuszeń

$$\mathbf{u}_1^s = \sqrt{\frac{3}{2}} U \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{j\omega_o t} \quad (2.32)$$

oraz

$$\mathbf{u}_{-1}^s = \sqrt{\frac{3}{2}} U \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-j\omega_o t} \quad (2.33)$$

gdzie: U jest wartością skuteczną napięcia fazowego.

Dla wymuszenia \mathbf{u}_1^s , zgodnie z metodą bilansu harmonicznym, należy przewidzieć prądy stojana i wirnika w postaci szeregu Fouriera:

- dla fazy stojana

$$\mathbf{i}_1^s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{1,k}^s e^{j(\omega_o + k\omega)t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} I_{1,k}^{s,0} \\ I_{1,k}^{s,1} \\ I_{1,k}^{s,2} \end{bmatrix} e^{j(\omega_o + k\omega)t} \quad (2.34)$$

- dla oczek klatki wirnika

$$\mathbf{i}_1^r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{1,k}^r e^{j(\omega_0+k\omega)t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} I_{1,k}^{r,0} \\ I_{1,k}^{r,1} \\ \vdots \\ I_{1,k}^{r,N-1} \\ I_{1,k}^o \end{bmatrix} e^{j(\omega_0+k\omega)t} \quad (2.35)$$

W wektorach prądów przyjęto następujące oznaczenia:

- indeks górny: pierwszy, oznacza stojan 's' lub wirnik 'r', drugi, oznacza numer składowej symetrycznej,

- indeks dolny: pierwszy, '1' dla wymuszenia \mathbf{u}_1^s ; '-1' dla wymuszenia \mathbf{u}_{-1}^s , drugi określa pulsację $(\pm\omega_0 + k\omega)$.

Dla wymuszenia \mathbf{u}_{-1}^s prądy stojana i wirnika należy przewidzieć również w postaci szeregu Fouriera:

$$\mathbf{i}_{-1}^s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{-1,k}^s e^{j(-\omega_0+k\omega)t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} I_{-1,k}^{s,0} \\ I_{-1,k}^{s,1} \\ I_{-1,k}^{s,2} \end{bmatrix} e^{j(-\omega_0+k\omega)t} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{i}_{-1}^r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_{-1,k}^r e^{j(-\omega_0+k\omega)t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} I_{-1,k}^{r,0} \\ I_{-1,k}^{r,1} \\ \vdots \\ I_{-1,k}^{r,N-1} \\ I_{-1,k}^o \end{bmatrix} e^{j(-\omega_0+k\omega)t} \quad (2.37)$$

Współczynniki tych szeregów można wyznaczyć na podstawie rozwiązań dla wymuszenia \mathbf{u}_1^s , ponieważ w prądach faz stojana oraz oczek klatki muszą wystąpić pary wzajemnie sprzężonych funkcji dające w sumie funkcje rzeczywiste. Biorąc powyższe pod uwagę wystarczy wyznaczyć prądy dla wymuszenia \mathbf{u}_1^s .

Równania stanu ustalonego przy warunkach uprzednio określonych można zapisać [65]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{R}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_R \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_S & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_S & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{L}_R \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_S \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Wymiar równania (2.34) jest nieograniczony, w rzeczywistości wymiary równań stojana i wirnika ograniczamy do pewnej liczby dającej już wystarczającą dobrą dokładność obliczeń. W praktyce wygląda to tak, że wektory z równania (2.34) muszą być rozszerzone symetrycznie względem elementów $I_{1,0}^{s,1}$ i $I_{1,-p}^r$.

Odpowiednie wektory i macierze mają formę:

$$\mathbf{U}_S = \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}U & 0 \dots \end{bmatrix}^T \quad (2.39)$$

$$\mathbf{I}_S = \begin{bmatrix} \dots & I_{1,4p}^{s,2} & I_{1,0}^{s,1} & I_{1,-2p}^{s,2} & \dots \end{bmatrix}^T \quad (2.40)$$

$$\mathbf{I}_R = \begin{bmatrix} \dots & (I_{1,5p}^r)^T & (I_{1,-p}^r)^T & (I_{1,-7p}^r)^T & \dots \end{bmatrix}^T \quad (2.41)$$

$$\mathbf{R}_S = \text{diag}[\dots R_s \ R_s \ R_s \ R_s \ \dots] \quad (2.42)$$

$$\mathbf{R}_R = \text{diag}[\dots \mathbf{R}^c \ \mathbf{R}^c \ \mathbf{R}^c \ \dots] \quad ; \quad \mathbf{R}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^r & \mathbf{R}_o^r \\ \mathbf{R}_o^{r*} & R_o \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_S = \text{diag}[\dots (\omega_0 + 4p\omega) \ \omega_0 \ (\omega_0 - 2p\omega) \ \dots] \quad (2.44)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_R = \text{diag}[\dots (\omega_0 + 5p\omega)\mathbf{E} \ (\omega_0 - p\omega)\mathbf{E} \ (\omega_0 - 7p\omega)\mathbf{E} \ \dots] \quad (2.45)$$

gdzie: \mathbf{E} – macierz jednostkowa

$$\mathbf{L}_S = \text{diag}[\dots L_s^1 \ L_s^0 \ L_s^1 \ L_s^1 \ \dots] \quad (2.46)$$

$$\mathbf{L}_R = \text{diag}[\dots \mathbf{L}^c \ \mathbf{L}^c \ \mathbf{L}^c \ \dots] \quad ; \quad \mathbf{L}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^r & \mathbf{L}_o^r \\ \mathbf{L}_o^{r*} & L_o \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{M}_{sr} = \text{diag} \left[\mathbf{M}_{sr}^1 \quad \mathbf{M}_{sr}^2 \right]^T \quad (2.48)$$

$$\mathbf{M}_{sr}^1 = \begin{bmatrix} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & M_{m,-5p} \dots 0 & M_{m,p} \dots 0 & M_{m,7p} \dots 0 & M_{m,13p} \dots 0 & \dots \\ \dots & M_{m,-11p} \dots 0 & M_{m,-5p} \dots 0 & M_{m,p} \dots 0 & M_{m,7p} \dots 0 & \dots \\ \dots & M_{m,-17p} \dots 0 & M_{m,-11p} \dots 0 & M_{m,-5p} \dots 0 & M_{m,p} \dots 0 & \dots \\ \dots & M_{m,-23p} \dots 0 & M_{m,-17p} \dots 0 & M_{m,-11p} \dots 0 & M_{m,-5p} \dots 0 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{M}_{sr}^2 = \begin{bmatrix} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & M_{m,-p} \dots 0 & M_{m,5p} \dots 0 & M_{m,11p} \dots 0 & M_{m,17p} \dots 0 & \dots \\ \dots & M_{m,-7p} \dots 0 & M_{m,-p} \dots 0 & M_{m,5p} \dots 0 & M_{m,11p} \dots 0 & \dots \\ \dots & M_{m,-13p} \dots 0 & M_{m,-7p} \dots 0 & M_{m,-p} \dots 0 & M_{m,5p} \dots 0 & \dots \\ \dots & M_{m,-19p} \dots 0 & M_{m,-13p} \dots 0 & M_{m,-7p} \dots 0 & M_{m,-p} \dots 0 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Macierz \mathbf{M} jest zbudowana z jednowierszowych macierzy \mathbf{M}_k^0 , \mathbf{M}_k^1 and \mathbf{M}_k^2 , z $N + 1$ kolumn, które wynikają z formy macierzy \mathbf{L}^{sr} zapisanej wcześniej (2.27) w następującej postaci:

$$\mathbf{L}^{sr} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_k^0 \\ \mathbf{M}_k^1 \\ \mathbf{M}_k^2 \end{bmatrix} e^{jk\varphi} \quad (2.51)$$

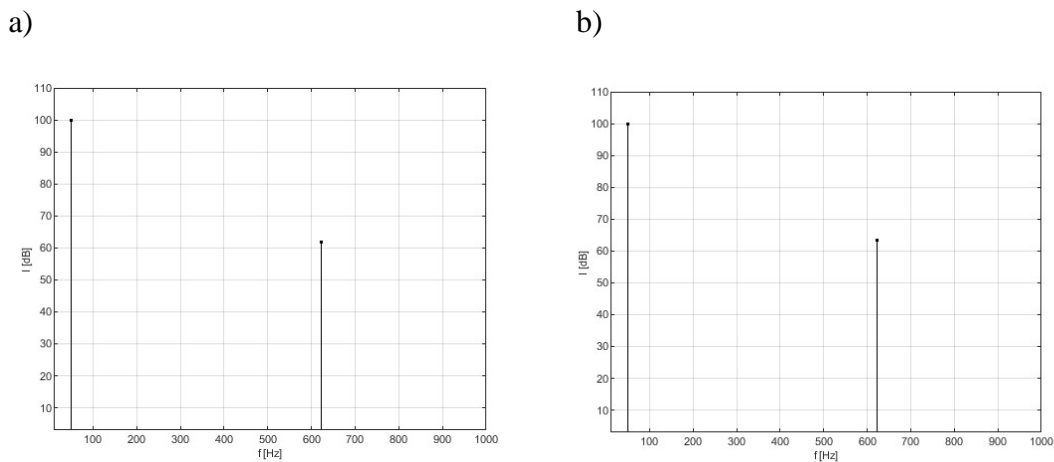
Macierze \mathbf{M}_k^0 , \mathbf{M}_k^1 i \mathbf{M}_k^2 posiadają tylko jeden element różny od zera.

Na podstawie równania (2.38) zostaną przeanalizowane wybrane przypadki uszkodzenia w klatce silnika Sg 112 M4 o danych znamionowych: $P_N = 4.0 \text{ kW}$, $U_N = 400 \text{ V}$, $I_N = 8,7 \text{ A}$. Liczba par biegunów dla tego silnika wynosi $p = 2$, a liczba prętów klatki $N = 28$. Wszystkie analizy i obliczenia w rozprawie wykonano dla tego silnika.

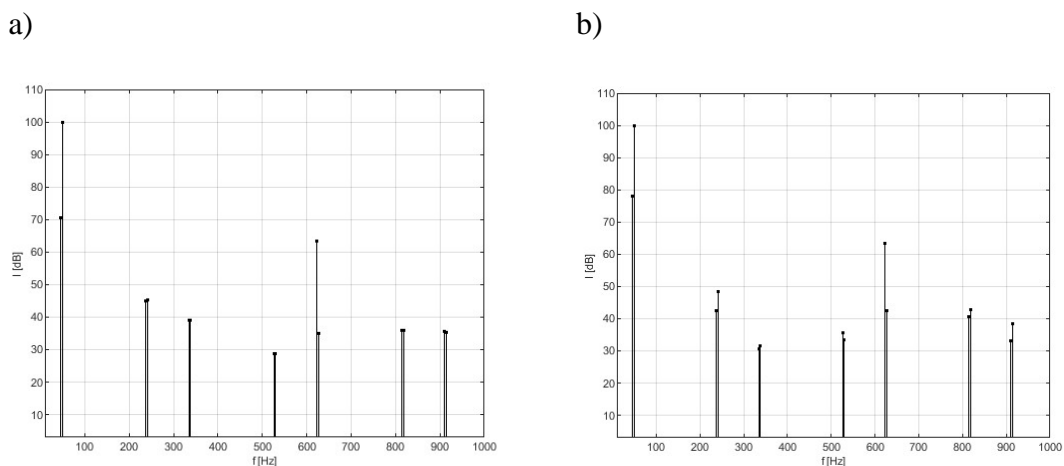
Dla badanego silnika wykonano obliczenia rozpoczynając od symetrycznej klatki przez analizę przypadków z kolejno uszkodzonymi prętami od jednego uszkodzonego pręta do ośmiu

uszkodzonych sąsiednich prętów. Uszkodzenie każdego pręta w modelu jest odwzorowane przez stokrotne zwiększenie rezystancji pręta a wszystkie obliczenia przeprowadzono przy poślizgu $s=0.04$. Modelowanie uszkodzeń rozpoczęto od pręta o numerze 1.

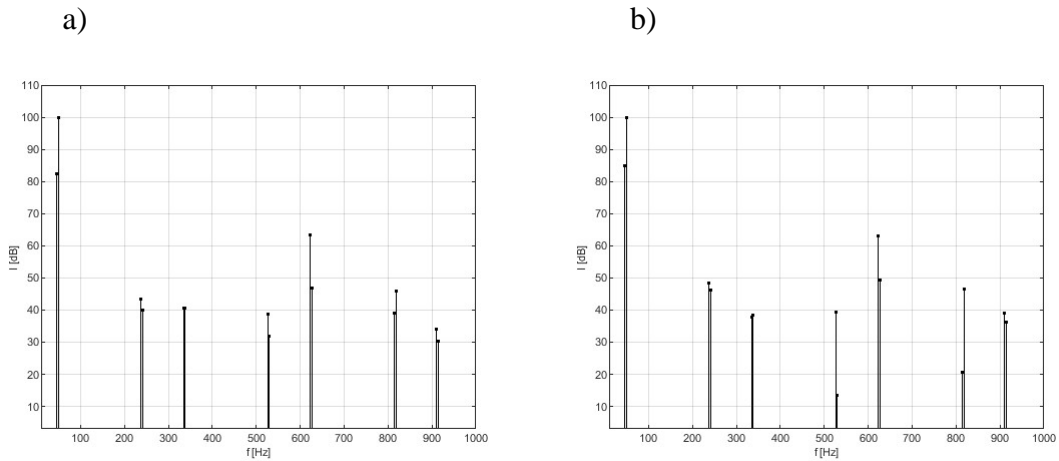
Na Rys. 2.3. przedstawiono względne widmo prądu stojana dla symetrii oraz symetrycznego uszkodzenia klatki wirnika dla czterestu prętów uszkodzonego co drugi pręt. Na Rys. 2.4 do Rys. 2.7. przedstawiono widma dla narastającego uszkodzenia prętów klatki wirnika od jednego uszkodzonego pręta do ośmiu sąsiednich uszkodzonych prętów.



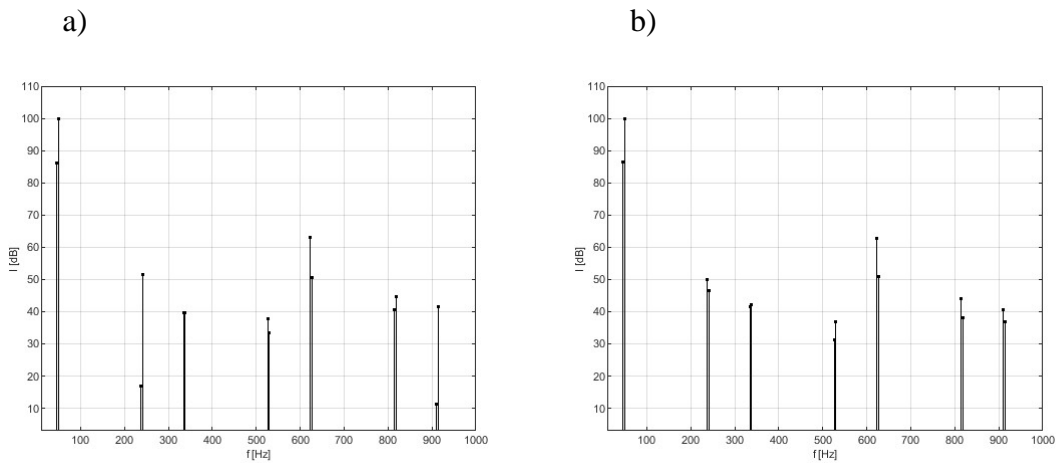
Rys. 2.3. Wielkości $|I_{1,k}^s|$ (w dB) dla: a) symetrycznej klatki, b) czterestu uszkodzonych prętach co drugi.



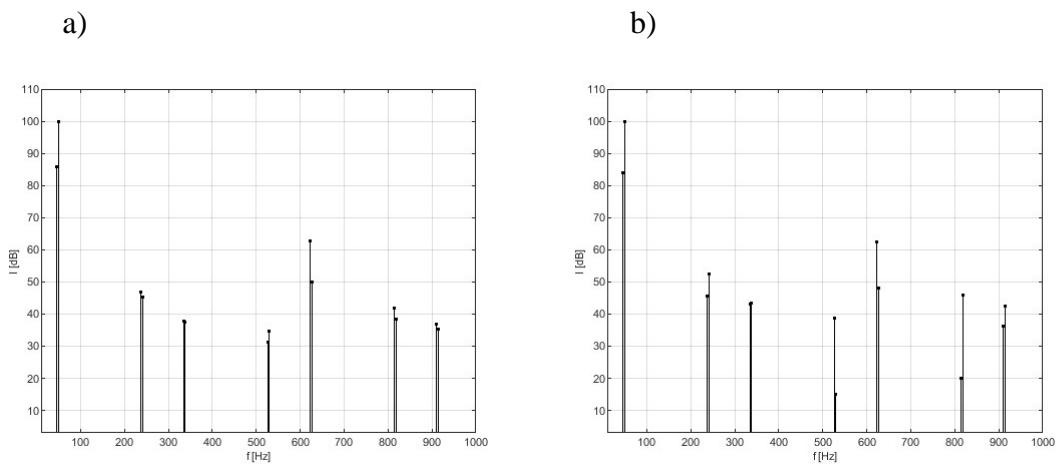
Rys. 2.4. Wielkości $|I_{1,k}^s|$ (w dB) dla: a) uszkodzenia 1 pręta, b) uszkodzenia 1, 2 pręta.



Rys. 2.5. Wielkości $|I_{1,k}^s|$ (w dB) dla: a) uszkodzenia 1, 2, 3 pręta, b) uszkodzenia 1, 2, 3, 4 pręta.

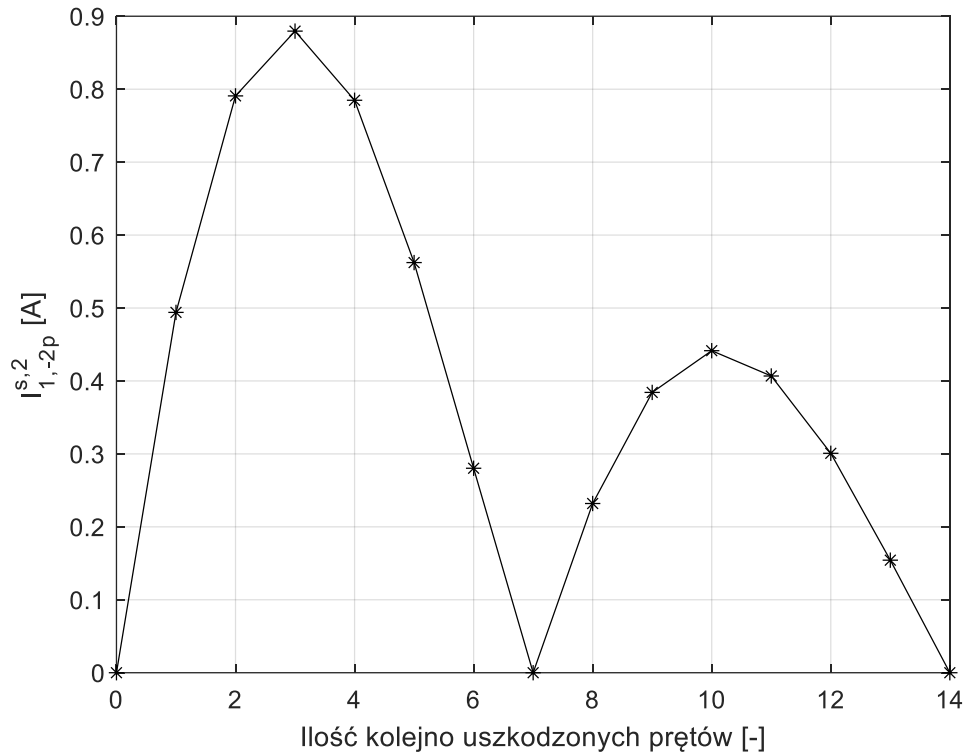


Rys. 2.6. Wielkości $|I_{1,k}^s|$ (w dB) dla: a) uszkodzenia 1, 2, 3, 4, 5 pręta, b) uszkodzenia 1, 2, 3, 4, 5, 6 pręta.



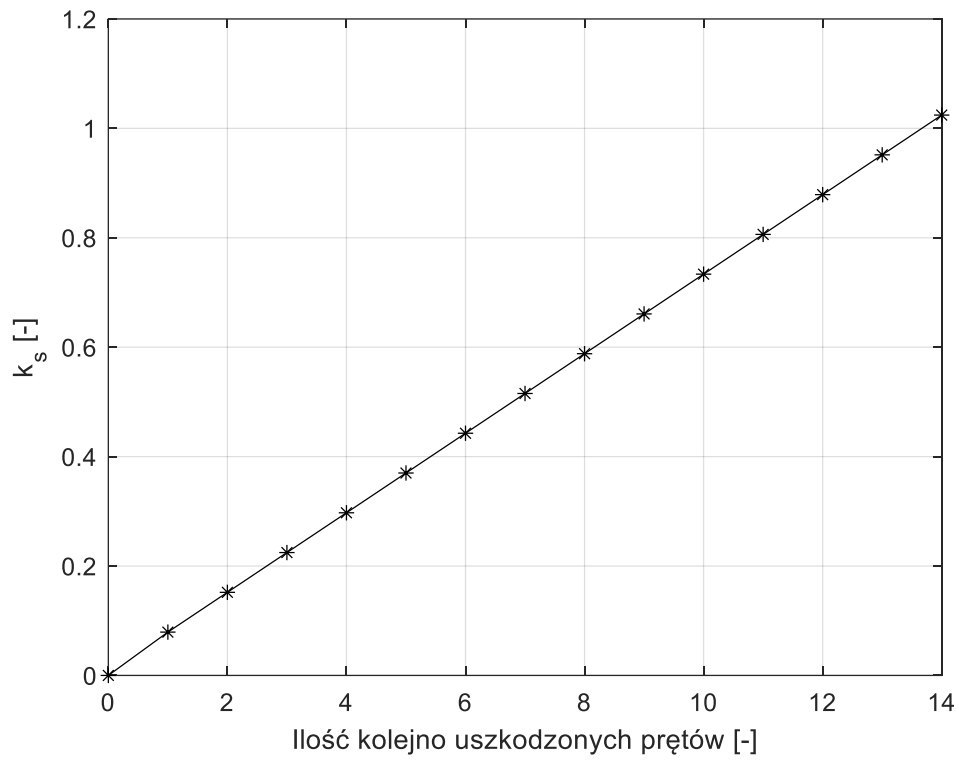
Rys. 2.7. Wielkości $|I_{1,k}^s|$ (w dB) dla: a) uszkodzenia 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 pręta, b) uszkodzenia 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 pręta.

Przeprowadzono również obliczenia dla uszkodzenia 9, 10, 11, 12, 13 i 14 prętów. Dla wykonanych obliczeń przedstawiono zmianę składowej $I_{1,-2p}^{s,2}$ prądu stojana w zależności od ilości uszkodzonych prętów. Zależność składowej $I_{1,-2p}^{s,2}$ prądu stojana od liczby uszkodzonych prętów zobrazowano na Rys. 2.8.

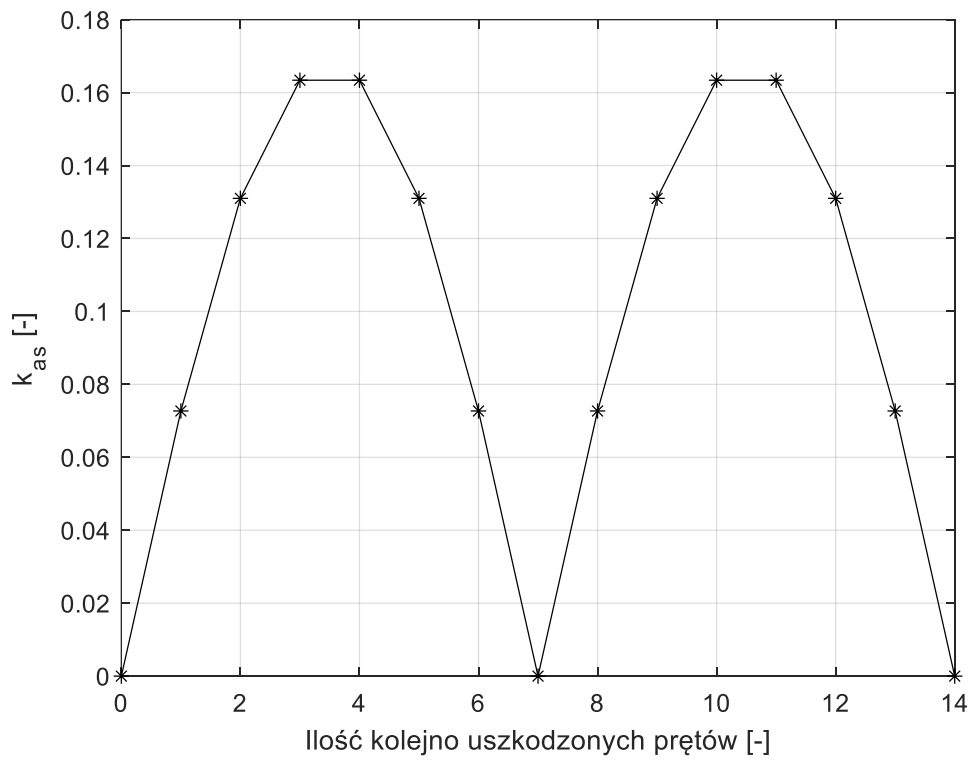


Rys. 2.8. Zależność składowej $I_{1,-2p}^{s,2}$ prądu stojana od liczby uszkodzonych prętów.

Na Rys. 2.9. przedstawiono zależność współczynnika k_s w zależności od liczby uszkodzonych prętów klatki wirnika. Natomiast na Rys. 2.10. przedstawiono zależność współczynnika k_{as} od liczby uszkodzonych prętów klatki wirnika. Wartość współczynnika k_s cały czas w przedziale do 14 uszkodzonych prętów narasta. Dla współczynnika k_{as} można zaobserwować cykliczne powtarzanie się wartości 0 co 7 prętów na obwodzie klatki wirnika.



Rys. 2.9. Zależność współczynnika k_s od liczby uszkodzonych prętów klatki wirnika.



Rys. 2.10. Zależność współczynnika k_{as} od liczby uszkodzonych prętów klatki wirnika.

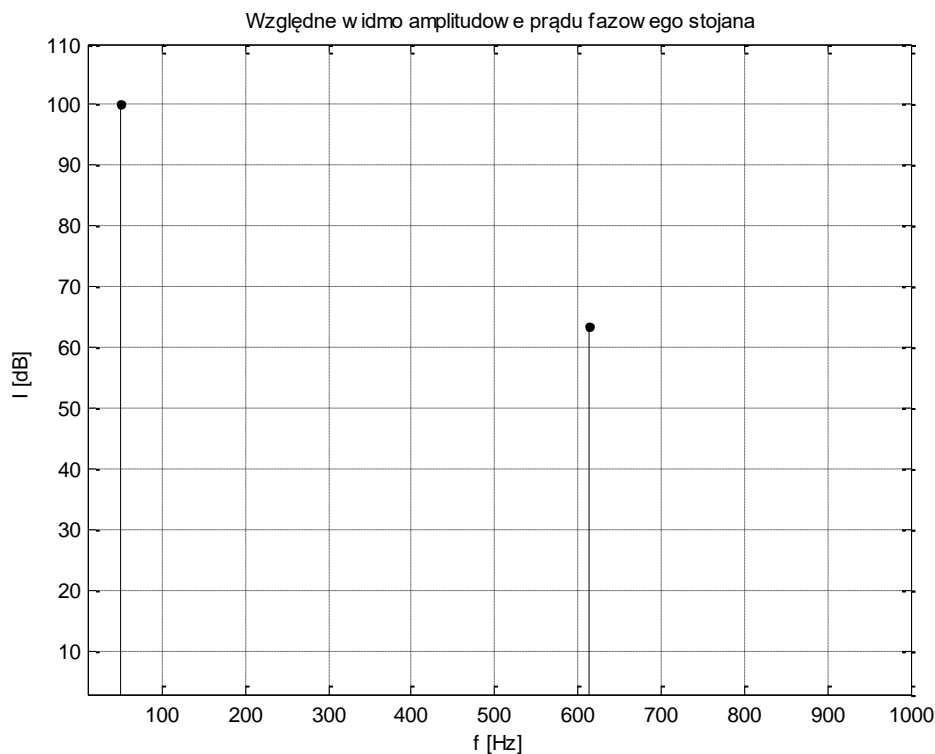
Na Rys. 2.11. przedstawiono względne widmo amplitudowe prądu stojana dla silnika symetrycznego uzyskane z rozwiązań modelu pełnego. Widma wyrażono w skali logarytmicznej w dB. Podstawową harmoniczną prądu odniesiono do wartości 10^{-5} prądu podstawowej harmonicznej tak, aby dla harmonicznej podstawowej uzyskać amplitudę 100dB.

Na Rys. 2.12. przedstawiono względne widmo amplitudowe prądu stojana dla silnika z uszkodzonym pierwszym prętem klatki wirnika.

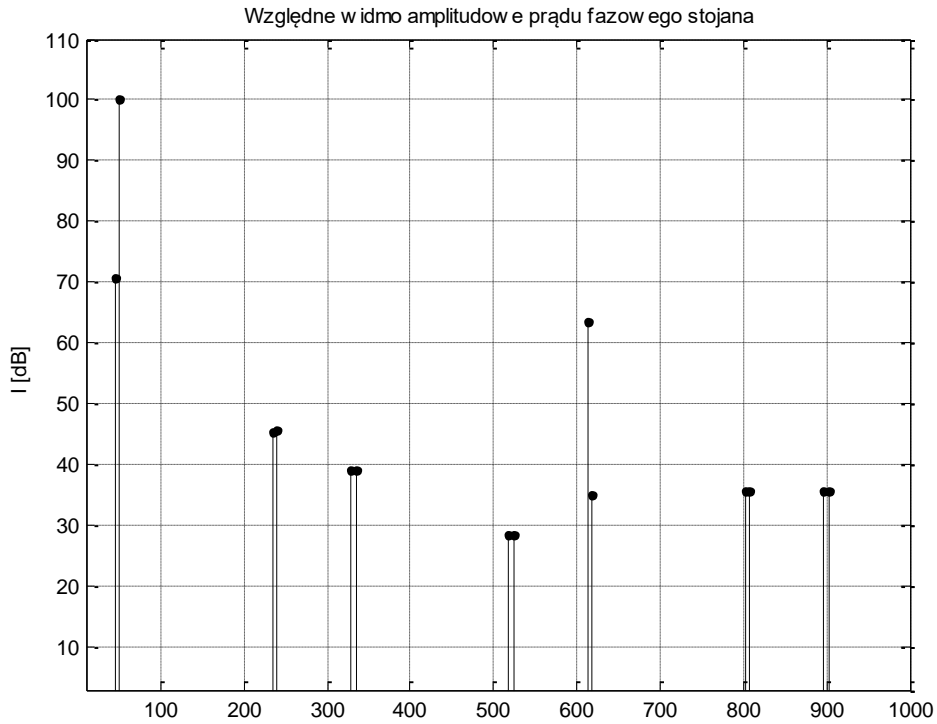
Na Rys. 2.13. i Rys. 2.14. przedstawiono widma dla dwóch uszkodzonych prętów klatki wirnika różnie rozmieszczonych na obwodzie klatki wirnika.

Na Rys. 2.13. przedstawiono widmo względne prądu stojana dla silnika z uszkodzonymi dwoma prętami klatki wirnika o numerach 1 i 2. Natomiast na Rys. 2.14. przedstawiono widmo względne prądu stojana dla silnika z uszkodzonymi dwoma prętami klatki wirnika o numerach 1 i 3.

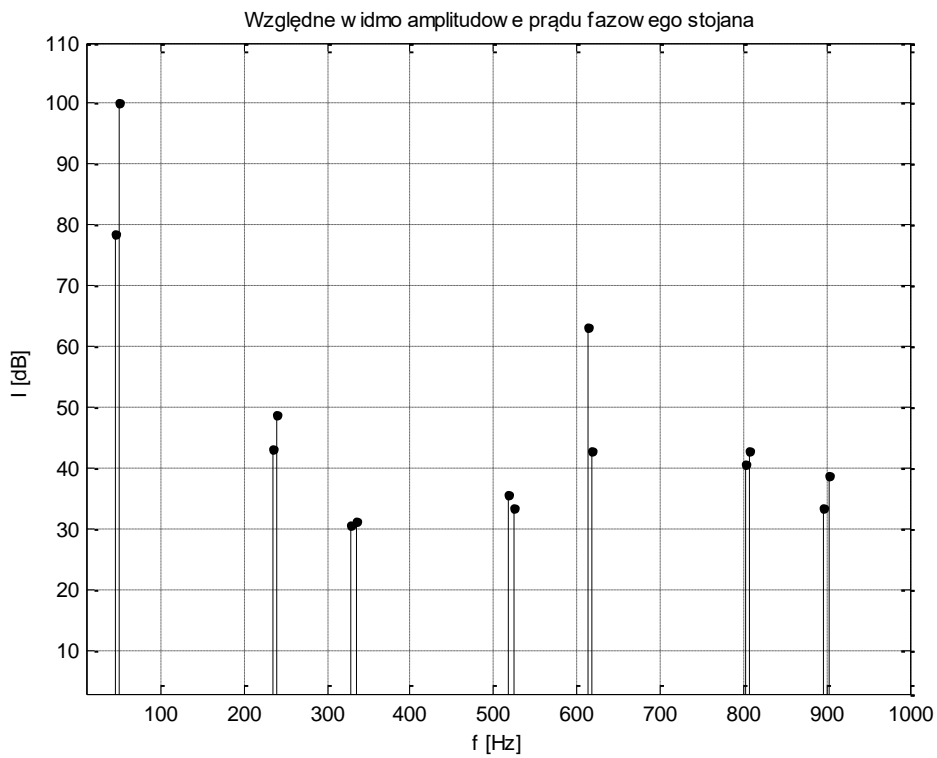
Silnik z takimi właśnie uszkodzeniami wirnika zostały przebadane w laboratorium podczas badań eksperymentalnych.



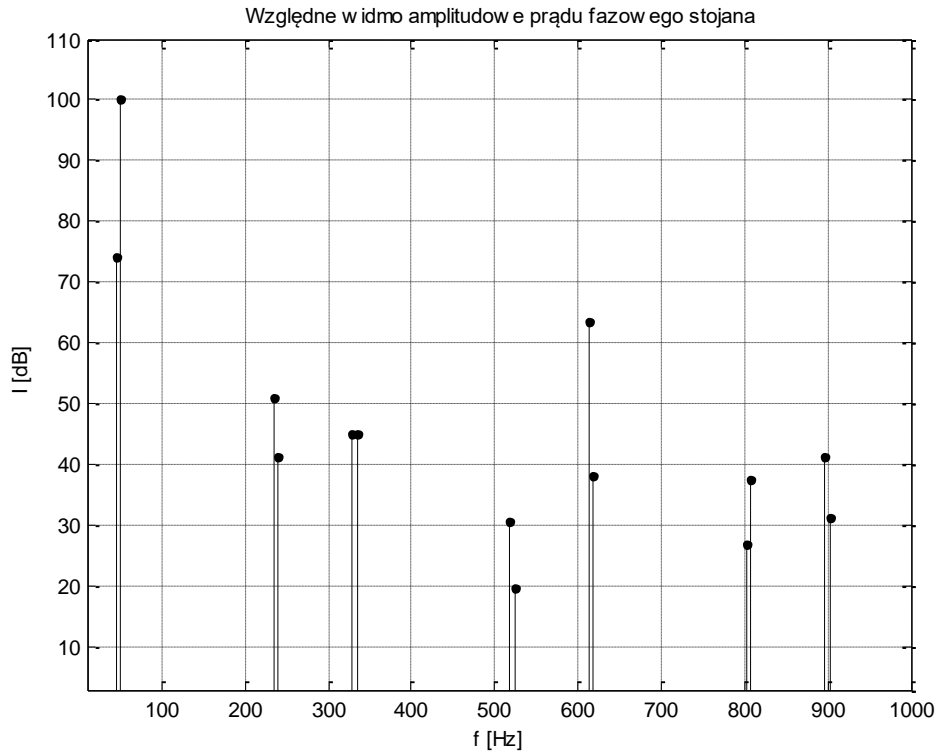
Rys. 2.11. Widmo względne prądu stojana dla silnika symetrycznego, obliczenia dla modelu pełnego.



Rys. 2.12. Widmo względne prądu stojana dla silnika z uszkodzonym jednym prętem klatki wirnika, uszkodzony pręt numer 1, obliczenia dla modelu pełnego.



Rys. 2.13. Widmo względne prądu stojana dla silnika z uszkodzonymi dwoma prętami klatki wirnika, uszkodzone pręty numer 1 i 2, obliczenia dla modelu pełnego.



Rys. 2.14. Widmo względne prądu stojana dla silnika z uszkodzonymi dwoma prętami klatki wirnika, uszkodzone pręty numer 1 i 3, obliczenia dla modelu pełnego.

W Tabeli 2.1. zestawiono wskaźniki diagnostyczne wyznaczone z pełnego modelu dla przypadków badanych w laboratorium, dla których widma przedstawiono na Rys. 2.9 do Rys. 2.12.

Tabela 2.1. Zestawienie wskaźników diagnostycznych uzyskanych z modelu pełnego dla przypadków badanych w laboratorium.

Rodzaj uszkodzenia	$I_{1,-2p}^{s,2}$	k_s	k_{as}
Silnik symetryczny	0,0000	0,0000	0,0000
Uszkodzony pręt nr 1	0,4940	0,0792	0,0727
Uszkodzone pręty nr 1 i 2	0,7908	0,1519	0,1310
Uszkodzone pręty nr 1 i 3	0,5439	0,1519	0,0907

Dodatkowo w Tabeli 2.2. zestawiono wskaźniki diagnostyczne dla narastającego uszkodzenia klatki wirnika od 1 do 14 sąsiednich prętów.

Tabela 2.2. Zestawienie wskaźników diagnostycznych uzyskanych z modelu pełnego dla przypadków narastającego uszkodzenia prętów klatki wirnika od jednego uszkodzonego pręta do czternastu sąsiednich uszkodzonych prętów.

Rodzaj uszkodzenia	$I_{1,-2p}^{s,2}$	k_s	k_{as}
Silnik symetryczny	0,0000	0,0000	0,0000
Uszkodzony pręt nr 1	0,4940	0,0792	0,0727
Uszkodzone pręty nr 1 i 2	0,7908	0,1519	0,1310
Uszkodzone pręty nr 1,2,3	0,8796	0,2246	0,1634
Uszkodzone pręty nr 1,2,3,4	0,7848	0,2973	0,1634
Uszkodzone pręty nr 1,2,3,4,5	0,5623	0,3700	0,1310
Uszkodzone pręty nr 1,2,3,4,5,6	0,2803	0,4427	0,0727
Uszkodzone pręty nr 1,2,3,4,5,6,7	0,0000	0,5154	0,0000
Uszkodzone pręty nr 1,2,3,4,5,6,7,8	0,2320	0,5881	0,0727
Uszkodzone pręty nr 1,2,3,4,5,6,7,8,9	0,3843	0,6608	0,1310
Uszkodzone pręty nr 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10	0,4415	0,7335	0,1634
Uszkodzone pręty nr 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11	0,4068	0,8062	0,1634
Uszkodzone pręty nr 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12	0,3008	0,8789	0,1310
Uszkodzone pręty nr 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13	0,1543	0,9516	0,0727
Uszkodzone pręty nr 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14	0,0000	1,0243	0,0000

Po przeanalizowaniu uzyskanych wyników obliczeń dla różnych uszkodzeń prętów klatki wirnika i szczegółowej analizie widm prądów stojana dla oceny stopnia uszkodzenia klatki wystarczy skoncentrować się na rozważaniach ograniczonych do analiz charakterystycznych częstotliwości wokół podstawowej harmonicznej prądu stojana.

2.4. Monoharmoniczne równania stanu ustalonego silnika asynchronicznego z niesymetrią rezystancyjną klatki

Przy rozpatrywaniu modelu monoharmonicznego do założeń opisanych w podrozdziale 2.2 należy przyjąć dodatkowe, które zakłada, że każda z symetrycznie rozmieszczonych faz stojana wytwarza przepływ sinusoidalnie rozłożony. Przy tak skonstruowanym założeniu, pomimo, że oczka klatki wytwarzają przepływy w postaci prostokątnych impulsów, sprzężenia magnetyczne między fazami stojana, a oczkami klatki wirnika odbywają się jedynie za pomocą podstawowej harmonicznej pola szczelinowego.

Model monoharmoniczny silnika asynchronicznego z niesymetrią rezystancyjną klatki ma następującą postać [65]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r & \mathbf{R}_{r,N+1} \\ 0 & (\mathbf{R}_{r,N+1})^T & \mathbf{R}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \\ i_{N+1} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} & 0 \\ (\mathbf{L}_{sr})^T & \mathbf{L}_r & \mathbf{L}_{r,N+1} \\ 0 & (\mathbf{L}_{r,N+1})^T & \mathbf{L}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_r \\ i_{N+1} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Poszczególne macierze i wektory zostały opisane przy opisie równania (2.1). W tym miejscu zostaną wyjaśnione elementy równania (2.52), które mają inną postać niż w równaniu (2.1).

Macierz indukcyjności wzajemnych stojan – wirnik \mathbf{L}_{sr} przyjmuje formę:

$$\mathbf{M}_p \begin{bmatrix} \cos p\varphi & \cos p(\varphi - \varepsilon) & \dots & \cos p(\varphi - (N-1)\varepsilon) \\ \cos(p\varphi + \alpha) & \cos(p(\varphi - \varepsilon) + \alpha) & \dots & \cos(p(\varphi - (N-1)\varepsilon) + \alpha) \\ \cos(p\varphi + 2\alpha) & \cos(p(\varphi - \varepsilon) + 2\alpha) & \dots & \cos(p(\varphi - (N-1)\varepsilon) + 2\alpha) \end{bmatrix}$$

Po przejściu na składowe symetryczne za pomocą macierzy transformacji (2.19) i (2.20):

$$\mathbf{T}_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & b & \dots & b^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b^{N-1} & \dots & b^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Równanie modelu przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^r & \mathbf{R}_{N+1}^r \\ \mathbf{0} & (\mathbf{R}_{N+1}^r)^T & \mathbf{R}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}^s \\ \mathbf{i}^r \\ i_{N+1} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_*^s & \mathbf{L}^{sr} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{L}^{sr})^T & \mathbf{L}_*^r & \mathbf{L}_{N+1}^r \\ \mathbf{0} & (\mathbf{L}_{N+1}^r)^T & \mathbf{L}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}^s \\ \mathbf{i}^r \\ i_{N+1} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

W równaniu tym macierze indukcyjności \mathbf{L}^s i \mathbf{L}^r są diagonalne:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^s &= \text{diag}[\mathbf{L}_s^0 \quad \mathbf{L}_s^1 \quad \mathbf{L}_s^1] = \text{diag}[\mathbf{L}_{\sigma s}^0 \quad \mathbf{L}_{\sigma s} + \mathbf{L}_\mu \quad \mathbf{L}_{\sigma s} + \mathbf{L}_\mu] \\ \mathbf{L}^r &= \text{diag}[\mathbf{L}_r^0 \quad \mathbf{L}_r^1 \quad \dots \quad \mathbf{L}_r^{N-1}] \\ &= \text{diag}([\mathbf{L}_{\sigma r}^0 \quad \mathbf{L}_{\sigma r}^1 \quad \dots \quad \mathbf{L}_{\sigma r}^{N-1}] + [0 \quad \mathbf{L}_{\mu r}^1 \quad \dots \quad \mathbf{L}_{\mu r}^{N-1}])\end{aligned}\quad (2.54)$$

gdzie:

$$\mathbf{L}_{\sigma r}^n = 2(\mathbf{L}_{\sigma c} + 2\mathbf{L}_{\sigma b} \sin^2(n \frac{\pi}{N}))$$

Macierze indukcyjności związane z oczkiem $N+1$ mają taką samą formę jak w równaniu (2.3).

$$\mathbf{L}_o^r = \sqrt{N}[\mathbf{L}_{\sigma c} \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T, \quad \mathbf{L}_o = [N\mathbf{L}_{\sigma c}] \quad (2.55)$$

Macierz \mathbf{L}^{sr} w wyniku przeprowadzonej transformacji posiada specyficzne rozmieszczenie elementów. Zawiera tylko dwa elementy różne od zera w kolumnie oznaczonej jako p oraz kolumnie $N-p$, jak to jest pokazane w macierzy (2.56)

$$\mathbf{L}^{sr} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & p & \dots & \dots & N-p & \dots & N-1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & M_p e^{jp\varphi} & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & M_p e^{-jp\varphi} & \dots & 0 \end{bmatrix} & & & & & & & & & \end{matrix} \quad (2.56)$$

W ten sposób, struktura macierzy \mathbf{L}^{sr} zależy w dużym stopniu od liczby par biegunów p i liczba prętów wirnika N , co jest ważne, gdy brane są pod uwagę uszkodzenia klatki. Ponadto drugi składnik macierzy \mathbf{L}^r jest zmieniony i ma postać:

$$\begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & p & \dots & \dots & N-p & \dots & N-1 \\ \mathbf{L}_\mu^r & = \text{diag}[0 & 0 & \dots & \mathbf{L}_{\mu r}^p & \dots & \dots & \mathbf{L}_{\mu r}^{N-p} & \dots & 0] \end{matrix}$$

Wszystkie wartości indukcyjności zawartych w macierzach (2.54) - (2.56) mogą być obliczone na podstawie danych konstrukcyjnych silnika.

Dla monoharmonicznego układu równania stanu ustalonego silnika klatkowego z niesymetrią rezystancyjną klatki przy założeniu stałej prędkości obrotowej $\omega = const$ oraz przy zasilaniu faz stojana symetrycznym trójfazowym układem napięć wektor napięć fazowych w składowych symetrycznych przyjmuje postać:

$$\mathbf{u}^s = \begin{bmatrix} u_s^0 \\ u_s^1 \\ u_s^2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} U \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{j\omega_0 t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-j\omega_0 t} \right) = \mathbf{u}_1^s + \mathbf{u}_{-1}^s \quad (2.57)$$

Dla wymuszenia \mathbf{u}_1^s , zgodnie z metodą bilansu harmonicznym dla podstawowej harmonicznej, należy przewidzieć prądy stojana i wirnika w następującej postaci:

- dla fazy stojana

$$i_s^1 = I_{s,0}^1 e^{j\omega_0 t}, \quad i_s^2 = I_{s,-2p}^1 e^{j(\omega_0 - 2p\omega)t} \quad (2.58)$$

- dla oczek klatki wirnika

$$\mathbf{i}^r = \mathbf{I}_{r,-p} e^{j(\omega_0 - p\omega)t}, \quad i_{N+1} = I_{N+1,-p} e^{j(\omega_0 - p\omega)t} \quad (2.59)$$

Dla powyższych warunków model matematyczny uzyskuje postać:

$$\begin{bmatrix} U_s^1 \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} R_s & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & R_s & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}^r & \mathbf{R}_{N+1}^r \\ 0 & 0 & (\mathbf{R}_{N+1}^r)^T & R_{N+1} \end{bmatrix} \\ + j \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_0 - 2p\Omega \\ (\omega_0 - p\Omega)\mathbf{E} \\ \omega_0 - p\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_s^1 & 0 & \mathbf{M}_p & 0 \\ 0 & L_s^1 & \mathbf{M}_{-p} & 0 \\ (\mathbf{M}_p)^T & (\mathbf{M}_{-p})^T & \mathbf{L}^r & \mathbf{L}_{N+1}^r \\ 0 & 0 & (\mathbf{L}_{N+1}^r)^T & L_{N+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{s,0}^1 \\ I_{s,-2p}^2 \\ \mathbf{I}_{r,-p} \\ I_{N+1,-p}^1 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & M_p e^{jp\theta_0} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{-p} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & M_p e^{-jp\theta_0} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2.5. Definicja współczynników niesymetrii klatki w monoharmonicznym modelu silnika klatkowego

Równanie modelu monoharmonicznego (2.60) dla symetrycznej klatki wirnika można zawęzić do czterech równań analogicznie jak dla silnika pierścieniowego [69], [72].

$$\begin{bmatrix} U_s^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r^p \end{bmatrix} + j \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_0 - 2p\Omega \\ \omega_0 - p\Omega \\ \omega_0 - p\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_s^1 & 0 & M_p & 0 \\ 0 & L_s^1 & 0 & M_p \\ M_p & 0 & L_r^p & 0 \\ 0 & M_p & 0 & L_r^p \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_{s,0}^1 \\ I_{s,-2p}^2 \\ I_{r,-p}^p \\ I_{r,-p}^p \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r^p + R_{ad}^0 & R_{ad}^2 \\ 0 & 0 & R_{ad}^1 & R_r^p + R_{ad}^0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Rezystancje R_{ad}^0 , R_{ad}^1 i R_{ad}^2 są definiowane następująco:

$$\begin{bmatrix} R_{ad}^0 \\ R_{ad}^1 \\ R_{ad}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{ad}^a \\ R_{ad}^b \\ R_{ad}^c \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

R_{ad}^0 , R_{ad}^1 i R_{ad}^2 - rezystancje fazowe wirnika odpowiadające za niesymetrię wirnika.

Wielkości R_{ad}^0 , R_{ad}^1 i R_{ad}^2 pozwolą zdefiniować trzy współczynniki, które będą obrazowały stan niesymetrii wirnika:

$$k_s = \frac{R_{ad}^0}{R_r^p} ; k_{as} = \frac{|R_{ad}^1|}{R_r^p} \quad (2.64)$$

gdzie: $R_{ad}^1 = |R_{ad}^1|e^{j\alpha}$ i $R_{ad}^2 = |R_{ad}^1|e^{-j\alpha}$

Pomiędzy współczynnikami k_s i k_{as} zachodzi zależność $k_s \geq k_{as}$.

Tak zdefiniowane wielkości w łatwy sposób mogą poinformować o stanie niesymetrii wirnika silnika pierścieniowego. Współczynniki można wykorzystać do oceny niesymetrii klatki redukując równanie (2.60) do formy (2.61). Dokonać możemy tego zawężając równanie wirnika do dwóch równań, odpowiedzialnych za składową p oraz $N-p$. W macierzy indukcyjności

dokonyjemy tego przez pominięcie pozostałych indukcyjności, gdyż dla małych poślizgów ($0 < s < s_N$) pominięcie ich będzie miało niewielki wpływ na prądy stojana.

Wymiar macierzy rezystancji jest równy $(N+1) \times (N+1)$, chcąc zredukować ją do wymiaru 2×2 należy przesunąć wiersz oznaczony jako p na pozycję 1. Wiersz oznaczony jako $N-p$ przesuwamy na pozycję 2. Podobną operację należy wykonać z kolumnami. Kolumna oznaczona jako p przesuwamy na pierwszą pozycję. Na drugą pozycję przesuwamy kolumnę $N-p$. Otrzymujemy macierz R_{11} o wymiarach 2×2 , R_{12} o wymiarze $2 \times (N-1)$, R_{21} o wymiarze $(N-1) \times 2$ oraz macierz R_{22} o wymiarze $(N-1) \times (N-1)$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}^r & \mathbf{R}_{N+1}^r \\ (\mathbf{R}_{N+1}^r)^T & \mathbf{R}_{N+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,1} & \mathbf{R}_{1,2} \\ \mathbf{R}_{2,1} & \mathbf{R}_{2,2} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Macierz rezystancji wirnika po dokładniejszym rozpisaniu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_s & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_r^{0,0} & \dots & \mathbf{R}_r^{0,p} & \dots & \mathbf{R}_r^{0,N-p} & \dots & \mathbf{R}_r^{0,N-1} & \sqrt{N} \mathbf{R}_{sg}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_r^{p,0} & \dots & \mathbf{R}_r^{p,p} & \dots & \mathbf{R}_r^{p,N-p} & \dots & \mathbf{R}_r^{p,N-1} & \sqrt{N} \mathbf{R}_{sg}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_r^{N-p,0} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p,p} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p,N-p} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p,N-1} & \sqrt{N} \mathbf{R}_{sg}^{N-p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_r^{N-1,0} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-1,p} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-1,N-p} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-1,N-1} & \sqrt{N} \mathbf{R}_{sg}^{N-1} \\ 0 & 0 & \sqrt{N} \mathbf{R}_{sg}^{*0} & \dots & \sqrt{N} \mathbf{R}_{sg}^{*p} & \dots & \sqrt{N} \mathbf{R}_{sg}^{*N-p} & \dots & \sqrt{N} \mathbf{R}_{sg}^{*N-1} & \mathbf{R}_{N+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{1,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r^{p,p} & \mathbf{R}_r^{p,N-p} \\ \mathbf{R}_r^{N-p,p} & \mathbf{R}_r^{N-p,N-p} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{R}_{1,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r^{p,0} & \dots & \mathbf{R}_r^{p,p-1} & \mathbf{R}_r^{p,p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{p,N-p-1} & \mathbf{R}_r^{p,N-p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{p,N-1} & \sqrt{NR}_{sg}^p \\ \mathbf{R}_r^{N-p,0} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p,p-1} & \mathbf{R}_r^{N-p,p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p,N-p-1} & \mathbf{R}_r^{N-p,N-p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p,N-1} & \sqrt{NR}_{sg}^p \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\mathbf{R}_{2,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r^{0,p} & \dots & \mathbf{R}_r^{p-1,0} & \mathbf{R}_r^{p+1,p} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p-1,p} & \mathbf{R}_r^{N-p+1,p} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-1,p} & \sqrt{NR}_{sg}^p \\ \mathbf{R}_r^{0,N-p} & \dots & \mathbf{R}_r^{p-1,N-p} & \mathbf{R}_r^{p+1,N-p} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p-1,N-p} & \mathbf{R}_r^{N-p+1,N-p} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-1,N-p} & \sqrt{NR}_{sg}^p \end{bmatrix}^T \quad (2.68)$$

$$\mathbf{R}_{2,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r^{0,0} & \dots & \mathbf{R}_r^{0,p-1} & \mathbf{R}_r^{0,p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{0,N-p-1} & \mathbf{R}_r^{0,N-p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{0,N-1} & \sqrt{NR}_{sg}^0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{R}_r^{p-1,0} & \dots & \mathbf{R}_r^{p-1,p-1} & \mathbf{R}_r^{p-1,p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{p-1,N-p-1} & \mathbf{R}_r^{p-1,N-p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{p-1,N-1} & \sqrt{NR}_{sg}^{p-1} \\ \mathbf{R}_r^{p+1,0} & \dots & \mathbf{R}_r^{p+1,p-1} & \mathbf{R}_r^{p+1,p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{p+1,N-p-1} & \mathbf{R}_r^{p+1,N-p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{p+1,N-1} & \sqrt{NR}_{sg}^{p+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{R}_r^{N-p-1,0} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p-1,p-1} & \mathbf{R}_r^{N-p-1,p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p-1,N-p-1} & \mathbf{R}_r^{N-p-1,N-p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p-1,N-1} & \sqrt{NR}_{sg}^{N-p-1} \\ \mathbf{R}_r^{N-p+1,0} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p+1,p-1} & \mathbf{R}_r^{N-p+1,p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p+1,N-p-1} & \mathbf{R}_r^{N-p+1,N-p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-p+1,N-1} & \sqrt{NR}_{sg}^{N-p+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{R}_r^{N-1,0} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-1,p-1} & \mathbf{R}_r^{N-1,p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-1,N-p-1} & \mathbf{R}_r^{N-1,N-p+1} & \dots & \mathbf{R}_r^{N-1,N-1} & \sqrt{NR}_{sg}^{N-1} \\ \sqrt{NR}_{sg}^{*0} & \dots & \sqrt{NR}_{sg}^{*p-1} & \sqrt{NR}_{sg}^{*p+1} & \dots & \sqrt{NR}_{sg}^{*N-p-1} & \sqrt{NR}_{sg}^{*N-p+1} & \dots & \sqrt{NR}_{sg}^{*N-1} & \mathbf{R}_{N+1} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Z macierzy tej można obliczyć odpowiednia dla niej macierz \mathbf{R}_{equ} o wymiarach (2×2).

$$\mathbf{R}_{\text{equ}} = \mathbf{R}_{1,1} - \mathbf{R}_{1,2}(\mathbf{R}_{2,2})^{-1}\mathbf{R}_{2,1} \quad (2.70)$$

Jeśli klatka wirnika nie jest uszkodzona wówczas macierz ta jest diagonalna. W przeciwnym razie pojawiają się dodatkowe elementy w macierzy:

$$\mathbf{R}_{\text{equ}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r^p + \mathbf{R}_{\text{add}}^0 & \mathbf{R}_{\text{add}}^2 \\ \mathbf{R}_{\text{add}}^1 & \mathbf{R}_r^p + \mathbf{R}_{\text{add}}^0 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

gdzie:

$\mathbf{R}_r^p = 2(\mathbf{R}_e + 2\mathbf{R}_b \sin^2(p \frac{\pi}{N}))$ - rezystancją p -tej składowej prądów wirnika,

\mathbf{R}_e - rezystancja segmentu klatki wirnika,

\mathbf{R}_b - rezystancja pręta klatki wirnika,

$\mathbf{R}_{\text{add}}^0, \mathbf{R}_{\text{add}}^1, \mathbf{R}_{\text{add}}^2$ - rezystancje dodatkowe pojawiające się w wyniku asymetrii klatki wirnika.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}'_r + \mathbf{R}_{\text{add}}^0 & \mathbf{R}_{\text{add}}^2 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{\text{add}}^1 & \mathbf{R}'_r + \mathbf{R}_{\text{add}}^0 \end{bmatrix} + \\ + j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ (2s-1) \\ s \\ s \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\text{cs}} + \mathbf{X}_\mu & 0 & \mathbf{X}_\mu & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_{\text{cs}} + \mathbf{X}_\mu & 0 & \mathbf{X}_\mu \\ \mathbf{X}_\mu & 0 & \mathbf{X}'_{\text{sr}} + \mathbf{X}_\mu & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_\mu & 0 & \mathbf{X}'_{\text{sr}} + \mathbf{X}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{s,0}^1 \\ \mathbf{I}_{s,-2p}^2 \\ \mathbf{I}_{r,-p}^1 \\ \mathbf{I}_{r,-p}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Wstawiając zdefiniowane współczynniki do macierzy rezystancji otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}'_r + \mathbf{R}_{\text{add}}^0 & \mathbf{R}_{\text{add}}^2 \\ \mathbf{R}_{\text{add}}^1 & \mathbf{R}'_r + \mathbf{R}_{\text{add}}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + k_{\text{sym}}) \cdot \mathbf{R}'_r & k_{\text{asym}} \mathbf{R}'_r e^{-j\alpha} \\ k_{\text{asym}} \mathbf{R}'_r e^{j\alpha} & (1 + k_{\text{sym}}) \cdot \mathbf{R}'_r \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$\begin{bmatrix} U_s^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+k_{sym})R_r^{1p} & k_{asym}R_r^{1p}e^{-j\alpha} \\ 0 & 0 & k_{asym}R_r^{1p}e^{j\alpha} & (1+k_{sym})R_r^{1p} \end{bmatrix} + \\
+ j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ (2s-1) \\ s \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{os} + X_\mu & 0 & X_\mu & 0 \\ 0 & X_{os} + X_\mu & 0 & X_\mu \\ X_\mu & 0 & X_{gr}^{1p} + X_\mu & 0 \\ 0 & X_\mu & 0 & X_{gr}^{1p} + X_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{s,0}^1 \\ I_{s,-2p}^2 \\ I_{r,-p}^p \\ I_{r,-p}^{N-p} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Tak zdefiniowany układ zredukowany do 4 równań pozwala na znaczne uproszczenie równań modelu. Redukcja równań w modelu polega na tym, że w stosunku do pełnego modelu zakłada się, że rozdział prądu w klatce jest proporcjonalny do rezystancji klatki a indukcyjności rozproszonych ze względu na mały poślizg się pomija, ale zostawia się tylko indukcyjności rozproszonych dla składowej p -tej i $(N-p)$ -tej, czyli te, które nawiązują do sprzężenia przez podstawą harmoniczną pola. Prosta postać modelu pozwala na zastosowanie go przy zaangażowaniu mniejszych mocy obliczeniowych, co pozwala na implementację np. w układach z mikrokontrolerami i ciągłego monitorowania stanu klatki wirnika nadzorowanego silnik. W Tabeli 2.3. zestawiono wskaźniki diagnostyczne uzyskane z modelu uproszczonego dla przypadków uszkodzeń badanych w laboratorium.

Tabela 2.3. Zestawienie wskaźników diagnostycznych uzyskanych z modelu uproszczonego dla przypadków badanych w laboratorium.

Rodzaj uszkodzenia	$I_{1,-2p}^{s,2}$	k_s	k_{as}
Silnik symetryczny	0,0000	0,0000	0,0000
Uszkodzony pręt nr 1	0,4940	0,0792	0,0727
Uszkodzone pręty nr 1 i 2	0,7908	0,1519	0,1310
Uszkodzone pręty nr 1 i 3	0,5439	0,1519	0,0907

Wskaźniki zestawione w Tabeli 2.3. mogą dobrze obrazować stan niesymetrii wirnika związanej z uszkodzeniem prętów klatki w różnych konfiguracjach. Wartości liczbowe prądów są z dobrym przybliżeniem zbieżne z prądami wyliczonymi z modelu pełnego.

2.6. Pełny opis modelu obwodowego silnika indukcyjnego klatkowego w współrzędnych fazowych

2.6.1. Założenia

Model obwodowy silnika jednoklatkowego utworzono wychodząc z ogólnego założenia okresowości zwyczajnych równań różniczkowych opisujących maszyny prądu przemiennego. Przyjęcie tej zasady odpowiada ustalonej pracy silnika, co jest równoznaczne możliwości sprowadzenia układu równań do postaci algebraicznej dogodnej w analizie niesymetrii rezystancyjnej wirnika. Niemniej jednak, aby sformułować opis matematyczny silnika z uszkodzoną klatką należy wprowadzić szereg uproszczeń, do których zaliczono:

1. Odwzorowanie uzwojeń stojana jako symetrycznych kątoowo, a także parametrycznie cewek skupionych z pominięciem rzeczywistego żłobkowania jarzma – gładka szczelina powietrzna,
2. W klatce wirnika uwzględnia się tylko asymetrię rezystancyjną prętów przy ich równomiernym rozmieszczeniu tzn. nie bierze się pod uwagę części poosiowej i zjawisk krańcowych wynikających ze sprzężeń elektromagnetycznych między oczkami klatki oraz segmentami pierścienia zwierającego,
3. Skos prętów i powiększenie szczeliny powietrznej wynikające z istnienia żłobków w rzeczywistym silniku zostały przedstawione za pomocą współczynników skosu oraz Cartera wchodzących do równań pola. Dodatkowo zaniedbuje się ewentualne połączenie prętów z pierścieniem pośrednim występującym w maszynach małej mocy,
4. Uzwojenia stojana wytwarzają wyłącznie składowe przestrzenne o nieparzystych wielokrotnościach z wyłączeniem składowych zerowych – skojarzenie w gwiazdę bez przewodu neutralnego. Ponadto silnik zachowuje cechy symetrii jak również liniowości obwodu magnetycznego przy braku strat wiropądowych i histerezowych,
5. Uzwojenia stojana są zasilane z symetrycznego źródła napięć trójfazowych o przebiegu monoharmonicznym zawierających podstawową harmoniczną czasową $m=1$.

2.6.2. Model obwodowy silnika jednoklatkowego we współrzędnych fazowych

Według przedstawionych we wstępie założeń układ równań opisujący model obwodowy silnika można zapisać w postaci macierzowej dla wartości chwilowych napięć i poszukiwanych prądów jako [65]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^s & \\ & \mathbf{R}^r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}^s \\ \mathbf{i}^r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L}^s & \mathbf{L}^{sr}(\varphi) \\ \mathbf{L}^{rs}(\varphi) & \mathbf{L}^r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}^s \\ \mathbf{i}^r \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

gdzie:

- wektory wartości chwilowych napięć i prądów

$$\mathbf{u}^s = [u_1^s \quad u_2^s \quad u_3^s]^T, \quad \mathbf{i}^s = [i_1^s \quad i_2^s \quad i_3^s]^T, \quad \mathbf{u}^r = [u_1^r \quad \dots \quad u_N^r]^T = \mathbf{0}, \quad \mathbf{i}^r = [i_1^r \quad \dots \quad i_N^r]^T \quad (2.76)$$

- macierze rezystancji uzwojeń stojana i wirnika

$$\mathbf{R}^s = \text{diag}[\mathbf{R}_1^s \quad \mathbf{R}_2^s \quad \mathbf{R}_3^s] \quad (2.77)$$

$$\mathbf{R}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^o & -\mathbf{R}_2^b & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{R}_1^b \\ -\mathbf{R}_2^b & \mathbf{R}_2^o & -\mathbf{R}_3^b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}_3^b & \mathbf{R}_3^o & -\mathbf{R}_4^b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{R}_4^b & \mathbf{R}_4^o & -\mathbf{R}_5^b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{R}_5^b & \mathbf{R}_5^o & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\mathbf{R}_1^b & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{R}_{N-1}^b & \mathbf{R}_N^o \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

dla rezystancji dowolnego oczka klatki wirnika

$$\mathbf{R}_k^o = \mathbf{R}_k^b + \mathbf{R}_{\text{mod}(k+1)}^b + 2 \cdot \mathbf{R}^z \quad (2.79)$$

- macierze indukcyjności rozprożeń i głównych obwodu stojana

$$\mathbf{L}^s = \mathbf{L}_\sigma^s + \mathbf{L}_m^s = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\sigma^s & \mathbf{M}_\sigma^s & \mathbf{M}_\sigma^s \\ \mathbf{M}_\sigma^s & \mathbf{L}_\sigma^s & \mathbf{M}_\sigma^s \\ \mathbf{M}_\sigma^s & \mathbf{M}_\sigma^s & \mathbf{L}_\sigma^s \end{bmatrix} + \sum_n \mathbf{L}_{m,n,p}^s \cdot \begin{bmatrix} \cos(n \cdot 0 \cdot \alpha) & \cos(n \cdot 1 \cdot \alpha) & \cos(n \cdot 2 \cdot \alpha) \\ \cos(n \cdot 2 \cdot \alpha) & \cos(n \cdot 0 \cdot \alpha) & \cos(n \cdot 1 \cdot \alpha) \\ \cos(n \cdot 1 \cdot \alpha) & \cos(n \cdot 2 \cdot \alpha) & \cos(n \cdot 0 \cdot \alpha) \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

przy czym kąt rozwarcia uzwojeń stojana wynosi $\alpha = 2\pi/3 \cdot p$.

- macierz indukcyjności wzajemnych między oczkami klatek wirnika

$$\mathbf{L}_m^r = \begin{bmatrix} \cos(0 \cdot \varepsilon) & \cos(1 \cdot \varepsilon) & \cos(2 \cdot \varepsilon) & \cos(3 \cdot \varepsilon) & \dots & \cos((N-1) \cdot \varepsilon) \\ \cos((N-1) \cdot \varepsilon) & \cos(0 \cdot \varepsilon) & \cos(1 \cdot \varepsilon) & \cos(2 \cdot \varepsilon) & \dots & \cos((N-2) \cdot \varepsilon) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(1 \cdot \varepsilon) & \cos(2 \cdot \varepsilon) & \cos(3 \cdot \varepsilon) & \cos(4 \cdot \varepsilon) & \dots & \cos(0 \cdot \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

- macierz indukcyjności rozprożeń oczek klatki wirnika

$$\mathbf{L}_\sigma^r = \begin{bmatrix} L_{\sigma,1}^o & -L_{\sigma,2}^b & 0 & 0 & 0 & \dots & -L_{\sigma,1}^b \\ -L_{\sigma,2}^b & L_{\sigma,2}^o & -L_{\sigma,3}^b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -L_{\sigma,3}^b & L_{\sigma,3}^o & -L_{\sigma,4}^b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -L_{\sigma,4}^b & L_{\sigma,4}^o & -L_{\sigma,5}^b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_{\sigma,5}^b & L_{\sigma,5}^o & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -L_{\sigma,1}^b & 0 & 0 & 0 & \dots & -L_{\sigma,N-1}^b & L_{\sigma,N}^o \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

z tym, że w powyższej macierzy równanie indukcyjności rozprożeń pojedynczego oczka dla założonej symetrii magnetycznej $L_{\sigma,k}^o = 2 \cdot (L^b + L^z)$. Zależności ze wzorów (2.81) oraz (2.82)

spełniają następujące warunki: $\mathbf{L}^r = \mathbf{L}_\sigma^r + \mathbf{L}_m^r$ i $\varepsilon = 2\pi/N$ - kąt rozsunienia oczek wirnika.

- macierz indukcyjności wzajemnych między uzwojeniami stojana i oczkami klatek wirnika

$$\mathbf{L}^{sr}(\varphi) = \sum_n \mathbf{L}_{m,n,p}^{sr} \begin{bmatrix} \cos(p\varphi) & \cos(p\varphi + \varepsilon) & \dots & \cos(p\varphi + (N-1) \cdot \varepsilon) \\ \cos(p\varphi - 120^\circ) & \cos(p\varphi + \varepsilon - 120^\circ) & \dots & \cos(p\varphi + (N-1) \cdot \varepsilon - 120^\circ) \\ \cos(p\varphi - 240^\circ) & \cos(p\varphi + \varepsilon - 240^\circ) & \dots & \cos(p\varphi + (N-1) \cdot \varepsilon - 240^\circ) \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

ponadto obowiązują następujące relacje: $\mathbf{L}^{rs}(\varphi) = [\mathbf{L}^{sr}(\varphi)]^T$.

2.6.3. Transformacja modelu silnika do współrzędnych składowych symetrycznych

W celu uporządkowania równań zapisanych dla fazowego układu współrzędnych, przeprowadzono transformację do składowych symetrycznych.

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{S} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{L}(\varphi) \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{I} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{S} = \text{diag}[\mathbf{T}_s \quad \mathbf{T}_r] \quad (2.85)$$

$$\mathbf{T}_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\mathbf{T}_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 & \dots & b^{(N-1)} \\ 1 & b^2 & b^4 & b^6 & b^8 & \dots & b^{2(N-1)} \\ 1 & b^3 & b^6 & b^9 & b^{12} & \dots & b^{3(N-1)} \\ 1 & b^4 & b^8 & b^{12} & b^{16} & \dots & b^{4(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b^{(N-1)} & b^{2(N-1)} & b^{3(N-1)} & b^{4(N-1)} & \dots & b^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

- macierze po transformacji stojana:

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{T}_s \cdot \mathbf{R}^s \cdot \mathbf{T}_s^{-1} = \text{diag}[\mathbf{R}_s \quad \mathbf{R}_s \quad \mathbf{R}_s] \quad (2.88)$$

$$\mathbf{L}_s = \mathbf{T}_s \cdot (\mathbf{L}_\sigma^s + \mathbf{L}_m^s) \cdot \mathbf{T}_s^{-1} = \mathbf{L}_s^\sigma + \mathbf{L}_s^m = \text{diag} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\sigma^s + 2\mathbf{M}_\sigma^s \\ \mathbf{L}_\sigma^s - \mathbf{M}_\sigma^s \\ \mathbf{L}_\sigma^s - \mathbf{M}_\sigma^s \end{bmatrix} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{s,(6-k+3) \cdot p}^m & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_{s,(6-k+1) \cdot p}^m & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_{s,(6-k-1) \cdot p}^m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s^{\sigma,0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_s^{\sigma,1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_s^{\sigma,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s^{m,0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_s^{m,1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_s^{m,2} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

- macierze po transformacji – wirnika:

$$\mathbf{L}_r^\sigma = \text{diag} \left[\mathbf{L}_r^{\sigma,0} \quad \mathbf{L}_r^{\sigma,1} \quad \mathbf{L}_r^{\sigma,2} \quad \mathbf{L}_r^{\sigma,3} \quad \mathbf{L}_r^{\sigma,4} \quad \dots \quad \mathbf{L}_r^{\sigma,(N-1)} \right] \quad (2.90)$$

$$\mathbf{L}_r^m = \text{diag} [0 \quad \mathbf{L}_m \quad \mathbf{L}_m \quad \mathbf{L}_m \quad \mathbf{L}_m \quad \dots \quad \mathbf{L}_m] \quad (2.91)$$

- macierz indukcyjności wzajemnych stojan-wirnik

$$\mathbf{L}_{sr} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \delta_{n-p,(6k+3)\cdot p} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{n-p,(6k+1)\cdot p} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{n-p,(6k-1)\cdot p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{L}}_{n-p,(6k+3)\cdot p} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p,(6k+3)\cdot p} & \dots & \underline{\mathbf{L}}_{n-p,(6k+3)\cdot p} \\ \underline{\mathbf{L}}_{n-p,(6k+1)\cdot p} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p,(6k+1)\cdot p} & \dots & \underline{\mathbf{L}}_{n-p,(6k+1)\cdot p} \\ \underline{\mathbf{L}}_{n-p,(6k-1)\cdot p} & \underline{\mathbf{L}}_{n-p,(6k-1)\cdot p} & \dots & \underline{\mathbf{L}}_{n-p,(6k-1)\cdot p} \end{bmatrix} \cdot e^{j p \Omega t}, \forall k \in \mathbf{Z} \quad (2.92)$$

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r^{0,0} & \underline{\mathbf{R}}_r^{0,1} & \underline{\mathbf{R}}_r^{0,2} & \underline{\mathbf{R}}_r^{0,3} & \dots & \underline{\mathbf{R}}_r^{*,0,2} & \underline{\mathbf{R}}_r^{*,0,1} \\ \underline{\mathbf{R}}_r^{*,0,1} & \mathbf{R}_r^{1,1} & \underline{\mathbf{R}}_r^{1,2} & \underline{\mathbf{R}}_r^{1,3} & \dots & \underline{\mathbf{R}}_r^{1,(N-2)} & \underline{\mathbf{R}}_r^{1,(N-1)} \\ \underline{\mathbf{R}}_r^{*,0,2} & \underline{\mathbf{R}}_r^{*,1,2} & \mathbf{R}_r^{2,2} & & \dots & & \\ \underline{\mathbf{R}}_r^{*,0,3} & \underline{\mathbf{R}}_r^{*,1,3} & \underline{\mathbf{R}}_r^{*,2,3} & \mathbf{R}_r^{3,3} & \dots & & \\ \underline{\mathbf{R}}_r^{*,0,4} & \underline{\mathbf{R}}_r^{*,1,4} & \underline{\mathbf{R}}_r^{*,2,4} & \underline{\mathbf{R}}_r^{*,3,4} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{R}_r^{2,2} & \\ \underline{\mathbf{R}}_r^{0,1} & & & & & & \mathbf{R}_r^{1,1} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

2.6.4. Równania bilansu harmoniczych

Przekształcone według punktu (2.6.2) tego podrozdziału równania silnika w składowych symetrycznych dostosowano do metody bilansu harmoniczych. Dla przypadku ogólnego rozwinięcie prawie okresowych funkcji czasu w szereg Fouriera daje teoretycznie nieskończone wektory i macierze wyrażone przez formy liniowe. Generalnie wykonanie działania różniczkowania umożliwia alergizację układu równań pod warunkiem pominięcia nieliniowości parametrycznej i strukturalnej, co wiąże się z linearyzacją charakterystyki

magnesowania oraz przyjęciem stałej prędkości kątovej wirnika. W ten sposób po przyrównaniu do siebie równań napięciowych stojących przy tych samych potęgach układ przyjmuje postać hipermacierzową:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{U}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \\ & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} + j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_s \\ \boldsymbol{\Omega}_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

- wektory napięć i prądów

- prawie-okresowe operatory różniczkowania

$$\boldsymbol{\Omega}_s = \text{diag} \left[\dots \quad (\Omega_s + p \cdot \Omega) \quad \Omega_s \quad (\Omega_s - p \cdot \Omega) \quad \dots \right] \quad (2.95)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_r = \text{diag} \left[\dots \quad (\Omega_s + p \cdot \Omega) \cdot \mathbf{E} \quad \Omega_s \cdot \mathbf{E} \quad (\Omega_s - p \cdot \Omega) \cdot \mathbf{E} \quad \dots \right] \quad (2.96)$$

- macierze rezystancji

$$\mathbf{R}_s = \text{diag} \left[\dots \quad R_s \quad R_s \quad R_s \quad \dots \right] \quad (2.97)$$

$$\mathbf{R}_r = \text{diag} \left[\dots \quad R_r \quad R_r \quad R_r \quad \dots \right] \quad (2.98)$$

- macierze indukcyjności

$$\mathbf{L}_s = \text{diag} \left[\dots \quad (\mathbf{L}_s^\sigma + \mathbf{L}_s^m) \quad (\mathbf{L}_s^\sigma + \mathbf{L}_s^m) \quad (\mathbf{L}_s^\sigma + \mathbf{L}_s^m) \quad \dots \right] \quad (2.99)$$

$$\mathbf{L}_r = \text{diag} \left[\dots \quad (\mathbf{L}_r^\sigma + \mathbf{L}_r^m) \quad (\mathbf{L}_r^\sigma + \mathbf{L}_r^m) \quad (\mathbf{L}_r^\sigma + \mathbf{L}_r^m) \quad \dots \right] \quad (2.100)$$

$$\mathbf{L}_{sr} = \text{diag} \left[\mathbf{L}_{sr}^1 \quad \mathbf{L}_{sr}^2 \right]^T \quad (2.101)$$

$$\mathbf{L}_{sr}^1 = \begin{bmatrix} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & L_{m,-5p} \dots 0 & L_{m,p} \dots 0 & L_{m,7p} \dots 0 & L_{m,13p} \dots 0 & \dots \\ \dots & L_{m,-11p} \dots 0 & L_{m,-5p} \dots 0 & L_{m,p} \dots 0 & L_{m,7p} \dots 0 & \dots \\ \dots & L_{m,-17p} \dots 0 & L_{m,-11p} \dots 0 & L_{m,-5p} \dots 0 & L_{m,p} \dots 0 & \dots \\ \dots & L_{m,-23p} \dots 0 & L_{m,-17p} \dots 0 & L_{m,-11p} \dots 0 & L_{m,-5p} \dots 0 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

$$\mathbf{L}_{sr}^2 = \begin{bmatrix} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & L_{m,-p} \dots 0 & L_{m,5p} \dots 0 & L_{m,11p} \dots 0 & L_{m,17p} \dots 0 & \dots \\ \dots & L_{m,-7p} \dots 0 & L_{m,-p} \dots 0 & L_{m,5p} \dots 0 & L_{m,11p} \dots 0 & \dots \\ \dots & L_{m,-13p} \dots 0 & L_{m,-7p} \dots 0 & L_{m,-p} \dots 0 & L_{m,5p} \dots 0 & \dots \\ \dots & L_{m,-19p} \dots 0 & L_{m,-13p} \dots 0 & L_{m,-7p} \dots 0 & L_{m,-p} \dots 0 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

Redukcja macierzy indukcyjności wzajemnych i operatorów różniczkowania pozwala zapisać macierze w następującej postaci:

$$\mathbf{L}_{sr}^1 = \begin{bmatrix} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & L_{m,-5p} & L_{m,p} & L_{m,7p} & L_{m,13p} & \dots \\ \dots & L_{m,-11p} & L_{m,-5p} & L_{m,p} & L_{m,7p} & \dots \\ \dots & L_{m,-17p} & L_{m,-11p} & L_{m,-5p} & L_{m,p} & \dots \\ \dots & L_{m,-23p} & L_{m,-17p} & L_{m,-11p} & L_{m,-5p} & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

$$\mathbf{L}_{sr}^2 = \begin{bmatrix} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & L_{m,-p} & L_{m,5p} & L_{m,11p} & L_{m,17p} & \dots \\ \dots & L_{m,-7p} & L_{m,-p} & L_{m,5p} & L_{m,11p} & \dots \\ \dots & L_{m,-13p} & L_{m,-7p} & L_{m,-p} & L_{m,5p} & \dots \\ \dots & L_{m,-19p} & L_{m,-13p} & L_{m,-7p} & L_{m,-p} & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

- zredukowane operatory dla składowej 1 i 2 oraz wirnika mają postać:

$$\mathbf{\Omega}_s^1 = \left[\dots \quad (\Omega_s + 12p \cdot \Omega) \quad (\Omega_s + 6p \cdot \Omega) \quad \Omega_s \quad (\Omega_s - 6p \cdot \Omega) \quad (\Omega_s - 12p \cdot \Omega) \quad \dots \right] \quad (2.106)$$

$$\mathbf{\Omega}_s^2 = \left[\dots \quad (\Omega_s + 10p \cdot \Omega) \quad (\Omega_s + 4p \cdot \Omega) \quad (\Omega_s - 2p \cdot \Omega) \quad (\Omega_s - 8p \cdot \Omega) \quad (\Omega_s - 14p \cdot \Omega) \quad \dots \right] \quad (2.107)$$

$$\mathbf{\Omega}_r = \left[\dots \quad (\Omega_s + 11p \cdot \Omega) \cdot \mathbf{E} \quad (\Omega_s + 5p \cdot \Omega) \cdot \mathbf{E} \quad (\Omega_s - p \cdot \Omega) \cdot \mathbf{E} \quad (\Omega_s - 7p \cdot \Omega) \cdot \mathbf{E} \quad (\Omega_s - 13p \cdot \Omega) \cdot \mathbf{E} \quad \dots \right] \quad (2.108)$$

2.6.5. Model monoharmoniczny całkwalny numerycznie z pełnym odwzorowaniem klatki wirnika

Równania silnika z nieliniowością typu strukturalnego z uwzględnieniem równania mechanicznego tzn. dającego możliwości obserwacji konsekwencji oddziaływań elektromechanicznych najdogodniej jest sformułować w współrzędnych rzeczywistych. Nie zmienia to faktu, że również układ opisany związkami (2.94) także pozwala na wykorzystanie typowych metod całkowania numerycznego, lecz wymaga rozdzielenia części rzeczywistej od urojonej co prowadzi do podwojenia rozwiązywanych równań. W przedstawionym przypadku transformację równań przeprowadzono w sposób pośredni przechodząc kolejno przez kolejne układy odniesienia takie jak składowe symetryczne, wirująca kończąc na składowych rzeczywistych. Model silnika utworzono kierując się jego szybkością działania, a więc przy założeniu, że rozważana jest tylko niesymetria obwodu wirnika dla symetrycznych uzwojeń stojana tak pod względem sposobu zasilania w tym symetrii przewodowej oraz wewnętrznej, to najkorzystniejsza okazuje się przekształcenie do współczynników stałych, jeśli $\gamma_s = p \cdot \varphi$ i $\gamma_r = 0$. W konsekwencji jedynymi wielkościami zależnymi od kąta obrotu – czasu, będą napięcia uzwojeń stojana. Pozostałe macierze otrzymają postać stałą. Ogólnie omawiany układ równań można przedstawić za pomocą poniższego wyrażenia macierzowego [65]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_s^{d-q} \\ \mathbf{u}_r^{\alpha-\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s^{d-q} & \\ & \mathbf{R}_r^{\alpha-\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s^{d-q} \\ \mathbf{i}_r^{\alpha-\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s^{d-q} & \mathbf{L}_{sr} \\ (\mathbf{L}_{sr})^T & \mathbf{L}_r^{\alpha-\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s^{d-q} \\ \mathbf{i}_r^{\alpha-\beta} \end{bmatrix} + p \cdot \omega \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{M}_{sr} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s^{d-q} \\ \mathbf{i}_r^{\alpha-\beta} \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} + D \cdot \omega = T_{em} - T_m \quad (2.110)$$

$$\varphi = \omega \cdot dt \quad (2.111)$$

W przedstawionym wyżej układzie zachowano wszelkie wcześniejsze założenia odnośnie co do typu skojarzenia uzwojeń stojana i symetrii magnetycznej silnika. Przekształcenie równań obwodu wirnika wykonana stosując macierze transformacji przeznaczone dla parzystej liczby prętów wirnika oraz redukując macierze indukcyjności wzajemnych stojan-wirnik do podstawowej harmonicznej przepływu.

- Transformacja wektorów napięć zasilających

$$\mathbf{u}_s^{d-q} = \mathbf{D}_s \cdot \left[\mathbf{E}_s \cdot \left(\mathbf{U}_s + \mathbf{U}_s^* \right) \cdot \mathbf{E}_s^{-1} \right] \cdot \mathbf{D}_s^{-1} = \begin{bmatrix} u_s^d \\ u_s^q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot U_m \left[\cos(p \cdot \varphi - \Omega_s \cdot t) \quad \sin(\Omega_s \cdot t - p \cdot \varphi) \right]^T \quad (2.112)$$

$$\mathbf{u}_r^{\alpha-\beta} = \mathbf{D}_r \cdot \left[\mathbf{E}_r \cdot \left(\mathbf{U}_r + \mathbf{U}_r^* \right) \cdot \mathbf{E}_r^{-1} \right] \cdot \mathbf{D}_r^{-1} = \left[u_r^{\alpha,0} \quad u_r^{\alpha,1} \quad u_r^{\alpha,2} \quad \dots \quad u_r^{\beta,2} \quad u_r^{\beta,1} \right]^T = \mathbf{0}^T \quad (2.113)$$

- macierze indukcyjności pulsacji stojana i wirnika w nowym układzie współrzędnych wynoszą

$$\mathbf{L}_s^{d-q} = \mathbf{D}_s \cdot \left(\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{L}^s \cdot \mathbf{E}_s^{-1} \right) \cdot \mathbf{D}_s^{-1} = \text{diag} \left[\left(L_\sigma^s + L_m^s \right) \quad \left(L_\sigma^s + L_m^s \right) \right] \quad (2.114)$$

$$\mathbf{L}_r^{\alpha-\beta} = \mathbf{D}_r \cdot \left(\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{L}^r \cdot \mathbf{E}_r^{-1} \right) \cdot \mathbf{D}_r^{-1} = \text{diag} \left[L_r^{\sigma,0} \quad \left(L_r^{\sigma,1} + L_r^m \right) \quad \left(L_r^{\sigma,2} + L_r^m \right) \quad \dots \quad \left(L_r^{\sigma,N-1} + L_r^m \right) \right] \quad (2.115)$$

$$\mathbf{L}_{sr} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{sr}^1 \\ \mathbf{L}_{sr}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_s \cdot \left(\mathbf{E}_s \cdot \mathbf{L}^{sr} \cdot \mathbf{E}_s^{-1} \right) \cdot \mathbf{D}_s^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & L_{m,p}^{\text{mod}(p,N)} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -L_{m,p}^{\text{mod}(p,N)} & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

- macierze indukcyjności rotacji w wyniku transformacji otrzymują postać według następującego zapisu:

$$\mathbf{M}_s = \left(\frac{d}{dt} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{E}_s \right) \cdot \mathbf{L}_s \cdot \mathbf{E}_s^{-1} \cdot \mathbf{D}_s^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\left(L_\sigma^s + L_m^s \right) \\ \left(L_\sigma^s + L_m^s \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

$$\mathbf{M}_{sr} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{sr}^1 \\ \mathbf{M}_{sr}^2 \end{bmatrix} = \left(\frac{d}{dt} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{E}_s \right) \cdot \mathbf{L}_{sr} \cdot \mathbf{E}_s^{-1} \cdot \mathbf{D}_s^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & -L_{m,p}^{\text{mod}(p,N)} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & L_{m,p}^{\text{mod}(p,N)} & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

gdzie:

- macierze transformacji obwodu stojana z pominięciem równania składowej zerowej

$$\mathbf{D}_s \cdot \mathbf{E}_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-jP\varphi} & 0 \\ 0 & e^{jP\varphi} \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

- macierze transformacji obwodu wirnika z pominięciem równania składowej poosiowej

$$\mathbf{D}_r \cdot \mathbf{E}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & j & \dots & -j & 0 \\ 0 & j & 0 & \dots & & -j \end{bmatrix} \cdot \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1] \quad (2.120)$$

- macierz rezystancji klatki wirnika obliczana w każdym kroku całkowania ma postać stałą, a ponieważ posiada złożoną strukturę zapisano ją symbolicznie zgodnie z równaniem:

$$\mathbf{R}_r = \mathbf{D}_r \cdot (\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{R}^r \cdot \mathbf{E}_r^{-1}) \cdot \mathbf{D}_r^{-1} = \text{const}(\mathbf{R}) \quad (2.121)$$

Ostatecznie do rozwiązania pozostaje układ równań w postaci normalnej, który w zapisie kompaktowym otrzymuje formę równań stanu ze względu na poszukiwane prądy stojana i wirnika:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i} = \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{U} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} - p \cdot \omega \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{i}) \quad (2.122)$$

$$\frac{d}{dt} \omega = \frac{T_{em} - T_m - D \cdot \omega}{J} \quad (2.123)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi = \omega \quad (2.124)$$

dla prądów i momentu elektromagnetycznego zdefiniowanych jako:

$$\mathbf{i}_s^{d-q} = \begin{bmatrix} i_s^d & i_s^q \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{i}_r^{\alpha-\beta} = \begin{bmatrix} i_s^{\alpha,0} & i_s^{\alpha,1} & i_s^{\alpha,2} & \dots & i_s^{\beta,2} & i_s^{\beta,1} \end{bmatrix}^T \quad (2.125)$$

$$T_{em} = p \cdot L_m \cdot \left(i_s^d \cdot i_r^{\beta, \text{mod}(-p, N)} - i_s^q \cdot i_r^{\alpha, \text{mod}(p, N)} \right) \quad (2.126)$$

2.6.6. Zasady redukcji modelu

Wykorzystując wcześniej wyprowadzone równania algebraiczne metody bilansu harmonicznego można bardzo łatwo wyodrębnić tylko te równania, które biorą udział w wytwarzaniu podstawowego sygnału diagnostycznego świadczącego o asymetrii rezystancyjnej klatki wirnika. Dla pierwszego etapu wykonano taką operację w przypadku równań zapisanych w składowych symetrycznych, co daje układ z zawierający 4 równania co jest zbieżne z wymiarem maszyny pierścieniowej bez przewodu zerowego (2.127):

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_s^1 \cdot e^{j(m-0p)\Omega t} \\ \underline{U}_s^2 \cdot e^{j(m-2p)\Omega t} \\ \underline{U}_r^1 \cdot e^{j(m-1p)\Omega t} \\ \underline{U}_r^2 \cdot e^{j(m-1p)\Omega t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{R}_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{R}_{o,1}^{\text{red}} & \underline{R}_{o,2}^{\text{red}} \\ 0 & 0 & \underline{R}_{o,2}^{\text{red}*} & \underline{R}_{o,1}^{\text{red}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_s^1 \cdot e^{j(m-0p)\Omega t} \\ \underline{I}_s^2 \cdot e^{j(m-2p)\Omega t} \\ \underline{I}_r^1 \cdot e^{j(m-1p)\Omega t} \\ \underline{I}_r^2 \cdot e^{j(m-1p)\Omega t} \end{bmatrix} + j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \Omega_s - 0p \cdot \Omega \\ \Omega_s - 2p \cdot \Omega \\ \Omega_s - 1p \cdot \Omega \\ \Omega_s - 1p \cdot \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_s^1 \cdot e^{j(m-0p)\Omega t} \\ \underline{I}_s^2 \cdot e^{j(m-2p)\Omega t} \\ \underline{I}_r^1 \cdot e^{j(m-1p)\Omega t} \\ \underline{I}_r^2 \cdot e^{j(m-1p)\Omega t} \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{s,(m-0p)\Omega}^1 \\ \underline{U}_{s,(m-2p)\Omega}^2 \\ \underline{U}_{r,(m-1p)\Omega}^1 \\ \underline{U}_{r,(m-1p)\Omega}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{R}_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{R}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{R}_{o,1}^{\text{red}} & \underline{R}_{o,2}^{\text{red}} \\ 0 & 0 & \underline{R}_{o,2}^{\text{red}*} & \underline{R}_{o,1}^{\text{red}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{s,(m-0p)\Omega}^1 \\ \underline{I}_{s,(m-2p)\Omega}^2 \\ \underline{I}_{r,(m-1p)\Omega}^1 \\ \underline{I}_{r,(m-1p)\Omega}^2 \end{bmatrix} + j \cdot \text{diag} \begin{bmatrix} \Omega_s - 0p \cdot \Omega \\ \Omega_s - 2p \cdot \Omega \\ \Omega_s - 1p \cdot \Omega \\ \Omega_s - 1p \cdot \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{L}_s & 0 & \underline{L}_m & 0 \\ 0 & \underline{L}_s & 0 & \underline{L}_m \\ \underline{L}_m & 0 & \underline{L}_r & 0 \\ 0 & \underline{L}_m & 0 & \underline{L}_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{s,(m-0p)\Omega}^1 \\ \underline{I}_{s,(m-2p)\Omega}^2 \\ \underline{I}_{r,(m-1p)\Omega}^1 \\ \underline{I}_{r,(m-1p)\Omega}^2 \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

$$\underline{T}_{\text{red}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{j(p\cdot\varphi)} & e^{j(2p\cdot\varphi)} & e^{j(3p\cdot\varphi)} & \dots & e^{j((N-1)p\cdot\varphi)} \\ 1 & e^{-j(p\cdot\varphi)} & e^{-j(2p\cdot\varphi)} & e^{-j(3p\cdot\varphi)} & \dots & e^{-j((N-1)p\cdot\varphi)} \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

$$\underline{R}_r^{\text{red}} = \underline{T}_{\text{red}} \cdot \underline{R}^r \cdot \underline{T}_{\text{red}}^{-1} = \frac{1}{N} \cdot \begin{bmatrix} \underline{R}_o^{\text{mod}(p,N),\text{mod}(p,N)} & \underline{R}^{\text{mod}(p,N),\text{mod}(-p,N)} \\ \underline{R}^{\text{mod}(-p,N),\text{mod}(p,N)} & \underline{R}_o^{\text{mod}(-p,N),\text{mod}(-p,N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{R}_{o,1}^{\text{red}} & \underline{R}_{o,2}^{\text{red}} \\ \underline{R}_{o,2}^{\text{red}*} & \underline{R}_{o,1}^{\text{red}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p, N), \text{mod}(p, N)} (1 + \mathbf{k}_{\text{sym}}) & \mathbf{R}_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p, N), \text{mod}(p, N)} \cdot \mathbf{k}_{\text{asym}} \\ \mathbf{R}_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p, N), \text{mod}(p, N)} \cdot \mathbf{k}_{\text{asym}}^* & \mathbf{R}_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p, N), \text{mod}(p, N)} (1 + \mathbf{k}_{\text{sym}}) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p, N), \text{mod}(p, N)} \begin{bmatrix} (1 + \mathbf{k}_{\text{sym}}) & \mathbf{k}_{\text{asym}} \cdot e^{j\delta} \\ \mathbf{k}_{\text{asym}} \cdot e^{-j\delta} & (1 + \mathbf{k}_{\text{sym}}) \end{bmatrix} \quad (2.130)$$

$$\mathbf{k}_{\text{sym}} = \frac{\mathbf{R}_{o, 1}^{\text{red}} - \mathbf{R}_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p, N), \text{mod}(p, N)}}{\mathbf{R}_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p, N), \text{mod}(p, N)}}, \quad (2.131)$$

$$\mathbf{k}_{\text{asym}} = \frac{\left| \mathbf{R}_{o, 2}^{\text{red}} \right|}{\left| \mathbf{R}_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p, N), \text{mod}(p, N)} \cdot e^{j\delta} \right|} = \frac{\left| \mathbf{R}_{o, 2}^{\text{red}} \right|}{\left| \mathbf{R}_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p, N), \text{mod}(p, N)} \right|}, \quad (2.132)$$

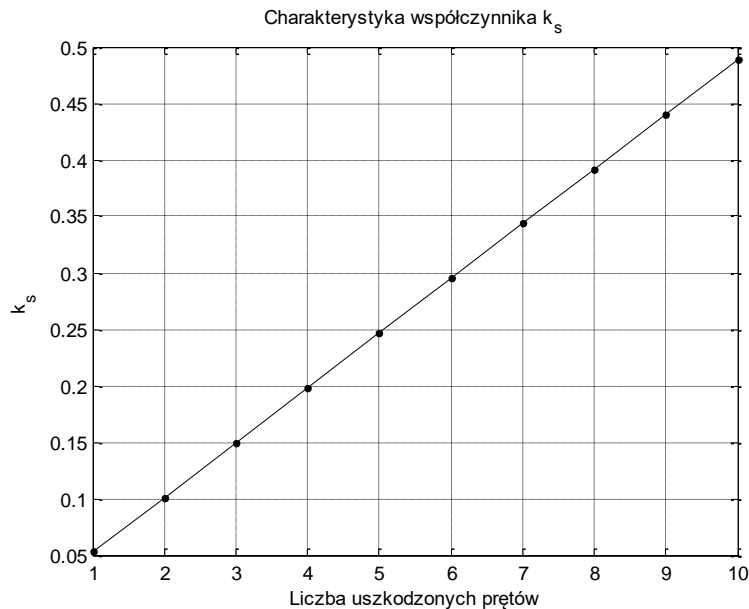
$$\delta = \cos(\text{Re}\{\mathbf{k}_{\text{as}}\}) + i \cdot \sin(\text{Im}\{\mathbf{k}_{\text{as}}\}) \quad (2.133)$$

Dla zilustrowanie uzyskanych wyników obliczeń dla modelu całkownego numerycznie z pełnym odwzorowaniem klatki zestawiono w Tabeli 2.4. wskaźniki diagnostyczne dla wybranych przypadków do 10 uszkodzonych prętów klatki.

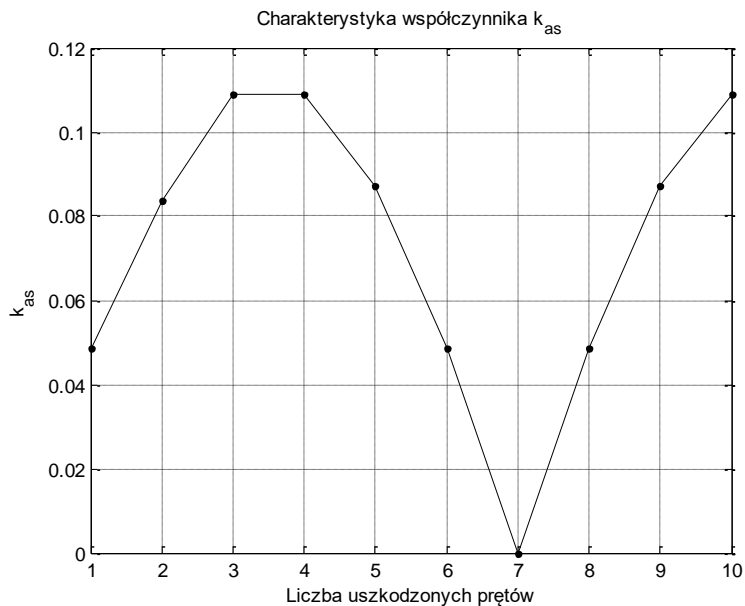
Tabela 2.4. Zestawienie wskaźników diagnostycznych uzyskanych z modelu całkownego numerycznie z pełnym odwzorowaniem klatki dla wybranych przypadków do 10 uszkodzonych prętów klatki.

Rodzaj uszkodzenia	$I_{1, -2p}^{s, 2}$ [A]	k_s [-]	k_{as} [-]	δ [rad]	błąd [-]
Silnik symetryczny	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Uszkodzony pręt nr 1	0,4940	0,0528	0,0485	2,6928	1,0431
Uszkodzone pręty nr 1 do 2	0,7908	0,1013	0,0837	3,1416	1,0556
Uszkodzone pręty nr 1 do 3	0,8796	0,1497	0,1089	-2,6928	1,0843
Uszkodzone pręty nr 1 do 4	0,7848	0,1982	0,1089	-2,2440	1,1269
Uszkodzone pręty nr 1 do 5	0,5623	0,2467	0,0873	-1,7952	1,1810
Uszkodzone pręty nr 1 do 6	0,2803	0,2951	0,0485	-1,3464	1,2466
Uszkodzone pręty nr 1 do 7	0,0000	0,3436	0,0000	2,9442	1,3252
Uszkodzone pręty nr 1 do 8	0,2320	0,3921	0,0485	2,6928	1,4150
Uszkodzone pręty nr 1 do 9	0,3843	0,4406	0,0873	3,1416	1,5070
Uszkodzone pręty nr 1 do 10	0,4415	0,4890	0,1089	-2,6928	1,5810

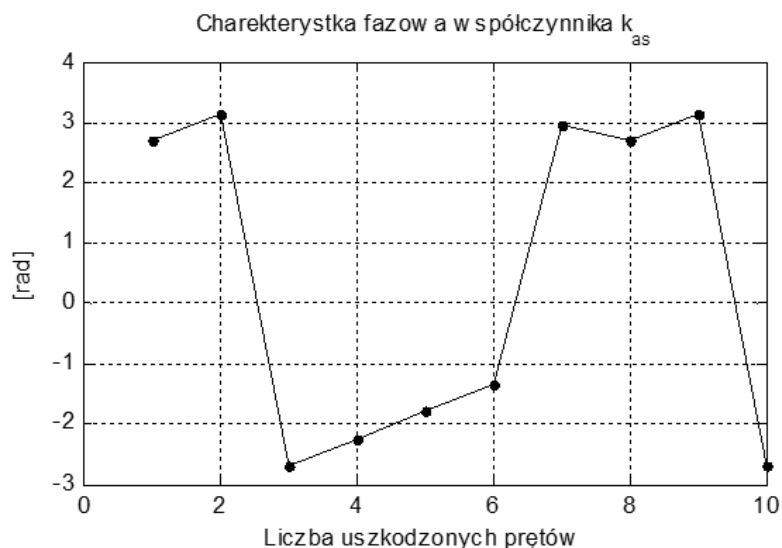
Zmiany wskaźników zestawione w Tabeli 2.4. przedstawiono graficznie na Rys 2.15. do Rys. 2.17. Na Rys. 2.18. przedstawiono zależność błędu popełnianego przy wynikach obliczeń uzyskanych z uproszczonego modelu całkownalnego numerycznie z uproszczonym odwzorowaniem klatki względem modelu z pełnym odwzorowaniem klatki wirnika.



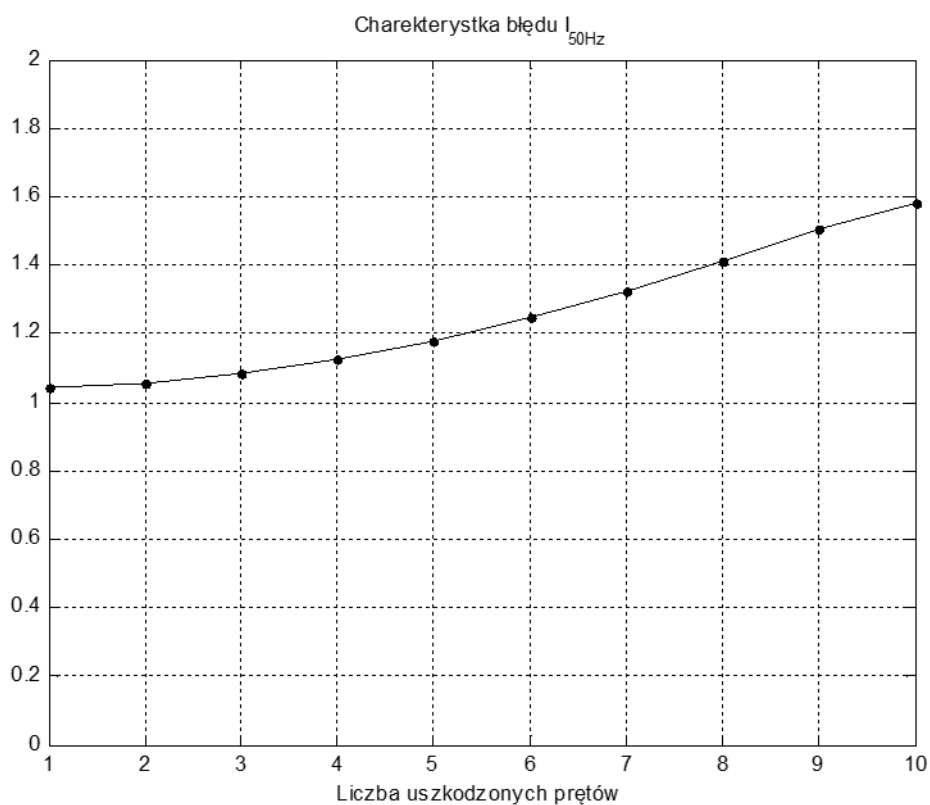
Rys. 2.15. Zmiana współczynnika k_s w zależności od liczby uszkodzonych prętów klatki wirnika.



Rys. 2.16. Zmiana współczynnika k_{as} w zależności od liczby uszkodzonych prętów klatki wirnika.



Rys. 2.17. Zmiana fazy współczynnika k_{as} w zależności od liczby uszkodzonych prętów klatki wirnika.



Rys. 2.18. Zależność błędu popełnianego przy wynikach obliczeń uzyskanych z uproszczonego modelu całkownego numerycznie z uproszczonym odwzorowaniem klatki względem modelu z pełnym odwzorowaniem klatki wirnika.

Na podstawie przedstawionych na Rys. 2.15. do Rys. 2.18. zależności można potwierdzić przydatność do dalszych analiz uproszczonego modelu całkownego numerycznie z uproszczonym odwzorowaniem klatki wirnika.

2.6.7. Porównanie wyników obliczeń dla modeli

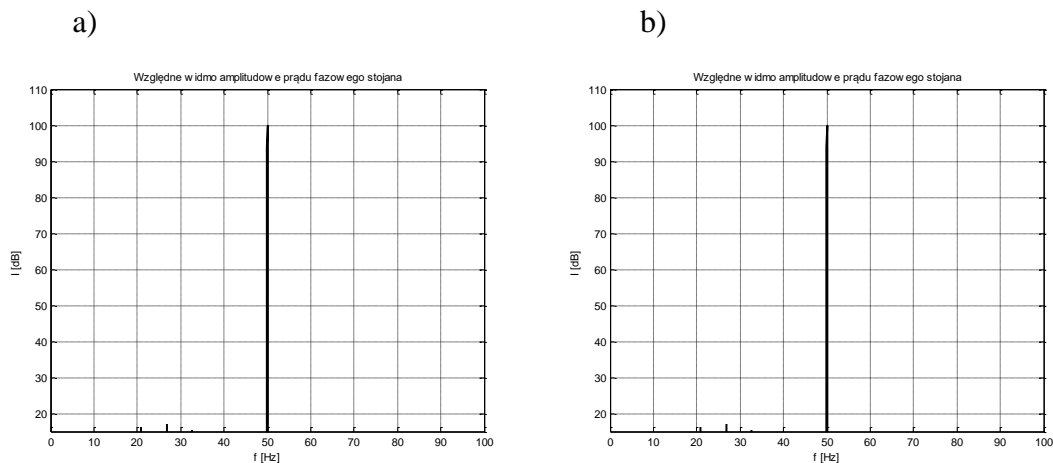
Wszystkie obliczenia przeprowadzono dla silnika Sg 112 M4. Dane znamionowe oraz dane geometryczne i konstrukcyjne zestawiono w Tabeli 2.5.

Tabela 2.5. Parametry znamionowe oraz dane geometryczne i konstrukcyjne badanego silnika Sg 112 M4.

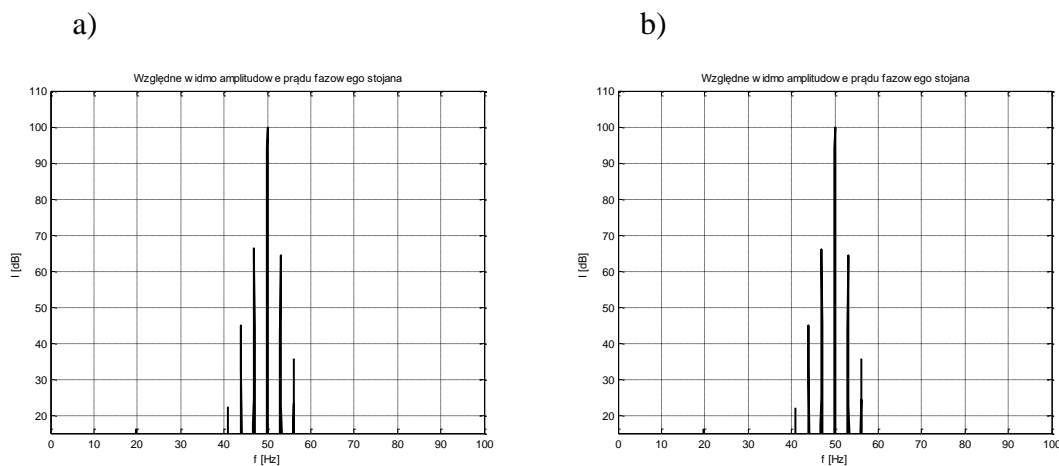
Parametry znamionowe	Wartość
Napięcie U_N	690V (Y)
Prąd I_N	8,1A
Moc P_N	4kW
Częstotliwość znamionowa f_N	50 Hz
Współczynnik mocy $\cos\varphi_N$ i sprawność	0,87 / 0,85
Obroty znamionowe n_N	1445/min
Obroty biegu jałowego n_0	1497/min
Liczba par biegunów p	2
Liczba żłobków stojana N_s	36
Liczba żłobków wirnika N_r	28
Dane geometryczne i konstrukcyjne	
Rezystancja pasma fazowego stojana	3Ω
Indukcyjność rozproszenia pasma fazowego stojana	0,02H
Rezystancja pręta/wycinka pierścienia	$5 \cdot 10^{-5} \Omega / 9 \cdot 10^{-7} \Omega$
Indukcyjność rozproszenia pręta/wycinka pierścienia	$7 \cdot 10^{-7} \text{H} / 3 \cdot 10^{-9} \text{H}$
Długość jarzma	0,115m
Grubość szczeliny powietrznej	0,0003m

Przeprowadzono analizy porównawcze dla modelu całkowalnego numerycznie z pełnym odwzorowaniem klatki oraz modelu zredukowanego.

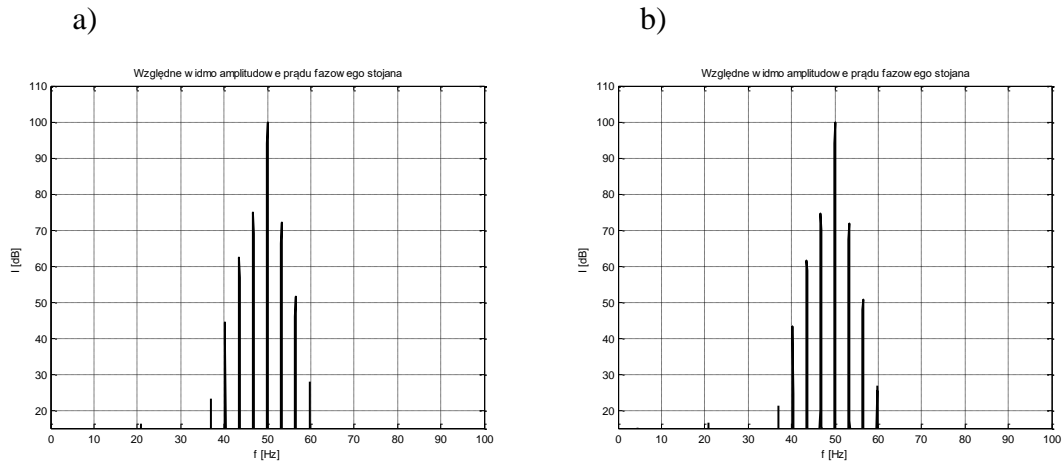
Na Rys. 2.19. do Rys. 2.22. przedstawiono widma prądu stojana dla różnych uszkodzeń dla modelu pełnego na rysunkach a) oraz modelu zredukowanego na rysunkach b). Wszystkie prezentowane widma uzyskano przy założeniu prędkości obrotowej 1440 obr/min oraz momencie bezwładności $4J_w$ (dodatkowymi kołami masowymi dołożonymi na wale silnika od strony przeciwnapędnej, co zostanie zilustrowane w rozdziale 4).



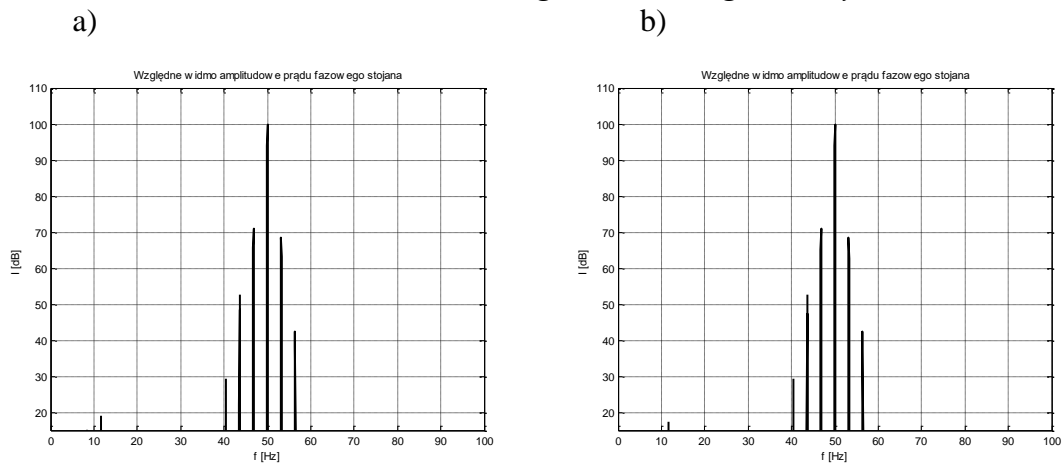
Rys. 2.19. Widmo prądu stojana dla silnika symetrycznego, 1440 obr/min, $4J_w$ dla:
 a) modelu z pełnym odwzorowaniem klatki całkowalnego numerycznie,
 b) modelu zredukowanego całkowalnego numerycznie.



Rys. 2.20. Widmo prądu stojana dla silnika z uszkodzonym 1 prętym klatki, 1440 obr/min, $4J_w$ dla:
 a) modelu z pełnym odwzorowaniem klatki całkowalnego numerycznie,
 b) modelu zredukowanego całkowalnego numerycznie.



Rys. 2.21. Widmo prądu stojana dla silnika z uszkodzonym 1 i 2 prętem klatki, 1440 obr/min, $4J_w$ dla: a) modelu z pełnym odwzorowaniem klatki całkowalnego numerycznie, b) modelu zredukowanego całkowalnego numerycznie.

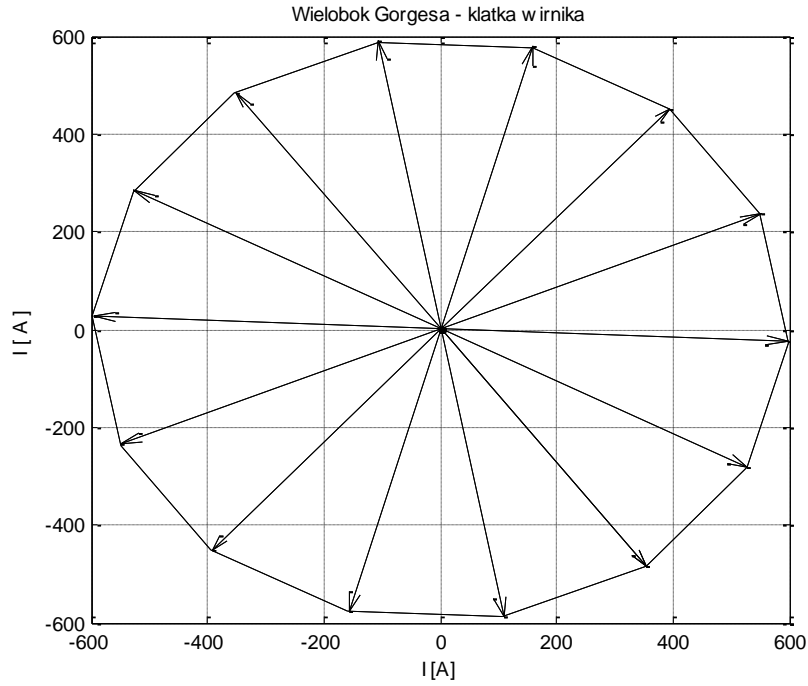


Rys. 2.22. Widmo prądu stojana dla silnika z uszkodzonym 1 i 3 prętem klatki, 1440 obr/min, $4J_w$ dla: a) modelu z pełnym odwzorowaniem klatki całkowalnego numerycznie, b) modelu zredukowanego całkowalnego numerycznie.

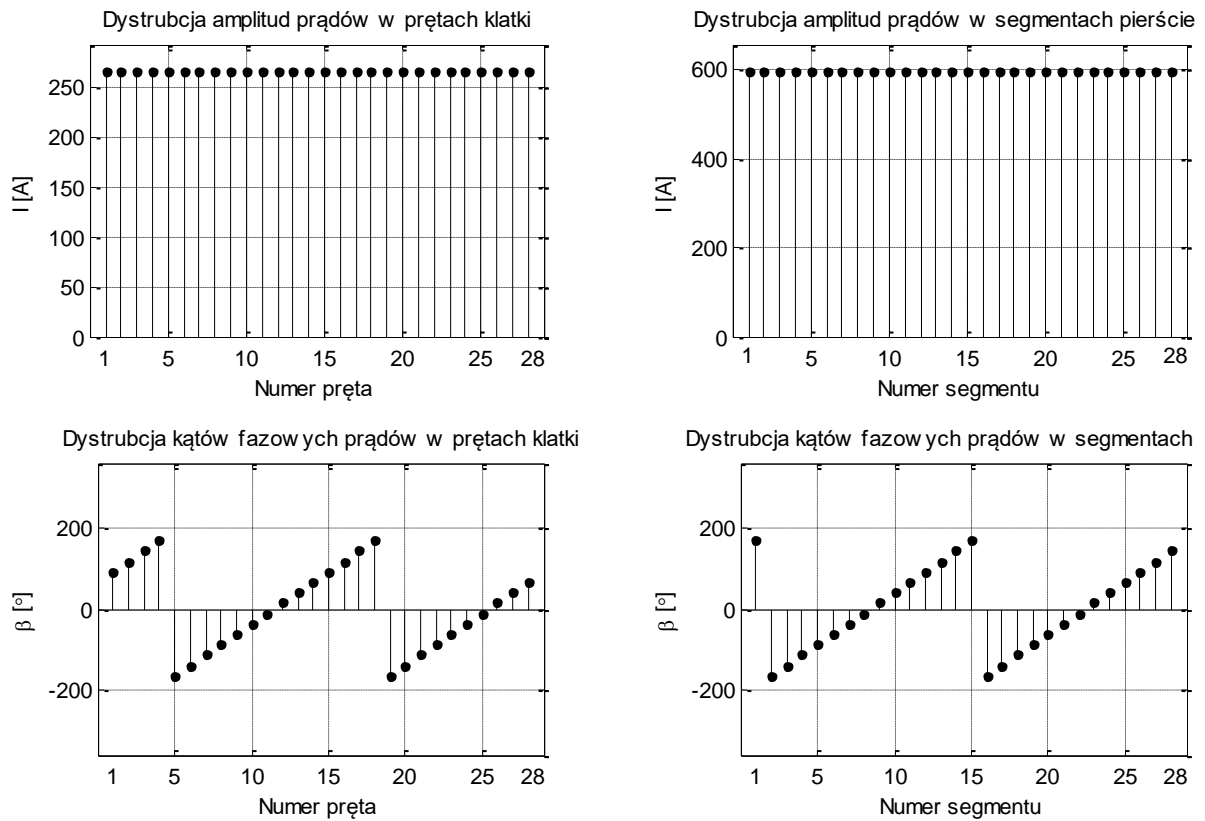
Przedstawione na Rys. 2.19. do Rys 2.22. widma prądów stojana, dla przypadków uszkodzeń, dla których przeprowadzono weryfikację pomiarową na stanowisku laboratoryjnym, posłużyły do dalszych analiz i wyznaczenia wskaźników diagnostycznych k_{sym} , k_{asym} oraz δ określonych wzorami (2.134) do (2.136).

Przy wyznaczeniu współczynnika δ pomocne są rozkłady w postaci wieloboków Gergesa oraz dystrybucji prądów w prętach i segmentach klatki.

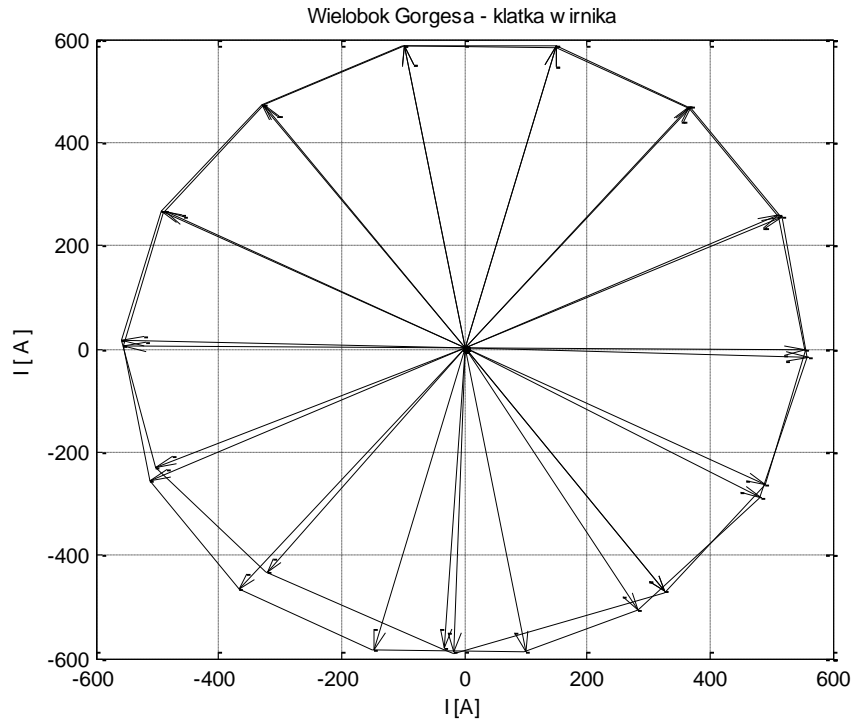
Dystrybucje prądów dla modelu monoharmonicznego z pełnym odwzorowaniem klatki i tak jak poprzednio przy założeniu prędkości obrotowej 1440 obr/min oraz momencie bezwładności $4J_w$ przedstawiono na Rys. 2.23. do Rys. 2.30.



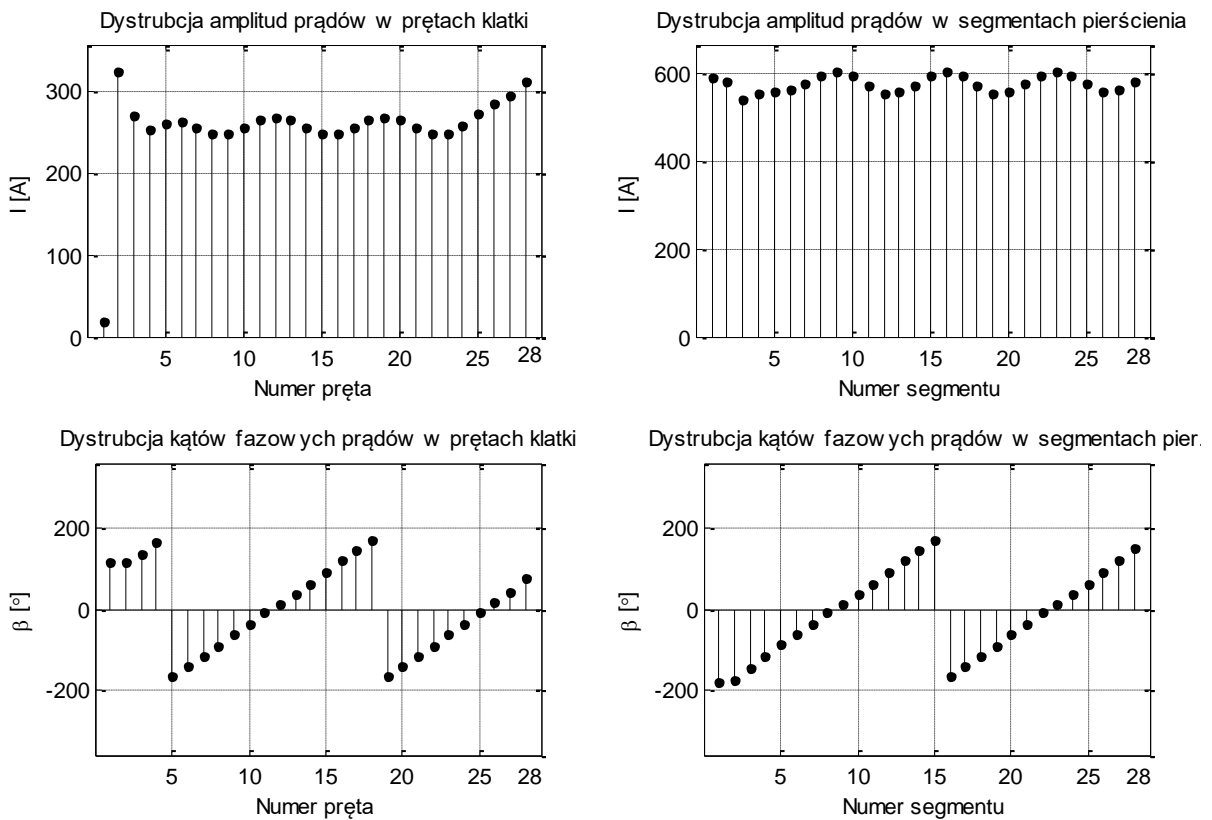
Rys. 2.23. Wielobok Gergesa dla silnika symetrycznego.



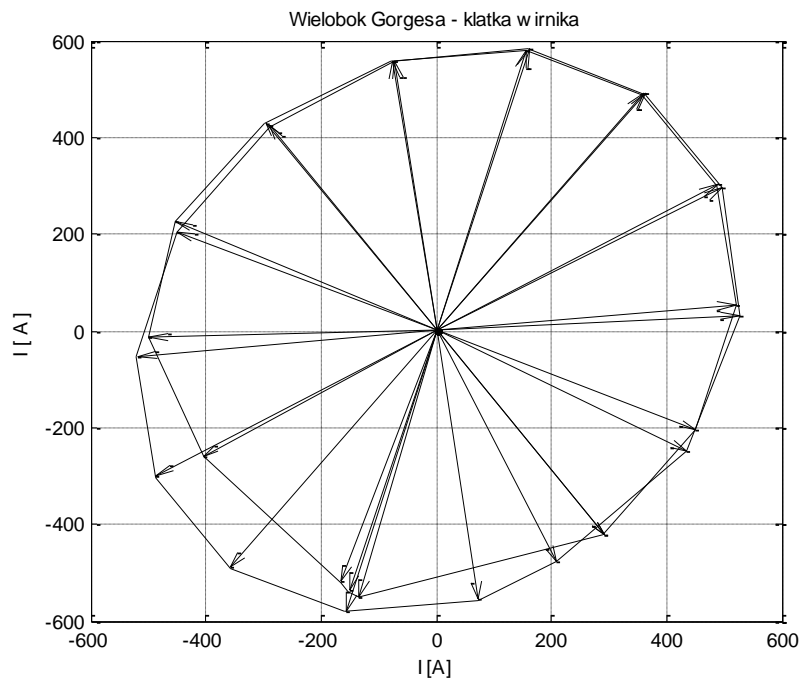
Rys. 2.24. Dystrybucje amplitud prądów dla silnika symetrycznego.



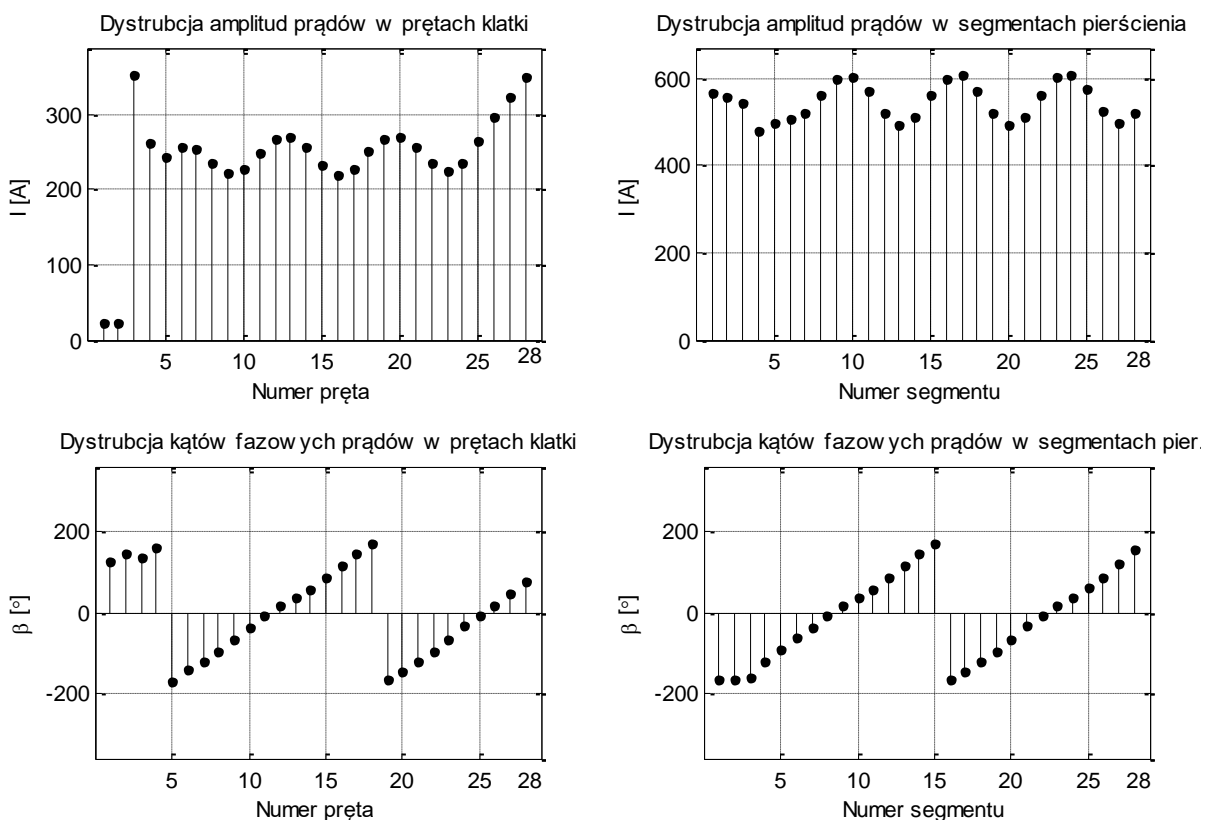
Rys. 2.25. Wielobok Gergesa dla silnika z uszkodzonym 1 prętem klatki.



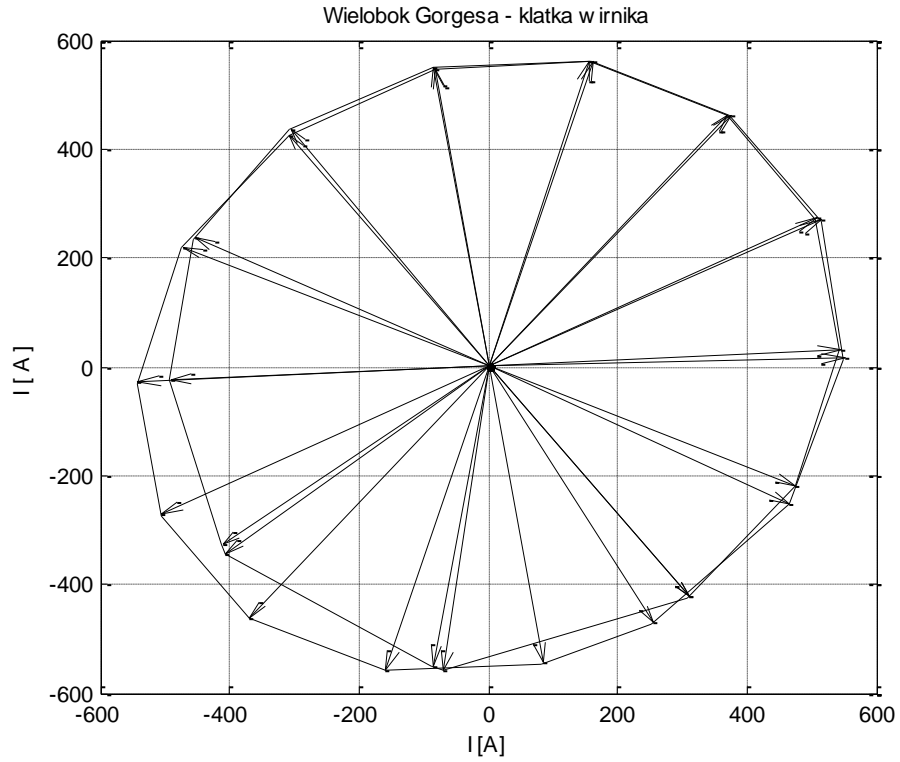
Rys. 2.26. Dystrybucje amplitud prądów dla uszkodzonego 1 pręta klatki.



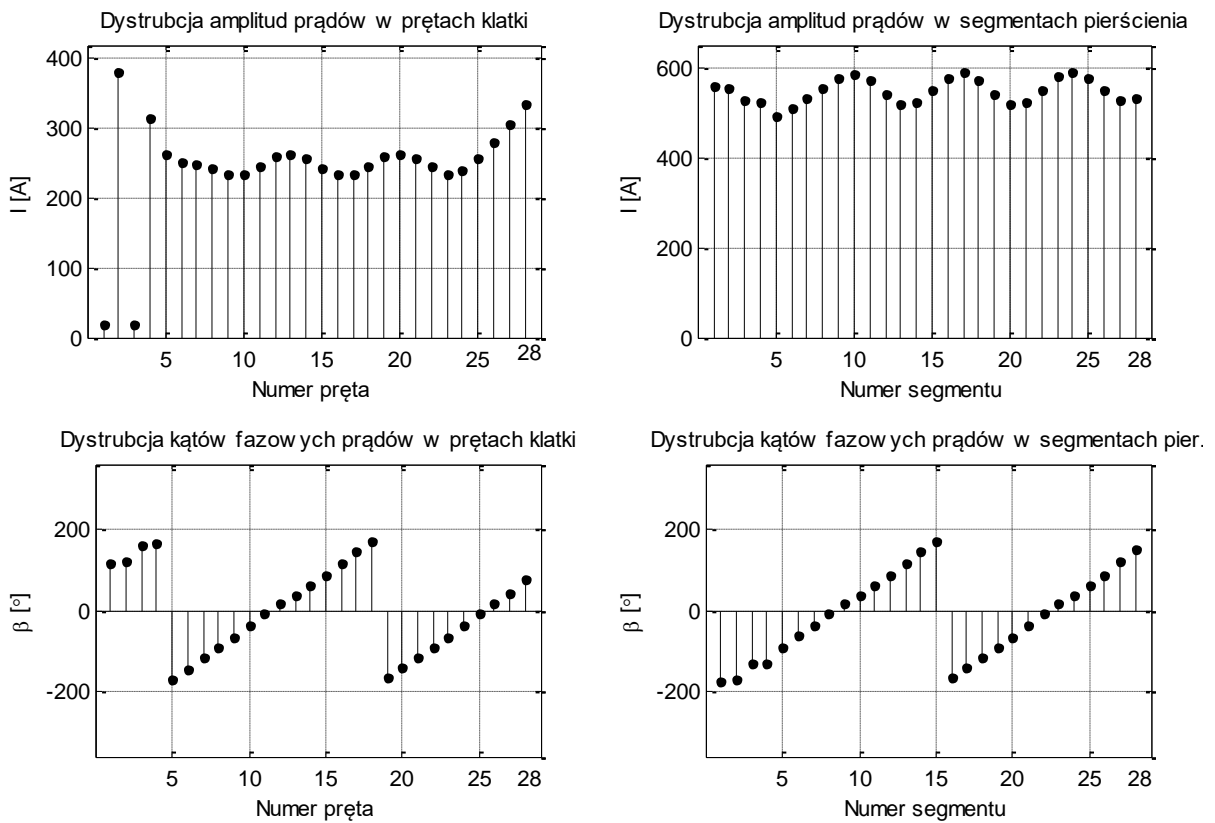
Rys. 2.27. Wielobok Gergesa dla silnika z uszkodzonym 1 i 2 prętem klatki.



Rys. 2.28. Dystrybucje amplitud prądów dla uszkodzonego 1 i 2 pręta klatki.



Rys. 2.29. Wielobok Gergesa dla silnika z uszkodzonym 1 i 3 prętem klatki



Rys. 2.30. Dystrybucje amplitud prądów dla uszkodzonego 1 i 3 pręta klatki.

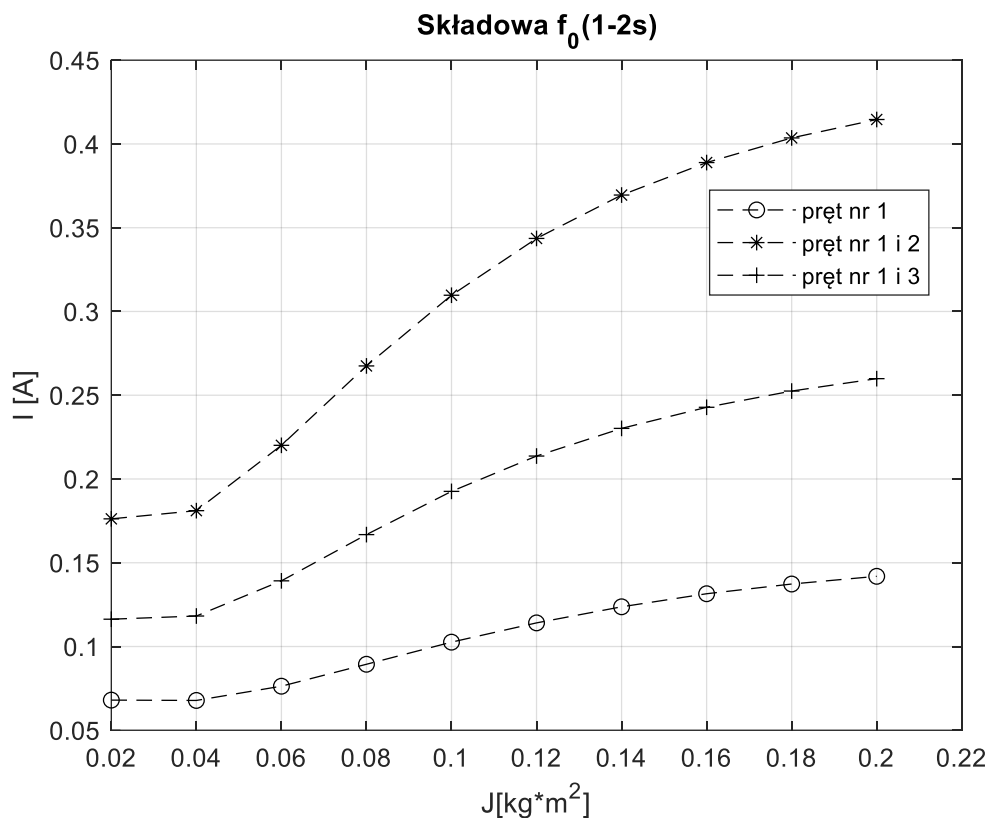
Na rozkładach w formie wieloboków Gergesa dla silnika z symetrycznego i silnika z różnie uszkodzonymi prętami widać wyraźnie różnice w kształtach wieloboków Gergesa. Pozwala to dokładniej określić rodzaj uszkodzenia prętów klatki wirnika.

W Tabeli 2.6. zestawiono maksymalne amplitud składowych widm prądów stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń dla podstawowej harmonicznej prądu f_0 oraz składowych poślizgowych $f_0(1-2s)$, $f_0(1+2s)$, $f_0(1-4s)$, oraz $f_0(1+4s)$ dla różnych momentów bezwładności. Analizy oparto na wynikach obliczeń numerycznych dla modelu monoharmonicznego z pełnym odwzorowaniem klatki, całkowalnego numerycznie.

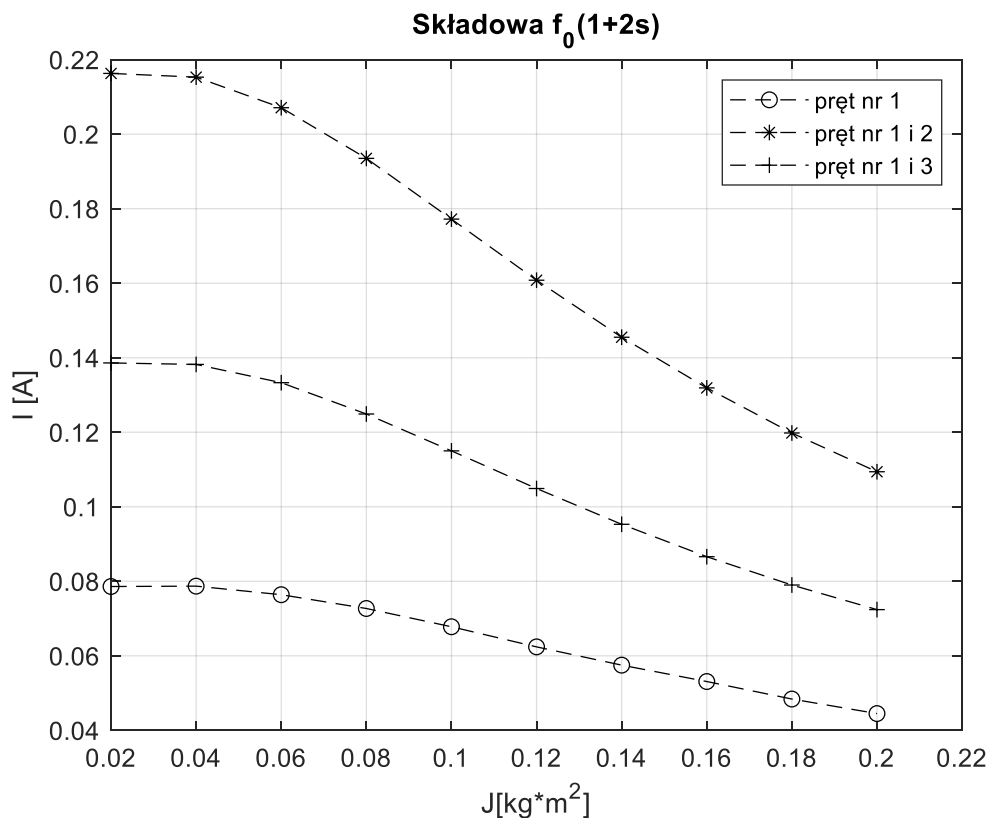
Tabela 2.6. Zestawienie maksymalnych amplitud składowych widm prądów stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń, obliczenia numeryczna dla modelu monoharmonicznego z pełnym odwzorowaniem klatki, całkowalnego numerycznie – wpływ momentu bezwładności.

	$J[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ $/I[\text{A}]$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
T=12 [Nm] uszkodzony 1 pręt	f_0	4,7633	4,7633	4,7633	4,7634	4,7635	4,7635	4,7632	4,7628	4,7628	4,7629
	$f_0(1-2s)$	0,0680	0,0678	0,0763	0,0894	0,1026	0,1141	0,1237	0,1315	0,1373	0,1419
	$f_0(1+2s)$	0,0786	0,0787	0,0764	0,0727	0,0678	0,0624	0,0575	0,0531	0,0484	0,0445
	$f_0(1-4s)$	0,0032	0,0049	0,0061	0,0065	0,0067	0,0066	0,0065	0,0061	0,0050	0,0042
	$f_0(1+4s)$	0,0043	0,0042	0,0033	0,0025	0,0021	0,0015	0,0014	0,0011	0,0007	0,0005
	$J[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ $/I[\text{A}]$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
T=12 [Nm] uszkodzony 1 i 2 pręt	f_0	4,8355	4,8356	4,8355	4,8353	4,8349	4,8347	4,8342	4,8341	4,8338	4,8334
	$f_0(1-2s)$	0,1762	0,1811	0,2201	0,2675	0,3097	0,3436	0,3695	0,3889	0,4036	0,4146
	$f_0(1+2s)$	0,2163	0,2153	0,2071	0,1935	0,1772	0,1608	0,1455	0,1319	0,1198	0,1094
	$f_0(1-4s)$	0,0247	0,0487	0,0613	0,0625	0,0591	0,0540	0,0490	0,0446	0,0402	0,0370
	$f_0(1+4s)$	0,0333	0,0319	0,0248	0,0179	0,0130	0,0096	0,0073	0,0058	0,0044	0,0036
	$J[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ $/I[\text{A}]$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
T=12 [Nm] uszkodzony 1 i 3 pręt	f_0	4,7952	4,7952	4,7952	4,7952	4,7952	4,7952	4,7952	4,7952	4,7952	4,7952
	$f_0(1-2s)$	0,1163	0,1182	0,1392	0,1668	0,1926	0,2137	0,2302	0,2428	0,2525	0,2599
	$f_0(1+2s)$	0,1386	0,1382	0,1333	0,1249	0,1150	0,1049	0,0953	0,0866	0,0790	0,0724
	$f_0(1-4s)$	0,0082	0,0151	0,0193	0,0202	0,0193	0,0178	0,0163	0,0148	0,0135	0,0123
	$f_0(1+4s)$	0,0112	0,0108	0,0084	0,0061	0,0045	0,0034	0,0026	0,0021	0,0017	0,0014

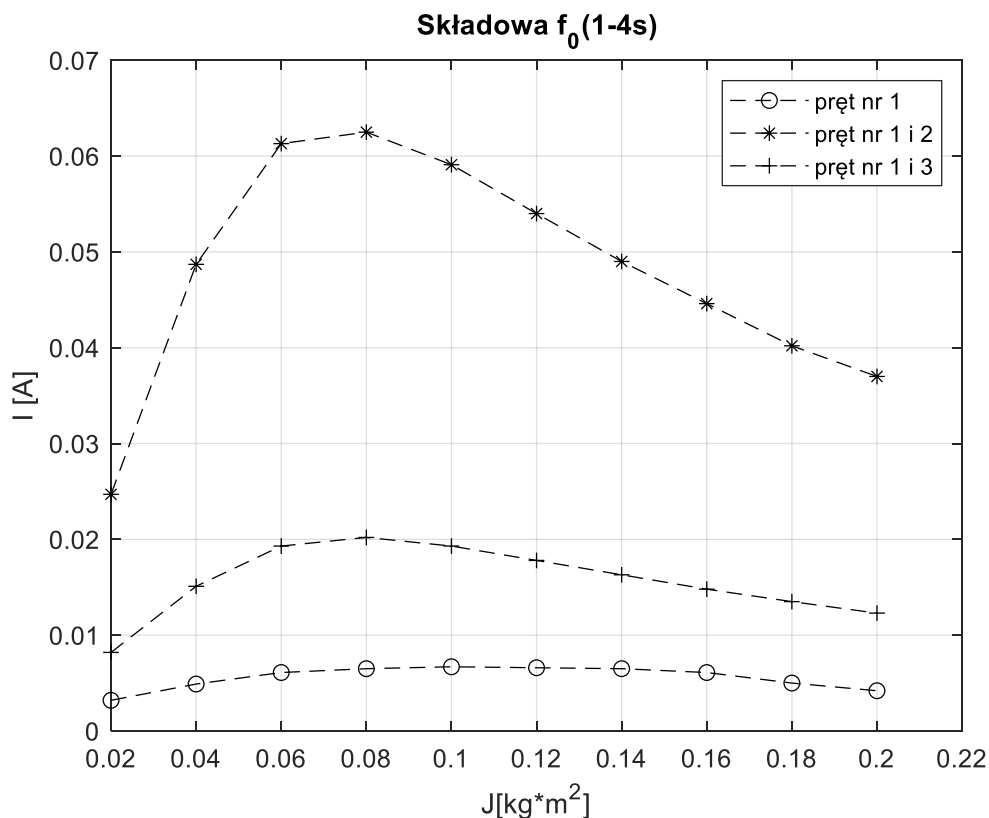
Na podstawie danych zestawionych w Tabeli 2.6. na Rys. 2.31. do Rys. 2.34. przedstawiono dla trzech przypadków uszkodzeń dla składowych poślizgowych $f_0(1-2s)$, $f_0(1+2s)$, $f_0(1-4s)$, oraz $f_0(1+4s)$ jak zmieniają się maksymalne amplitud składowych widm prądów stojana w zależności od momentów bezwładności wirnika. Zbadano wpływ momentu bezwładności wirnika od J do 10J. Obliczenia wykonano dla momentu obciążenia 12Nm.



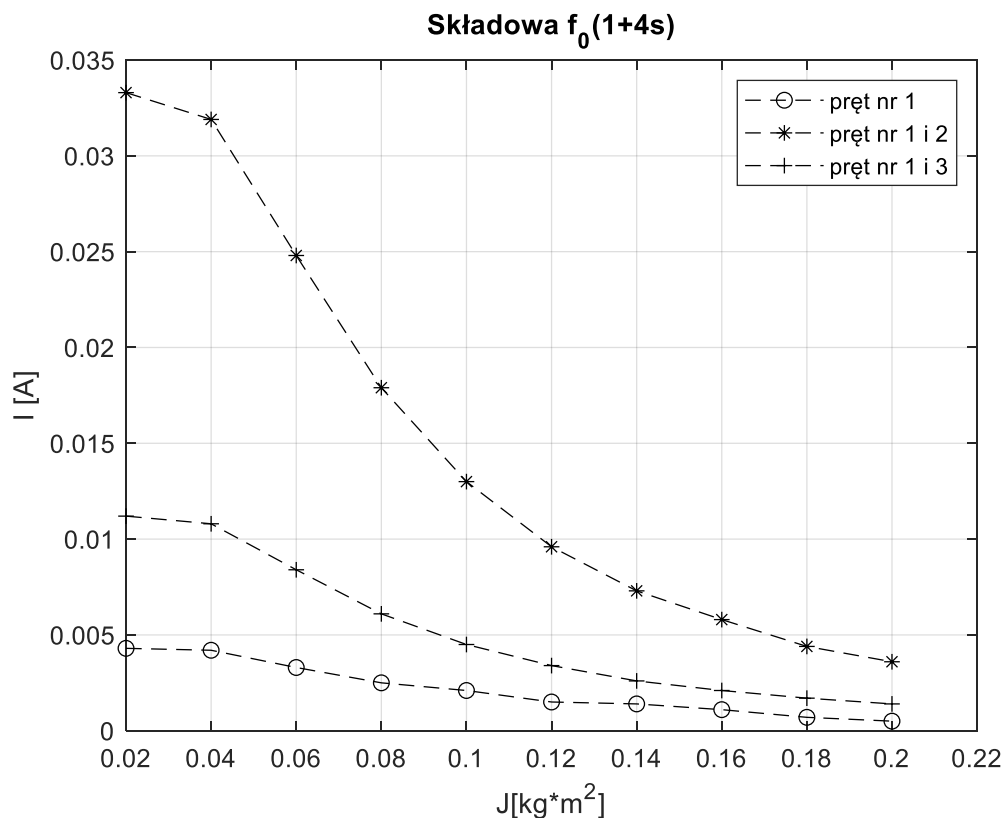
Rys. 2.31. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika.



Rys. 2.32. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika.



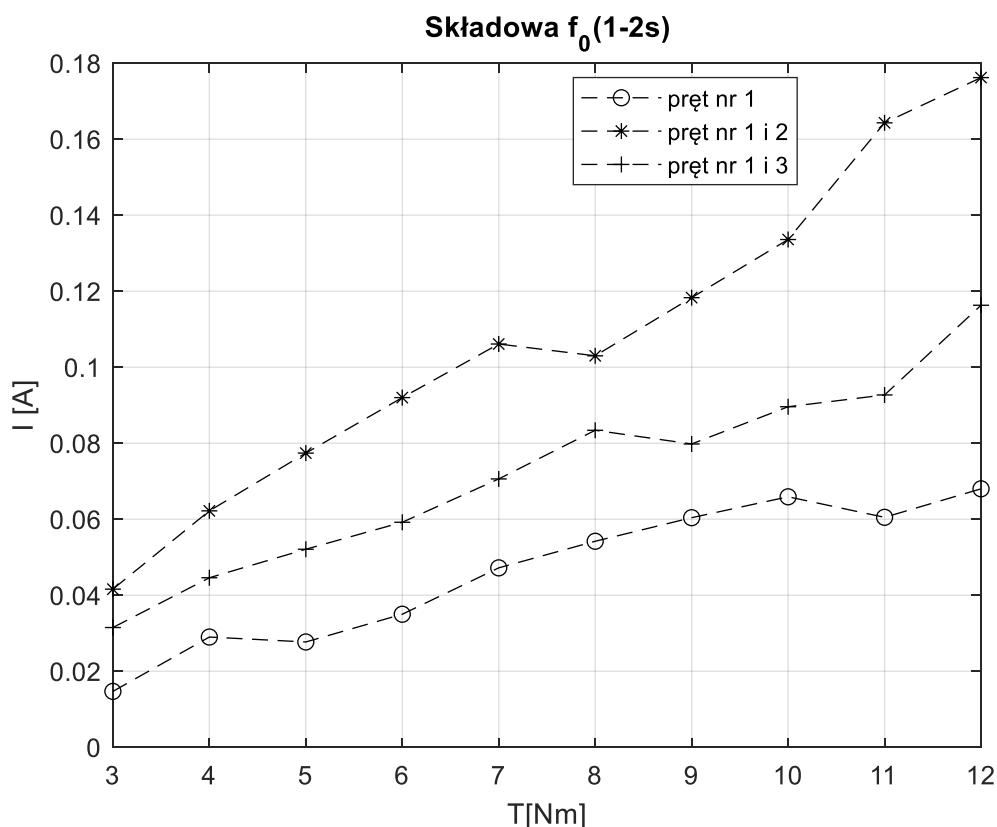
Rys. 2.33. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika.



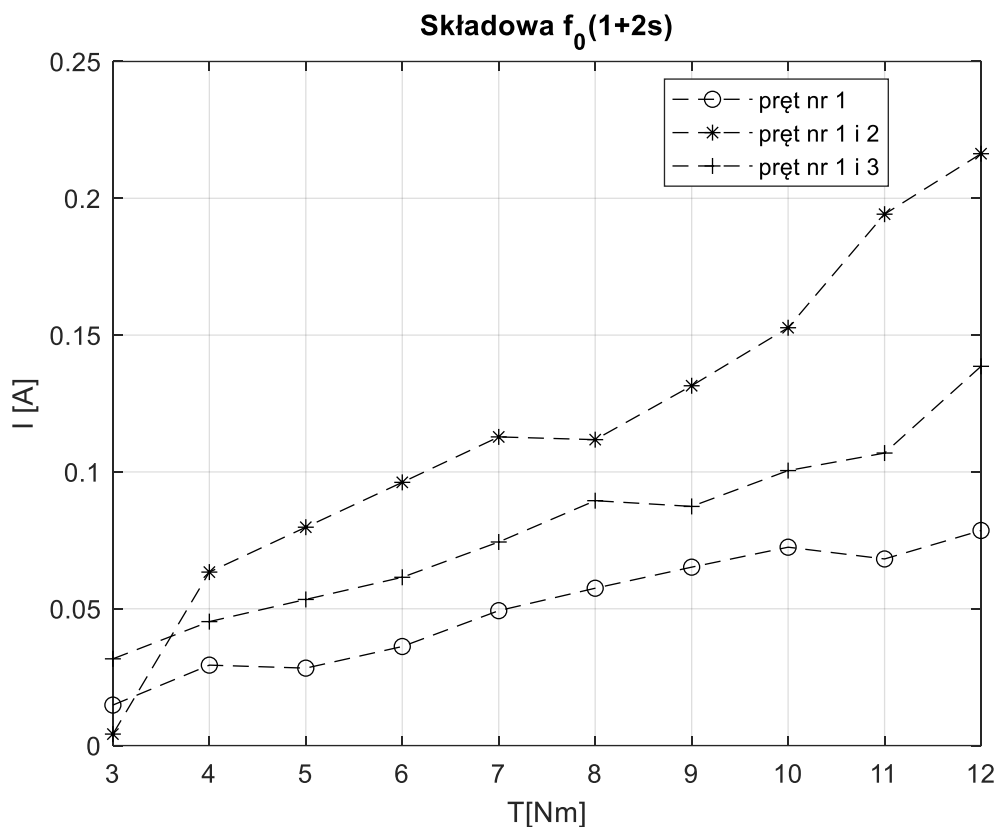
Rys. 2.34. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika.

Tabela 2.7. Zestawienie amplitud składowych widm prądu stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń, obliczenia numeryczna dla modelu monoharmonicznego z pełnym odwzorowaniem klatki, całkowalnego numerycznie – dla różnego momentu obciążenia.

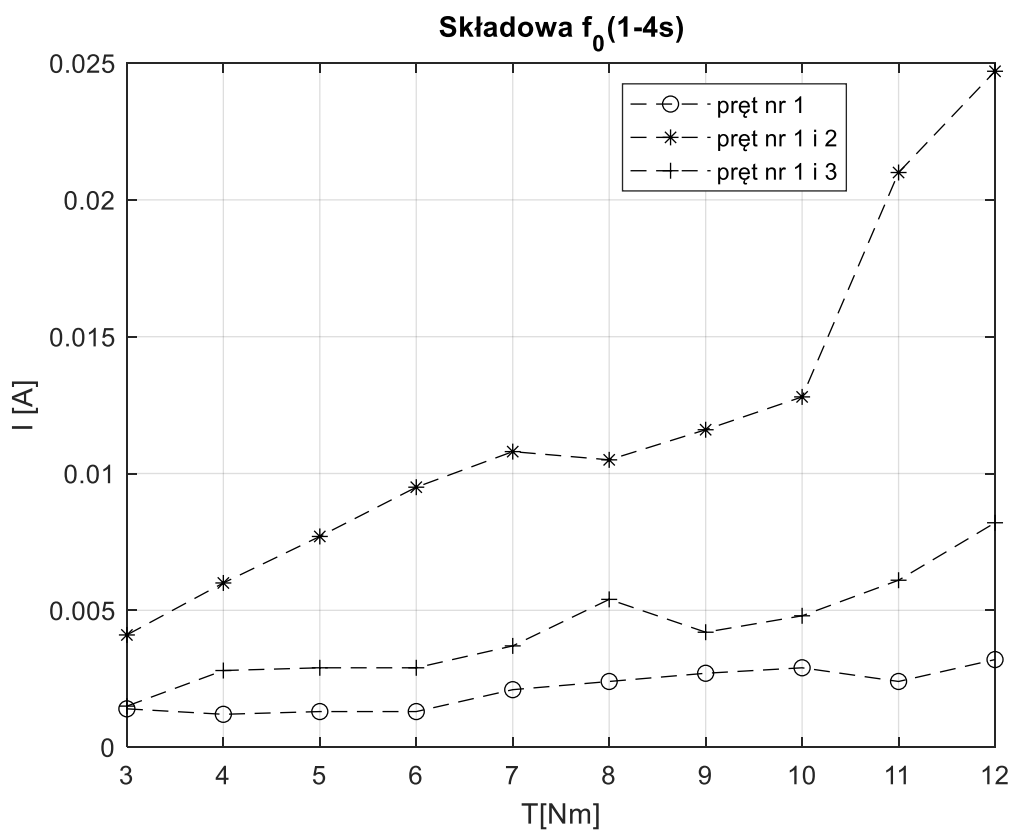
	T [Nm] / I [A]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
J=0,02 [kg*m ²] uszkodzony 1 pręt	f_0	1,9242	2,1709	2,4454	2,7395	3,0499	3,3730	3,7069	4,0505	4,4025	4,7633
	$f_0(1-2s)$	0,0147	0,0290	0,0277	0,0350	0,0472	0,0542	0,0604	0,0659	0,0605	0,0680
	$f_0(1+2s)$	0,0148	0,0294	0,0283	0,0362	0,0493	0,0575	0,0652	0,0725	0,0682	0,0786
	$f_0(1-4s)$	0,0014	0,0012	0,0013	0,0013	0,0021	0,0024	0,0027	0,0029	0,0024	0,0032
	$f_0(1+4s)$	0,0014	0,0013	0,0013	0,0014	0,0023	0,0028	0,0032	0,0037	0,0033	0,0043
	T [Nm] / I [A]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
J=0,02 [kg*m ²] uszkodzony 1 i 2 pręt	f_0	1,9371	2,1877	2,4668	2,7664	3,0824	3,4110	3,7530	4,1043	4,4648	4,8355
	$f_0(1-2s)$	0,0416	0,0622	0,0774	0,0920	0,1061	0,1030	0,1183	0,1336	0,1643	0,1762
	$f_0(1+2s)$	0,0042	0,0634	0,0798	0,0962	0,1128	0,1118	0,1315	0,1527	0,1942	0,2163
	$f_0(1-4s)$	0,0041	0,0060	0,0077	0,0095	0,0108	0,0105	0,0116	0,0128	0,0210	0,0247
	$f_0(1+4s)$	0,0042	0,0064	0,0083	0,0107	0,0127	0,0131	0,0145	0,0167	0,0287	0,0333
	T [Nm] / I [A]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
J=0,02 [kg*m ²] uszkodzony 1 i 3 pręt	f_0	1,9313	2,1798	2,4565	2,7533	3,0659	3,3914	3,7283	4,0751	4,4310	4,7952
	$f_0(1-2s)$	0,0315	0,0446	0,0521	0,0592	0,0706	0,0834	0,0798	0,0896	0,0927	0,1163
	$f_0(1+2s)$	0,0317	0,0453	0,0534	0,0615	0,0744	0,0895	0,0874	0,1005	0,1069	0,1386
	$f_0(1-4s)$	0,0015	0,0028	0,0029	0,0029	0,0037	0,0054	0,0042	0,0048	0,0061	0,0082
	$f_0(1+4s)$	0,0015	0,0029	0,0032	0,0033	0,0043	0,0065	0,0045	0,0059	0,0080	0,0112



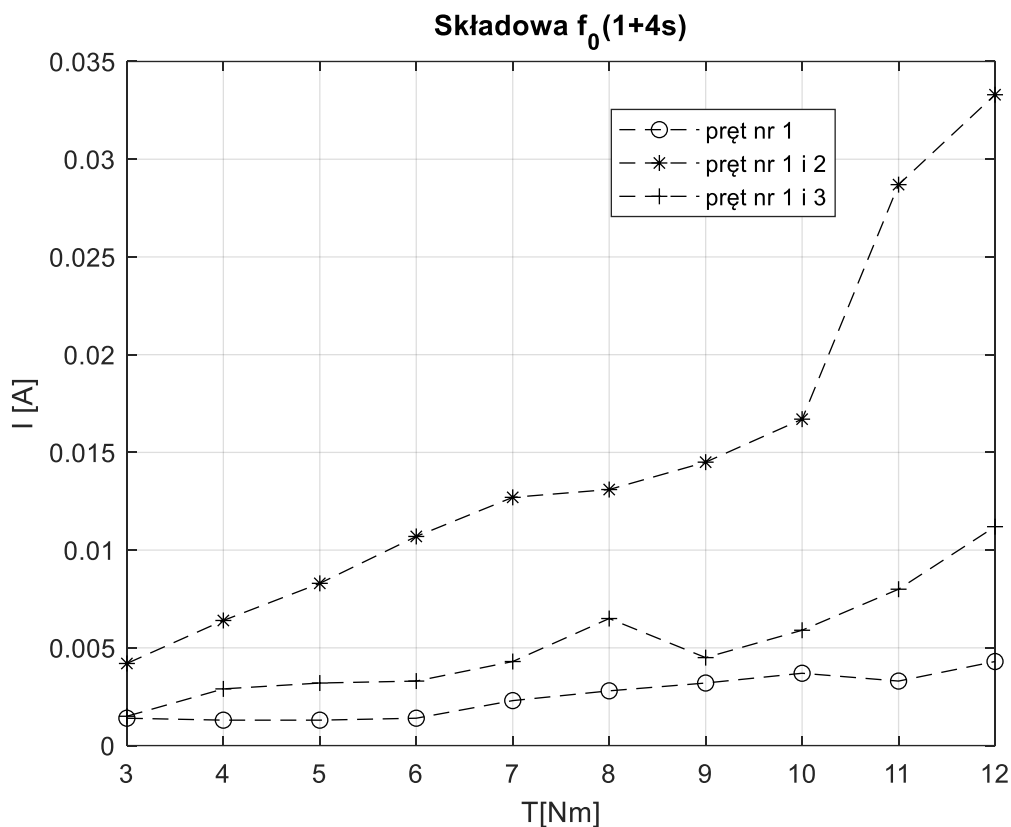
Rys. 2.35. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia.



Rys. 2.36. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia.



Rys. 2.37. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia.



Rys. 2.38. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia.

Na podstawie danych zestawionych w Tabeli 2.7. na Rys. 2.35. do Rys. 2.38. przedstawiono dla trzech przypadków uszkodzeń dla składowych poślizgowych $f_0(1-2s)$, $f_0(1+2s)$, $f_0(1-4s)$, oraz $f_0(1+4s)$ jak zmieniają się maksymalne amplitud składowych widm prądów stojana w zależności od momentów obciążenia. Zbadano wpływ momentu obciążenia od 3Nm do 12Nm. Obliczenia wykonano dla momentu bezwładności $J=0,02 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

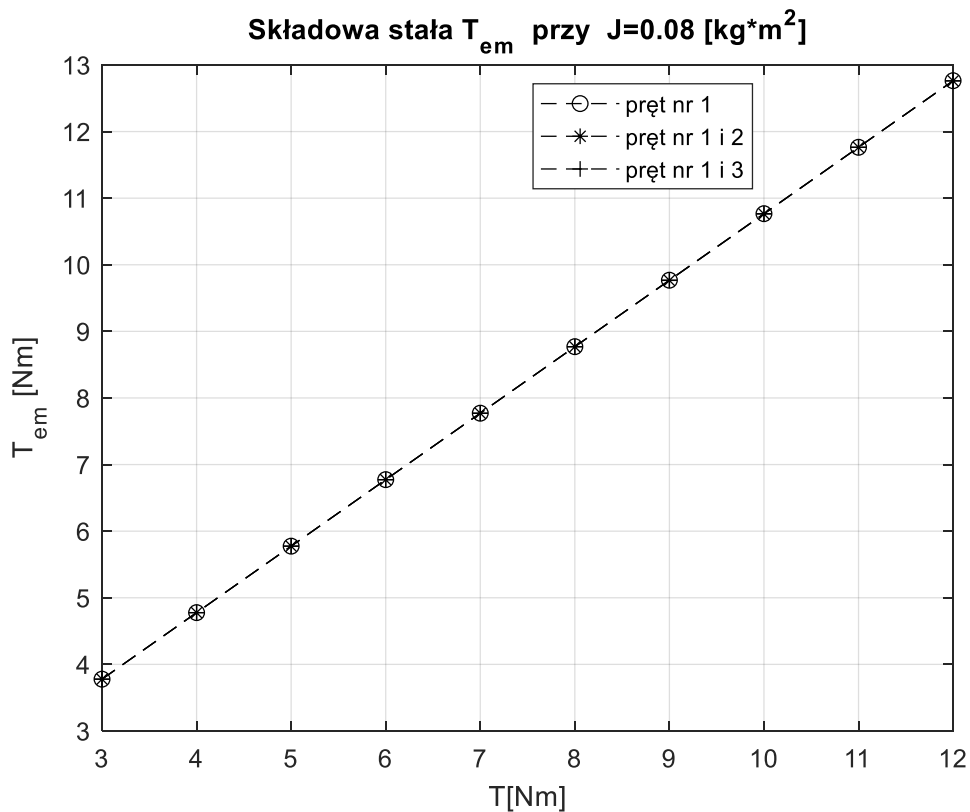
W Tabeli 2.8. zestawiono amplitud składowych widm momentu elektromagnetycznego dla analizowanych trzech przypadków uszkodzeń. Obliczenia numeryczna wykonano dla modelu monoharmonicznego z pełnym odwzorowaniem klatki wirnika, całkownego numerycznie. Obliczenia zestawione w Tabeli 2.8. wykonano dla momentu obciążenia zmieniającego się od 3Nm do 12Nm i dwóch różnych momentów bezwładności $J=0,08\text{kg}\cdot\text{m}^2$ i $J=0,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Tabela 2.8. Zestawienie amplitud składowych widm momentu elektromagnetycznego dla analizowanych przypadków uszkodzeń, obliczenia numeryczna dla modelu monoharmonicznego z pełnym odwozrowaniem klatki, całkowalnego numerycznie – dla różnego momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności.

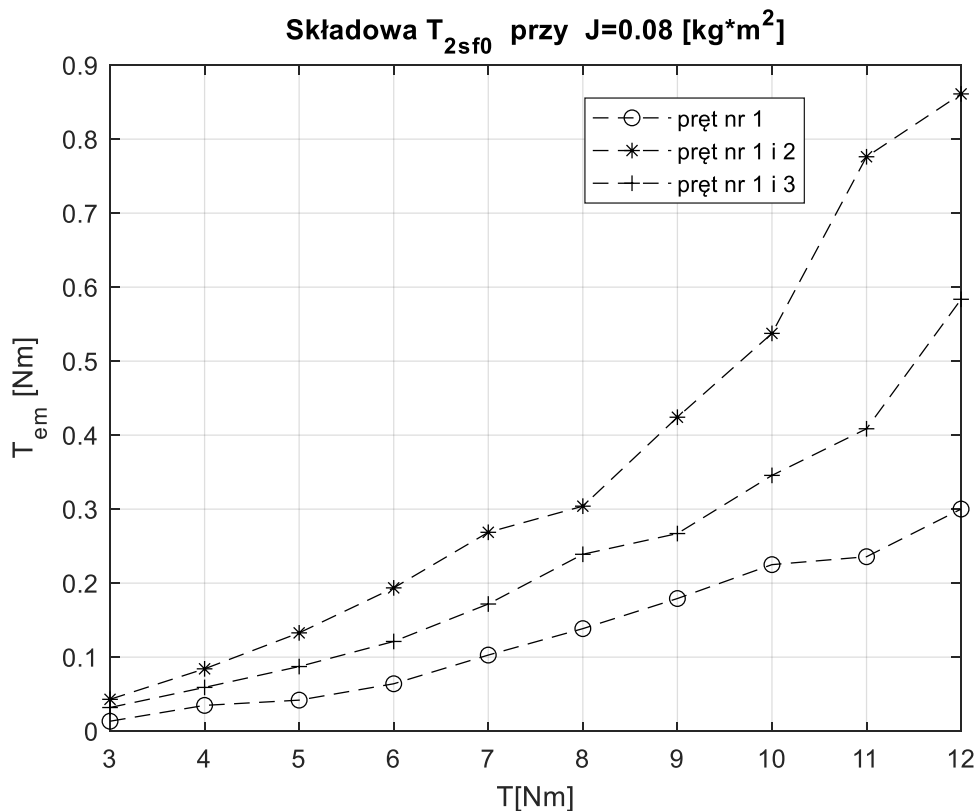
J=0,08 [kg*m²] uszkodzony 1 pręt	T [Nm]/ T_{em}[Nm]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
	T_{em}	3,7780	4,7770	5,7750	6,7738	7,7716	8,7701	9,7684	10,7670	11,7640	12,7640
	T_{2sf0}	0,0134	0,0348	0,0419	0,0640	0,1028	0,1385	0,1792	0,2250	0,2357	0,3001
	T_{4sf0}	0,0018	0,0030	0,0051	0,0065	0,0096	0,0137	0,0175	0,0213	0,0222	0,0232
J=0,08 [kg*m²] uszkodzony 1 i 2 pręt	T [Nm]/ T_{em}[Nm]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
	T_{em}	3,7780	4,7766	5,7749	6,7730	7,7706	8,7694	9,7652	10,7627	11,7633	12,7610
	T_{2sf0}	0,0430	0,0842	0,1328	0,1936	0,2687	0,3040	0,4242	0,5375	0,7762	0,8611
	T_{4sf0}	0,0079	0,0175	0,0296	0,0457	0,0636	0,0777	0,0822	0,1100	0,1822	0,2125
J=0,08 [kg*m²] uszkodzony 1 i 3 pręt	T [Nm]/ T_{em}[Nm]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
	T_{em}	3,7780	4,7770	5,7750	6,7731	7,7712	8,7694	9,7686	10,7670	11,7650	12,7620
	T_{2sf0}	0,0319	0,0591	0,0873	0,1212	0,1718	0,2390	0,2670	0,3456	0,4086	0,5836
	T_{4sf0}	0,0030	0,0080	0,0101	0,0124	0,0224	0,0343	0,0343	0,0384	0,0523	0,0689
J=0,2 [kg*m²] uszkodzony 1 pręt	T [Nm]/ T_{em}[Nm]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
	T_{em}	3,7780	4,7770	5,7740	6,7751	7,7714	8,7700	9,7686	10,7665	11,7628	12,7610
	T_{2sf0}	0,0324	0,0818	0,0949	0,1414	0,2150	0,2745	0,3350	0,3947	0,3892	0,4611
	T_{4sf0}	0,0035	0,0056	0,0076	0,0086	0,0119	0,0144	0,0159	0,0175	0,0139	0,0124
J=0,2 [kg*m²] uszkodzony 1 i 2 pręt	T [Nm]/ T_{em}[Nm]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
	T_{em}	3,7790	4,7770	5,7750	6,7730	7,7700	8,7660	9,7714	10,7646	11,7631	12,7610
	T_{2sf0}	0,1018	0,1964	0,2961	0,4115	0,5371	0,5672	0,7467	0,8698	1,1756	1,3478
	T_{4sf0}	0,0183	0,0299	0,0455	0,058	0,0685	0,0698	0,0646	0,0686	0,107	0,1109
J=0,2 [kg*m²] uszkodzony 1 i 3 pręt	T [Nm]/ T_{em}[Nm]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
	T_{em}	3,7790	4,7770	5,7750	6,7717	7,7700	8,7690	9,7660	10,7640	11,7638	12,7620
	T_{2sf0}	0,0753	0,1373	0,1950	0,2572	0,3458	0,4538	0,4744	0,5714	0,6337	0,8429
	T_{4sf0}	0,0066	0,0144	0,0153	0,0181	0,0243	0,0323	0,0280	0,0223	0,0339	0,0373

Na Rys. 2.35. do Rys. 2.41. przedstawiono dla trzech przypadków uszkodzeń klatki wirnika zmiany maksymalnych amplitud składowej stałej oraz składowych T_{2sf0} i T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

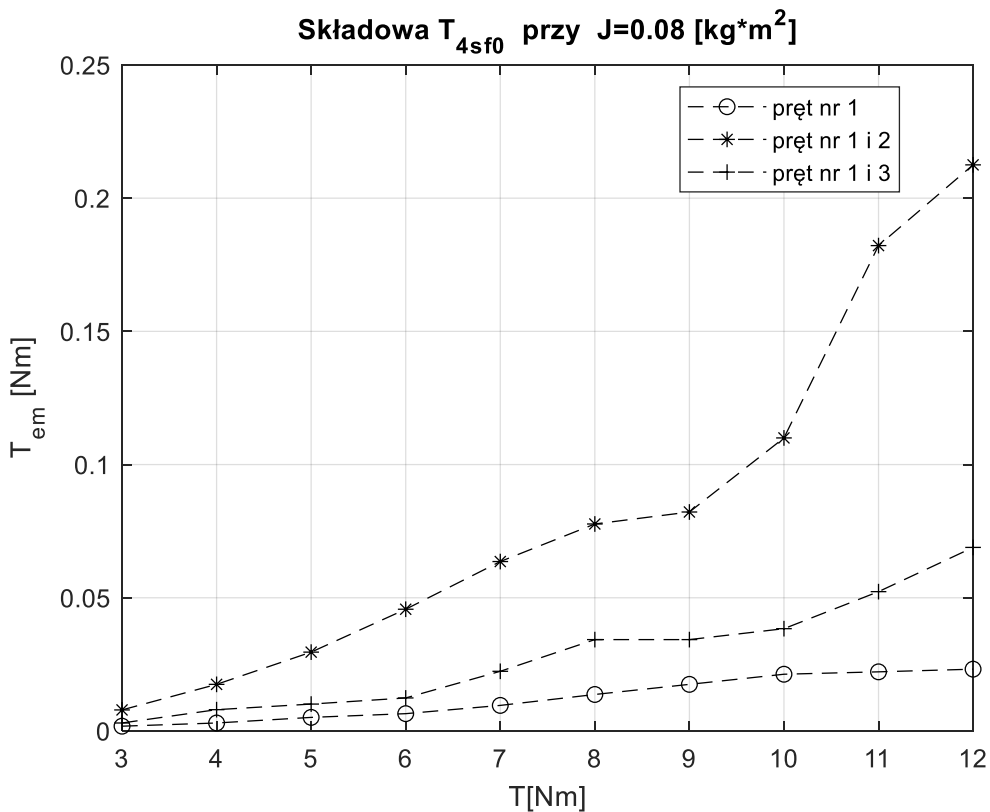
Na Rys. 2.42. do Rys. 2.44. przedstawiono dla trzech przypadków uszkodzeń klatki wirnika zmiany maksymalnych amplitud składowej stałej oraz składowych T_{2sf0} i T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.



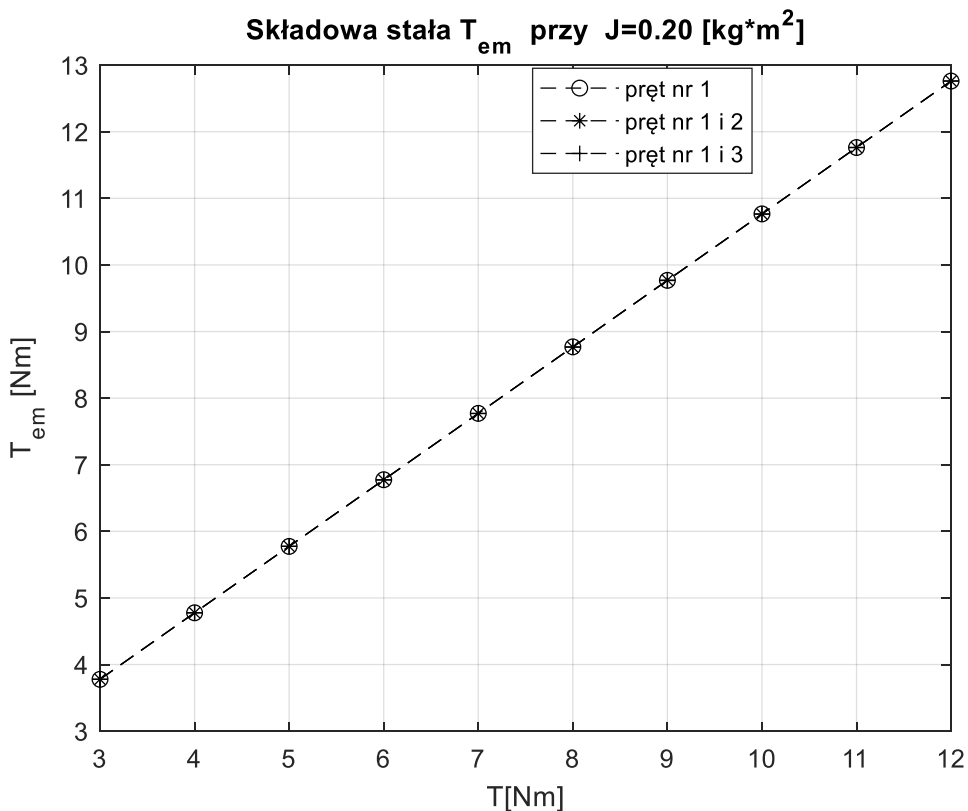
Rys. 2.39. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08$ $kg \cdot m^2$.



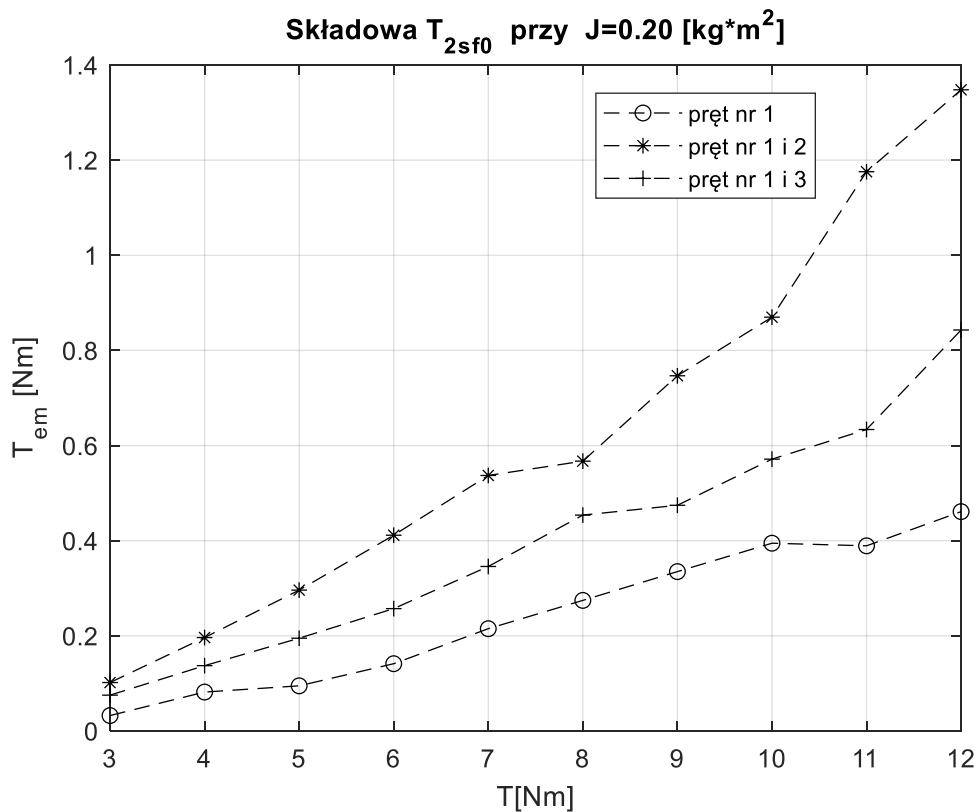
Rys. 2.40. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08$ $kg \cdot m^2$.



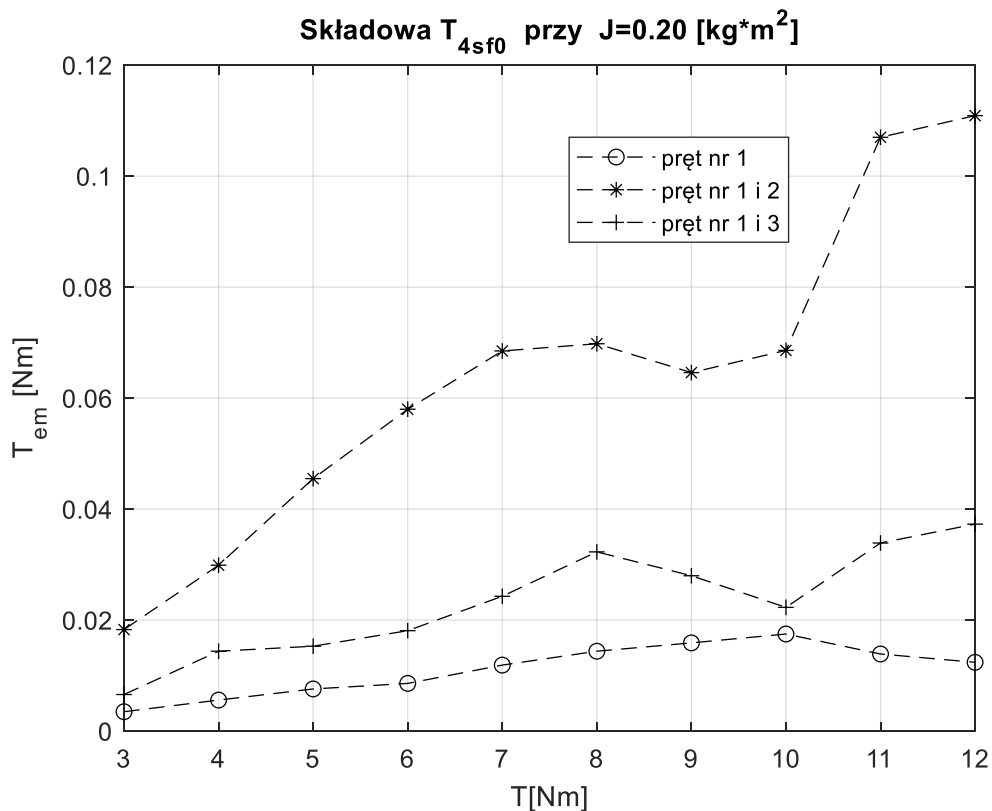
Rys. 2.41. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.



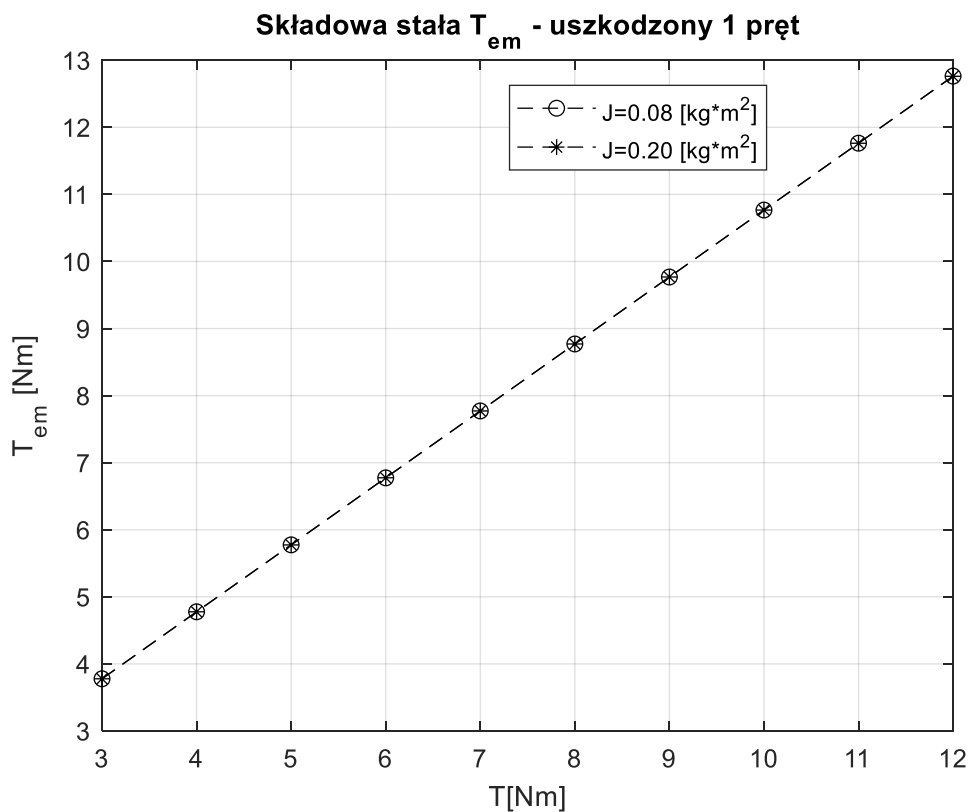
Rys. 2.42. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,20$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.



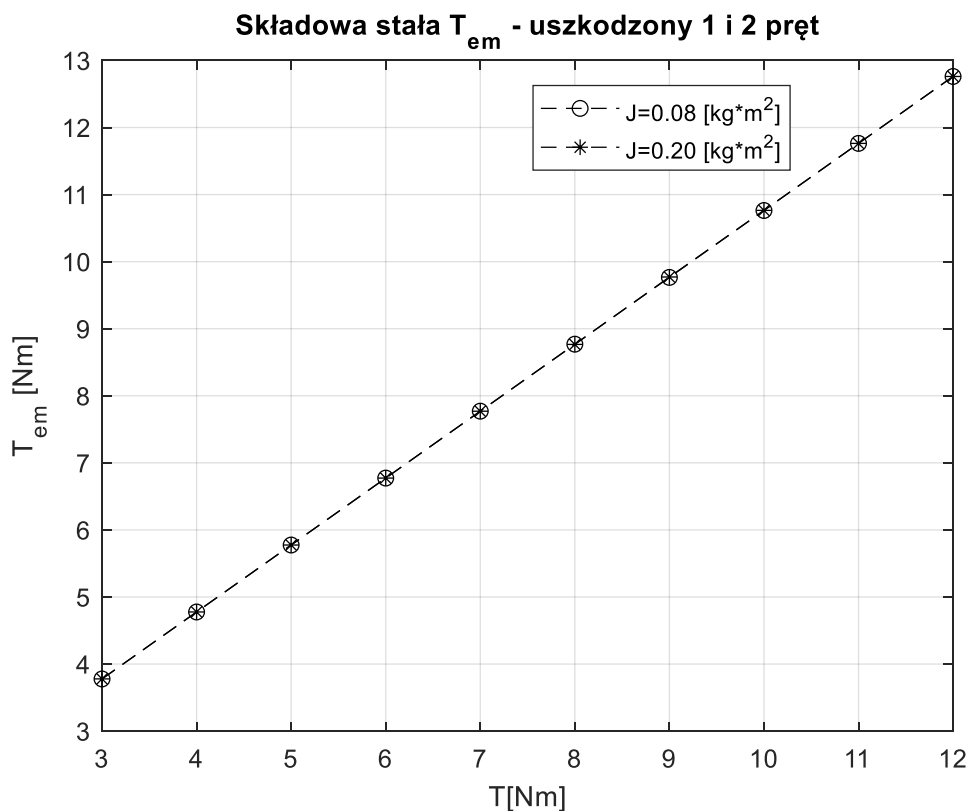
Rys. 2.43. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,20$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.



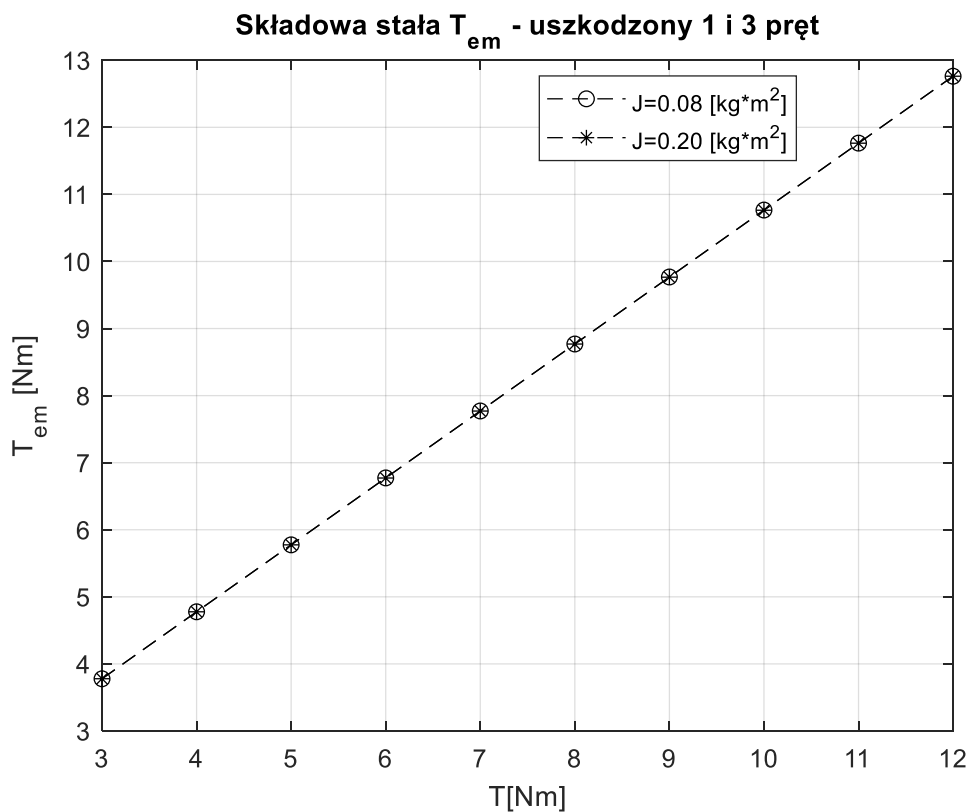
Rys. 2.44. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,20$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.



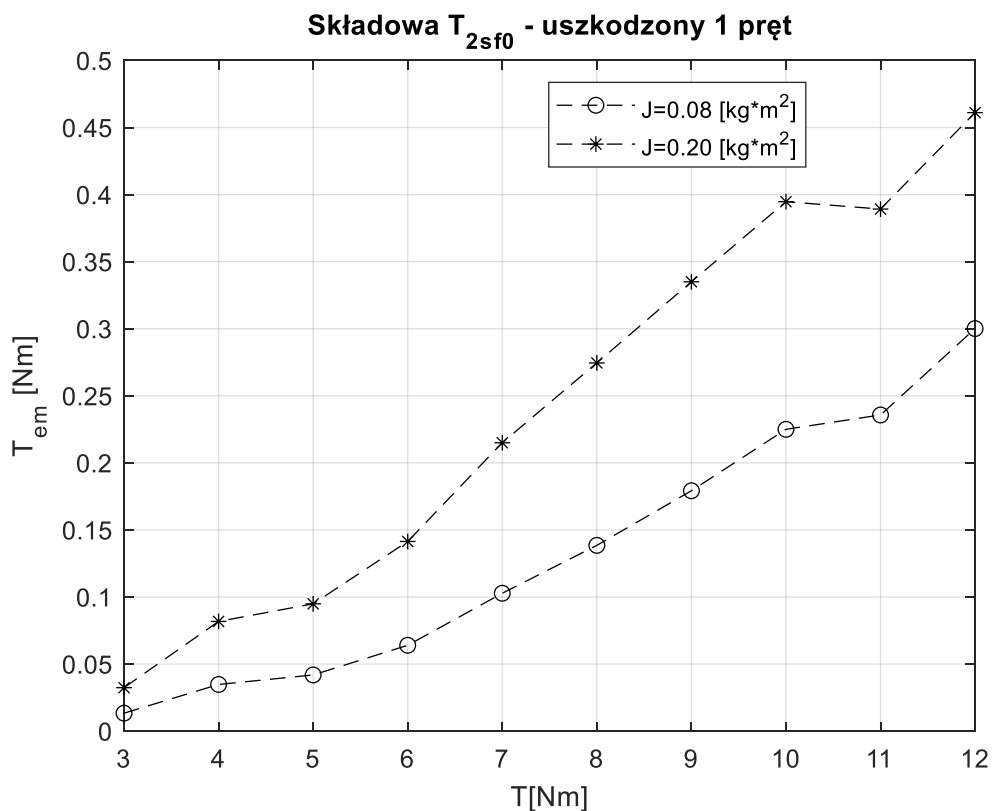
Rys. 2.45. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



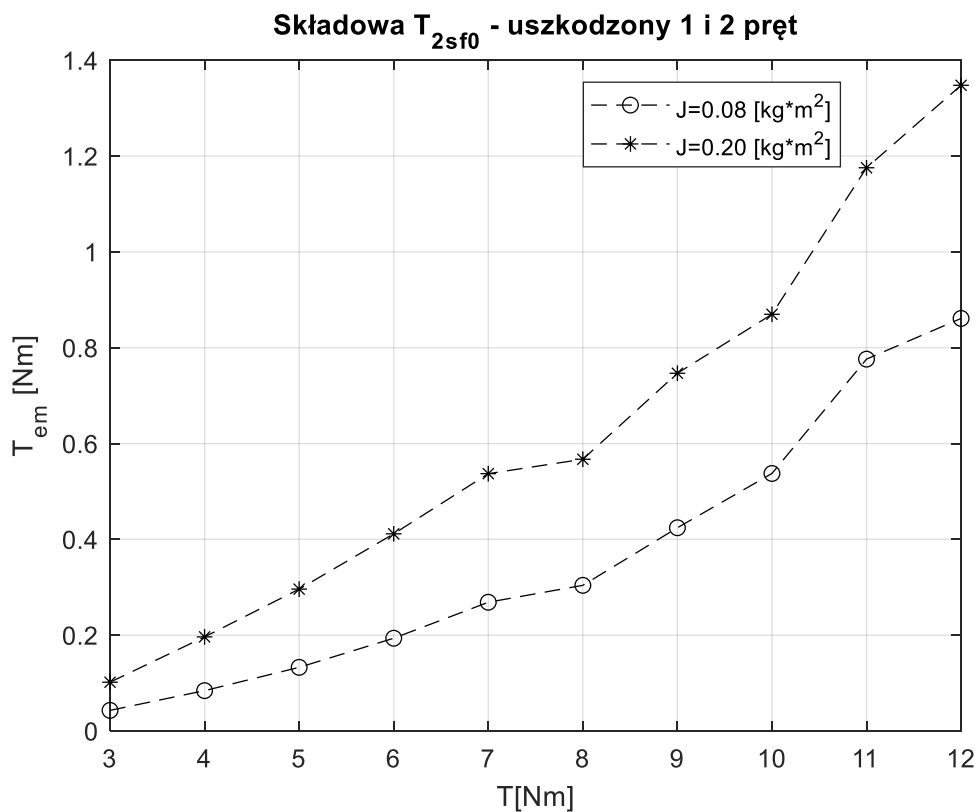
Rys. 2.46. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 2 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



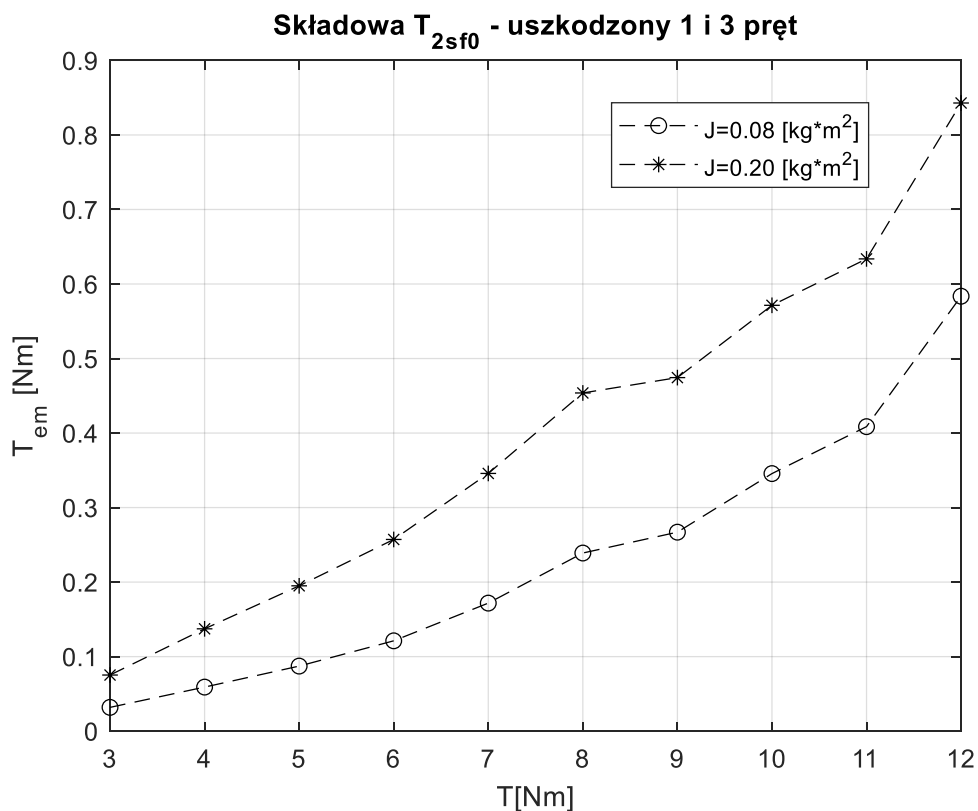
Rys. 2.47. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



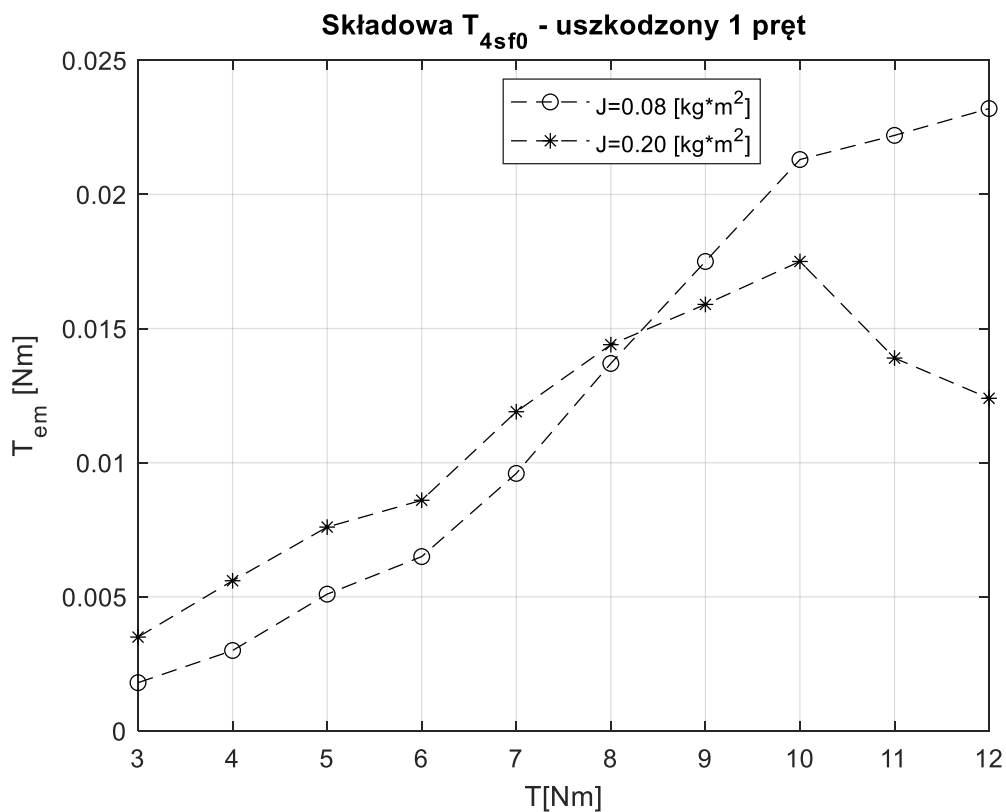
Rys. 2.48. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



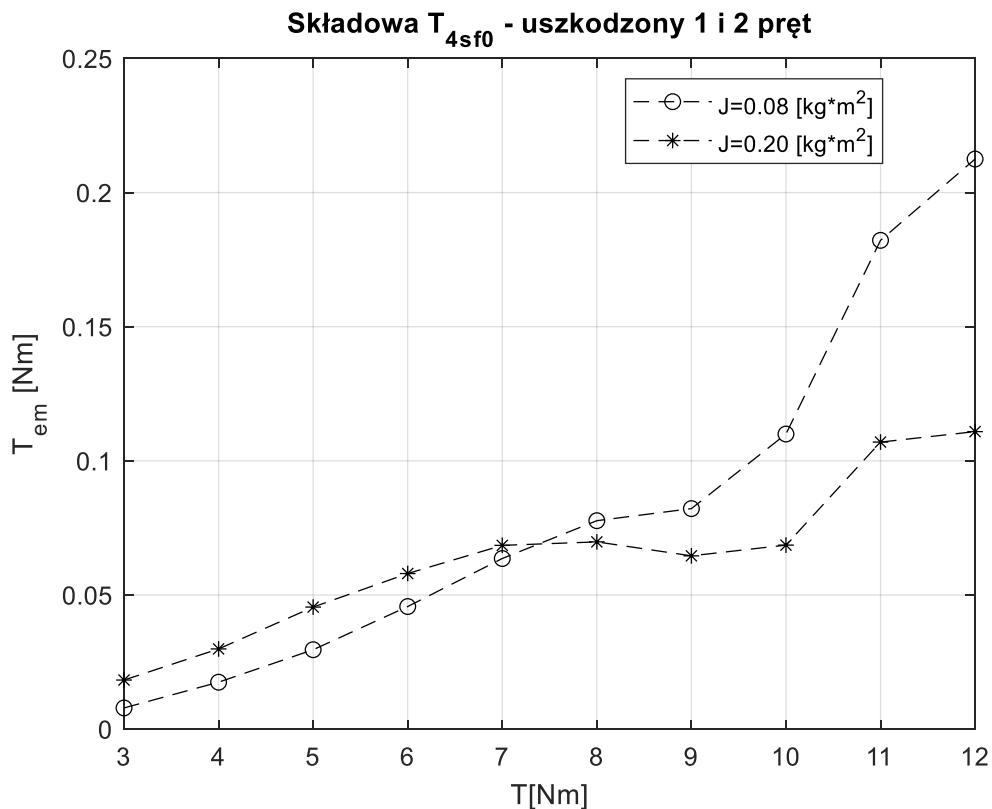
Rys. 2.49. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 2 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



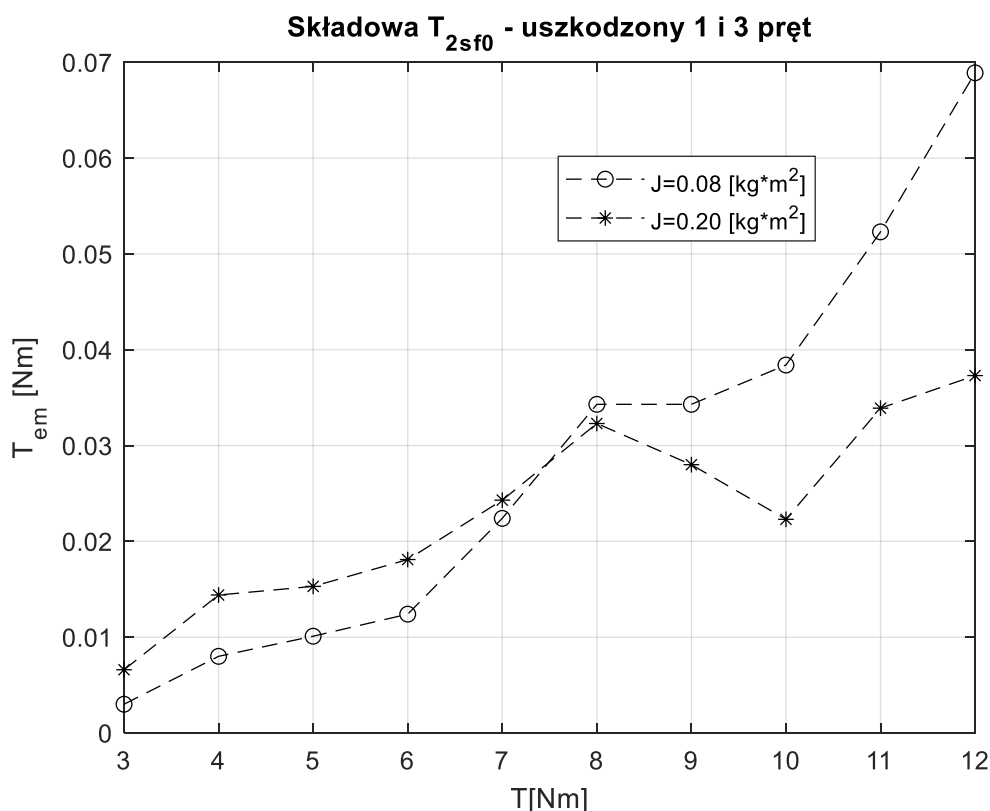
Rys. 2.50. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



Rys. 2.51. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



Rys. 2.52. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 2 prętów klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



Rys. 2.53. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.

Na Rys. 2.45. do Rys. 2.47. przedstawiono zmiany maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia odpowiednio 1 pręta, 1 i 2 pręta oraz 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika. Na Rys. 2.48. do Rys. 2.50. przedstawiono zmiany maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia odpowiednio 1 pręta, 1 i 2 pręta oraz 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika. Na Rys. 2.51. do Rys. 2.53. przedstawiono zmiany maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia odpowiednio 1 pręta, 1 i 2 pręta oraz 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.

Wyniki obliczeń zestawione w Tabeli 2.6. do Tabeli 2.8. oraz ilustracje zależności wartości zestawionych w tych tabelach dobrze obrazują możliwość rozróżniania uszkodzeń i wpływu momentu obciążenia i momentu bezwładności wirnika na symptomy diagnostyczne pozwalające rozpoznać uszkodzenie klatki wirnika, co do tej pory było słabiej rozpoznane dla opracowanego modelu monoharmonicznego.

3. MODEL POLOWY SILNIKA INDUKCYJNEGO KLATKOWEGO

3.1. Wprowadzenie

W tym rozdziale przedstawiono model polowo-obwodowy silnika indukcyjnego klatkowego. Do rozwiązania równań opisujących maszynę asynchroniczną w ujęciu przestrzennym wykorzystano pakiet obliczeń numerycznych MagNet. Ze względów praktycznych, sformułowano model dwuwymiarowy, w którym geometrię silnika odwzorowano za pomocą globalnego operatora przestrzennego, natomiast część obwodową stojana i wirnika jako schematy drabinkowe o parametrach skupionych. Oprócz obliczeń związanych z właściwymi przypadkami niesymetrii rezystancyjnej klatki, wykonano także analizę porównawczą współczynników charakteryzujących równania obwodowe na podstawie uproszczonych zależności z rozdziału drugiego względem rozwiązań polowych dla stanu biegu jałowego oraz zwarcia pomiarowego. Tego typu zestawienie parametrów miało za zadanie określenie błędu popełnianego przy prezentowanych wynikach obliczeń. Wykorzystanie modelu dwuwymiarowego niesie ze sobą konieczność poczynienia szeregu założeń wynikających z ograniczenia takiej reprezentacji geometrycznej silnika. Wśród nich należy wymienić:

- pominięcie zjawisk krańcowych tj. efekty sprzężeń wzajemnych między prętami i pierścieniami zwierającym oraz połączeniami czołowymi uzwojeń stojana,
- brak możliwości uwzględnienia przepływu prądów przez pakiet blach jarzma wirnika co ma zazwyczaj miejsce w sytuacji pęknięcia prętów odlewanych o dużym kącie ich skosu połączonych z pierścieniem pośrednim,
- przyjęcie, że jarzmo stojana i wirnika posiadają teoretycznie nieskończoną długość, tak więc jest to założenie zbieżne z uproszczoną analizą pola, gdzie brany jest pod uwagę jedynie płasko równoległy rozkład indukcji – za wytwarzanie momentu elektromagnetycznego odpowiada składowa radialna strumienia głównego,
- rdzeń stojana oraz wirnika są nieprzewodzące tzn. nie można uwzględnić strat powstałych wskutek przemagnesowania od prądów wirowych,
- zjawiska związane ze skosem żłobków wirnika minimalizujące udział momentów synchronicznych mogą być uwzględnione wyłącznie w modelu wielowarstwowym.

Wymienione liczne założenia upraszczające posiadają duże znaczenie w badaniu stanów dynamicznych i nieustalonych, lecz w przypadku rozważań nad stanem ustalonym przy małych

poślizgach posiadają zdecydowanie mniejsze znaczenie. Poza wskazanymi ograniczeniami modelu dwuwymiarowego istnieją też takie zjawiska dodatkowe, które da się uwzględnić bezpośrednio jak np. wypieranie prądu z prętów, żłobkowanie powierzchni jarzm stojana oraz wirnika lub pośrednio udział połączeń czołowych przez dodanie w schemacie obwodowym dodatkowej indukcyjności. Niemniej opisane wyżej zjawiska również stanowią mniej istotną część poruszanych zagadnień ustalonej pracy silnika.

Głównym punktem wyjścia w formułowaniu równań elektromagnetycznych maszyn prądu przemiennego są związki łączące pole elektryczne i magnetyczne. Powszechnie wspomniane zależności w literaturze są nazywane równaniami Maxwella. Dla tych równań używa się zwykle postaci różniczkowej najbardziej praktycznej z perspektywy ich analizy oraz dalszego rozwiązania. W tych równaniach pole magnetyczne jest standardowo reprezentowane potencjałem wektorowym indukcji oraz skalarnym potencjałem dla pola elektrycznego. Prócz tego, przy zasilaniu silnika napięciem o częstotliwości sieciowej można wprowadzić dodatkowe uproszczenie polegające na pominięciu prądów przesunięcia. Z założeń początkowych wynika, że w modelu dwuwymiarowym wszystkie prądy mają tylko składową poosiową. Równania pola dwuwymiarowego zwykle są rozwiązywane różnymi metodami numerycznymi w zależności od kształtu geometrycznego obszaru rozważanego zagadnienia. Do takich metod najczęściej zalicza się algorytmy różnicowe, brzegowe i elementów skończonych. Wspólną cechą wymienionych procedur jest poszukiwanie takiej funkcji opisującej rozkład pola, która spełnia warunek liniowej niezależności. Niemniej najczęściej w obliczeniach niesymetrii maszyn prądu przemiennego wykorzystuje się metodę elementów skończonych. Generalnie pierwszym krokiem modelowania polowego będzie zawsze dyskretyzacja – podział rozwiązywanego obszaru na figury geometryczne o takich samych kształtach, przy czym zazwyczaj są trójkąty ostrokątne. W drugim etapie zadaje się warunki brzegowe na krańcach rozpatrywanego obszaru. Należy jednocześnie zwrócić uwagę, że o właściwościach maszyny decyduje w głównej mierze wartość indukcji w szczelinie powietrznej oraz strefie przy-szczelinowej inaczej określanej jako strefa żłobkowo-zębowa. Jeżeli w modelu jest uwzględniane zjawisko nasycenia magnetycznego wówczas obszar objęty nieregularnymi kształtami zębów żłobków charakteryzuje się największym zróżnicowaniem rozkładu pola. Oznacza to, że koncentracja elementów skończonych powinna być dostosowana do rozpatrywanego zagadnienia, aby uzyskać rozwiązanie z dostatecznie dobrym przybliżeniem i możliwie najkrótszym czasie. Tak więc zazwyczaj stosowana jest siatka elementów skończonych mająca nierównomierne zagęszczenie według ogólnej zasady

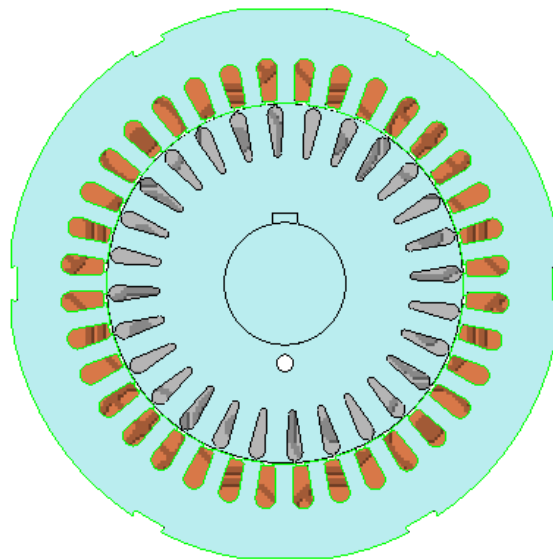
zagęszczenia węzłów siatki w tych miejscach, gdzie występuje zmiana materiału tj. na granicy ośrodków. Równie ważne znaczenie ma sposób uwzględnienia ruchu obrotowego wirnika, ponieważ w równaniach łączących pole magnetyczne z elektrycznym przez wymuszenie zewnętrzne pojawia nowy człon w opisie gęstości prądu.

Tego typu podejście wymaga zachowania stałej struktury rozwiązywanego układu równań polowych pomimo formalnego ruchu wirnika. Dlatego też, stosowane są dwa odrębne układy współrzędnych, pierwszy związany z stojanem oraz drugi za pomocą, którego zdefiniowane są komponenty składowe obwodu klatki. Standardowo takie ujęcie problemu ruchu obrotowego powoduje, że obracana jest siatka wirnika względem siatki stojana, a to prowadzi jedynie do zmiany funkcji elementów skończonych na brzegach ośrodków ruchomego oraz stałego. W takim przypadku można udowodnić, że wspomniane wyżej układy współrzędnych są względem siebie nieruchome i modyfikacji ulega tylko macierz kształtu (różniczkowe operatory przestrzenne). Poza samą metodą ustalenia sposobu formułowania równań ruchu obrotowego równoległe dla każdej dyskretnej chwili czasu rozwiązuje się równanie mechaniczne na podstawie wyznaczonych wielkości polowych. Warunki rozwiązania równań modelu polowego zestawiono w Tabeli 3.1.

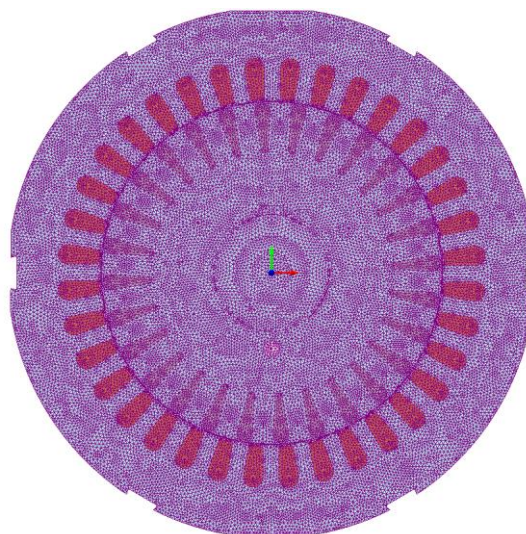
Tabela 3.1. Warunki rozwiązania modelu polowego.

Ustawienia główne	
Czas rozwiązania	15s
Krok	0,0005s
Maksymalna odległość między węzłami elementów skończonych	0,1mm
Liczba iteracji w pętli N-R	20
Warunki graniczne	
Prędkość początkowa	1500obr/min
Położenie startowe wirnika	0rad
Dane materiałowe - względna przewodność magnetyczna	
Jarzmo stojana	10^4
Jarzmo wirnika	10^4
Uzwojenia stojana	1,1
Pręty wirnika	1,1

Podobnie jak ma to miejsce w sytuacji modelu obwodowego, równanie ruchu sprowadza się do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Pakiet numeryczny MagNet poszukuje rozwiązania powyższego układu korzystając z procedury całkowania Rungego-Kutty czwartego rzędu. Dzięki implementacji metody obrotów siatki części ruchomej modelu minimalizuje się ewentualne błędy w postaci generowania dodatkowych momentów typu synchronicznego (metoda regeneracyjna polegająca na formułowaniu nowej siatki elementów skończonych dla każdego kroku obliczeń) mających pochodzenie numeryczne i niezwiązanych z rzeczywiście występującymi w maszynie momentami elektromagnetycznymi wyższych rzędów. Na Rys. 3.1. przedstawiono model 2D silnika, dla którego wykonano obliczenia oraz siatkę MES dla całego przekroju wirnika (Rys. 3.2.).

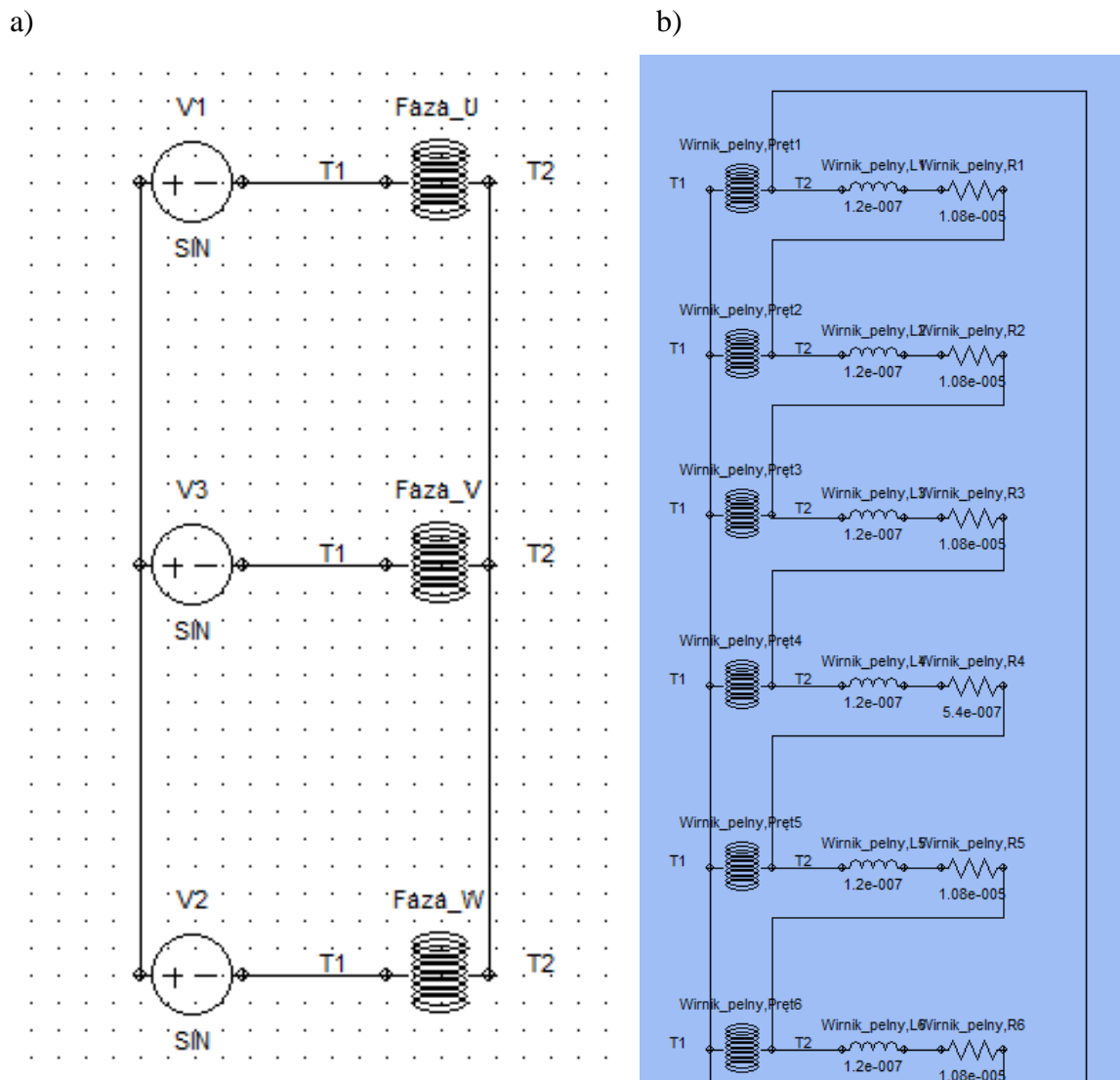


Rys. 3.1. Widok pełnego model 2D badanego silnika.



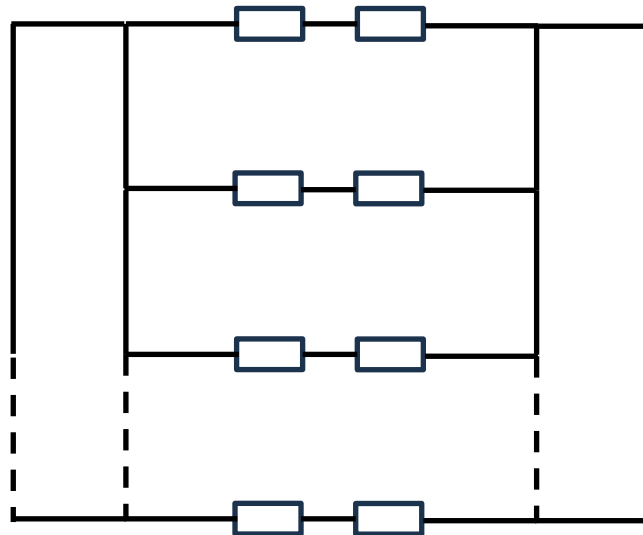
Rys. 3.2. Siatka FEM dla całego modelu 2D badanego silnika.

Model polowo-obwodowy został zbudowany dla silnika indukcyjnego małej mocy Sg 112 M4 z dwiema parami biegunów. Silnik posiada jednowarstwowe uzwojenie o średnicowym skoku uzwojenia. Geometria jarzma stojana obejmowała rzeczywisty kształt rdzenia magnetycznego z punktami montażowymi korpusu maszyny. Blachy nie mają kształtu kołowego, jak zakłada się w typowych modelach MES. Każda szczelina jarzma stojana została podzielona pomiędzy obszary wypełnione uzwojonymi drutami miedzianymi oraz powierzchnię pokrytą klinem. Pręty klatki wirnika wykonano jako odlew z czystego aluminium. W projekcie geometrycznym wirnika uwzględniono również dodatkowe elementy, takie jak: wypełniony powietrzem kanał wentylacyjny oraz wał wirnika wykonany ze stali maszynowej. Rdzenie stojana i wirnika zostały wykonane z materiału stalowego typu MU1000 o charakterystyce liniowej. Na Rys.3.3. przedstawiono schematy obwodów stojana i wirnika odwzorowane w programie MagNet.



Rys. 3.3. Schemat obwodów: a) stojan, b) wirnika (część obwodu).

Elementy uzwojenia, których strumienie upływu są zamykane przez powietrze, są definiowane jako pasywne jednostki dwuzaciskowe RL. Na Rys.3.4. przedstawiono schematy ideowy dla pełnego odwzorowania obwodu wirnika.



Rys. 3.4. Pełny schemat ideowy obwodu wirnika.

Przyjęty model silnika nie uwzględnia pochylenia szczelin wirnika. Na potrzeby obliczeń przyjęto, że maksymalna odległość między punktami siatki elementów skończonych wynosi 0,1 mm. Czas symulacji wynosił 10 s przy kroku całkowania 0,5 ms.

Na podstawie opisanego powyżej modelu wyznaczane są prądy stojana, prądy wirnika, prądy w segmentach pierścieni połączeniowych, przebiegi napięć na uzwojeniach stojana oraz moment elektromagnetyczny.

3.2. Weryfikacja modelu i uzupełnienie schematu obwodowego

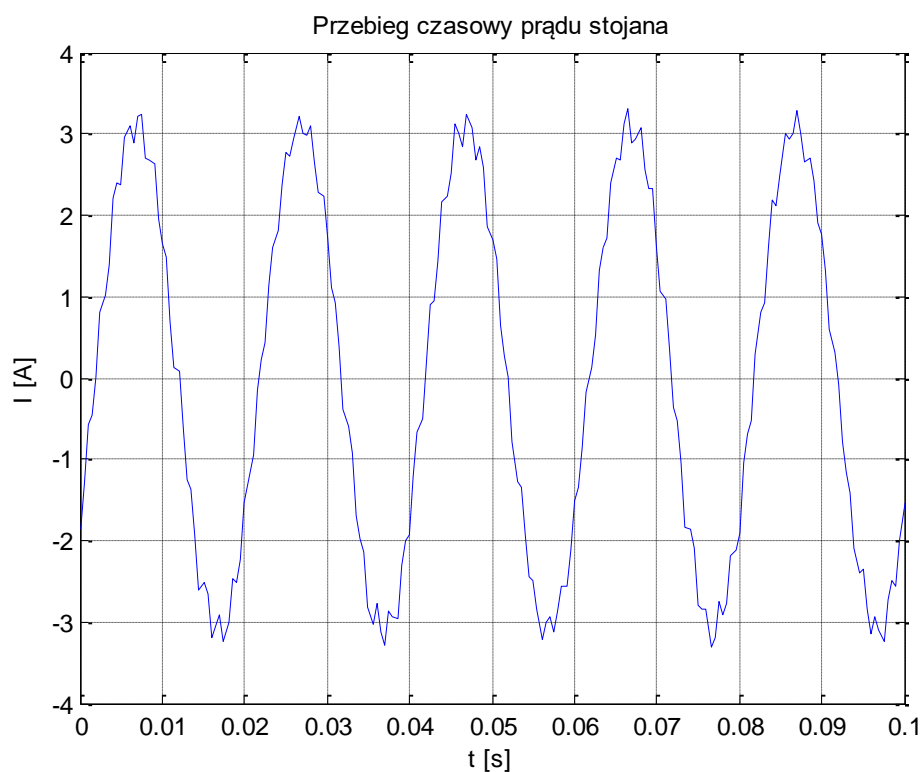
W celu uzupełnienia i sprawdzenia poprawności modelu, a szczególnie części odpowiadającej schematowi obwodowemu, przeprowadzono badania pomiarowo-numeryczne zmierzające do wyznaczenia reaktancji rozproszenia uzwojeń stojana i wirnika. Kolejno podjęto próbę określenia indukcyjności własnej pasma fazowego obwodu stojana, aby ostatecznie według typowych metod jak test biegu jałowego oraz zwarcia zweryfikować utworzony dyskretny model numeryczny silnika. W tym celu posłużono się metodami zmniejszonego napięcia przemiennego i impulsu napięcia stałego. Pierwsza z nich mająca za zadanie zidentyfikowanie indukcyjności rozproszenia uzwojeń stojana polega na zasilaniu obwodu stojana obniżonym napięciem przemiennym przy wyjętym wirniku i zamontowanych

tarczach łożyskowych tak, aby nie przekroczyć znamionowej wartości prądu twornika. W tym stanie impedancja uzwojeń stojana stanowi sumę mierzalnej rezystancji pojedynczego pasma fazowego, reaktancji rozproszenia oraz reaktancji otworu, którą można obliczyć znając wymiary geometryczne jarzma i liczbę zwojów. Ostatecznie poszukiwana reaktancja (indukcyjność) zwarcia będzie wynikiem tych działań.

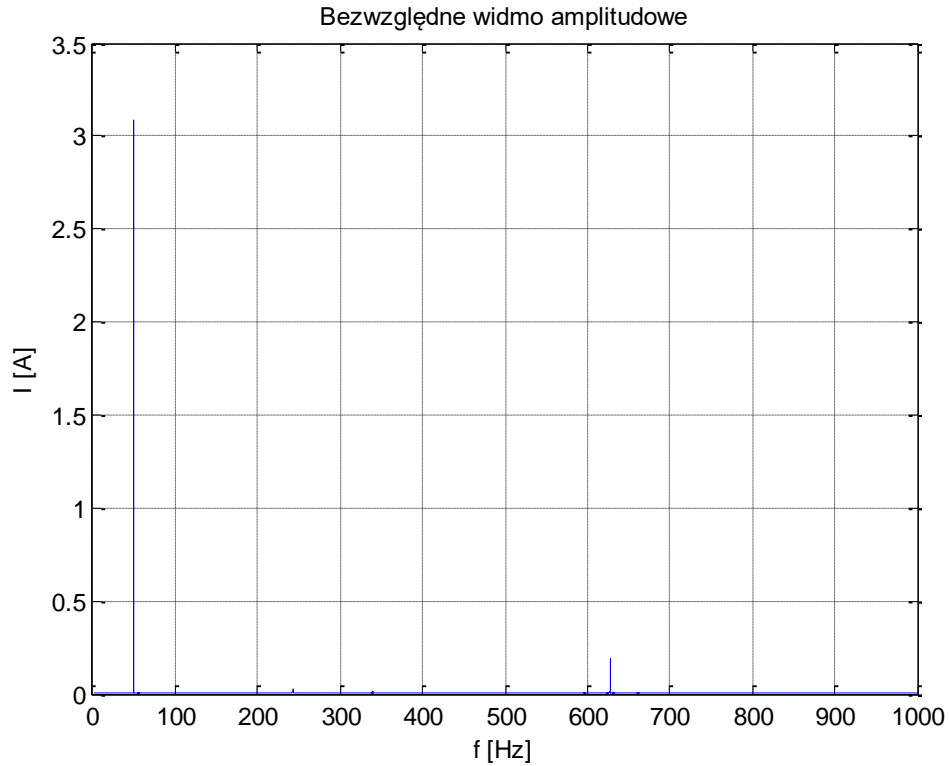
3.3. Zakres analiz numerycznych dla modelu połowego

Dla silnika indukcyjnego klatkowego Sg 112 M4 zamodelowano w programie MagNet trzy przypadki niesymetrii wirnika. Przeprowadzono obliczenia dla uszkodzenia 1 pręta klatki, dla uszkodzonego 1 i 2 pręta klatki oraz uszkodzonego 1 i 3 pręta klatki wirnika. Założono liniowy obwód magnetyczny, założono moment obciążenia 8 Nm. Zbadano 4 przypadki zmiany momentu bezwładności 2J, 3J, 4J i 5J. Uzyskano łącznie 12 przypadków, dla których wykonano obliczenia.

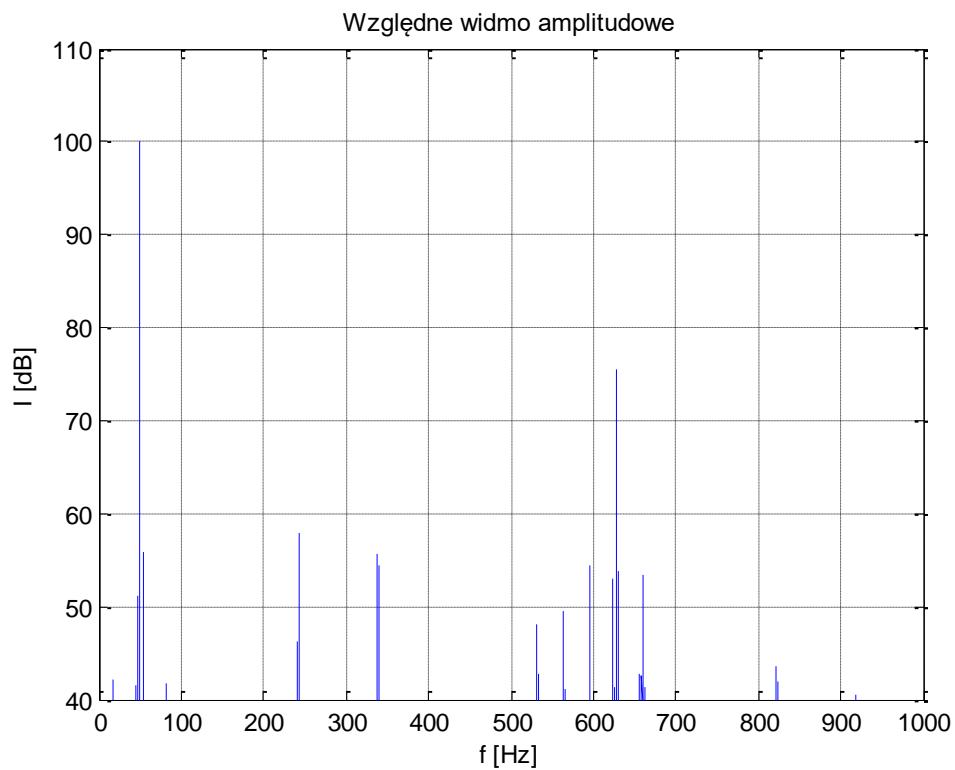
Na Rys. 3.5. przedstawiono przykład przebiegu prądu stojana uzyskanego z obliczeń dla modelu połowo-obwodowego i uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, przy momencie bezwładności wirnika 2J oraz momencie obciążenia 8Nm. Na Rys. 3.6. przedstawiono widmo bezwzględne prądu stojana dla tego przypadku uszkodzenia i warunków obciążenia. Na Rys. 3.7. przedstawiono natomiast widmo względne wyskalowane w dB.



Rys. 3.5. Przebieg prądu stojana dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla 2J, 8Nm dla obliczeń połowo-obwodowych.



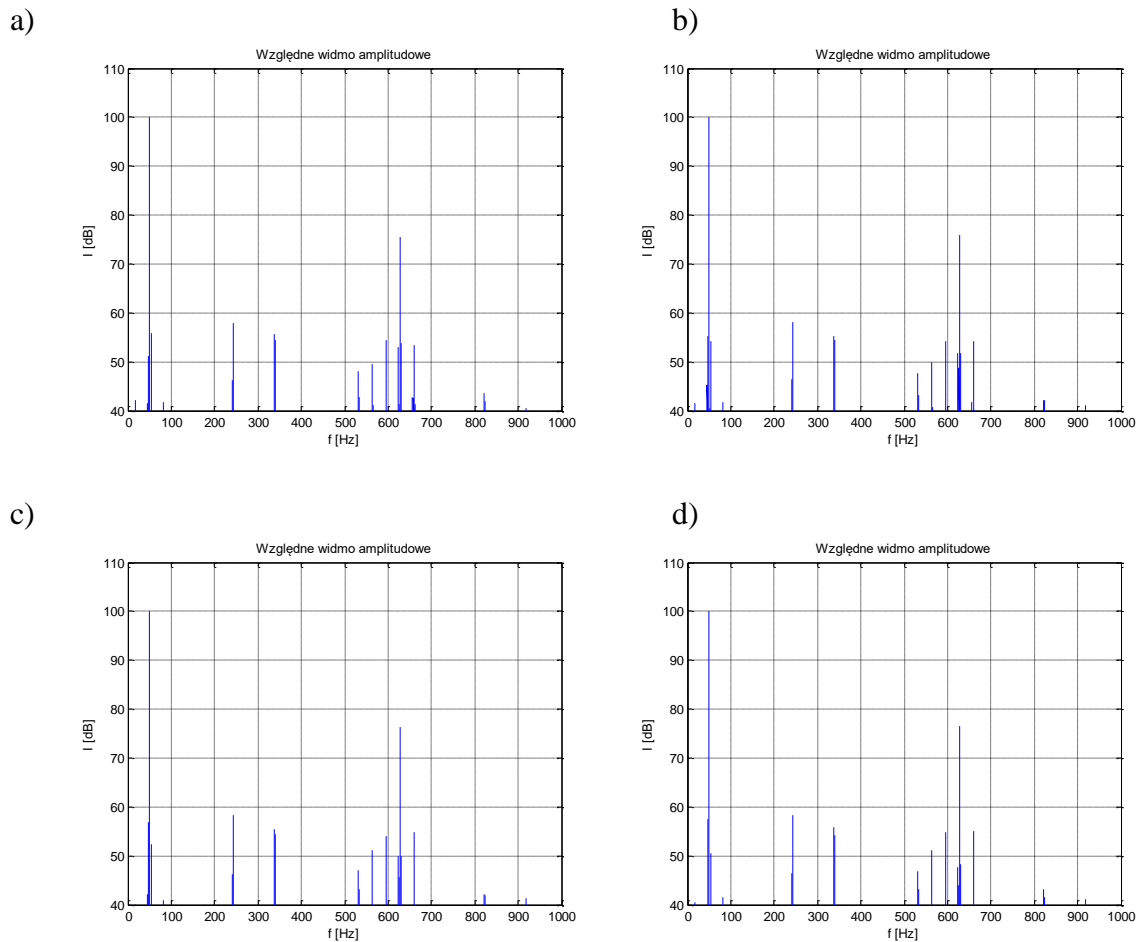
Rys. 3.6. Widmo bezwzględne prądu stojana dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla 2J, 8Nm dla obliczeń połowo-obwodowych.



Rys. 3.7. Widmo względne prądu stojana dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla 2J, 8Nm dla obliczeń połowo-obwodowych.

Widma bezwzględne dla wszystkich 12 przypadków, dla których wykonano obliczenia zestawiono na Rys. 3.8. do Rys. 3.10.

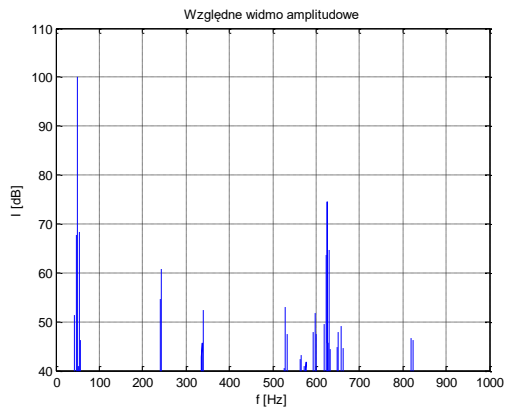
Na Rys. 3.8. przedstawiono widma względne prądu stojana uzyskane z modelu polowo-obwodowego dla uszkodzonego 1 pręta klatki wirnika, momentu obciążenia 8Nm i momentów bezwładności zmieniających się od 2J do 5J.



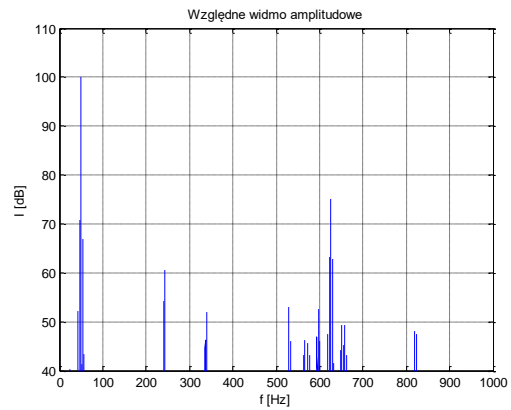
Rys. 3.8. Widma względne prądu stojana uzyskane z modelu polowo-obwodowego dla uszkodzonego 1 pręta klatki wirnika, momentu obciążenia 8Nm i momentu bezwładności: a) 2J; b) 3J; c) 4J; d) 5J.

Na Rys. 3.9. Przedstawiono widma względne prądu stojana uzyskane z modelu polowo-obwodowego dla uszkodzonego 1 i 2 prętów klatki wirnika, momentu obciążenia 8Nm i momentów bezwładności zmieniających się od 2J do 5J.

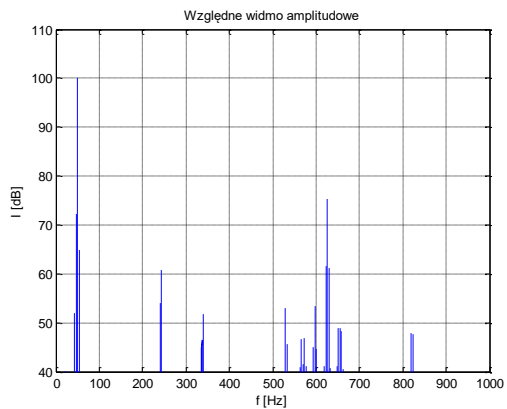
a)



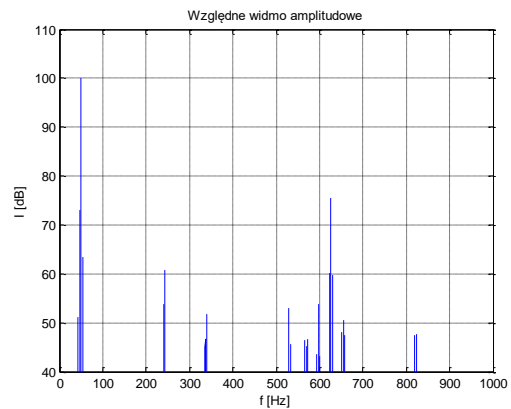
b)



c)



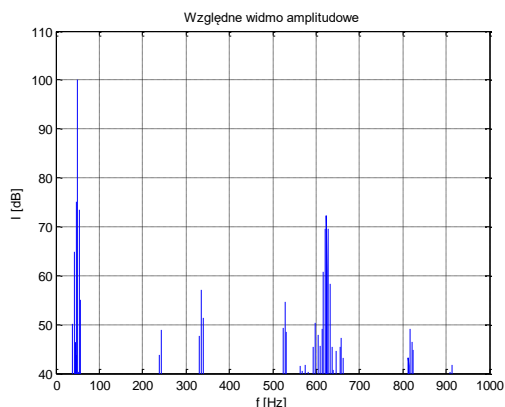
d)



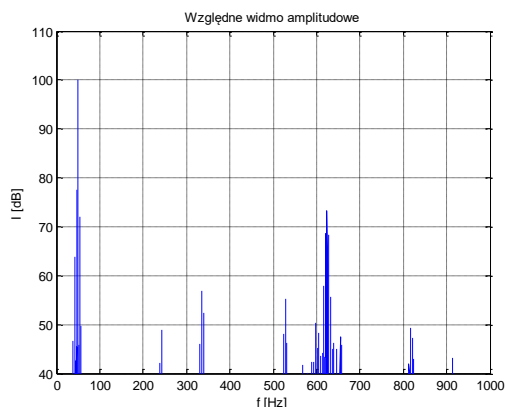
Rys. 3.9. Widma względne prądu stojana uzyskane z modelu polowo-obwodowego dla uszkodzonego 1 i 2 pręta klatki wirnika, momentu obciążenia 8Nm i momentu bezwładności: a) 2J; b) 3J; c) 4J; d) 5J.

Na Rys. 3.10. Przedstawiono widma względne prądu stojana uzyskane z modelu polowo-obwodowego dla uszkodzonego 1 i 3 pręta klatki wirnika, momentu obciążenia 8Nm i momentów bezwładności zmieniających się od 2J do 5J.

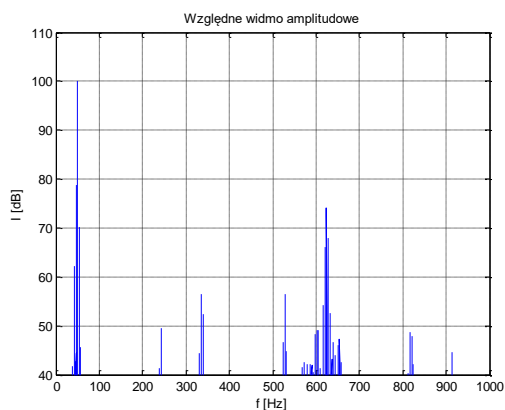
a)



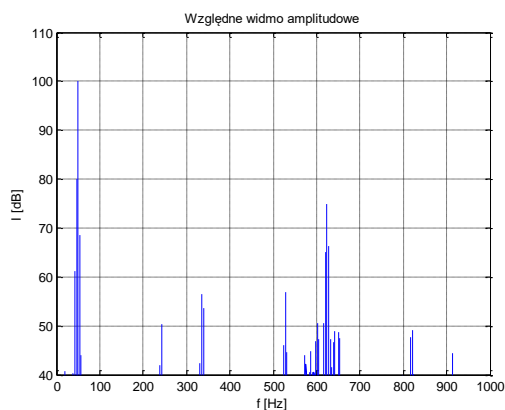
b)



c)



d)



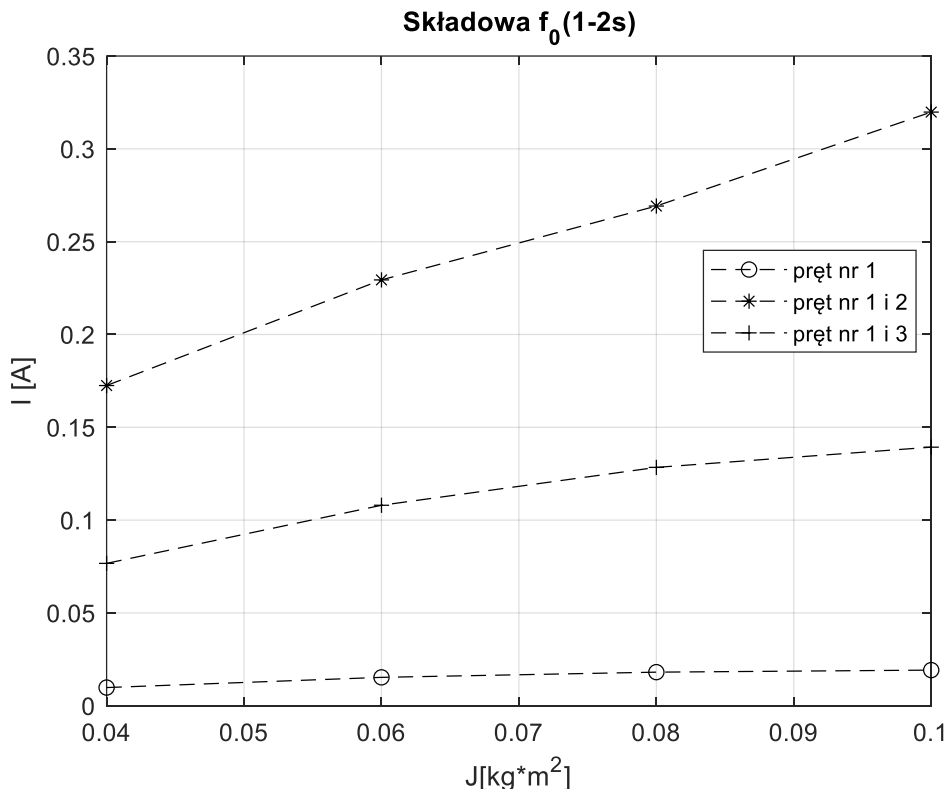
Rys. 3.10. Widma względne prądu stojana uzyskane z modelu polowo-obwodowego dla uszkodzonego 1 i 3 pręta klatki wirnika, momentu obciążenia 8Nm i momentu bezwładności: a) 2J; b) 3J; c) 4J; d) 5J.

W Tabeli 3.2. zestawiono maksymalne amplitud składowych widm prądów stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń dla podstawowej harmonicznej prądu f_0 oraz składowych poślizgowych $f_0(1-2s)$, $f_0(1+2s)$, $f_0(1-4s)$, oraz $f_0(1+4s)$ dla różnych momentów bezwładności dla których wykonano obliczenia. Analizy oparto na wynikach obliczeń numerycznych dla modelu polowo-obwodowego.

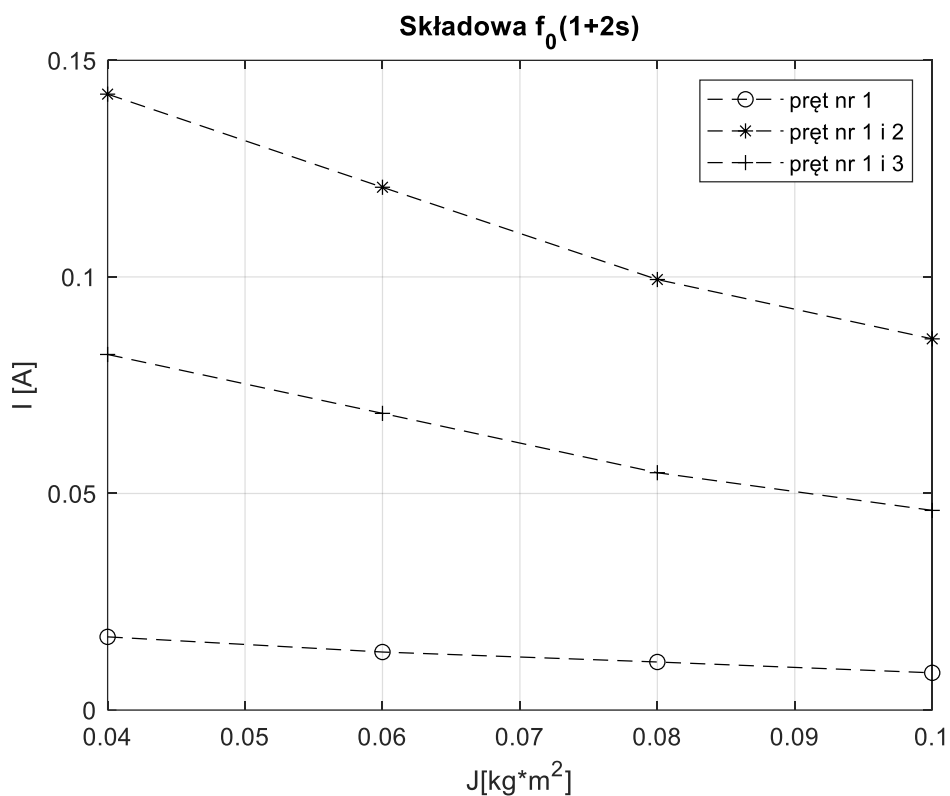
Na podstawie danych zestawionych w Tabeli 3.2. na Rys. 3.11. do Rys. 3.14. przedstawiono dla trzech przypadków uszkodzeń dla składowych poślizgowych $f_0(1-2s)$, $f_0(1+2s)$, $f_0(1-4s)$, oraz $f_0(1+4s)$ jak zmieniają się maksymalne amplitud składowych widm prądów stojana w zależności od momentów bezwładności wirnika. Zbadano wpływ momentu bezwładności wirnika od 2J do 5J. Obliczenia wykonano dla momentu obciążenia 8Nm.

Tabela 3.2. Zestawienie amplitud składowych widm prądów stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń, obliczenia polowe – wpływ momentu bezwładności.

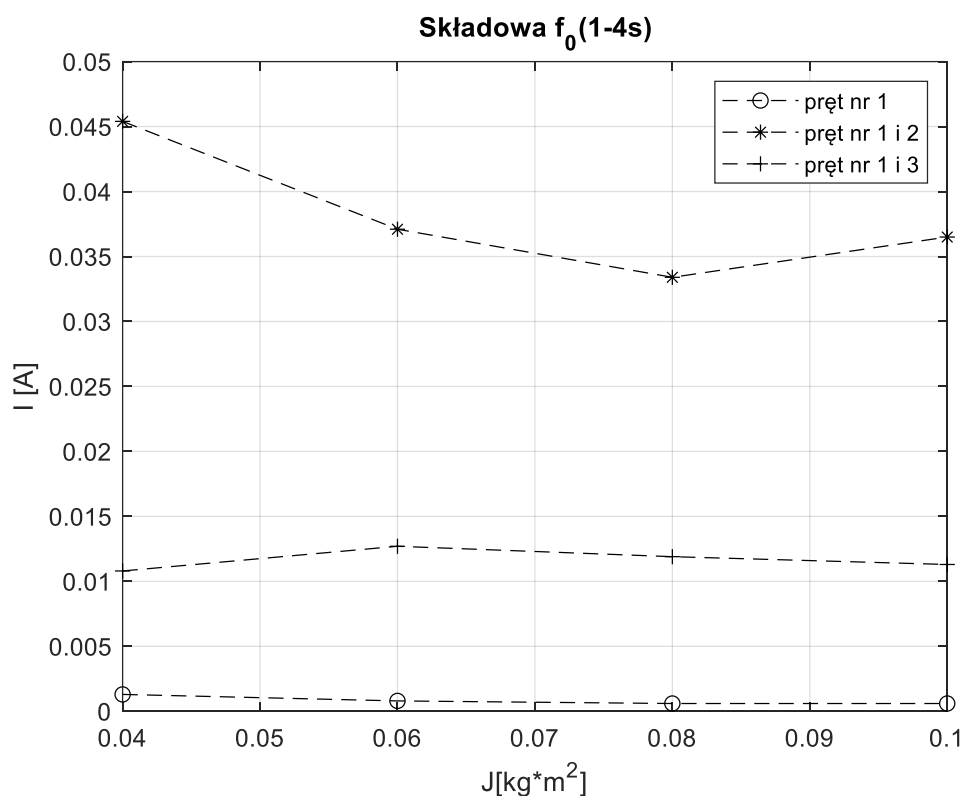
	$J[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ $I[\text{A}]$	0,04	0,06	0,08	0,10
T=8 [Nm] uszkodzony 1 pręt	f_0	3,0886	3,0915	3,0930	3,0950
	$f_0(1-2s)$	0,0098	0,0153	0,0181	0,0192
	$f_0(1+2s)$	0,0169	0,0134	0,0111	0,0086
	$f_0(1-4s)$	0,0013	0,0008	0,0006	0,0006
	$f_0(1+4s)$	0,0024	0,0008	0,0004	0,0003
	$J[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ $I[\text{A}]$	0,04	0,06	0,08	0,10
T=8 [Nm] uszkodzony 1 i 2 pręt	f_0	3,2121	3,2093	3,2116	3,2256
	$f_0(1-2s)$	0,1725	0,2294	0,2692	0,3198
	$f_0(1+2s)$	0,1422	0,1207	0,0994	0,0857
	$f_0(1-4s)$	0,0454	0,0371	0,0334	0,0365
	$f_0(1+4s)$	0,0147	0,0072	0,0049	0,0052
	$J[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ $I[\text{A}]$	0,04	0,06	0,08	0,10
T=8 [Nm] uszkodzony 1 i 3 pręt	f_0	3,1391	3,1394	3,1396	3,1398
	$f_0(1-2s)$	0,0767	0,1080	0,1284	0,1393
	$f_0(1+2s)$	0,0821	0,0685	0,0548	0,0461
	$f_0(1-4s)$	0,0108	0,0127	0,0119	0,0113
	$f_0(1+4s)$	0,0063	0,0046	0,0016	0,0015



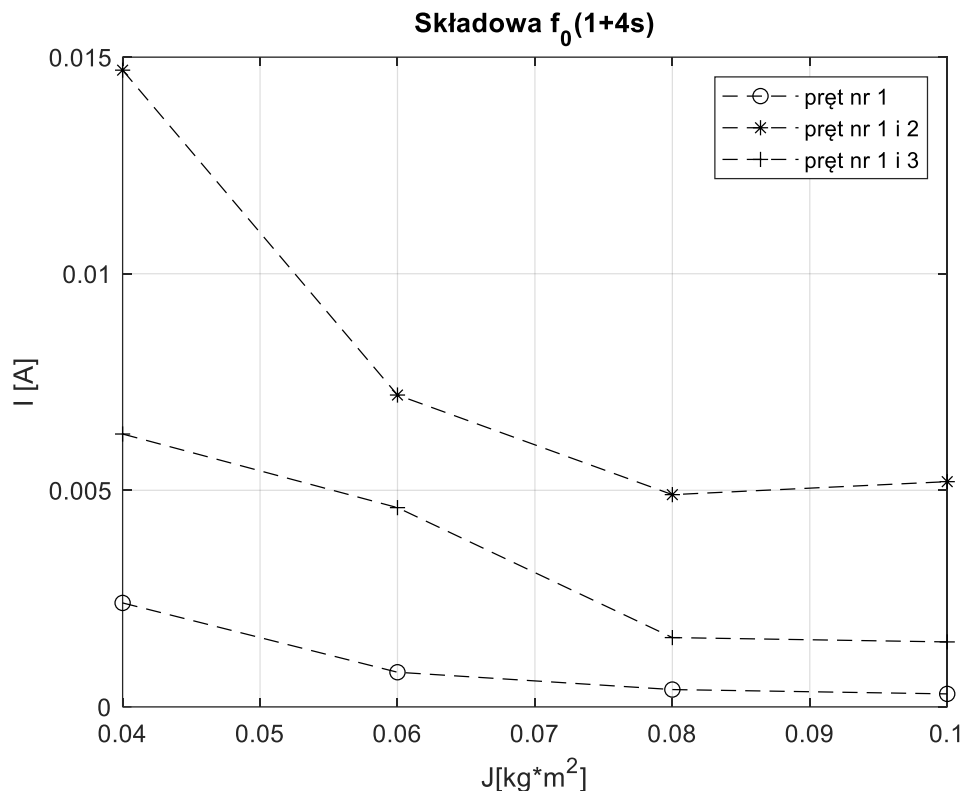
Rys. 3.11. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika dla obliczeń polowych.



Rys. 3.12. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika dla obliczeń połowych.



Rys. 3.13. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika dla obliczeń połowych.

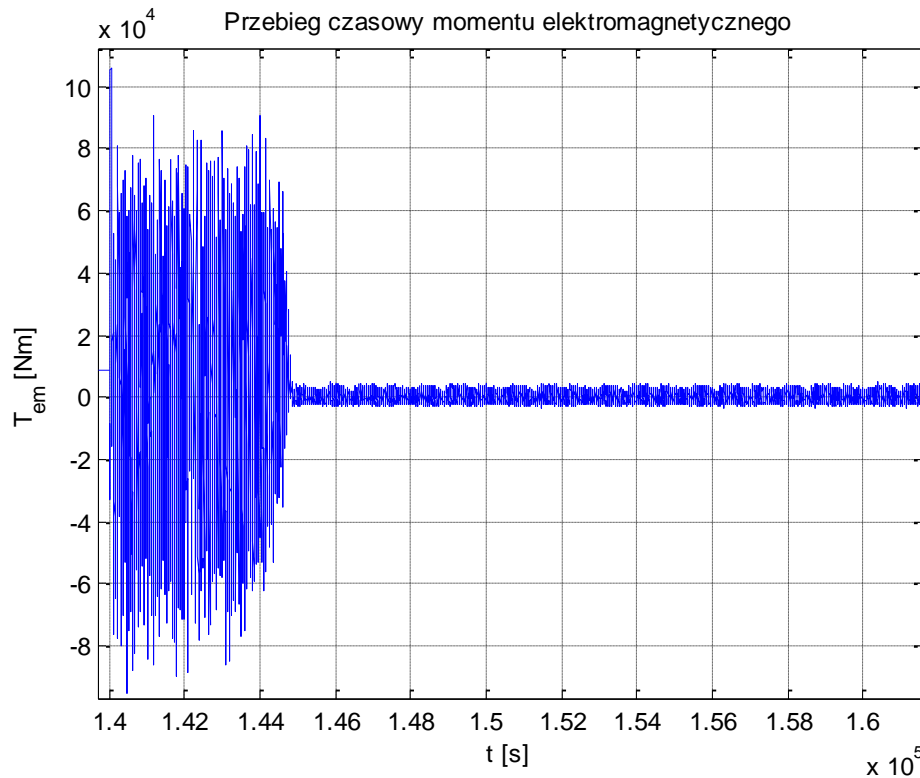


Rys. 3.14. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika dla obliczeń połowych.

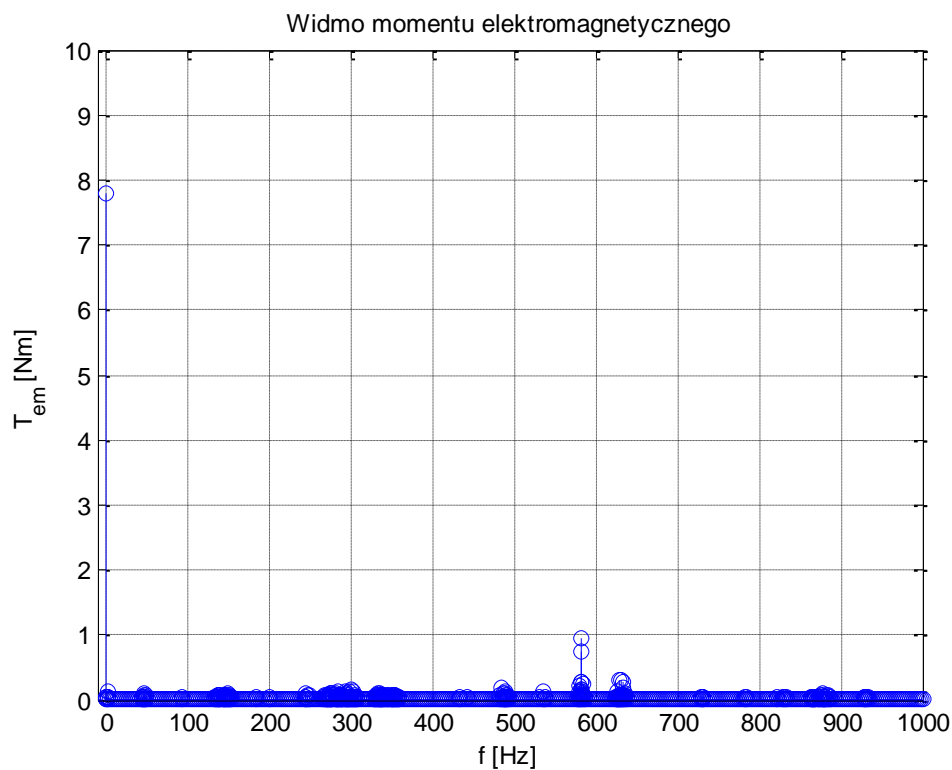
Wszystkie obliczenia dla modelu połowo-obwodowego wykonano tylko dla momentu obciążenia 8,0 Nm. Dla obliczeń numerycznych przeprowadzonych dla modelu monoharmonicznego z pełnym odwzorowaniem klatki, całkowitego numerycznie zestawiono wyniki dla różnych momentów obciążenia (Tabela 2.7.). Podobnego zestawienia nie uzyskano dla modelu połowo-obwodowego.

Przeanalizowano widm momentu elektromagnetycznego dla analizowanych przypadków uszkodzeń. Niestety przebiegi momentów uzyskanych z modelu połowego zawierają zbyt wiele składowych, których pochodzenie i merytoryczne uzasadnienie występowania określonych składowych widma jest wątpliwe. Z tego względu nie zamieszczano zestawienia widm momentu elektromagnetycznego dla analizowanych przypadków uszkodzeń.

Na Rys. 3.15. przedstawiono przebieg momentu elektromagnetycznego dla badanego silnika uzyskany z modelu połowo-obwodowego dla uszkodzonego 1 pręta klatki wirnika, dla liniowego obwodu magnetycznego przy zadanym momencie bezwładności $J=0.04 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ i zadanym momencie mechanicznym 8Nm. Na Rys. 3.16. dla przebiegu z Rys. 3.15. przedstawiono widmo względne momentu elektromagnetycznego dla tego przypadku.



Rys. 3.15. Przebieg momentu elektromagnetycznego dla badanego silnika uzyskany z modelu polowo-obwodowego dla uszkodzonego 1 pręta klatki wirnika, liniowy obwód magnetyczny, zadany moment bezwładności $J=0.04 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, zadany moment mechaniczny 8Nm .



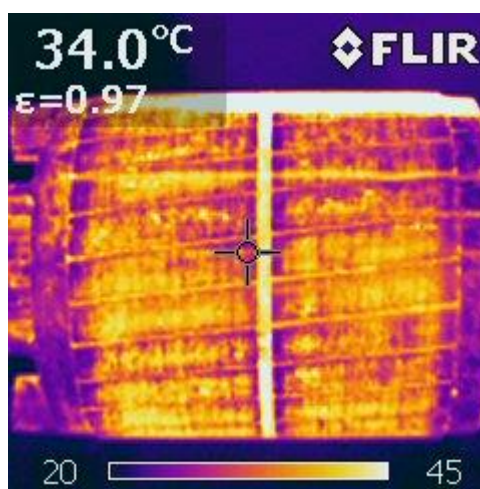
Rys. 3.16. Widmo względne momentu elektromagnetycznego dla badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręta klatki wirnika, liniowy obwód magnetyczny, zadany moment bezwładności $J=0.04 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, zadany moment mechaniczny 8Nm .

Wyniki obliczeń zestawione w Tabeli 3.2. oraz ilustracje zależności tych wartości zestawionych w tej tabeli na Rys. 3.11. do Rys. 3.14. dobrze obrazują możliwość rozróżniania uszkodzeń i wpływu momentu obciążenia i momentu bezwładności wirnika na symptomy diagnostyczne pozwalające rozpoznać uszkodzenie klatki wirnika, co do tej pory było słabiej rozpoznane dla opracowanego modelu polowo-obwodowego jak i podobnie przedstawionych w rozdziale 2 wyników obliczeń dla modelu monoharmonicznego. Zbieżność wyników uzyskanych z modelu polowo-obwodowego z wynikami uzyskanymi w modelu monoharmonicznego potwierdza użyteczność i przydatność tego modelu do zastosowań w analizach diagnostycznych uszkodzeń wirnika silników indukcyjnych klatkowych.

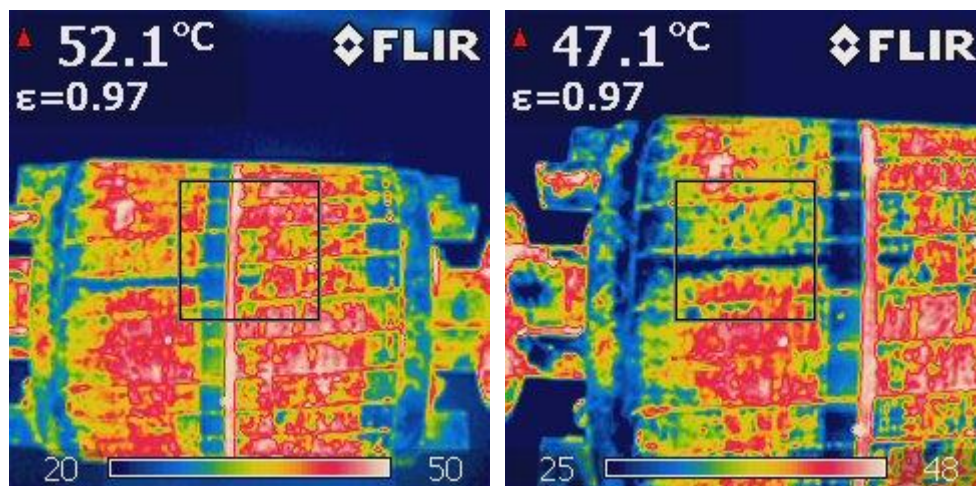
4. BADANIA LABORATORYJNE I WERYFIKACJA MODELI

4.1. Wprowadzenie

Do badań laboratoryjnych wybrano silnik Sg112M-4. Specjalnie wykonany zestaw silnika z wymiennymi podzespołami umożliwiającymi diagnostykę silnika z różnymi defektami takimi jak: uszkodzenia klatki, ekscentryczność dynamiczna, ekscentryczność statyczna wykonała Fabryka Silników Elektrycznych TAMEL. Dodatkowo producent udostępnił pełną dokumentację techniczną dotyczącą tego modelu silnika. Z uwagi, że w pracy skupiono się tylko na uszkodzeniach klatki zostanie wyjaśniony sposób wykonania wirników z uszkodzoną klatką. Uszkodzenia prętów klatki zostały wykonane przy modyfikacji procesu pakietowania blach wirnika oraz następnie procesu odlewania klatki. W procesie pakietowania blach użyto po jednym innym wycinku blachy z przekrojem wirnika, w której dla uszkodzonych prętów pozostawiono materiał i nie wycięto otworów na pręty. Tak przygotowane pakiety poddano procesowi odlewania klatki w wyniku czego dla ściśle określonych prętów uzyskano przerwę w prętach. Dostarczone od producenta wirniki z uszkodzonymi prętami zostały poddane badaniom potwierdzającym poprawne wykonanie uszkodzeń. Wirniki badano kolejno na stanowisku badawczym. W pierwszym etapie sprawdzono widmo prądu stojana, w którym dla każdego wirnika występowały składowe generowane przez uszkodzoną klatkę. Kolejnym etapem były badania przy użyciu kamery termowizyjnej. Silnik poddawano dużemu obciążeniu (często przewyższającemu moment znamionowy) powodując znaczne i szybkie rozgrzanie się silnika. Eksperymentalnie ustalono, że osiągnięcie temperatury 55°C na obudowie silnika pozwoli dobrze zaobserwować rozkład temperatury na powierzchni wirnika. Szybki demontaż wirnika i badanie go przy użyciu kamery termowizyjnej potwierdziło deklaracje producenta.



Rys. 4.1. Termogram wirnika symetrycznego wykonany kamerą termowizyjną.



Rys. 4.2. Termogram wirnika z uszkodzonym jednym prętem wykonany kamerą termowizyjną.

Na Rys. 4.1. i Rys. 4.2. przedstawiono przykładowe termogramy dla wirnika symetrycznego oraz wirnika z uszkodzonym jednym prętem, klatki wirnika. Rozkłady temperatury przedstawione na Rys. 4.1. i Rys. 4.2. potwierdzają poprawność wykonania wirników z zamierzonym uszkodzeniem prętów klatki.

4.2. Opis badań laboratoryjnych

4.2.1. Określenie reaktancji rozproszenia stojana i wirnika

W celu uzupełnienia i sprawdzenia poprawności modelu, a szczególnie części odpowiadającej schematowi obwodowemu, przeprowadzono badania pomiarowo oraz obliczeniowe zmierzające do wyznaczenia reaktancji rozprożeń uzwojeń stojana i wirnika. Kolejno podjęto próbę określenia indukcyjności własnej pasma fazowego obwodu stojana, aby ostatecznie według typowych metod jak test biegu jałowego oraz zwarcia zweryfikować utworzony dyskretny model numeryczny silnika. W tym celu posłużono się metodami zmniejszonego napięcia przemiennego i impulsu napięcia stałego. Pierwsza z nich mająca za zadanie zidentyfikowanie indukcyjności rozproszenia uzwojeń stojana polegającej na zasilaniu obwodu stojana obniżonym napięciem przemiennym przy wyjętym wirniku i zamontowanych tarczach łożyskowych tak, aby nie przekroczyć znamionowej wartości prądu twornika. W tym stanie impedancja uzwojeń stojana stanowi sumę mierzalnej rezystancji pojedynczego pasma fazowego, reaktancji rozproszenia oraz reaktancji otworu, którą można obliczyć znając wymiary geometryczne jarzma i liczbę zwojów. Ostatecznie poszukiwana reaktancja (indukcyjność) zwarcia będzie wynikiem powyższych działań. Indukcyjność rozproszenia wyznaczona tą metodą jest równa 0,02 H.

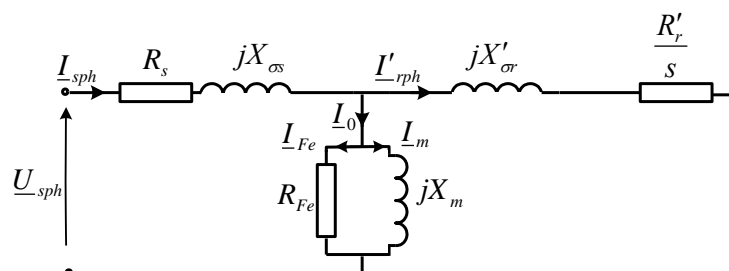
4.2.2. Wyznaczenie parametrów schematu zastępczego

Zagadnienie pomiarowego określenia parametrów schematu zastępczego należy do typowego zadania klasycznej teorii maszyn elektrycznych. Głównym celem tych działań jest przybliżone oszacowanie głównych wielkości charakteryzujących działanie maszyny w ustalonym stanie pracy dla składowej podstawowej prądu jak i momentu elektromagnetycznego. Znaną cechą tych pomiarów są liczne założenia, bez których nie byłoby możliwe wyznaczenie wspomnianych wyżej parametrów. Wśród nich należy wymienić założenie odnośnie co do równości rezystancji i reaktancji zwarcia po ich sprowadzeniu przez przekładnię na stronę stojana lub wirnika. Niemniej istotnym aspektem jest przyjęcie uproszczenia, z rozkład przestrzenny pola w szczeliny powietrznej ma kształt sinusoidalny. W tych warunkach dla zakresu liniowej części charakterystyki magnesowania przy pominięciu strat czynnych wynikających z przemagnesowania rdzenia można dość dobrze można przybliżyć indukcyjność główną. Formalnie odpowiada to próbie idealnego biegu jałowego tzn., gdy uzwojenie stojana jest zasilane a wirnik napędzany z prędkością synchroniczną za pomocą innej maszyny.

Pomiaru rezystancji fazowych uzwojeń stojana R_s dokonano metodą techniczną przy zasilaniu prądem stałym. Wyznaczona tym sposobem rezystancja $R_s = 5,90 \Omega$ przy temperaturze $75 \text{ }^\circ\text{C}$.

Przeprowadzono pomiary dla biegu jałowego i stanu zwarcia dla kilku różnych napięć zasilania z godnie z metodologią wyznaczania parametrów schematu zastępczego dla silników indukcyjnych klatkowych.

Dla wykonanych pomiarów przeprowadzono obliczenia dla biegu jałowego i stanu zwarcia. Wyznaczono metodą uproszczoną parametry fazowego schematu zastępczego przedstawionego na Rys.4.3.



Rys. 4.3. Fazowy schematu zastępczy silnika.

Wyznaczone wartości parametrów fazowego schematu zastępczego zestawiono w Tabeli 4.1.

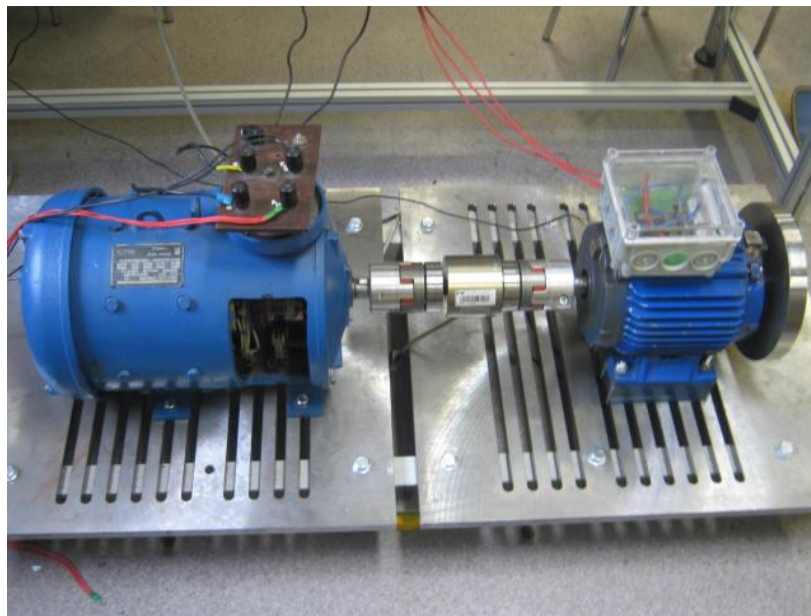
Tabela 4.1. Zestawienie wartości parametrów fazowego schematu zastępczego.

X_m [Ω]	R_{Fe} [Ω]	R_s [Ω]	$X_{\sigma s}$ [Ω]	$X'_{\sigma r}$ [Ω]	R'_r [Ω]
144,00	4650,00	9,06	5,58	5,58	3,25

Zestawione w Tabeli 4.1. parametry fazowego schematu zastępczego i inne dodatkowo wyznaczone parametry rozproszeń uzwojeń są uwzględniane tylko w modelu połowym.

4.2.3. Stanowisko pomiarowe i program badań

Stanowisko laboratoryjne, na którym przeprowadzono badania zbudowane jest z dwóch maszyn. Jedną to badany silnik indukcyjny Sg112M-4 o mocy znamionowej 4 kW, sprzężony mechanicznie za pomocą sprzęgła z drugą maszyną prądnicą prądu stałego PZM5545 produkcji Komel ($P_n=4,5\text{kW}$, $U_n=230\text{V}$, $I_n=19,6\text{A}$, $I_m=0,86\text{A}$). Na Rys. 4.4. przedstawiono zestawiony układ napadowy do badań diagnostycznych.



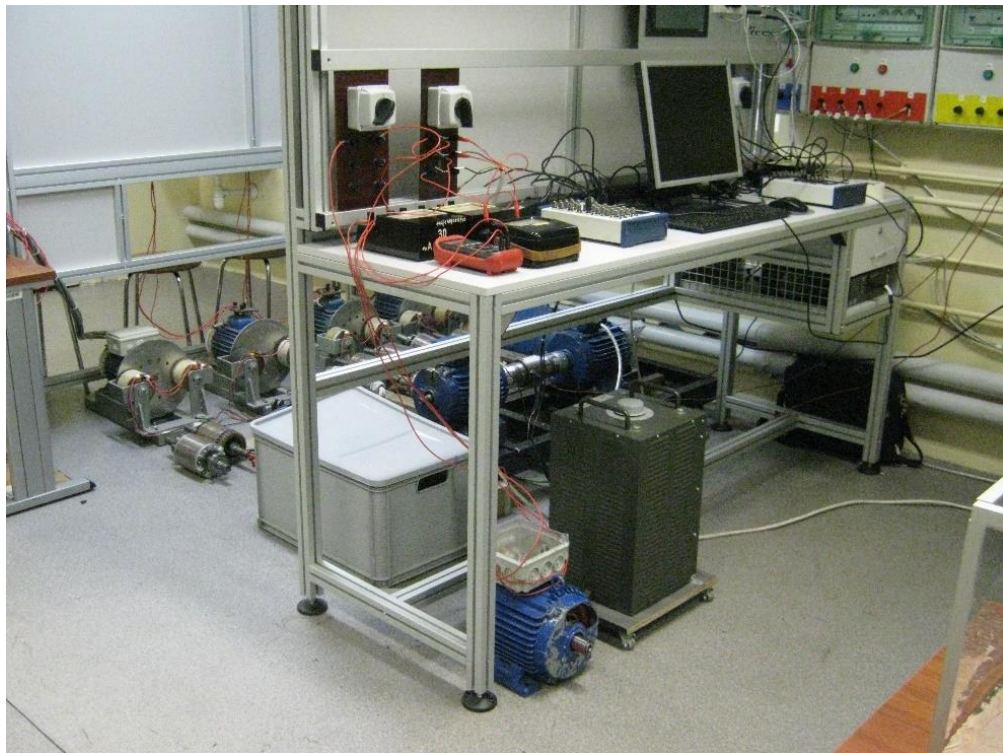
Rys. 4.4. Widok stanowiska pomiarowego z połączonymi maszynami przygotowanymi do badań diagnostycznych.

Na Rys. 4.4. po stronie przeciwnapędnej badanego silnika można zauważyć osadzone na wale dodatkowe koło metalowe. Na potrzebę badania wpływu momentu bezwładności badanego układu na cechy diagnostyczne wykonano zestaw dodatkowych kół masowych. Zestaw wszystkich dodatkowych kół, które mogą być zamontowane na wale wirnika celem zmiany momentu jego bezwładności przedstawiono na Rys. 4.5.



Rys. 4.5. Zestaw dodatkowych kół umożliwiających uzyskanie zwiększenia momentów bezwładności.

Na Rys. 4.6. przedstawiono zestawione stanowisko pomiarowe przygotowane do badań diagnostycznych wraz z układem pomiarowym i układem zasilnia.



Rys. 4.6. Widok na zestawione stanowisko pomiarowe przygotowane do badań diagnostycznych wraz z układem pomiarowym i układem zasilnia.

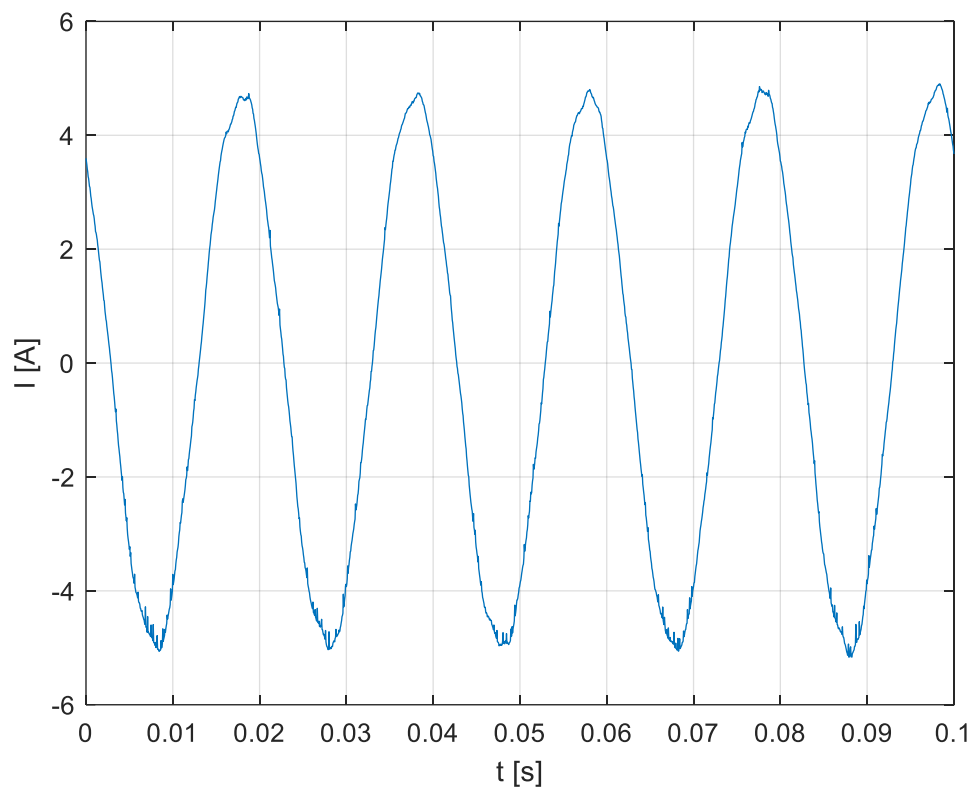
Dzięki dodatkowym kołom możliwe jest uzyskanie zwiększenia momentów bezwładności odpowiednio o $J=0,02$; $2J=0,04$; $3J=0,06$; $4J=0,08$; $5J=0,1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Wypadkowy moment bezwładności układu został określony jako suma momentów: własnego prądnicy ($0,06 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$), badanej maszyny i danego koła masowego.

Badano silnik z czterema wymiennymi wirnikami: wirnik symetryczny, wirnik z uszkodzonym 1 prętem, wirnik z uszkodzonym 1 i 2 prętami, wirnik z uszkodzonym 1 i 3 prętami. Uzwojenia stojana badanego silnika indukcyjnego były połączone w gwiazdę bez przewodu zerowego i były zasilane bezpośrednio z sieci o niskiej zawartości wyższych harmonicznych o wielokrotności podstawowej częstotliwości sieciowej.

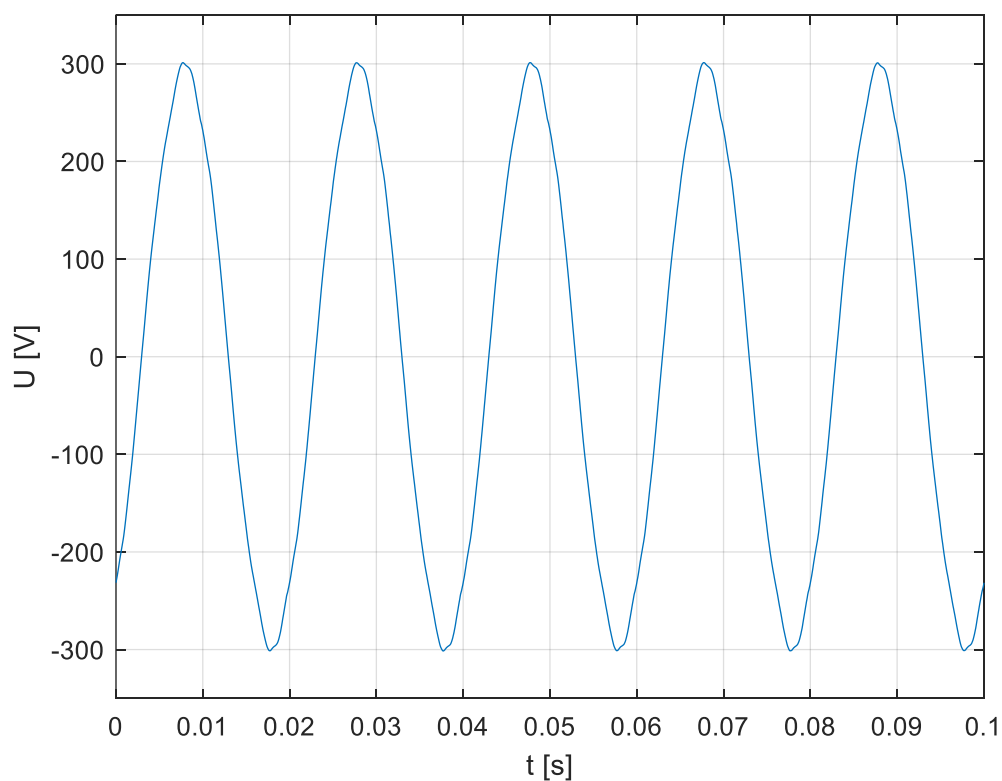
Napięcia i prądy fazowe silnika mierzono za pomocą sond pomiarowych. Moment obciążenia i prędkość obrotową mierzono za pomocą przetwornika Data-Flex zamontowanego w sprzęgle układu napędowego. Do pomiaru napięć fazowych zasilających uzwojenia badanego silnika zastosowano trzy sondy pomiarowe Testec TT-SI9001. Do pomiaru trzech prądów zastosowano trzy sondy prądowe Tektronix A622.

Natomiast do pomiaru moment obciążenia oraz prędkości obrotowej zastosowano urządzenie KTR DataFlex 22/50. Wartości chwilowe 3 sygnałów proporcjonalnych do prądów zasilających, 3 sygnałów proporcjonalnych do napięć zasilających badany silnik, sygnału proporcjonalnego do momentu oraz sygnału impulsów prostokątnych proporcjonalnych do prędkości obrotowej rejestrowano za pomocą karta pomiarowej NI-6259 z przetwornikami A/C o rozdzielczości 16 bitów. Wszystkie 8 sygnałów rejestrowano przez okres 20 sekund z częstotliwością próbkowania 20 kHz.

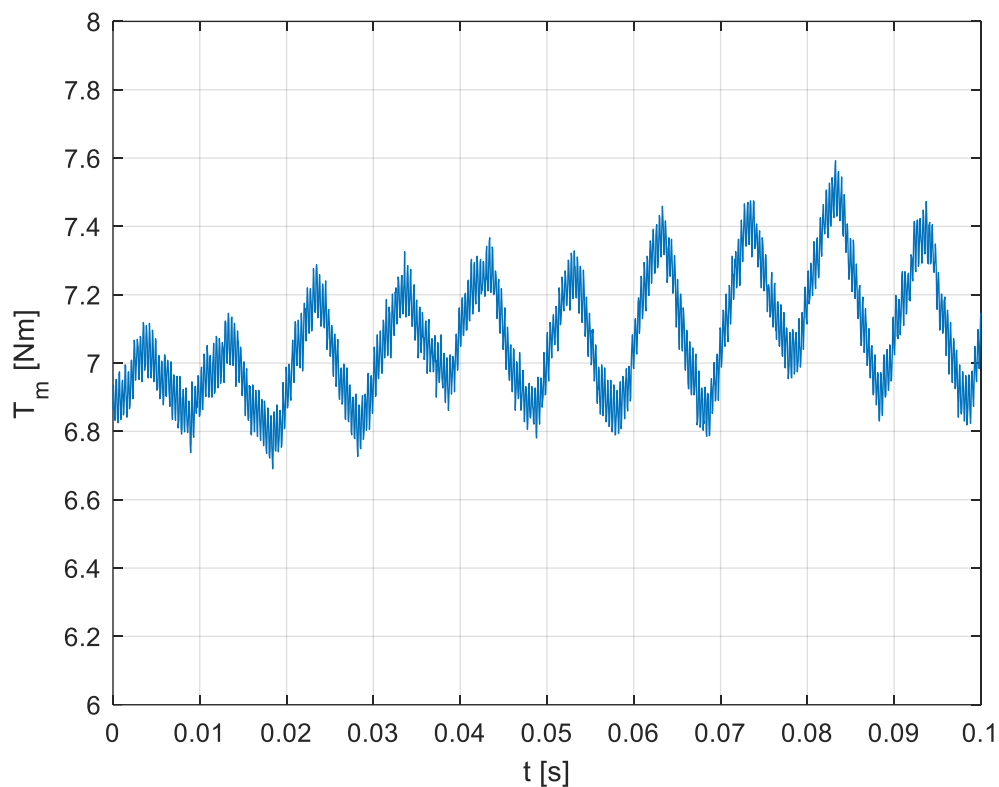
Na Rys. 4.7. przedstawiono przykładowy przebiegu prądu stojana fazy L1 uzyskanego z pomiarów dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, przy momencie bezwładności wirnika $2J$ oraz momencie obciążenia 7 Nm . Na Rys. 4.8. przedstawiono przykładowy przebiegu napięcia zasilającego uzwojenie stojana fazy L1 uzyskanego przy pomiarze dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, przy momencie bezwładności wirnika $2J$ oraz momencie obciążenia 7 Nm . Na Rys. 4.9. przedstawiono przykładowy przebiegu momentu obciążenia zarejestrowany przy tych samych warunkach pracy układu i w tych samych chwilach czasowych. Na Rys. 4.10. przedstawiono widmo bezwzględne prądu stojana badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, uzyskane z przebiegu przedstawionego na Rys. 4.7. Na Rys. 4.11. przedstawiono natomiast widmo względne prądu stojana wyskalowane w dB.



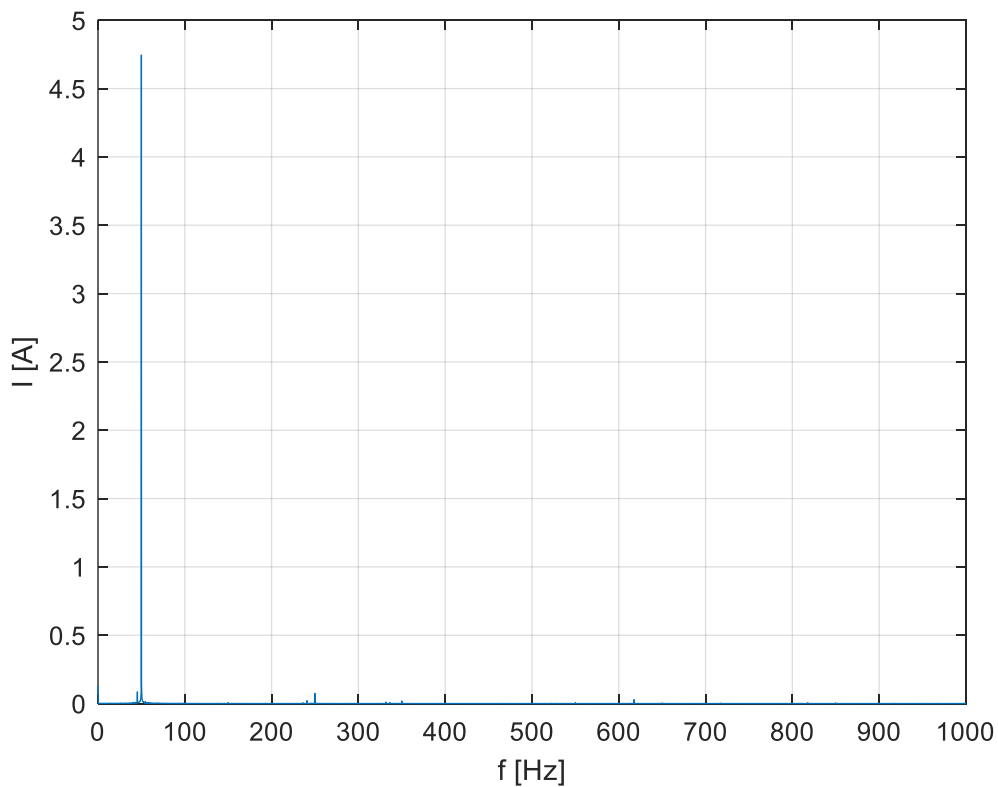
Rys. 4.7. Przebieg prądu stojana badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla 2J, 7Nm uzyskanego z pomiarów laboratoryjnych.



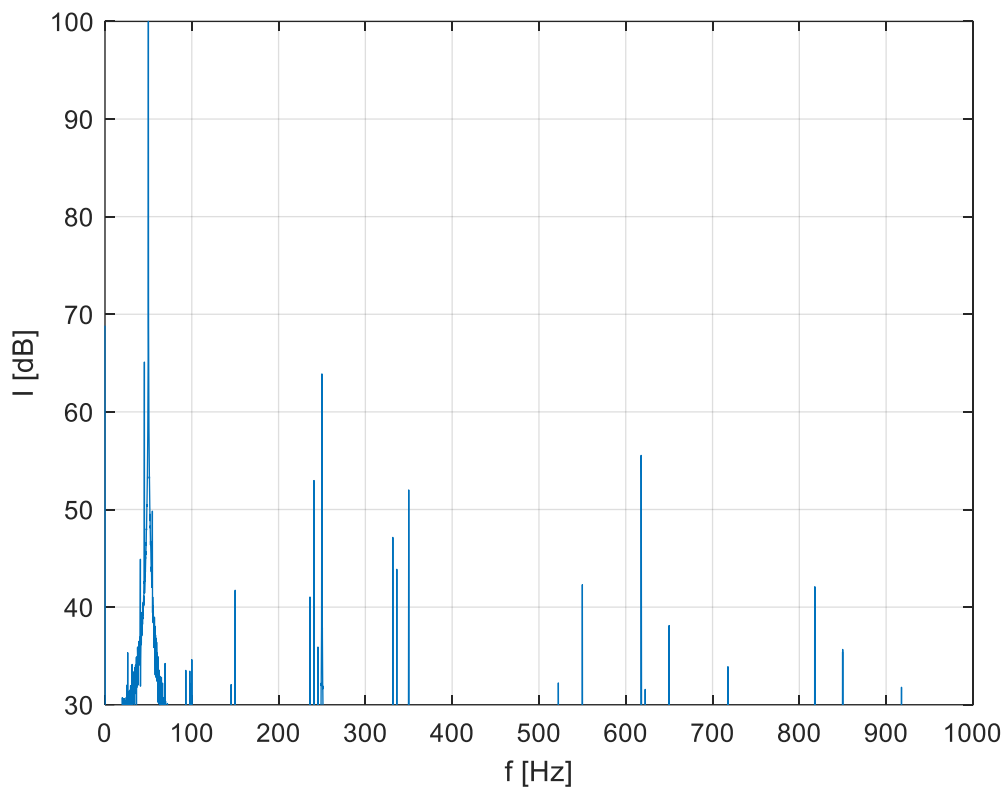
Rys. 4.8. Przebieg napięcia zasilającego stojana badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla 2J, 7Nm uzyskanego z pomiarów laboratoryjnych.



Rys. 4.9. Przebieg momentu obciążenia badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla 2J, 7Nm uzyskanego z pomiarów laboratoryjnych.



Rys. 4.10. Widmo bezwzględne prądu stojana badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla 2J, 7Nm uzyskane z pomiarów laboratoryjnych.



Rys. 4.11. Widmo względne prądu stojana badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla 2J, 7Nm uzyskane z pomiarów laboratoryjnych.

Celem badań laboratoryjnych było porównanie otrzymanych wyników pomiarów w funkcji momentu bezwładności lub momentu obciążenia z obliczeniami dla modelu z pełnym odwzorowaniem klatki wirnika przy zadanych warunkach niesymetrii rezystancyjnej klatki wirnika.

W zakresie możliwych do uzyskania obciążeń badanego silnika oraz dla możliwych do zrealizowania kilku zmian momentu bezwładności wirnika przeprowadzono rejestrację sygnałów diagnostycznych. Pomiarów powtarzano przynajmniej dwa razy dla tych samych warunków pracy badanego silnika.

Analizę wyników pomiarów dla wybranych składowych diagnostycznych zamieszczono w następnym podrozdziale. Wyniki zilustrowano w formie tabelarycznej i na wykresach z zależnościami zmian składowych diagnostycznych w zależności od warunków pracy i stanu uszkodzenia klatki wirnika.

4.3. Analiza wyników pomiarów

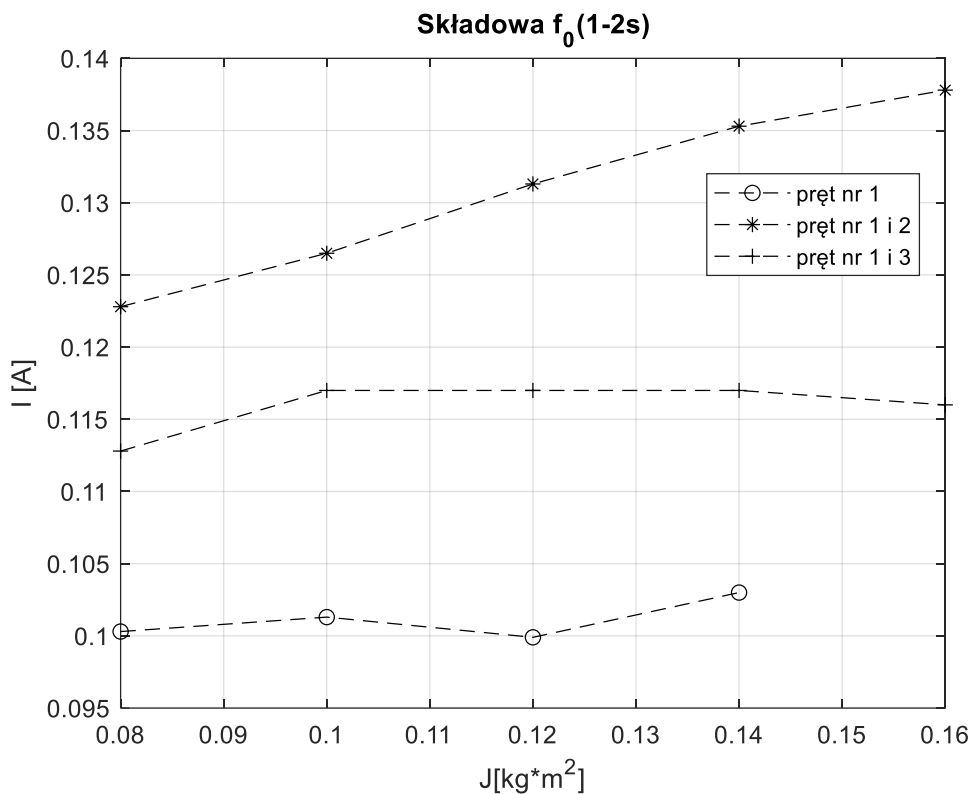
W Tabeli.4.2. zestawiono maksymalne amplitud składowych widm prądów stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń dla podstawowej harmonicznej prądu f_0 oraz składowych poślizgowych $f_0(1-2s)$, $f_0(1+2s)$, $f_0(1-4s)$, oraz $f_0(1+4s)$ dla różnych momentów bezwładności. Analizy oparto na wynikach pomiarów laboratoryjnych.

Tabela 4.2. Zestawienie amplitud składowych widm prądów stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń, pomiary laboratoryjne – wpływ momentu bezwładności.

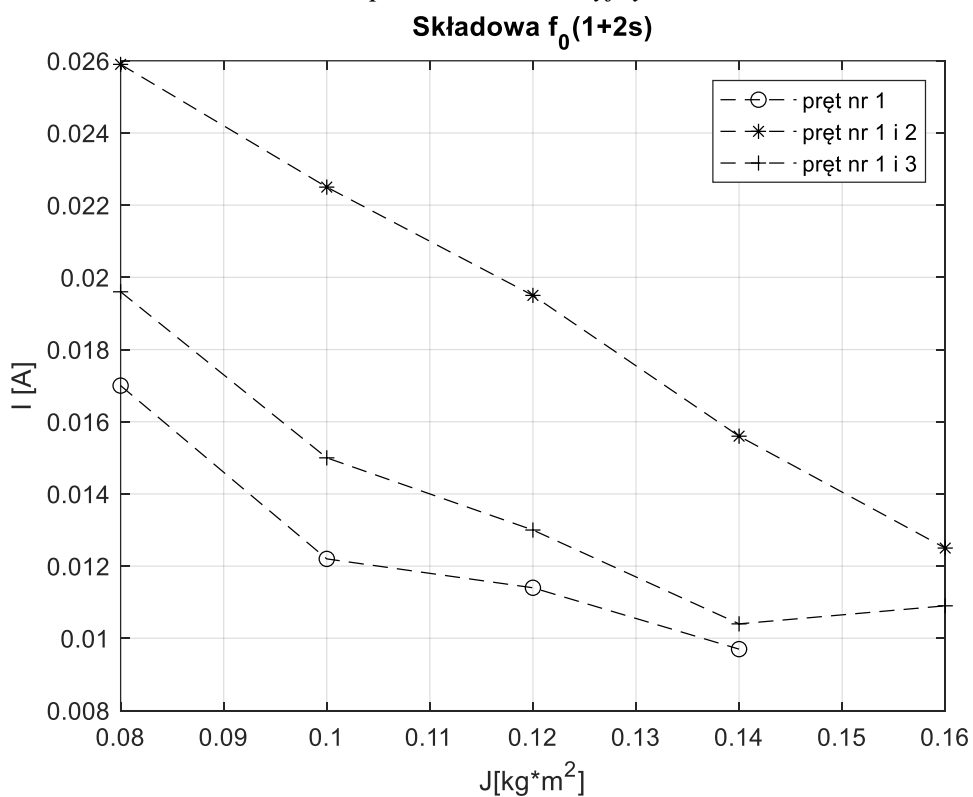
	$J[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ $I [\text{A}]$	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16
T=8 [Nm] uszkodzony 1 pręt	f_0	5,5520	5,5361	5,1398	5,4552	-
	$f_0(1-2s)$	0,1003	0,1013	0,0999	0,1030	-
	$f_0(1+2s)$	0,0170	0,0122	0,0114	0,0097	-
	$f_0(1-4s)$	0,0057	0,0091	0,0097	0,0098	-
	$f_0(1+4s)$	0,0017	0,0023	0,0022	0,0020	-
	$J[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ $I [\text{A}]$	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16
T=8 [Nm] uszkodzony 1 i 2 pręty	f_0	4,7290	5,2074	5,4436	5,2069	5,0310
	$f_0(1-2s)$	0,1228	0,1265	0,1313	0,1353	0,1378
	$f_0(1+2s)$	0,0259	0,0225	0,0195	0,0156	0,0125
	$f_0(1-4s)$	0,0058	0,0051	0,0052	0,0057	0,0079
	$f_0(1+4s)$	0,0028	0,0015	0,0010	0,0017	0,0011
	$J[\text{kg}\cdot\text{m}^2]$ $I [\text{A}]$	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16
T=8 [Nm] uszkodzony 1 i 3 pręty	f_0	5,4010	5,2200	5,0700	4,7300	5,4600
	$f_0(1-2s)$	0,1128	0,1170	0,1170	0,1170	0,1160
	$f_0(1+2s)$	0,0196	0,0150	0,0130	0,0104	0,0109
	$f_0(1-4s)$	0,0096	0,0094	0,0097	0,0078	0,0100
	$f_0(1+4s)$	0,0008	0,0014	0,0005	0,0005	0,0026

Na podstawie danych zestawionych w Tabeli 4.2. na Rys. 4.12. do Rys. 4.15. przedstawiono dla trzech przypadków uszkodzeń dla składowych poślizgowych $f_0(1-2s)$, $f_0(1+2s)$, $f_0(1-4s)$, oraz $f_0(1+4s)$ jak zmieniają się maksymalne amplitud składowych widm prądów stojana w zależności od momentów bezwładności wirnika. Zbadano wpływ momentu bezwładności wirnika od J do 5J. Pomiary wykonano dla momentu obciążenia 8 Nm.

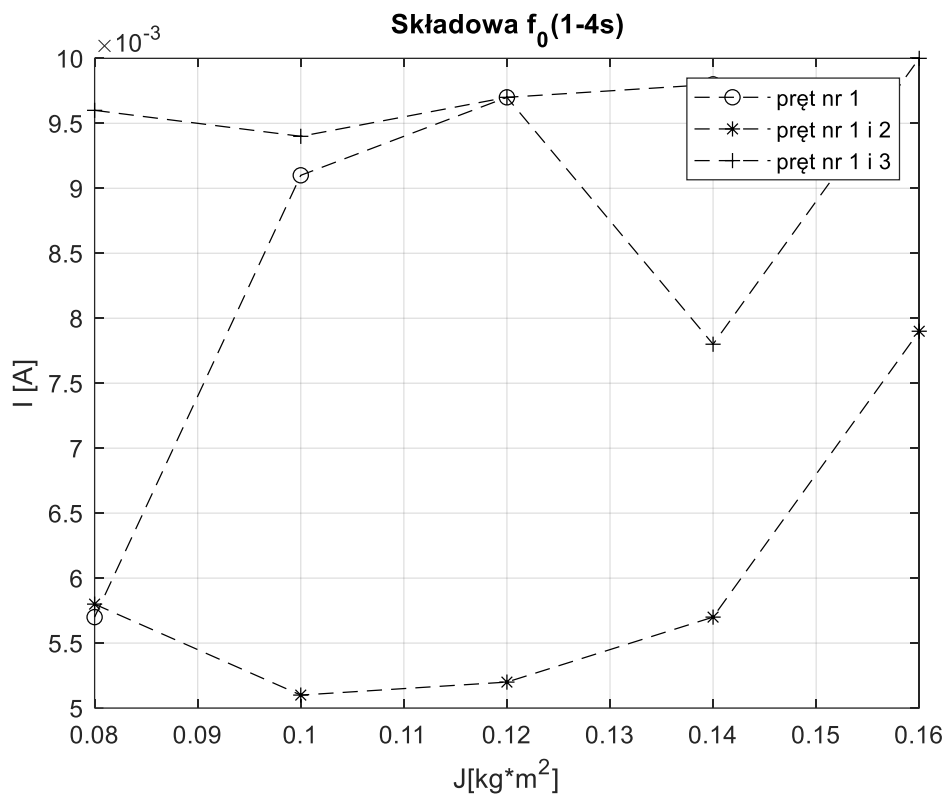
Przy badaniach dla wirnika z uszkodzonym 1 prętem klatki wirnika nie udało się uzyskać poprawnych danych dla momentu bezwładności 5J ($0,16 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$) i momentu obciążenia 8 Nm co w tabeli zaznaczono brakiem wyników w tej kolumnie Tabeli 4.2.



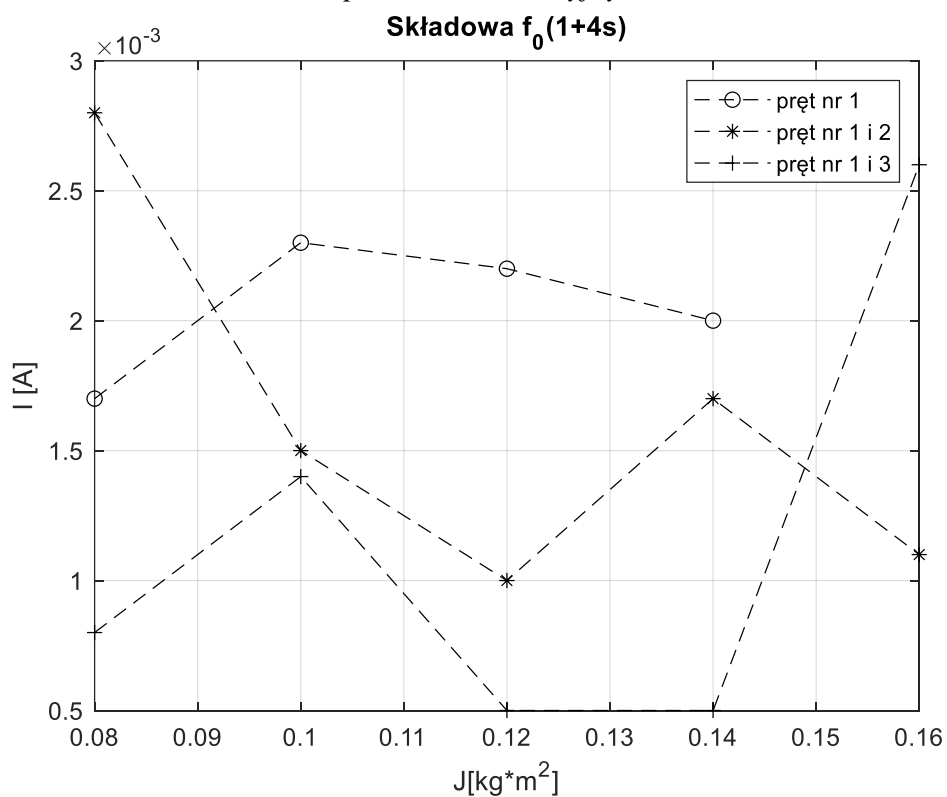
Rys. 4.12. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika, pomiar laboratoryjny.



Rys. 4.13. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika, pomiar laboratoryjny.



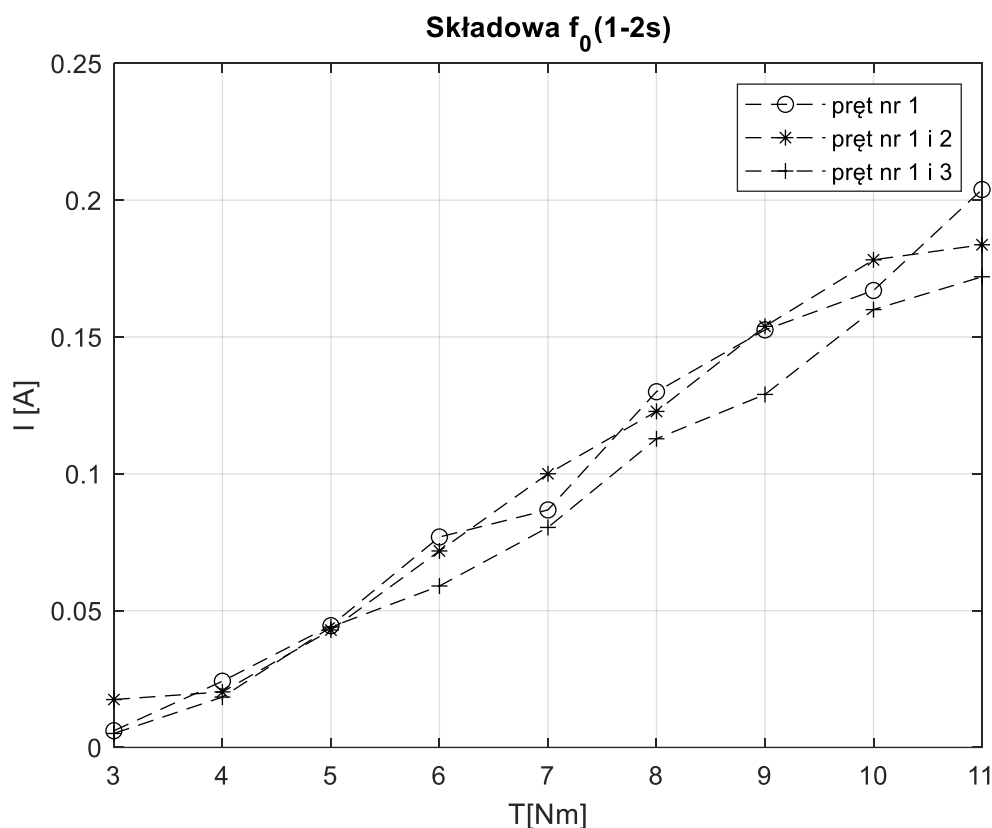
Rys. 4.14. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika, pomiar laboratoryjny.



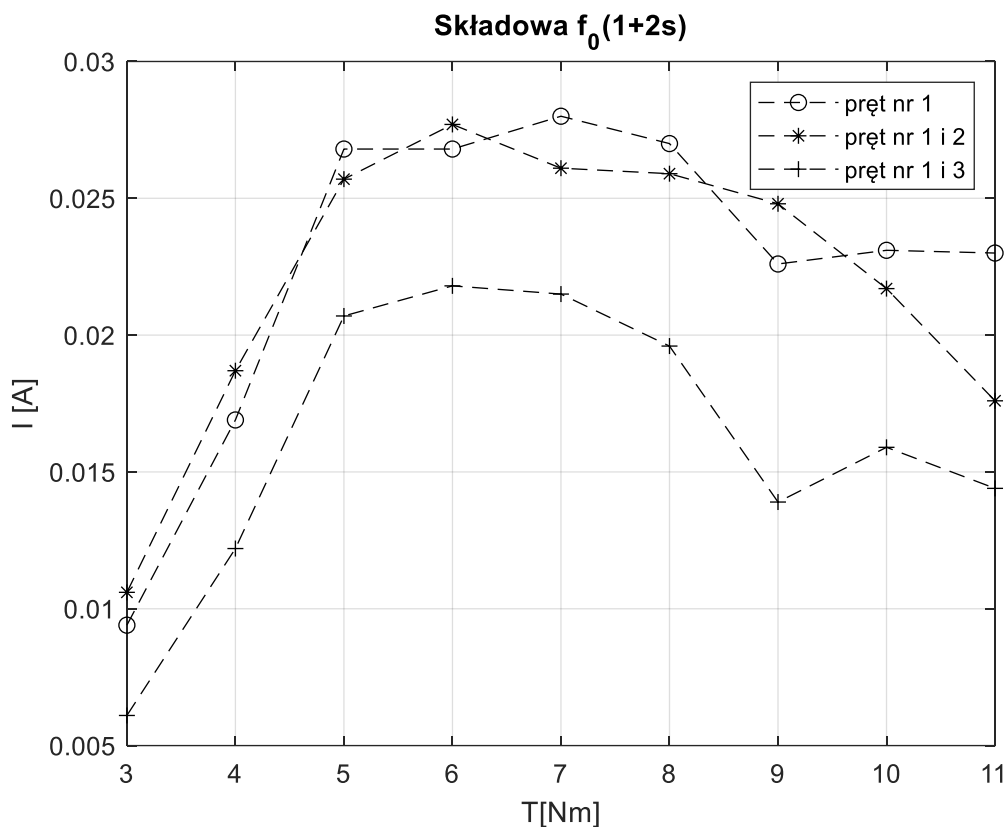
Rys. 4.15. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika, pomiar laboratoryjny.

Tabela 4.3. Zestawienie amplitud składowych widm prądu stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń, pomiary laboratoryjne – dla różnego momentu obciążenia.

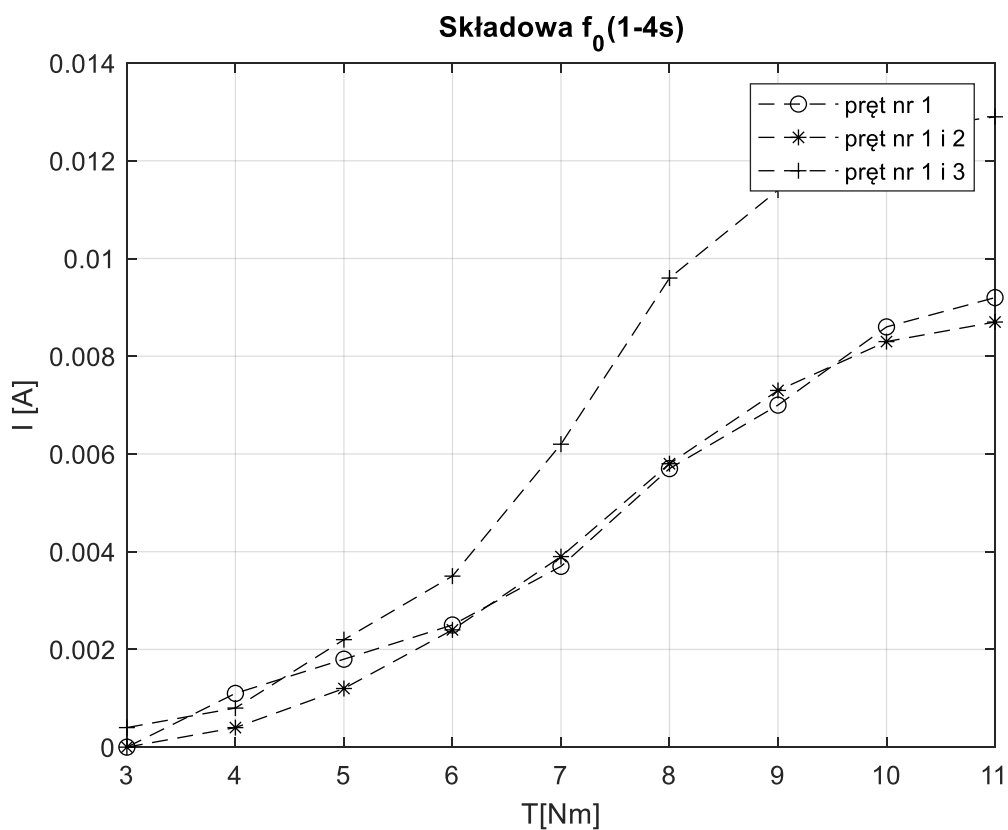
	T [Nm] / I[A]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
J=0,08 [kg*m ²] uszkodzony 1 pręt	f_0	1,6500	2,2200	3,0840	3,9930	4,4290	5,5520	5,8250	6,8900	7,8200
	$f_0(1-2s)$	0,0061	0,0242	0,0445	0,0769	0,0868	0,1300	0,1526	0,1670	0,2039
	$f_0(1+2s)$	0,0094	0,0169	0,0268	0,0268	0,0280	0,0270	0,0226	0,0231	0,0230
	$f_0(1-4s)$	0,0000	0,0011	0,0018	0,0025	0,0037	0,0057	0,0070	0,0086	0,0092
	$f_0(1+4s)$	0,0000	0,0000	0,0005	0,0007	0,0017	0,0017	0,0014	0,0022	0,0029
	T [Nm] / I[A]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
J=0,08 [kg*m ²] uszkodzony 1 i 2 pręt	f_0	1,7110	2,3890	3,0440	3,6340	4,4570	4,7290	6,2030	6,5560	6,8620
	$f_0(1-2s)$	0,0175	0,0203	0,0429	0,0718	0,1000	0,1228	0,1539	0,1782	0,1837
	$f_0(1+2s)$	0,0106	0,0187	0,0257	0,0277	0,0261	0,0259	0,0248	0,0217	0,0176
	$f_0(1-4s)$	0,0000	0,0004	0,0012	0,0024	0,0039	0,0058	0,0073	0,0083	0,0087
	$f_0(1+4s)$	0,0000	0,0002	0,0008	0,0013	0,0019	0,0028	0,0019	0,0023	0,0058
	T [Nm] / I[A]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
J=0,08 [kg*m ²] uszkodzony 1 i 3 pręt	f_0	1,6290	2,1580	3,3050	4,0030	4,6670	5,4010	6,0580	6,7350	7,2190
	$f_0(1-2s)$	0,0051	0,0184	0,0440	0,0590	0,0804	0,1128	0,1290	0,1600	0,1720
	$f_0(1+2s)$	0,0061	0,0122	0,0207	0,0218	0,0215	0,0196	0,0139	0,0159	0,0144
	$f_0(1-4s)$	0,0004	0,0008	0,0022	0,0035	0,0062	0,0096	0,0114	0,0126	0,0129
	$f_0(1+4s)$	0,0011	0,0015	0,0012	0,0007	0,0005	0,0008	0,0003	0,0015	0,0003



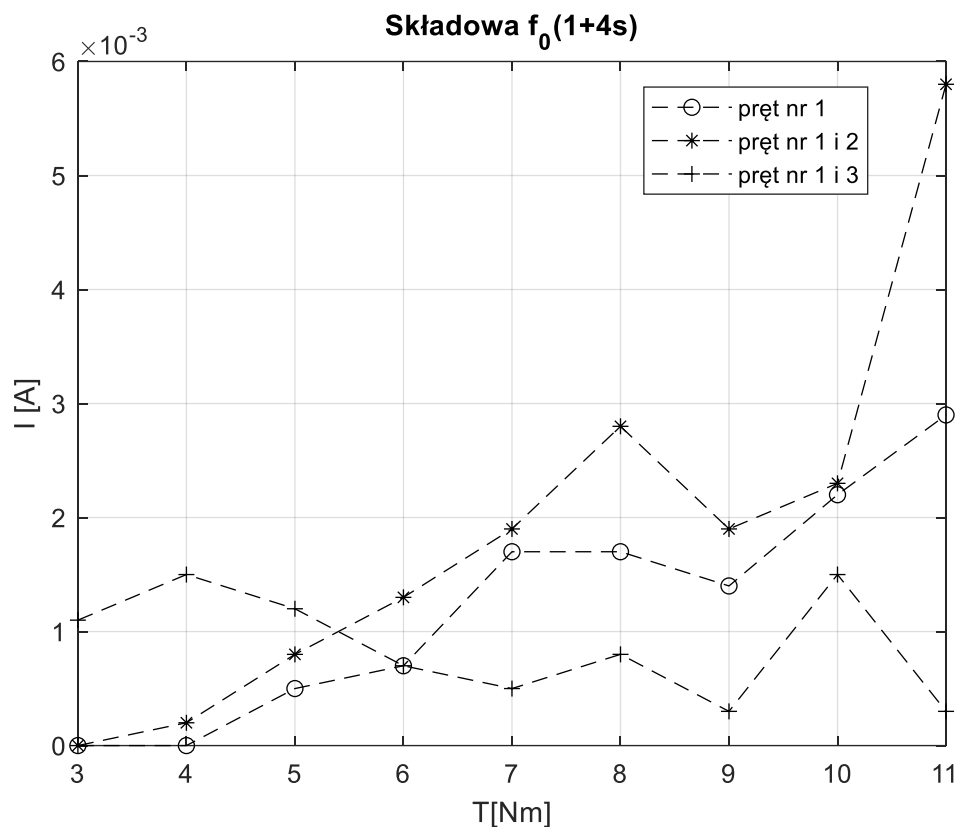
Rys. 4.16. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, pomiar.



Rys. 4.17. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, pomiar.



Rys. 4.18. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, pomiar.



Rys. 4.19. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, pomiar.

Na podstawie danych zestawionych w Tabeli.4.3. na Rys.4.16. do Rys.4.19. przedstawiono dla trzech przypadków uszkodzeń dla składowych poślizgowych $f_0(1-2s)$, $f_0(1+2s)$, $f_0(1-4s)$, oraz $f_0(1+4s)$ jak zmieniają się maksymalne amplitud składowych widm prądów stojana w zależności od momentów obciążenia. Zbadano wpływ momentu obciążenia od 3 Nm do 11 Nm. Pomiar wykonano dla momentu bezwładności wirnika $J=0,08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

W Tabeli.4.4. zestawiono amplitud składowych widm momentu elektromagnetycznego dla analizowanych trzech przypadków uszkodzeń. Pomiary, dla których wyniki zestawione w Tabeli.4.4. wykonano dla momentu obciążenia zmieniającego się od 3 Nm do 11 Nm i dwóch różnych momentów bezwładności $J=0,08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ i $J=0,14 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

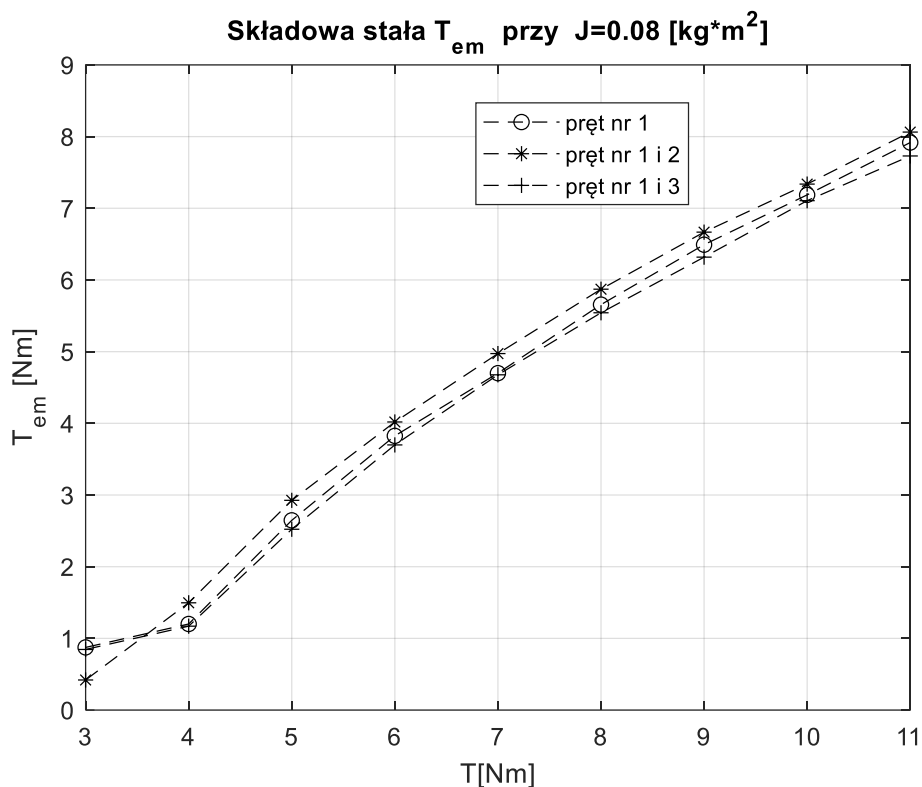
W otrzymanych analizach porównawczych należy zwrócić uwagę na występujące odstępstwa między wynikami pomiarów i obliczeń spowodowanych istnieniem pierścienia pośredniego i skosu prętów dla rzeczywistego modelu wirnika. Wspomniane dodatkowe elementy konstrukcyjnie nie były uwzględnione w modelu teoretycznym, a co za tym idzie badania eksperymentalne wykazują większe tłumienie składowych poślizgowych spowodowanych redukcją momentów synchronicznych.

Tabela 4.4. Zestawienie amplitud składowych widm momentu elektromagnetycznego dla analizowanych przypadków uszkodzeń, pomiary laboratoryjne – dla różnego momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności.

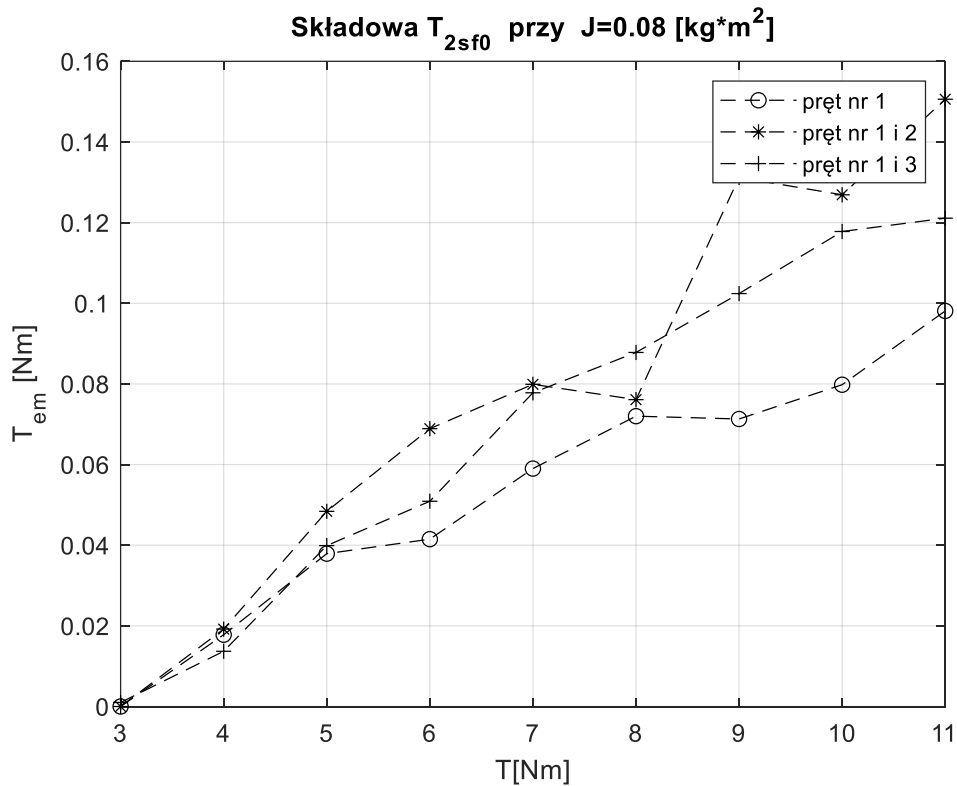
J=0,08 [kg*m²] uszkodzony 1 pręt	T [Nm]/ T_{em}[Nm]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
	T_{em}	0,8741	1,2010	2,6469	3,8252	4,7000	5,6560	6,4921	7,1868	7,9171
	T_{2sf0}	0,0000	0,0178	0,0379	0,0415	0,0590	0,0720	0,0713	0,0798	0,0981
	T_{4sf0}	0,0000	0,0015	0,0024	0,0052	0,0061	0,0092	0,0113	0,0130	0,0133
J=0,08 [kg*m²] uszkodzony 1 i 2 pręt	T [Nm]/ T_{em}[Nm]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
	T_{em}	0,4198	1,4965	2,9259	4,0190	4,9729	5,8711	6,6671	7,3375	8,0631
	T_{2sf0}	0,0000	0,0192	0,0484	0,0689	0,0799	0,0761	0,1312	0,1269	0,1506
	T_{4sf0}	0,0000	0,0010	0,0018	0,0018	0,0032	0,0056	0,0066	0,0047	0,0056
J=0,08 [kg*m²] uszkodzony 1 i 3 pręt	T [Nm]/ T_{em}[Nm]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
	T_{em}	0,8455	1,1705	2,5225	3,6990	4,6770	5,5423	6,3184	7,1063	7,7300
	T_{2sf0}	0,0010	0,0137	0,0399	0,0509	0,0778	0,0878	0,1024	0,1178	0,1211
	T_{4sf0}	0,0003	0,0004	0,0011	0,0024	0,0041	0,0055	0,0071	0,0104	0,0132
J=0,14 [kg*m²] uszkodzony 1 pręt	T [Nm]/ T_{em}[Nm]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
	T_{em}	0,9183	1,1548	2,6372	3,8047	4,634	5,5000	6,4135	7,0823	7,7336
	T_{2sf0}	0,0000	0,0168	0,0342	0,0348	0,0553	0,0637	0,0643	0,0773	0,0788
	T_{4sf0}	0,0000	0,0010	0,0013	0,0033	0,0032	0,0040	0,0015	0,0031	0,0034
J=0,14 [kg*m²] uszkodzony 1 i 2 pręt	T [Nm]/ T_{em}[Nm]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
	T_{em}	0,7691	1,2238	2,9837	3,8123	4,8423	5,6259	6,4215	7,1840	7,8514
	T_{2sf0}	0,0000	0,0212	0,0477	0,0582	0,0709	0,0745	0,0924	0,1101	0,0941
	T_{4sf0}	0,0000	0,0006	0,0009	0,0021	0,0024	0,0039	0,0031	0,0042	0,0029
J=0,14 [kg*m²] uszkodzony 1 i 3 pręt	T [Nm]/ T_{em}[Nm]	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
	T_{em}	0,6772	1,2222	2,7138	3,7568	4,7169	5,5559	6,3962	7,0399	7,7863
	T_{2sf0}	0,0000	0,0146	0,0352	0,0357	0,0450	0,0630	0,0511	0,0535	0,0644
	T_{4sf0}	0,0000	0,0007	0,0005	0,0010	0,0057	0,0068	0,0158	0,0252	0,0130

Na Rys.4.20. do Rys.4.22. przedstawiono dla trzech przypadków uszkodzeń klatki wirnika zmiany maksymalnych amplitud składowej stałej oraz składowych T_{2sf0} i T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Na Rys.4.23. do Rys.4.25. przedstawiono dla trzech przypadków uszkodzeń klatki wirnika zmiany maksymalnych amplitud składowej stałej oraz składowych T_{2sf0} i T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

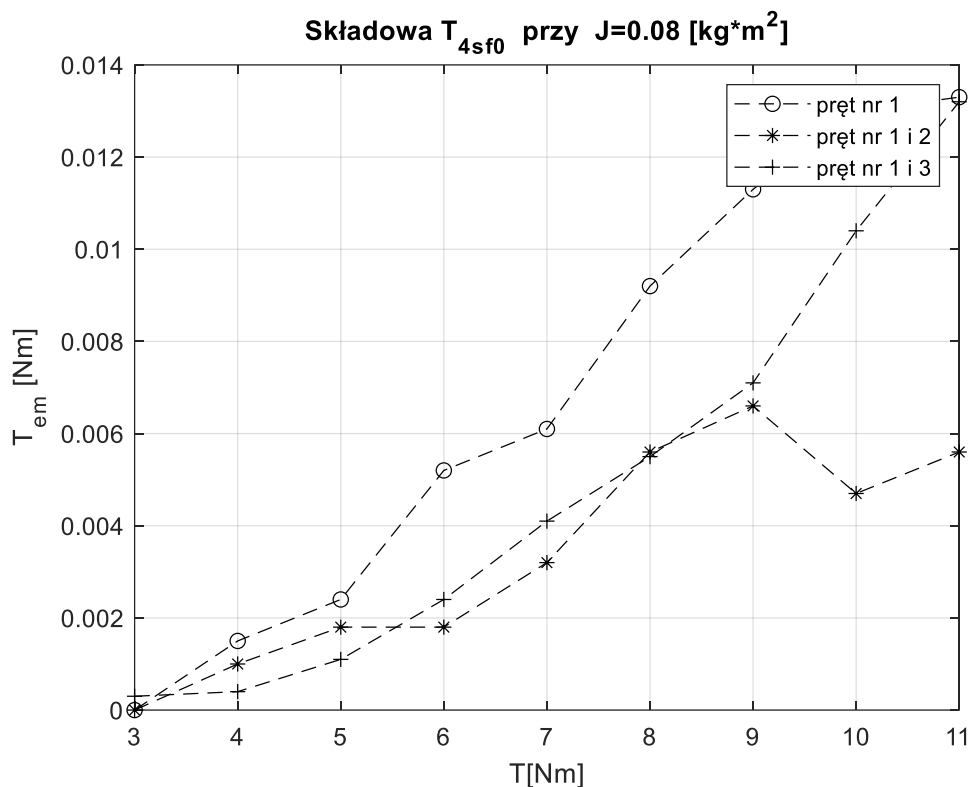
Na Rys. 4.26. do Rys.4.28. przedstawiono zmiany maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia odpowiednio 1 pręta, 1 i 2 pręta oraz 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



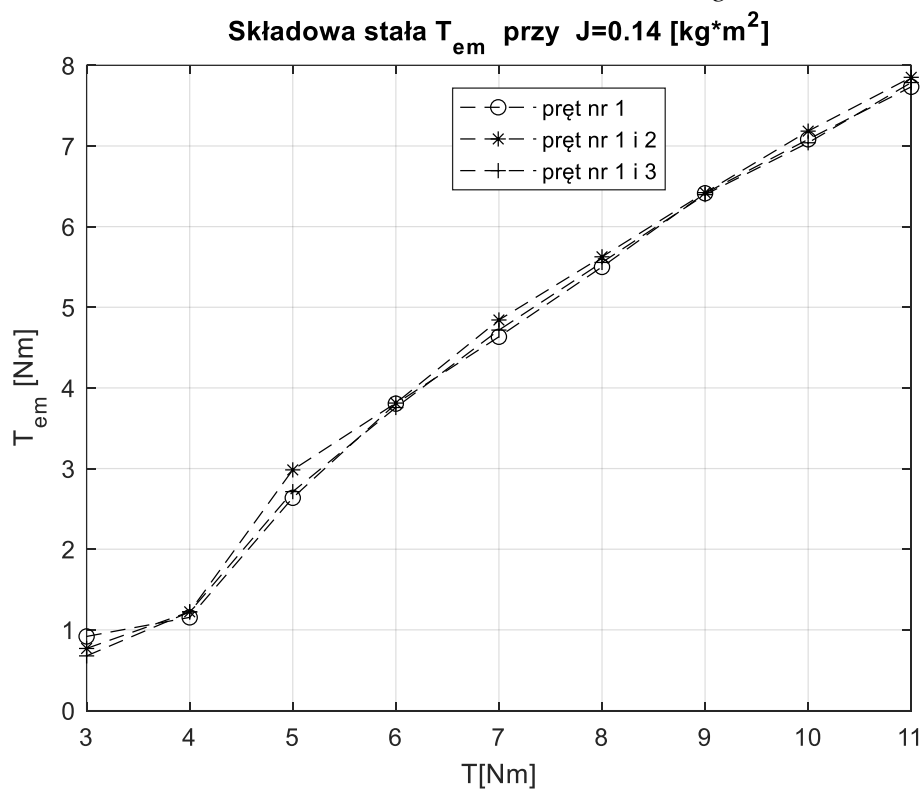
Rys. 4.20. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08$ $kg \cdot m^2$.



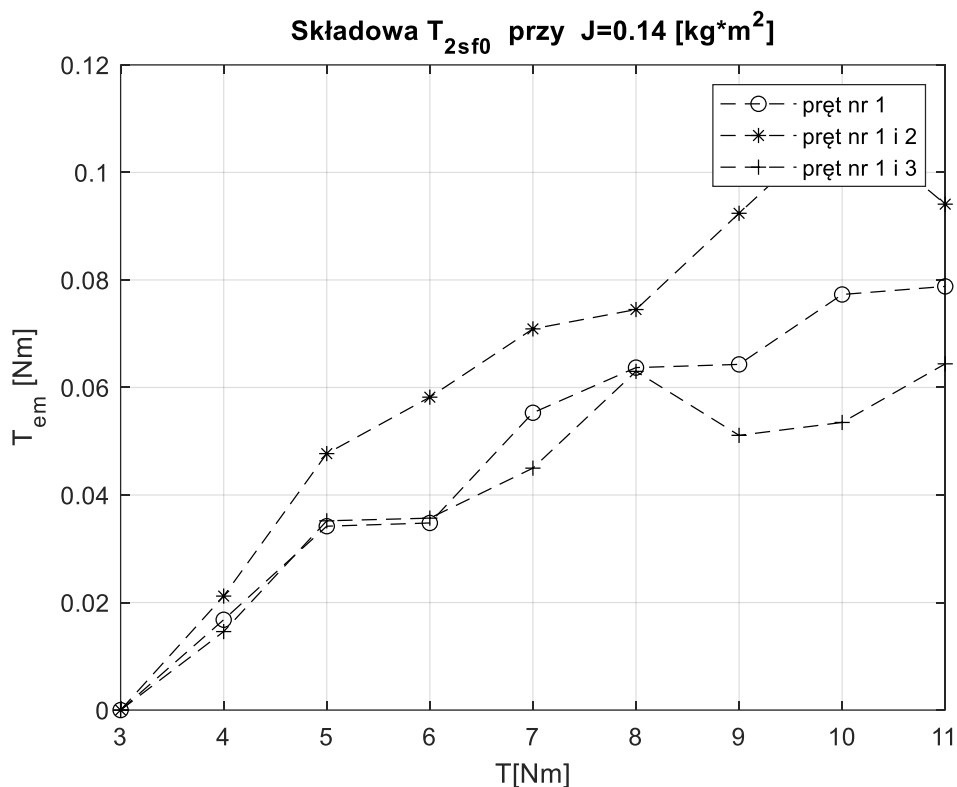
Rys. 4.21. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08$ $kg \cdot m^2$.



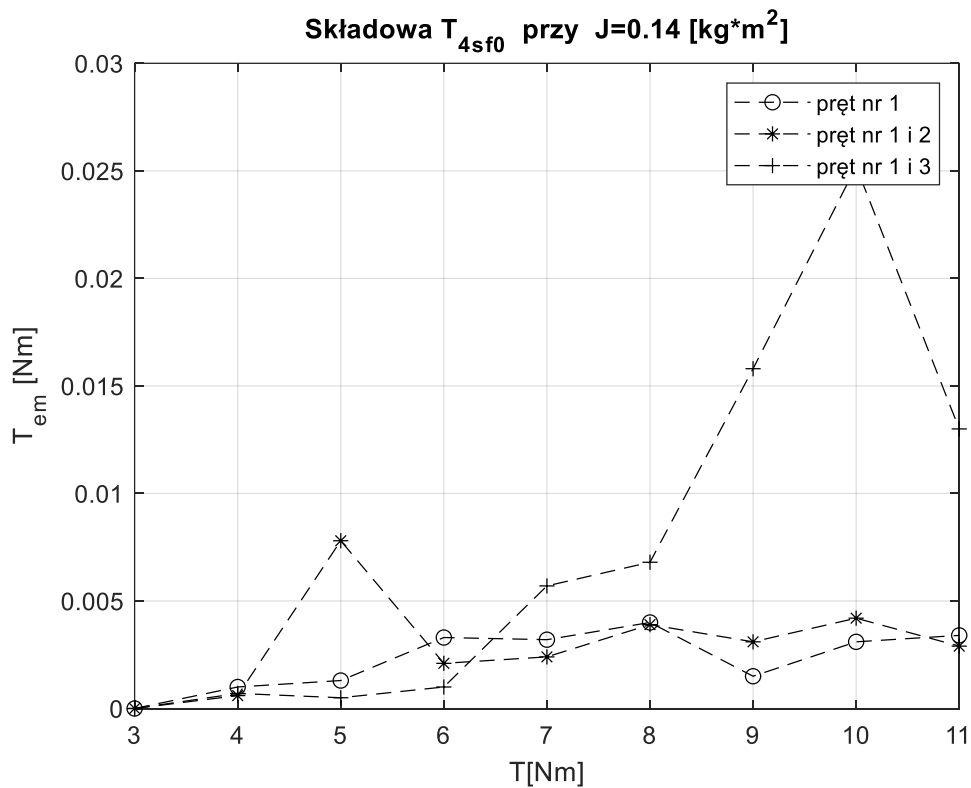
Rys. 4.22. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.



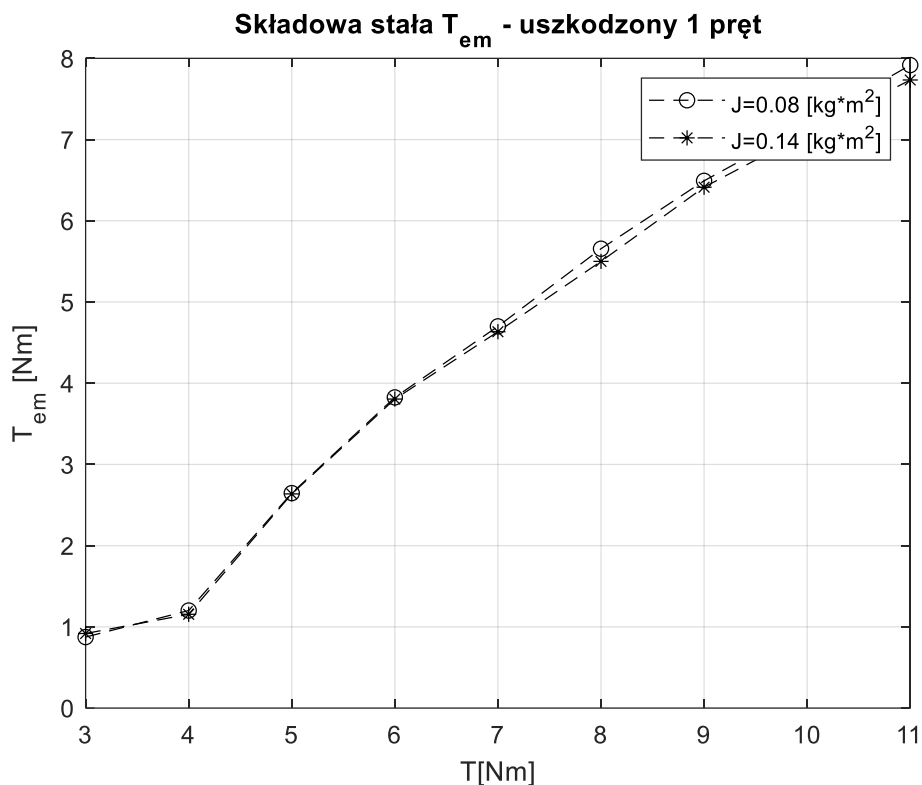
Rys. 4.23. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,14$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.



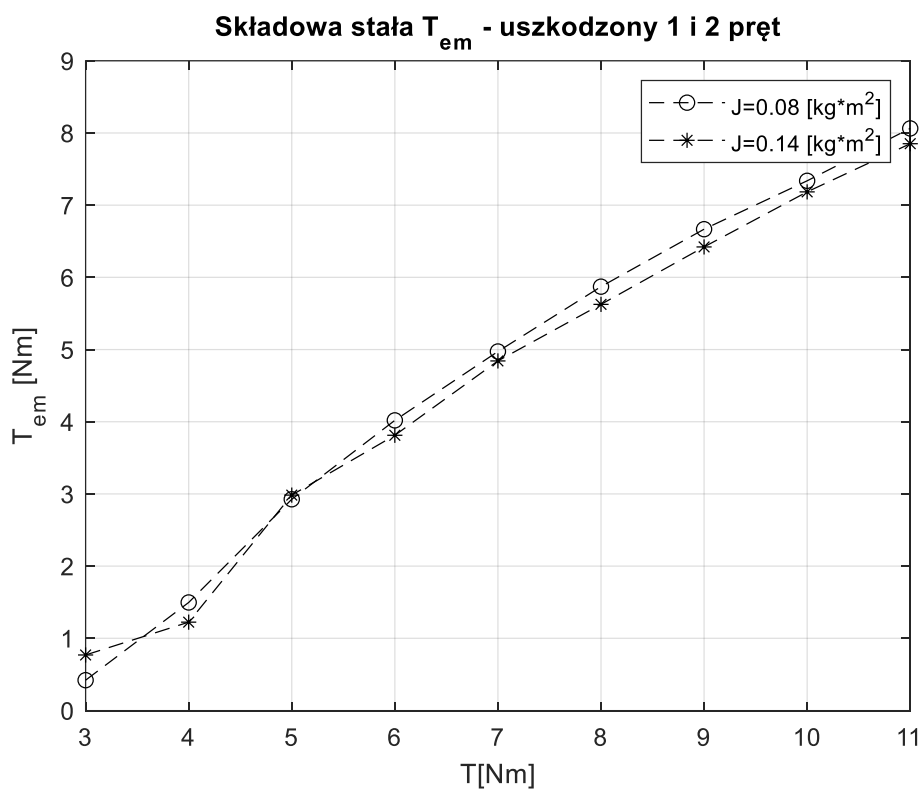
Rys. 4.24. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,14$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.



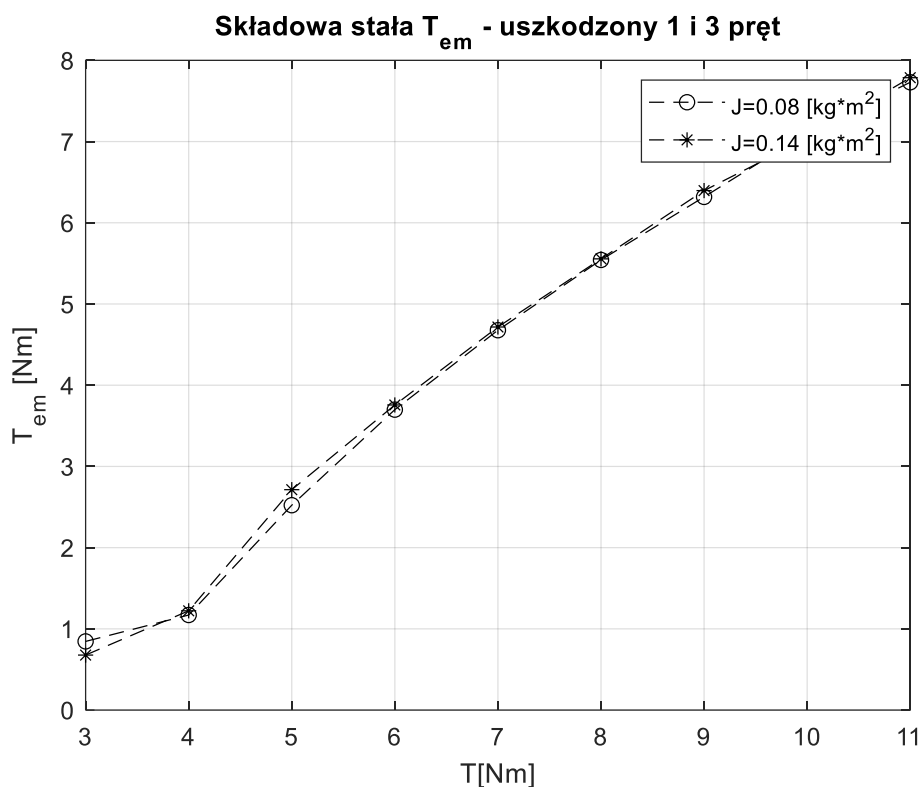
Rys. 4.25. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,14$ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.



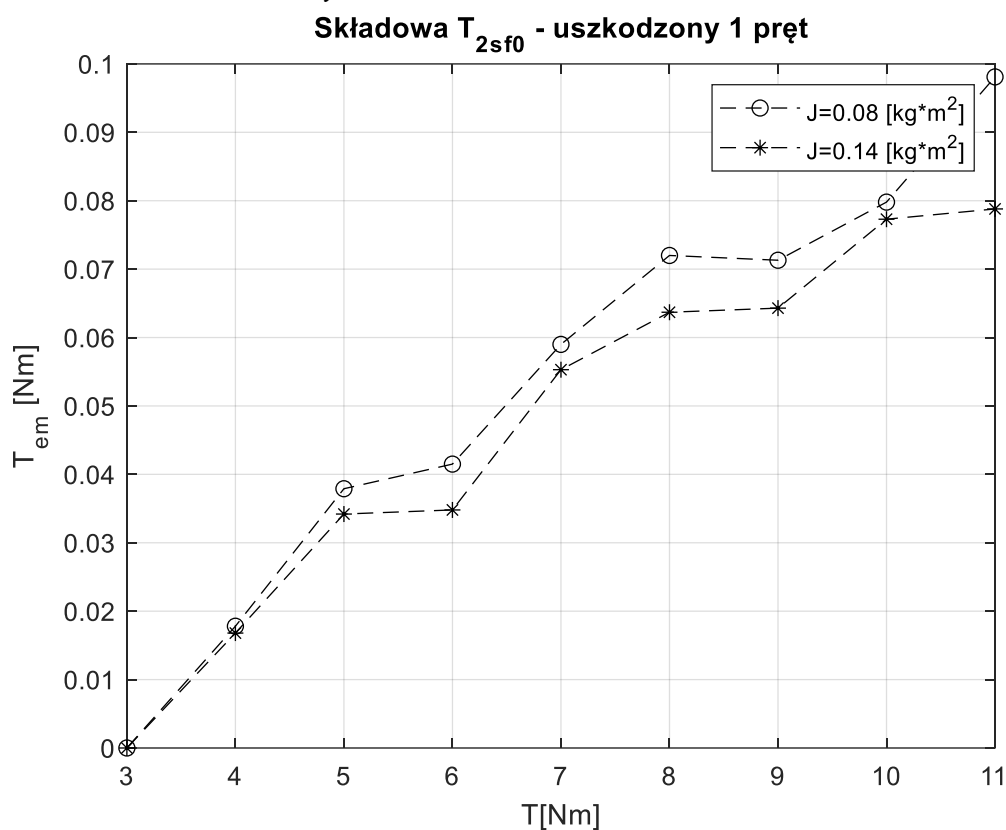
Rys. 4.26. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



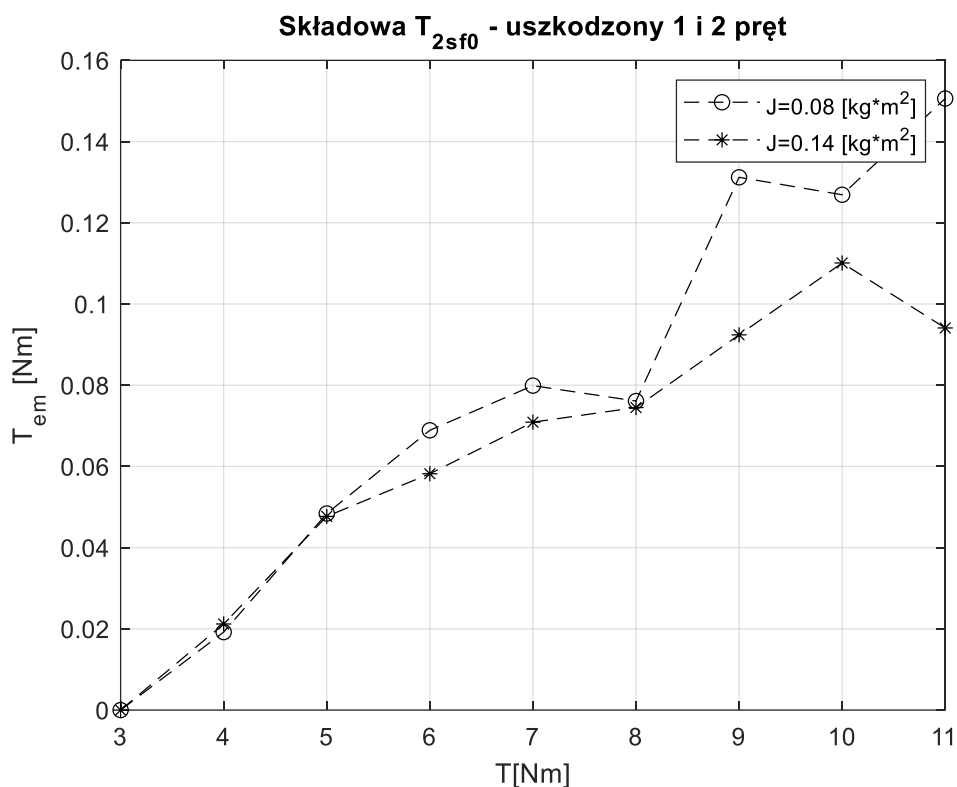
Rys. 4.27. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 2 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



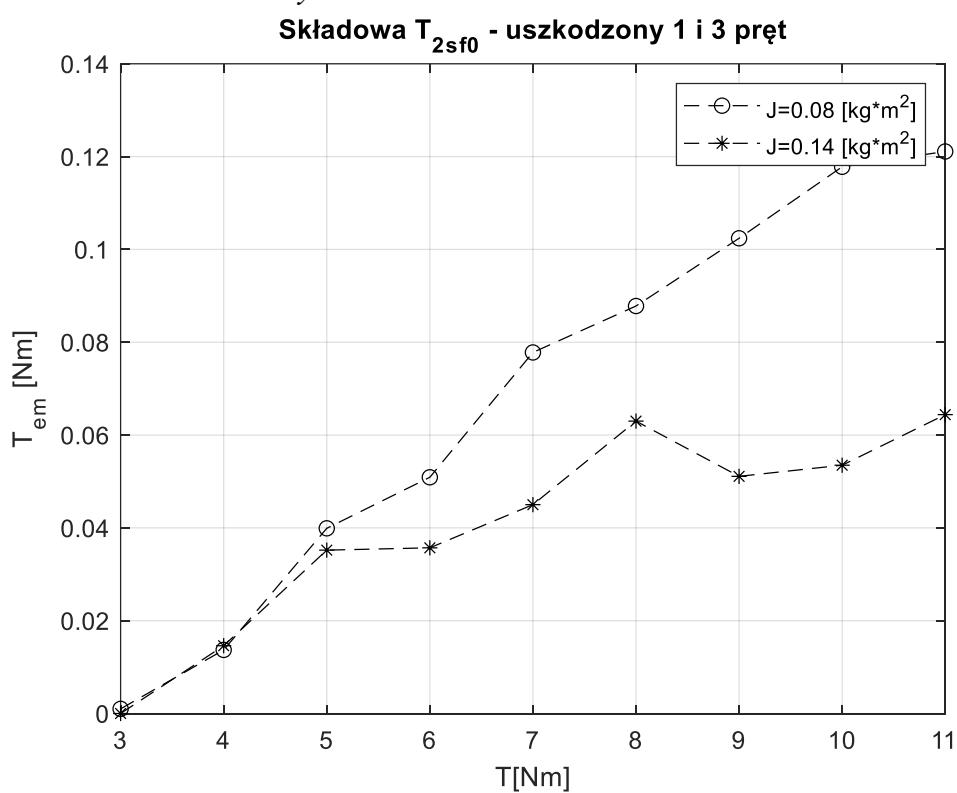
Rys. 4.28. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



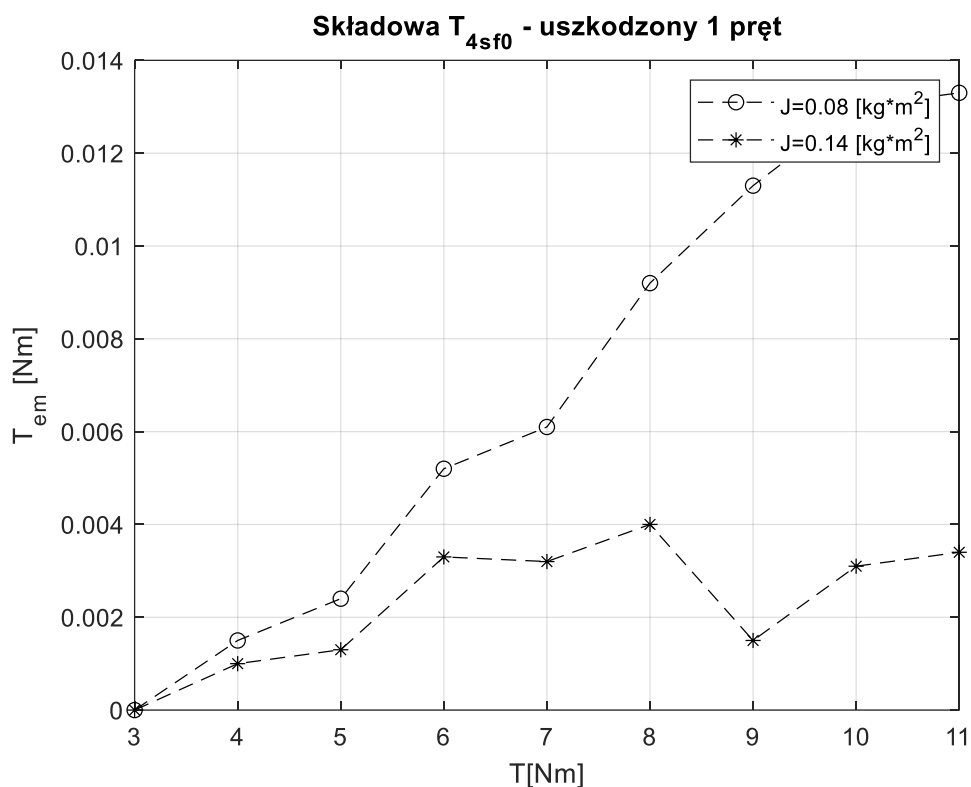
Rys. 4.29. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



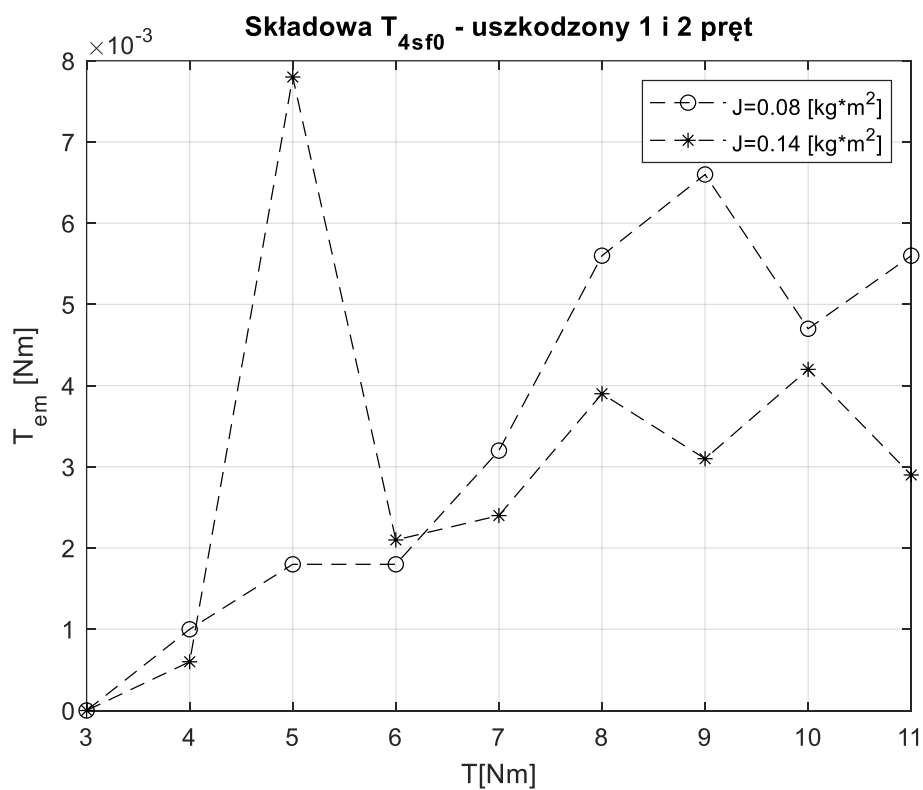
Rys. 4.30. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 2 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



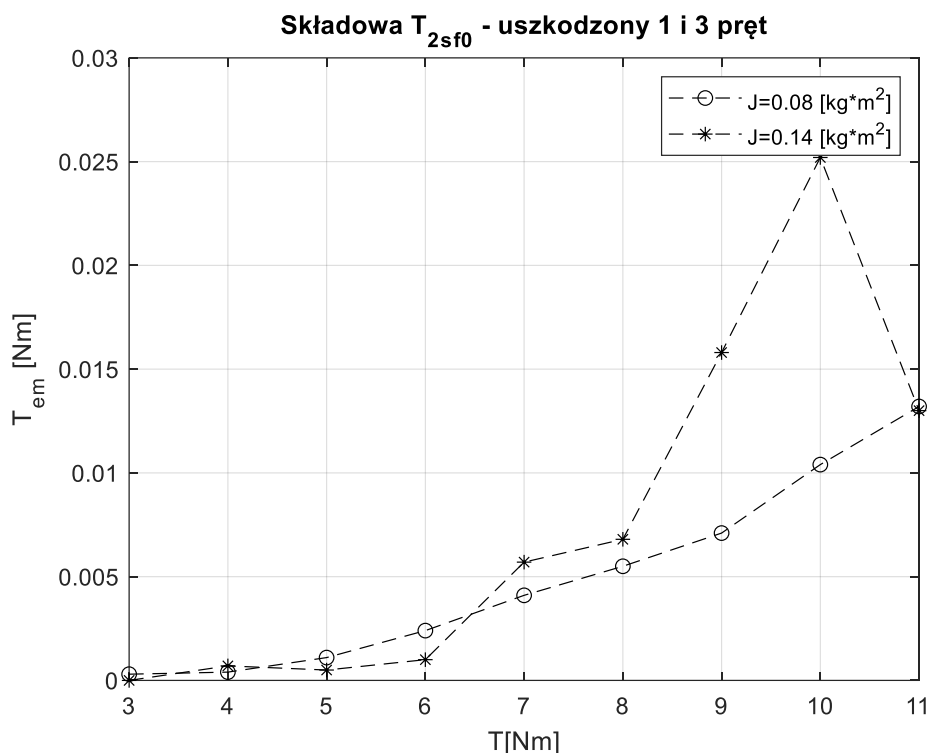
Rys. 4.31. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



Rys. 4.32. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



Rys. 4.33. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 2 prętów klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.



Rys. 4.34. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.

Na Rys. 4.29. do Rys.4.31. przedstawiono zmiany maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia odpowiednio 1 pręta, 1 i 2 pręta oraz 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika. Na Rys. 4.32. do Rys.4.34. przedstawiono zmiany maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia odpowiednio 1 pręta, 1 i 2 pręta oraz 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.

Wyniki obliczeń zestawione w Tabeli.4.2. do Tabeli.4.4. oraz ilustracje zależności wartości zestawionych w tych tabelach w przypadku pomiarów nie są na tyle jednoznaczne jak w przypadku obliczeń numerycznych z modelu obwodowego czy modelu polowego. Znaczna niedokładność przy zadaniu wymaganych warunków obciążenia, wpływ zakłóceń dość znacznie utrudniają weryfikację opracowanego modelu. Na Rys. 4.12. i Rys. 4.13. przedstawiono zależność maksymalnych amplitud składowych poslizgowych $f_0(1-2s)$, $f_0(1+2s)$ od zmian momentów bezwładności wirnika. Te zależności dobrze potwierdzają zgodność jakościową z wynikami obliczeń zarówno z modelu obwodowego jako i modelu polowo-obwodowego. Można uznać za potwierdzenie, że wskaźniki diagnostyczne pozwalają dokładniej rozpoznać uszkodzenie klatki wirnika w oparciu o opracowany model monoharmoniczny silnika indukcyjnego klatkowego.

5. PODSUMOWANIE

5.1. Ocena przydatności i stosowalności opracowanych modeli uproszczonych na podstawie przeprowadzonych badań

W tym rozdziale zostanie oceniona przydatność modelu monoharmonicznego do zadań związanych z diagnostyką klatki wirnika. Zostaną przedstawione schemat zastępcze dla poszczególnych składowych, które mogą być łatwo zaimplementowane w układach diagnostycznych oraz w końcowej części zostaną sformułowane wnioski końcowe.

Na podstawie przeprowadzonych analiz zarówno dla obliczeń obwodowych dla modelu z pełnym odwzorowaniem klatki wirnika jak i dla modelu zredukowanego, również przez analizy w oparciu o obliczenia polowe jak i pomiary laboratoryjne można wykazać przydatność opracowanego modelu zredukowanego.

Najważniejszą przesłanką wynikającą z badań jest fakt, że opracowany model pozwala uzyskać poprawne wyniki rozwiązań przy stałej prędkości obrotowej i założeniu liniowego układu równań. Na podstawie przeprowadzonych badań zmian momentu obciążenia możemy uznać, że obciążenie silnika ma wpływ na poprawność modelu. Z przeprowadzonych badań możemy sformułować wniosek, że do poślizgu znamionowego model uproszczony jest poprawny.

Wszystkie badania dla modelu uproszczonego przy badaniu jego poprawności przeprowadzono dla stanów ustalonych. Istnieje też możliwość zbudowania modelu dynamicznego całkownego numerycznie. Jest to możliwe przy odwzorowaniu niesymetrii w macierzy rezystancji w ten sposób, jak to zostało przedstawione w rozdziale 2 a macierze indukcyjności odzwierciedlamy jak w modelu pełnym całkownym numerycznie.

Modelowanie w tym przypadku będzie polegało na uwzględnieniu indukcyjności głównych, indukcyjności rozproszeń niezmiennych w stosunku do modelu pełnego, będą się zmieniać tylko macierze rezystancji, w których zostanie odzwierciedlona niesymetria.

W modelu z uproszczonym odwzorowaniem klatki można uwzględnić również nieliniowość. Sposób uwzględnienia nieliniowości był pokazany w artykule autora rozprawy [72]. Uwzględnienie nieliniowości polegało na wprowadzeniu do równań modelu prądu magnesującego, w którym uwzględniono pulsacje składowej $\omega(1-2s)$ i to ta składowa powoduje pojawienie się składowej $\omega(1+2s)$.

W modelu tym można uwzględnić niesymetrie zasilania oraz można zaobserwować wpływ niesymetrii na charakterystyczne symptomy diagnostyczne. Po wprowadzeniu składowej

symetrycznej przeciwnej napięć można pokazać, że z tego modelu możemy uzyskać w rozwiązaniach składową $\omega(3-2s)$. Zostało to pokazane również w pracy autora [72].

Trzeci przypadkiem, gdzie można zweryfikować przydatność modelu zredukowanego to badanie wpływu równania mechanicznego na dokładność rozwiązań uzyskanych rozwiązań.

Dotychczas prezentowane badania symulacyjne zostały zweryfikowane na unikalnym stanowisku specjalnie przygotowanym na potrzebę realizacji rozprawy doktorskiej i zbadano tu wpływ bezwładności wirnika na amplitudę symptomów diagnostycznych. Z przeprowadzonych badań jasno wynika i potwierdzają to również obliczenia polowe jak również pomiary, że jeśli uwzględni się wpływ równania mechanicznego, to stan ustalony daje takie rezultaty, że z tego modelu dostaje się poprawny prązek $f_0(1-2s)$ i $f_0(1+2s)$ oraz momenty elektromagnetyczne $T_{2s\omega_0}$ oraz $T_{4s\omega_0}$. Potwierdza to w dalszym ciągu przydatność tego modelu dla małych poślizgów i symetrycznego zasilania. W dalszej części zostaną przedstawione zasady redukcji schematów zastępczych dla składowej zgodnej i przeciwnej.

5.2.Redukcja schematów modelu dla składowej zgodnej i przeciwnej

W stanie ustalonym i symetrycznym układzie napięć zasilających $u_s^1 = U_s^1 \cdot e^{j\Omega_s t}$ i gdzie prędkość jest stała $\Omega = (1-s)\Omega_s$ układ równań redukujemy do poniższej postaci [69], [72]:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} U_s^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{2s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{s} (1+k_{\text{sym}}) & \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{s} \cdot k_{\text{asym}} \cdot e^{j\delta} \\ 0 & 0 & \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{s} \cdot k_{\text{asym}} \cdot e^{-j\delta} & \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{s} (1+k_{\text{sym}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s^1 \\ I_s^2 \\ I_{r, (m-1p-\Omega)}^1 \\ I_{r, (m-1p-\Omega)}^2 \end{bmatrix} + \\
 + j \cdot \begin{bmatrix} X_s^\delta + X_\mu & 0 & X_\mu & 0 \\ 0 & X_s^\delta + X_\mu & 0 & X_\mu \\ X_\mu & 0 & X_r^{i\sigma, p} + X_\mu & 0 \\ 0 & X_\mu & 0 & X_r^{i\sigma, p} + X_\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s^1 \\ I_s^2 \\ I_{r, (m-1p-\Omega)}^1 \\ I_{r, (m-1p-\Omega)}^2 \end{bmatrix} & \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

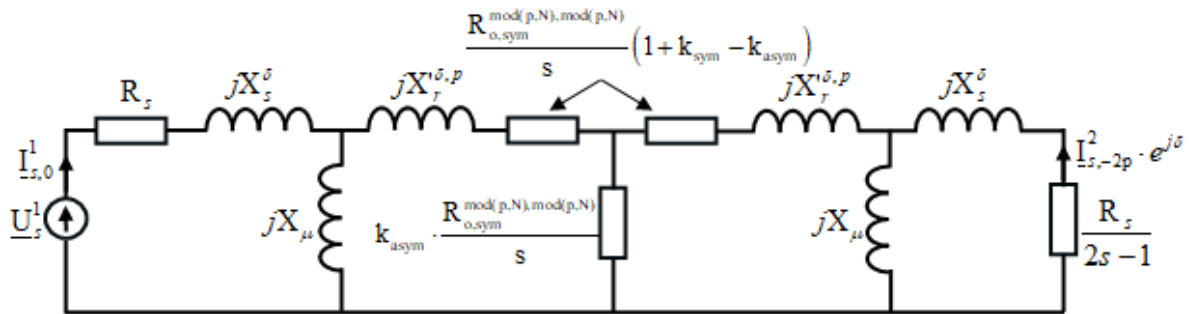
gdzie:

$$i_s^1 = I_s^1 \cdot e^{j\Omega_s t} \quad i_s^2 = I_s^2 \cdot e^{-j(1-2s)\Omega_s t}$$

$$i_r^1 = I_r^1 \cdot e^{js\Omega_s t} \quad i_r^2 = I_r^2 \cdot e^{js\Omega_s t}$$

$$X_r^{i\sigma, p} = X_r^{i\sigma, (\text{mod}(p,N), (\text{mod}(p,N)))}$$

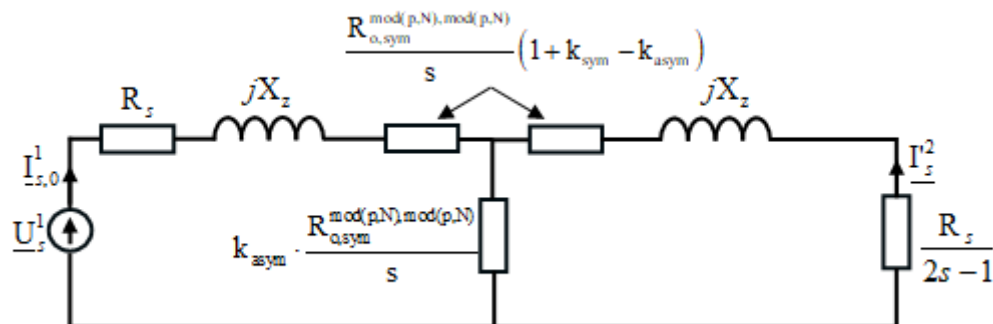
Mnożąc drugie i ostatnie równanie przez $e^{-j\delta}$ oraz wprowadzając $I_s^2 = I_s^2 \cdot e^{-j\delta}$ i $I_r^2 = I_r^2 \cdot e^{-j\delta}$ można narysować równoważny schemat silnika z uszkodzoną klatką:



Rys. 5.1. Równoważny schemat silników indukcyjnych z uszkodzoną klatką dla składowej zgodnej.

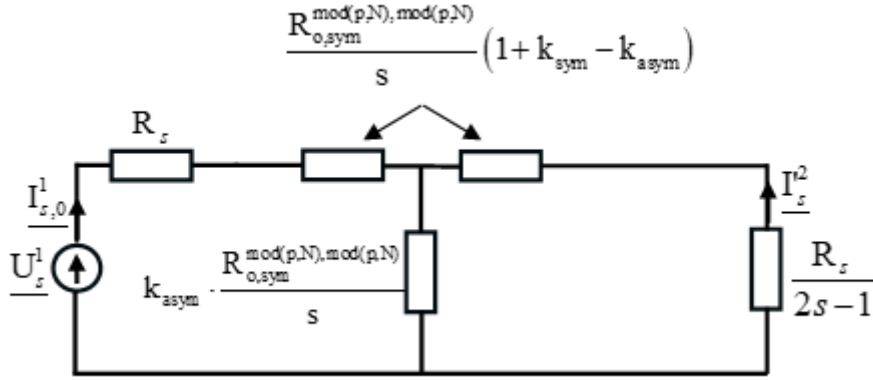
W przypadku poślizgu zbliżonego do znamionowego reaktancję X_m można pominąć, co prowadzi do równań:

$$\begin{bmatrix} U_s^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + jX_z & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{2s-1} + jX_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_{o,sym}^{mod(p,N),mod(p,N)}}{s} (1 + k_{sym}) & \frac{R_{o,sym}^{mod(p,N),mod(p,N)}}{s} \cdot k_{asym} \\ \frac{R_{o,sym}^{mod(p,N),mod(p,N)}}{s} \cdot k_{asym} & \frac{R_{o,sym}^{mod(p,N),mod(p,N)}}{s} (1 + k_{sym}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s^1 \\ I_s^2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$



Rys. 5.2. Równoważny uproszczony schemat zastępczy silników indukcyjnych z uszkodzoną klatką dla składowej zgodnej.

gdzie X_z jest reaktancją zwarciovą silnika $X_z = X_{\sigma_s} + X_{\sigma_r}^p$. Odpowiedni obwód równoważny przyjmuje następującą formę:



Rys. 5.3. Czysto rezystancyjny równoważny schemat zastępczy silników indukcyjnych z uszkodzoną klatką dla składowej zgodnej.

Ponadto, pomijając reaktancję X_z , otrzymujemy niezwykle prosty obwód równoważny (czysto rezystancyjny):

Równanie modelu jest następujące:

$$\begin{bmatrix} U_s^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{s} (1 + k_{\text{sym}}) & \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{s} \cdot k_{\text{asym}} \\ \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{s} \cdot k_{\text{asym}} & \frac{R_s}{2s-1} + \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{s} (1 + k_{\text{sym}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s^1 \\ I_s^2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

W podsumowaniu autor opisuje uzyskane efekty i osiągnięcia pracy i uzyskane wyniki badań w sposób zwięzły i uporządkowany, odnosząc się do celu i założeń pracy oraz osiągnięć opisanych w poszczególnych rozdziałach. Wskazuje możliwości kontynuacji lub rozszerzenia tematu pracy lub co należy zweryfikować, jeżeli rezultaty nie są zadowalające.

Dla składowej przeciwnej w stanie ustalonym i symetrycznym układzie napięć zasilających

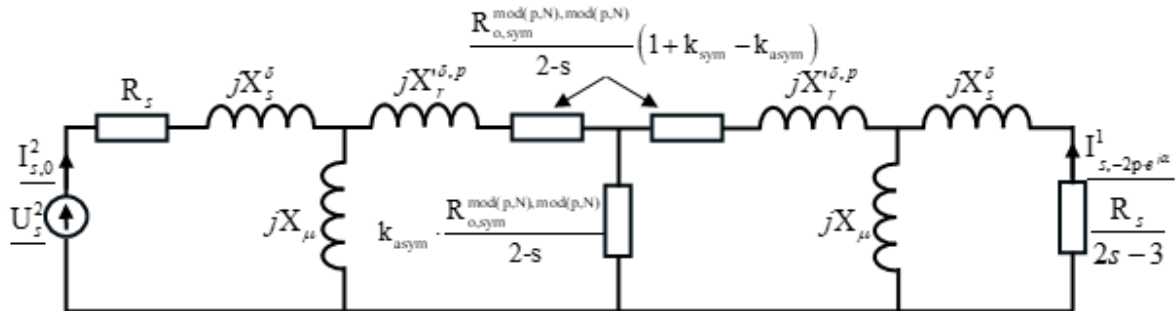
$U_s^2 \cdot e^{-j\Omega_s t}$ i gdzie prędkość jest stała $\Omega = (1-s)\Omega_s$ prąd przewidujemy w postaci $I_{s,0}^2 \cdot e^{-j\Omega_s t}$ i $I_{s,-2p}^2 \cdot e^{j(-\Omega_s - 2p\Omega)t}$ układ równań redukujemy do poniższej postaci [69], [72]:

$$\begin{bmatrix} U_s^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{3s-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{2-s} (1+k_{\text{sym}}) & \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{2-s} \cdot k_{\text{asym}} \cdot e^{-j\delta} \\ 0 & 0 & \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{2-s} \cdot k_{\text{asym}} \cdot e^{-j\delta} & \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{2-s} (1+k_{\text{sym}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{s,0}^2 \\ I_{s,-2p}^1 \\ I_{r,(m-1p)\Omega}^1 \\ I_{r,(m-1p)\Omega}^2 \end{bmatrix} + \\
 + j \cdot \begin{bmatrix} X_s^\delta + X_\mu & 0 & X_\mu & 0 \\ 0 & X_s^\delta + X_\mu & 0 & X_\mu \\ X_\mu & 0 & X_r^{\sigma,p} + X_\mu & 0 \\ 0 & X_\mu & 0 & X_r^{\sigma,p} + X_\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s^1 \\ I_{s,-2p}^2 \\ I_{r,(m-1p)\Omega}^1 \\ I_{r,(m-1p)\Omega}^2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

gdzie:

$$X_r^{\sigma,p} = X_r^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}$$

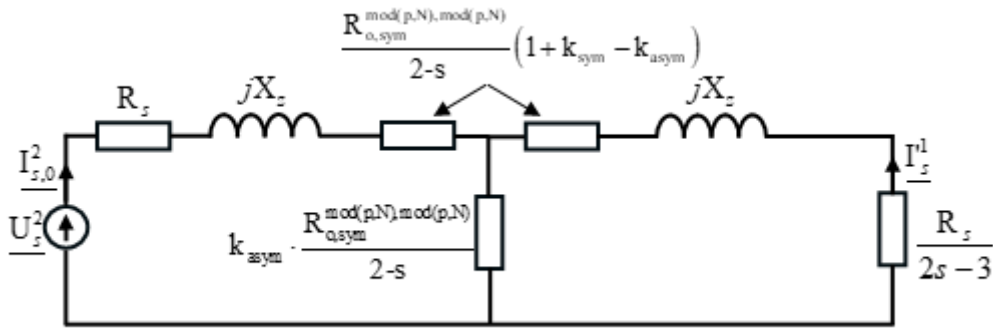
Mnożąc drugie i ostatnie równanie przez $e^{-j\delta}$ oraz wprowadzając $I_s^2 = I_s^1 \cdot e^{-j\delta}$ i $I_r^2 = I_r^1 \cdot e^{-j\delta}$ można narysować równoważny schemat silnika z uszkodzoną kłatką:



Rys. 5.4. Równoważny schemat zastępczy silników indukcyjnych z uszkodzoną kłatką dla składowej przeciwnej.

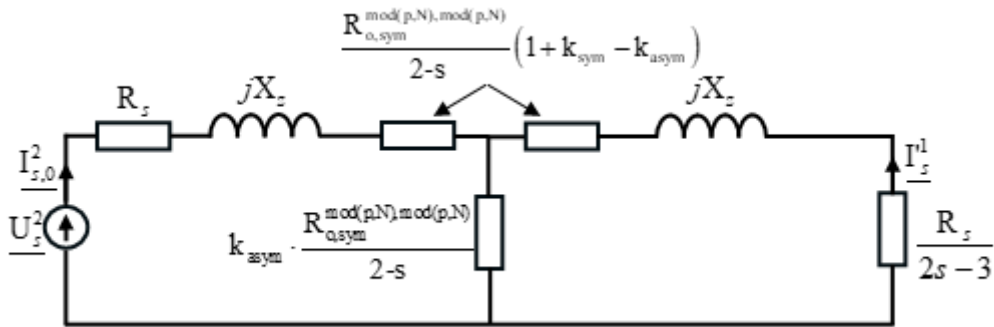
W przypadku poślizgu zbliżonego do znamionowego reaktancję X_m można pominąć, co prowadzi do równań:

$$\begin{bmatrix} U_s^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + jX_z & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{3s-2} + jX_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{2-s} (1+k_{\text{sym}}) & \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{2-s} \cdot k_{\text{asym}} \\ \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{2-s} \cdot k_{\text{asym}} & \frac{R_{o, \text{sym}}^{\text{mod}(p,N), \text{mod}(p,N)}}{2-s} (1+k_{\text{sym}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s^2 \\ I_{s,-2p}^1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$



Rys. 5.5. Równoważny uproszczony schemat zastępczy silników indukcyjnych z uszkodzoną klatką dla składowej przeciwnej.

gdzie X_z jest reaktancją zwarciovą silnika $X_z = X_{\sigma s} + X_{\sigma r}^p$. Odpowiedni obwód równoważny przyjmuje następującą formę:



Rys. 5.6. Czysto rezystancyjny równoważny schemat zastępczy silników indukcyjnych z uszkodzoną klatką dla składowej przeciwnej.

Ponadto, pomijając reaktancję X_z , otrzymujemy niezwykle prosty obwód równoważny (czysto rezystancyjny):

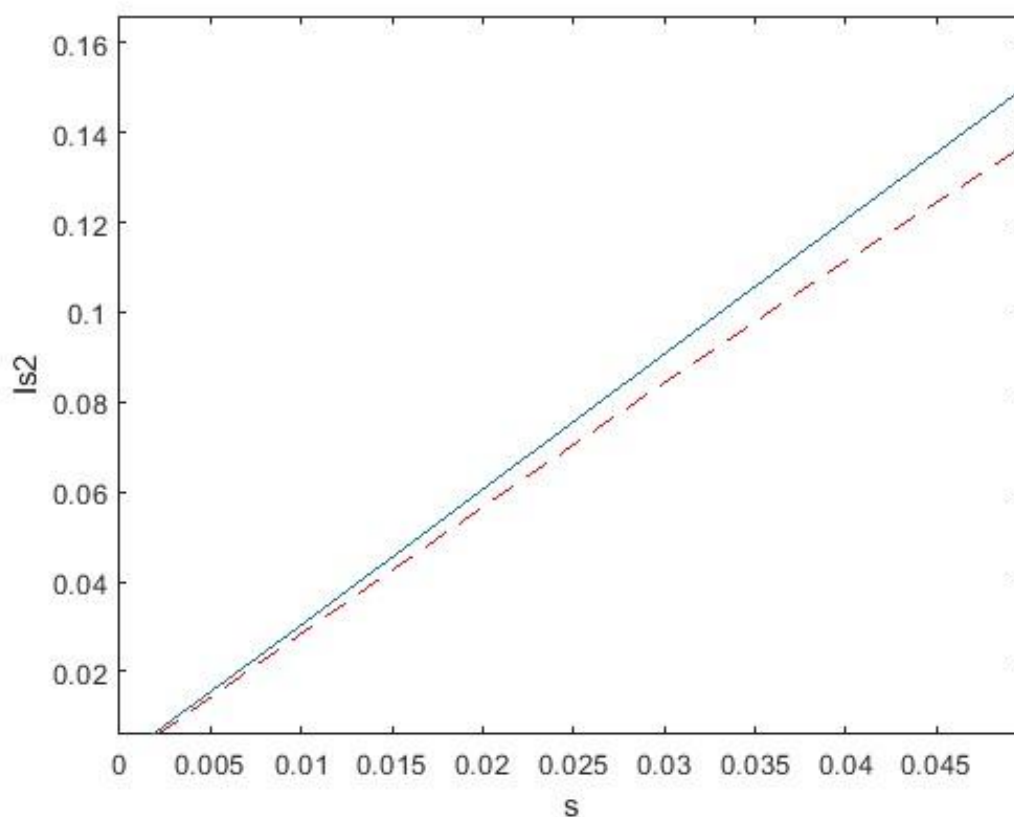
Równanie modelu jest następujące:

$$\begin{bmatrix} U_s^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + \frac{R_{o,sym}^{\text{mod}(p,N),\text{mod}(p,N)}}{2-s} (1+k_{sym}) & \frac{R_{o,sym}^{\text{mod}(p,N),\text{mod}(p,N)}}{2-s} \cdot k_{asym} \\ \frac{R_{o,sym}^{\text{mod}(p,N),\text{mod}(p,N)}}{2-s} \cdot k_{asym} & \frac{R_s}{2s-3} + \frac{R_{o,sym}^{\text{mod}(p,N),\text{mod}(p,N)}}{2-s} (1+k_{sym}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s^2 \\ I_s^1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Przedstawione schematy zastępcze dla silnika indukcyjnego dla składowej zgodnej i przeciwnej można zaimplementować w wybranym programie symulacyjnym i można je łatwo wykorzystać w systemach diagnostycznych do szybkiej generacji wzorców diagnostycznych na potrzebę dokładniejszego rozpoznania uszkodzenia klatki wirnika.

5.3. Możliwości zastosowania modelu zredukowanego w diagnostyce silników indukcyjnych

Można zauważyć, że uproszczone równania modelu monoharmonicznego dla poszczególnych składowych od (5.1) do (5.6) zostały opracowane przy założeniu małych poślizgów. Rys. 5.7. pokazuje różnice między wartościami uzyskanymi z równań dla małych poślizgów. W normalnych warunkach pracy krzywe prawie się pokrywają. Oznacza to, że współczynniki asymetrii i uproszczone równania (5.1) do (5.6) mogą być z powodzeniem stosowane do obliczania prądu stojana przy uszkodzeniach klatki wirnika silnika indukcyjnego [69].



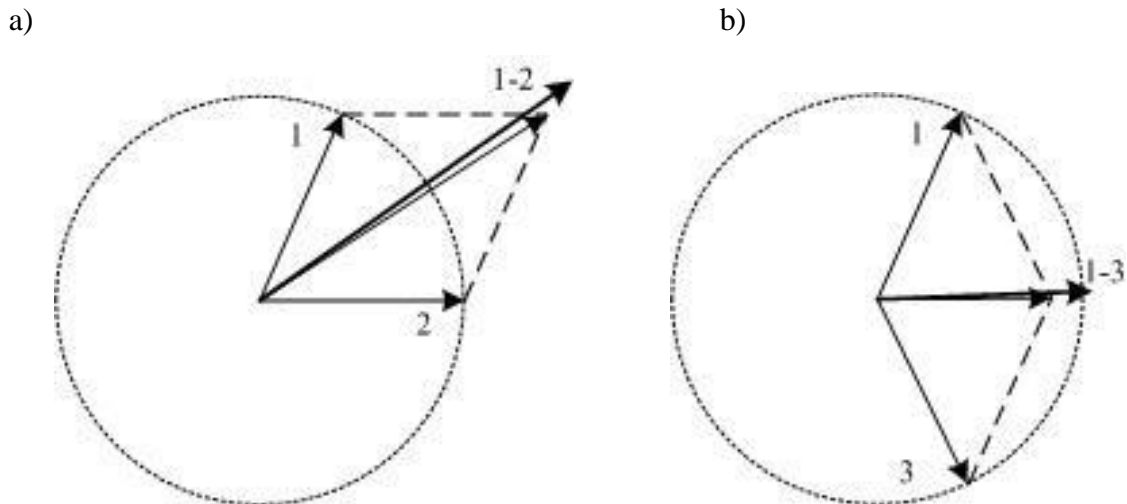
Rys. 5.7. Zależna od poślizgu składowa prądów stojana $|I_{s,-2p}^2|$ w funkcji poślizgu z pełnego (linia ciągła) i modeli uproszczonych (linia przerywana).

Z wyników podanych w Tabeli 2.4. wynika, że składowa $|I_{s,-2p}^2|$ zależna od poślizgu może być niewystarczająca do wskazania uszkodzenia klatki. Wartość wskaźnika jest różna dla przypadku różnie rozłożonego uszkodzenia prętów klatki na obwodzie wirnika.

Na przykład, biorąc pod uwagę dwa uszkodzone pręty 1 i 2 oraz dwa uszkodzone pręty 1 i 3 wartości amplitudy składowej poślizgowej $f_0(1-2s)$ może pozwalać na błędną diagnozę co do

niesymetrii klatki i stanu jej uszkodzenia. Dopiero znajomość wskaźników diagnostycznych informujących o stanie asymetrii klatki pozwala wiarygodnie ocenić poziom uszkodzenia.

Na Rys.5.8. zobrazowano zależności składowych prądów stojana $|\mathbf{I}_{s,-2p}^2|$ w zależności od rozłożenia miejsca uszkodzenia prętów na obwodzie wirnika dla uszkodzonego 1 i 2 pręta klatki wirnika oraz uszkodzonego 1 i 2 pręta klatki wirnika [72].



Rys. 5.8. Zależności składowych prądów stojana $|\mathbf{I}_{s,-2p}^2|$ w zależności od rozłożenia miejsca uszkodzenia prętów na obwodzie wirnika dla: a) uszkodzonego 1 i 2 pręta klatki wirnika, b) uszkodzonego 1 i 2 pręta klatki wirnika.

Na Rys. 5.8 zobrazowano subtelne różnice, które mogą wystąpić w przypadku różnego rozmieszczenia uszkodzonych prętów klatki wirnika.

W pracy [72] zaproponowano i podano definicje współczynników określających ilościowo asymetrię klatki. Posługiwanie się tymi współczynnikami stwarza możliwość porównania i klasyfikacji uszkodzeń klatki bez obliczania prądów. Współczynniki asymetrii wprowadzone w pracy są wynikiem szczegółowej analizy równań silnika indukcyjnego z uszkodzoną klatką. W pracy [72] wykazano, że proponowane współczynniki asymetrii stanowią bardzo dobre miary asymetrii klatki, gdyż pozostają w ścisłym związku z wartościami dodatkowej składowej w prądach fazowych stojana o częstotliwości $f_0(1-2s)$, charakterystycznej dla pojawienia się asymetrii klatki wirnika.

5.4. Wnioski końcowe

W rozprawie przedstawiono opracowanie zredukowanego prostego modelu diagnostycznego silnika indukcyjnego klatkowego pozwalającego na przeprowadzenie szybkich obliczeń bez konieczności stosowania wysokowydajnych narzędzi obliczeniowych. Analizę rozpoczęto od modelu matematycznego silnika asynchronicznego z niesymetrią rezystancyjną klatki, w którym uwzględniono wyższe harmoniczne. Dla tego modelu przedstawiono równania stanu ustalonego, a następnie pokazano widma prądu stojana dla symetrii oraz kilku przypadków silnika z uszkodzonymi prętami klatki. W kolejnym kroku pokazano monoharmoniczne równania stanu ustalonego silnika asynchronicznego z niesymetrią rezystancyjną klatki. Zdefiniowanie współczynników niesymetrii klatki i wprowadzenie ich do monoharmonicznego modelu pozwoliło uzyskać model analogiczny jak dla silnika indukcyjnego pierścieniowego. Uzyskany model zweryfikowano modelem obwodowym wieloharmonicznym utworzonym na podstawie metody bilansu harmonicznym, modelem obwodowym monoharmonicznym całkownym numerycznie z równaniem mechanicznym, modelem polowym uwzględniającym dwuwymiarową geometrię silnika i oddziaływania elektromechaniczne oraz nieliniowość typu parametrycznego. Ponadto dla weryfikacji modeli przeprowadzono badania laboratoryjne.

Do istotnych osiągnięć uzyskanych podczas prowadzonych badań można zaliczyć:

- utworzenie wieloharmonicznego obwodowego modelu na podstawie metody bilansu harmonicznym przy zadanej stałej prędkości wirowania wirnika, linowej charakterystyce magnesowania i teoretycznie nieskończonym widmie składowych przestrzennych,
- utworzenie modelu obwodowego monoharmonicznego całkownego numerycznie z równaniem mechanicznym oraz odkształceniem charakterystyki magnesowania wyrażonej za pomocą indukcyjności głównej w funkcji prądu biegu jałowego,
- utworzenie modelu polowego-obwodowego silnika indukcyjnego, uwzględniającego dwuwymiarową geometrię silnika i oddziaływania elektromechaniczne oraz nieliniowość typu parametrycznego,
- opracowanie projektu stanowiska pomiarowego i przygotowanie specjalnie spreparowanych uszkodzeń klatki wirnika na potrzebę weryfikacji modelu,
- opracowanie i wykonanie projektu umożliwiającego prowadzenie badań dla różnych momentów bezwładności układu napędowego,

- opracowanie programu do obliczeń numerycznych stanowiącego szybki generator cech opisujących niesymetrię elektryczną wirnika,
- uzyskanie wskaźników pozwalających określać stopień niesymetrii klatki, co umożliwia ilościowe porównywanie różnych uszkodzeń klatki wirnika,
- opracowanie prostego modelu niewymagającego zaawansowanego sprzętu obliczeniowego,
- zweryfikowanie adekwatności opracowanego modelu podczas badań obliczeń numerycznych, polowych i eksperymentalnych w laboratorium.

Na podstawie przeprowadzonych badań nad możliwością stosowania zredukowanego modelu diagnostycznego silnika indukcyjnego klatkowego można sformułować następujące wnioski:

- Istnieje możliwość opracowania zredukowanego modelu matematycznego silnika klatkowego do wymiaru maszyny pierścieniowej z niesymetrią elektryczną wirnika,
- Opracowany model w zakresie małych poślizgów spełnia swoją funkcję jako uniwersalny, prosty wzorzec diagnostyczny.

Opracowany w rozprawie uproszczony model monoharmoniczny może być z powodzeniem stosowane do diagnostyki uszkodzeń klatki silników indukcyjnych przy uwzględnieniu pewnych ograniczeń.

Zdaniem autora uzyskane wyniki badań wykazały, że zastosowanie modelu zredukowanego istotnie upraszcza generowanie wzorców diagnostycznych. Dlatego należy kontynuować te badania i zaimplementować wyniki badań a szczególnie opracowane schematy zastępcze dla składowej zgodnej i składowej przeciwnej w spójnym środowisku umożliwiającym prowadzenie wieloprzekrojowych badań symulacyjnych i szybką generację bazy wzorców dla dowolnego silnika. Dobrym środowiskiem do implementacji tych schematów może być środowisko Matlab/Simulink lub LabVIEW.

Na podstawie przedstawionych powyżej wniosków, zdaniem autora, teza rozprawy została udowodniona oraz cel i zakres pracy został w pełni zrealizowany.

LITERATURA

- [1] Antonio-Daviu J., Riera-Guasp M., Folch J., Palomares M.: *Validation of a new method for the diagnosis of rotor bar failures via wavelet transform in industrial induction machines*. IEEE Transactions on Industry Applications, Volume: 42, Issue: 4, 2006, s 990-996.
- [2] Bachir S., Tnani S., Trigeassou J. -C., Champenois G.: *Diagnosis by parameter estimation of stator and rotor faults occurring in induction machines*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, Volume: 53, Issue: 3, 2006, s. 963-973.
- [3] Bellini A., Concari C., Franceschini G, Lorenzani E., Tassoni C., Toscani A.: *Thorough understanding and experimental validation of current sideband components in induction machines rotor monitoring*. IECON 2006 - 32nd Annual Conference on IEEE Industrial Electronics, 2006, s. 4957-4962.
- [4] Bellini A., Concari C., Franceschini G., Lorenzani E., Tassoni C., Toscani A.: *Virtual inertia test bed for quantification of sideband currents in induction machines diagnostics*. IECM 2006, Chania, Crete Island, Greece, 2-5 Sept. 2006.
- [5] Bellini A., Filippetti F., Franceschini G, Tassoni C., Kliman G. B.: *Quantitative Evaluation of induction motor broken bars by means of electrical signature analysis*. IEEE Transactions on Industry Applications, 2000, S. 484-490.
- [6] Bellini A., Filippetti F., Franceschini F., Sobczyk T., Tassoni C.: *Diagnosis of induction machines by d-q and i.s.c. rotor models*. 2005 5th IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives
- [7] Bellini A., Filippetti F., Franceschini F., Sobczyk T., Tassoni C.: *Unique classification of single frequency induction motors features introduced by different anomalies*. 2001 IEEE International Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics and Drives, September 1-3, 2001, Grado, Italy, s. 435-440.
- [8] Bernatt M., Rut R., Mróz J.: *O uszkodzeniach klatek wirnika*. Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, Nr 79, 2008, s. 7-12.
- [9] Biernat A.: *Analiza sygnałów diagnostycznych maszyn elektrycznych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2015.
- [10] Boldea I., Nasad S. A.: *The induction machine handbook*. CRC Press, 2002.
- [11] Bossio G.R., De Angelo C. H., Pezzani C. M., Bossio J. M., Garcia G. O.: *Evaluation of harmonic current sidebands for broken bar Diagnosis in induction motor*. IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives, 2009, s. 1-6.
- [12] Boumegoura T., Marques J.C., Yahoui H., Clerc G., Hammouri H.: *Rotor induction machine failure: analisys and diagnosis*. European Transactions on Electrical Power 2004, 14, s. 71-84
- [13] Concari C., Franceschini G., Tassoni C.: *Discerning mechanical load unbalances from rotor faults in induction machines through current space vector components*. IECON 2010 - 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society, 2010, s. 2609-2614.
- [14] Dems M.: *Symulacja komputerowa przebiegów elektromechanicznych w silnikach indukcyjnych klatkowych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, nr 754, Łódź 1996.
- [15] Dems M., Komeza K.: *Modelowanie statycznych i dynamicznych stanów pracy silników indukcyjnych*. Monografie Politechniki Łódzkiej, Łódź 2011.

- [16] Didier G., Ternisien E., Casparey O., Razik H.: *Fault detection of broken rotor bars in induction motor using a global fault index*. IEEE Transactions on Industry Applications, 2006, 42 (1), s.79-88.
- [17] Douglas H., Pillay P., Ziarani A.: *Broken bar detection of in induction machines with transient operating speed*. IEEE Transactions on Energy Conversion, Volume: 20, Issue: 1, 2005, s.135-141.
- [18] Drak B.: *Typowe uszkodzenia silników indukcyjnych dużej mocy*. Zeszyty problemowe – Maszyny Elektryczne, Nr 89, 2011, s. 7-14.
- [19] Drak B.: *Zniszczenia klatek rozruchowych wirników dwuklatkowych silników indukcyjnych*. Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, Nr 97, z.4, 2012, s. 63-66.
- [20] Drak B., Zientek P.: *Analiza uszkodzeń silników wysokonapięciowych prądu przemiennego w elektrowniach zawodowych*. Zeszyty problemowe – Maszyny Elektryczne, Nr 1 (98), 2013, s. 135-141.
- [21] Drozdowski P.: *Kształtowanie charakterystyk i własności ruchowych wielofazowych silników indukcyjnych klatkowych*. Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Seria Inżynieria Elektryczna i Komputerowa, Monografia 278, Kraków 2000.
- [22] Drozdowski P., Sobczyk T.J.: *On a mathematical of squirrel-cage induction motors*. Springer-Verlag, Archiv für Elektrotechnik, Vol. 70, 1987, s. 371-382.
- [23] Elawgali S.S.H.: *Diagnosing of rotor eccentricity and clutch wobbling of the induction machines, based of inspection of spectrums of the calculated and registered currents*. Akademia Górniczo Hutnicza w Krakowie, Rozprawa Doktorska, Kraków 2007.
- [24] Filippetti F., Franceschini G., Tassoni C., Vas P.: *AI techniques in induction machines diagnosis including the speed ripple effects*. IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 34, Iss. 1, 1998, s. 98-108.
- [25] Filippetti F., Franceschini G., Tassoni C., Vas P.: *Broken bar detection in induction machines: comparison between current spectrum approach and parameter estimation approach*. Proceedings of 1994 IEEE Industry Applications Society Annual Meeting, s. 1-8.
- [26] Glinka T., Szymaniec S.: *Eksploatacja i diagnostyka maszyn elektrycznych i transformatorów*. WNT, Warszawa 2019.
- [27] Głowacki A.: *Obliczenia elektromagnetyczne silników indukcyjnych trójfazowych*. WNT, Warszawa 1993.
- [28] Głowacki A., Sliwiński T.: *Parametry rozruchowe silników indukcyjnych*. PAN Komitet Elektrotechniki, PWN, Warszawa 1982.
- [29] Gritli Y., Lee S. B., Filippetti F., Zarri L.: *Advanced diagnosis of outer cage damage in double-squirrel-cage induction motors under time-varying conditions based on wavelet analysis*. IEEE Transactions on industry applications, Nr 3 (50), 2014, s. 1791-1800.
- [30] Gyftakis K. N., Athanasopoulos D. K., Kappatou J.: *Broken Bar Fault Diagnosis in Single and Double Cage Induction Motors Fed by Asymmetrical Voltage Supply*. IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives, 2013, s. 402-406.
- [31] Haji M., Toliyat H.A.: *Pattern recognition - A technique for induction machines rotor broken bar detection*. 2002 IEEE Power Engineering Society Winter Meeting. Conference Proceedings.

- [32] Jung J.-H., Kwon B.-H.: *Corrosion Model of a Rotor-Bar_Under_Fault Progress in Induction Motors*. IEEE Transactions on Industrial Electronics Volume: 53, Issue: 6, 2006, s.1829 – 1841.
- [33] Jung J.-H., Lee J.-J., Kwon B.-H.: *Online Diagnosis of Induction Motor Using MCSA*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, Volume: 53, Issue: 6, 2006, s. 1842 - 1852
- [34] Kia S.H., Henao H., Capolino G.-A.: *A High-Resolution Frequency Estimation Method for Three-Phase Induction Machine Fault Detection*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, Volume: 54, Issue: 4, 2007, s. 2305 – 2314.
- [35] Kliman G.B., Stein J., Edicott R.D., Koegl R.A.: *Noninvasive Detection of Broken Rotor Bars in Operating Induction Motor*. IEEE Transactions on Energy Conversion, Volume: 3, Issue: 4, 1988, s. 873 – 879.
- [36] Kluszczyński K., Miksiewicz R.: *Modelowanie 3-fazowych maszyn indukcyjnych przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Elektryka, nr 1272, z. 142, Gliwice 1995.
- [37] Kowalski C.T.: *Diagnostyka układów napędowych z silnikiem indukcyjnym z zastosowaniem metod sztucznej inteligencji*. Oficyna wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2013.
- [38] Kral C., Pirker F., Pascoli G.: *The impact of inertia on rotor fault effects-theoretical aspects of the Vienna monitoring method*. IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 23, No. 4, 2008, s. 2136-2142.
- [39] Kral C., Pirker F., Pascoli G.: *Model-based detection of rotor faults without rotor position sensor - the sensorless Vienna Monitoring Method*. IEEE Transactions on Industry Applications, Volume: 41, Issue: 3, 2005, s. 784 – 789.
- [40] Kral C., Pirker F., Pascoli G.: *Vienna monitoring method -detection of faulty rotor bars by means of portable measurement system*. ICEM 2000, s. 873-877.
- [41] Krause P. C.: *Analysis of Electrical Machinery*. McGraw-Hill Book Company, 1986.
- [42] Kumar S., Ghosh P.K., Mukherjee S.: *The d-q modeling, order reduction and numerical analysis of double cage three phase induction machine for power system studies*. International Journal of Computer and Electrical Engineering, Nr 2 (3), 2011, s. 303-308.
- [43] Levi E.: *General method of magnetising flux saturation modelling in d-q axis models of double-cage induction machines*. IEE Proceedings - Electric Power Applications, Nr 2 (144), 1997, s. 101-109.
- [44] Maciołek W.: *Wpływ bezwładności oraz nasycania się głównego obwodu magnetycznego na sygnały diagnostyczne mówiące o stanie klatki*. Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki, z.1-E/2008, s. 15-24.
- [45] Miksiewicz R.: *Diagnostyka silników indukcyjnych dwuklatkowych z uszkodzonymi prętami*. Zeszyty problemowe – Maszyny Elektryczne, Nr 95, Zeszyt 2, 2012, s. 83-88.
- [46] Mirafzal B., Demerdash N.A.O.: *On innovative methods of induction motor inter-turn and broken-bar fault diagnostics*. IEEE International Conference on Electric Machines and Drives, 2005.
- [47] Mirafzal B., Demerdash N.A.O.: *Induction machine broken-bar fault diagnostics using the rotor magnetic field space-vector orientation*. 38th IAS Annual Meeting on Conference Record of the Industry Applications Conference, 2003

- [48] Mirafzal B., Demerdash N.A.O.: *Effects of load magnitude on diagnosing broken bars faults in induction motors using the pendulous oscillations of the rotor magnetic field orientation*, 2005.
- [49] Noga M.: Analizy awaryjne związane z wewnętrzną niesymetrią silników asynchronicznych. Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica, z. 68, Kraków 1975.
- [50] Ondel O., Boutleux E., Clerc G.: *A method to detect broken bars in induction machine using pattern recognition techniques*. IEEE Transactions on Industry Applications, Volume: 42, Issue: 4, 2006, s. 916 – 923.
- [51] Park J., Kim B., Lee K., Lee S. B., Wiedenbrug E. J., Teska M., Han S.: *Evaluation of the detectability of broken rotor bars for double squirrel cage rotor induction motors*. IEEE Energy Conversion Congress and Exposition, 2010, s. 2493-2500.
- [52] Paszek W.: *Stany nieustalone maszyn elektrycznych prądu przemiennego*. WNT, Warszawa 1986.
- [53] Pons-Llinares J., Antonino-Daviu J., Riera-Guas̄p M., Lee S. B., Kang T-j., Yang C.: *Advanced Induction Motor Rotor Fault Diagnosis Via Continuous and Discrete Time–Frequency Tools*. IEEE Transactions on industrial electronics, Nr 3 (62), 2015, s. 1791-1802.
- [54] Povinelli R., Bangura J.F., Demerdash N.A.O., Brown R.H.: *Diagnostics of Bar and End-Ring Connector Breakage Faults in Polyphase Induction Motors through a Novel Dual Track of Time-Series Data Mining and Time-Stepping Coupled FE-State Space Modeling*. IEEE Power Engineering Review, Volume: 22, Issue: 2, 2002, s. 58-59.
- [55] Radzik M.: *Algorytm bezpośredniego określania stanów ustalonych w maszynach synchronicznych z uwzględnieniem równania ruchu*. Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Rozprawa Doktorska, Kraków 2011.
- [56] Rams W., Rusek J.: *Induction machine cage state diagnosis by supply from two phases*. XXX Sympozjum Maszyn Elektrycznych, Mat. Konf., 1994, s. 395-401.
- [57] Rams W., Rusek J.: *Wyznaczanie wartości sygnałów diagnostycznych uszkodzenia klatki silników indukcyjnych*. Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, Nr 54, 1997, s. 100-103.
- [58] Rams W., Rusek J., Wierzcholski M.: *Kontrola symetrii klatki w silnikach indukcyjnych przy zasilaniu dwufazowym*. Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe, Nr 50, 1995, s. 100-103.
- [59] Rashmi M.N., Shubhanga K. N.: *Dynamic Modelling of a Double-Cage Induction Machine for Analysis with WECS*. Innovations in Power and Advanced Computing Technologies, 2017, s. 1-7.
- [60] Rusek J.: *Analiza harmoniczna stanu ustalonego silnika asynchronicznego*. Zeszyty Naukowe Akademi Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica, Elektrotechnika, nr 1047, z. 9, Kraków 1986.
- [61] Rusek J.: *Categorization of induction machines resulting from their harmonic-balance model*. Electromagnetics, Vol. 23, No. 3, 2003, s. 277-292.
- [62] Rusek J.: *Komputerowa analiza maszyn indukcyjnych z wykorzystaniem bilansu harmonicznych*. Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 2000.
- [63] Sobczyk T., Vas P., Tassoni C.: *A comparative study of effects due to eccentricity and external stator and rotor asymmetries by mono-eccentricity and external stator and rotor asymmetries by mono-harmonic models*. International Conference on Electrical Machines, 2000, s. 946-950.

- [64] Sobczyk T.J.: *Frequency analysis of fault machines-possibilities and limitations*. IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives, Kraków 2007, s.1-5.
- [65] Sobczyk T.J.: *Metodyczne aspekty modelowania matematycznego maszyn indukcyjnych*. WNT, Warszawa 2004.
- [66] Sobczyk T.J.: *Obwodowe modele matematyczne maszyn elektrycznych - stan aktualny i perspektywy*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Elektryka, z. 176, Gliwice 2001.
- [67] Sobczyk T.J., Drozdowski P., Weinreb K.: *Modelowanie matematyczne maszyn prądu przemiennego dla potrzeb diagnostyki*. Wybrane problemy elektrotechniki i automatyki. Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Nr 4, Kraków 1995, s. 57-70.
- [68] Sobczyk T.J., Maciołek W.: *Asymmetry factors of rotor cage*, Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki, nr 102, z.5-E/2005, s. 61-76.
- [69] Sobczyk T.J., Maciołek W.: *Diagnostics of rotor-cage faults supported by effects due to higher MMF harmonics*. IEEE Bologna Power Tech Conference Proceedings, Bolonia 2003, s. 1-5
- [70] Sobczyk T.J., Maciołek W.: *Does the component $(1-2s)\cdot f_0$ in stator currents is sufficient for detection of rotor cage faults?*. Proc. of IEEE SDEMPED 2005, Wiedeń 2005, s. 175-179
- [71] Sobczyk T.J., Maciołek W.: *Influence of pole-pair number and rotor slot number on effects caused by cage faults*. 8th IEEE Symposium on Diagnostics for Electrical Machines, Power Electronics and Drives, Bolonia 2011, s. 199-204.
- [72] Sobczyk T.J., Maciołek W.: *On uniqueness of diagnosis of induction motor cage faults*. Przegląd Elektrotechniczny, Pub. Sigma-NOT, nr. 85, z. 1, 2009, s. 140-146.
- [73] Sobczyk T.J., Radzik M.: *Bezpośrednie wyznaczanie rozwiązań okresowych dla przetworników elektromechanicznych w dziedzinie czasu*. Zeszyty problemowe – Maszyny Elektryczne, Nr 103, z. 3, 2014, s. 223-228.
- [74] Sobczyk T.J., Radzik M.: *Numeryczny test zbieżności algorytmu bezpośredniego określania stanów ustalonych w maszynach prądu przemiennego z uwzględnieniem równania ruchu*. Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki, z.1-E/2010 (17), s. 87-97.
- [75] Sobczyk T.J., Rusek J., Weinreb K.: *Model matematyczny silnika asynchronicznego z wirnikiem klatkowym*. Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica, Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, nr 512, z. 71, Kraków 1976, s. 37-52.
- [76] Sobczyk T.J., Weinreb K., Węgiel T., Sułowicz M., Warzecha A., Maciołek W.: *Ocena skuteczności diagnostyki wirników silników klatkowych na podstawie widma prądów*. XIII Konferencja Energetyki: Energetyka modernizacja i rozwój, Kliczków 2003, s. 167-176.
- [77] Sułowicz M.: *Diagnostyka silników indukcyjnych metodami sztucznej inteligencji*. Instytut Elektrotechniki w Warszawie, Samodzielna Pracownia Diagnostyki Układów Elektromechanicznych w Krakowie, Rozprawa Doktorska, Kraków 2005.
- [78] Swędrowski L.: *Pomiary w diagnostyce silników indukcyjnych klatkowych*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2013.
- [79] Tudorache T., Taras P., Fireteanu V.: *Finite element diagnosis of squirrel cage induction motors with rotor bar faults*. 10th International Conference on optimization of electrical and electronic equipment, 2006, s.1-6.

- [80] Vas P.: *Perfomance of three-phase squirrel-cage induction motors with rotor asymmetries*. 1975
- [81] Wach P.: *Niesymetrie wewnętrzne maszyn indukcyjnych*. Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, Seria Elektryka, z. 19, Opole 1982.
- [82] Weinreb K.: *Charakterystyki statyczne silnika asynchronicznego pierścieniowego w warunkach zewnętrznej niesymetrii*. ZN AGH – Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, Nr 770, z. 124, s. 46-67, Kraków 1980.
- [83] Weinreb K.: *Modele matematyczne maszyn indukcyjnych z nierównomierną szczeliną powietrzną*. Modelowanie matematyczne zjawisk elektromagnetycznych w maszynach elektrycznych, Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Monografia 169, s. 56-87, Kraków 1994.
- [84] Weinreb K.: *Diagnostics of an induction-motor rotor by the spectral analysis of stator currents*. Thermal Engineering Vol. 60, No. 14, 2013, s.1006-1023.
- [85] Weinreb K., Skwarczyński J.: *Model matematyczny maszyny indukcyjnej klatkowej z niecentrycznie usytuowanym wirnikiem*. Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica, Elektrotechnika, nr 1190, z. 12, Kraków 1988, s. 47-69.
- [86] Weinreb K., Węgiel T., Sułowicz M.: *Wpływ nasycenia głównego obwodu magnetycznego silnika asynchronicznego z niesymetrycznym wirnikiem na obraz widma prądu stojana*. XLI International Symposium on Electrical Machines SME'2005, Jarnołtówek 2005, s. 461-467.
- [87] Węgiel T., Weinreb K., Warzecha A., Sułowicz M.: *Model of cage induction motor with saturated main magnetic circuit for diagnostics applications*. Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki, z.1-E/2004, s. 1-13.
- [88] Williamson S., Smith A. C.: *Steady-state analysis of 3-phase cage motors with rotor-bar and end-ring faults*. IEE Proceedings B - Electric Power Applications, Nr 3 (129), 1982, s. 93-100.
- [89] Williamson S., Abdel-Magied M.A.S.: *Steady-state analysis of double-cage induction motors with rotor-cage faults*. IEE Proceedings B - Electric Power Applications, Nr 4 (134), 1987, s. 199-206.
- [90] Williamson S., Smith A.C.: *The analysis of induction motors with general rotor cage asymmetry*. 1980.

ZAŁĄCZNIKI

Spis rysunków

Rys. 2.1. Oznaczenie oczek i rezystancji w klatce wirnika.	18
Rys. 2.2. Zależność składowej $I_{1,-2p}^{s,2}$ prądu stojana od krotności rezystancji uszkodzonego pręta.	25
Rys. 2.3. Wielkości $ I_{1,k}^s $ (w dB) dla: a) symetrycznej klatki, b) czternastu uszkodzonych prętach co drugi.	30
Rys. 2.4. Wielkości $ I_{1,k}^s $ (w dB) dla: a) uszkodzenia 1 pręta, b) uszkodzenia 1, 2 pręta.	30
Rys. 2.5. Wielkości $ I_{1,k}^s $ (w dB) dla: a) uszkodzenia 1, 2, 3 pręta, b) uszkodzenia 1, 2, 3, 4 pręta.	31
Rys. 2.6. Wielkości $ I_{1,k}^s $ (w dB) dla: a) uszkodzenia 1, 2, 3, 4, 5 pręta, b) uszkodzenia 1, 2, 3, 4, 5, 6 pręta.	31
Rys. 2.7. Wielkości $ I_{1,k}^s $ (w dB) dla: a) uszkodzenia 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 pręta, b) uszkodzenia 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 pręta.	31
Rys. 2.8. Zależność składowej $I_{1,-2p}^{s,2}$ prądu stojana od liczby uszkodzonych prętów.	32
Rys. 2.9. Zależność współczynnika k_s od liczby uszkodzonych prętów klatki wirnika.	33
Rys. 2.10. Zależność współczynnika k_{as} od liczby uszkodzonych prętów klatki wirnika.	33
Rys. 2.11. Widmo względne prądu stojana dla silnika symetrycznego, obliczenia dla modelu pełnego.	34
Rys. 2.12. Widmo względne prądu stojana dla silnika z uszkodzonym jednym prętem klatki wirnika, uszkodzony pręt numer 1, obliczenia dla modelu pełnego.	35
Rys. 2.13. Widmo względne prądu stojana dla silnika z uszkodzonymi dwoma prętami klatki wirnika, uszkodzone pręty numer 1 i 2, obliczenia dla modelu pełnego.	35
Rys. 2.14. Widmo względne prądu stojana dla silnika z uszkodzonymi dwoma prętami klatki wirnika, uszkodzone pręty numer 1 i 3, obliczenia dla modelu pełnego.	36
Rys. 2.15. Zmiana współczynnika k_{as} w zależności od liczby uszkodzonych prętów klatki wirnika.	58
Rys. 2.16. Zmiana współczynnika k_s w zależności od liczby uszkodzonych prętów klatki wirnika.	58
Rys. 2.17. Zmiana fazy współczynnika k_{as} w zależności od liczby uszkodzonych prętów klatki wirnika.	59
Rys. 2.18. Zależność błędu popełnianego przy wynikach obliczeń uzyskanych z uproszczonego modelu całkownego numerycznie z uproszczonym odwzorowaniem klatki względem modelu z pełnym odwzorowaniem klatki wirnika.	59
Rys. 2.19. Widmo prądu stojana dla silnika symetrycznego, 1440 obr/min, $4J_w$ dla:	61
Rys. 2.20. Widmo prądu stojana dla silnika z uszkodzonym 1 prętem klatki, 1440 obr/min, $4J_w$ dla: a) modelu z pełnym odwzorowaniem klatki całkownego numerycznie, b) modelu zredukowanego całkownego numerycznie.	61
Rys. 2.21. Widmo prądu stojana dla silnika z uszkodzonym 1 i 2 prętami klatki, 1440 obr/min, $4J_w$ dla: a) modelu z pełnym odwzorowaniem klatki całkownego numerycznie, b) modelu zredukowanego całkownego numerycznie.	62
Rys. 2.22. Widmo prądu stojana dla silnika z uszkodzonym 1 i 3 prętami klatki, 1440 obr/min, $4J_w$ dla: a) modelu z pełnym odwzorowaniem klatki całkownego numerycznie, b) modelu zredukowanego całkownego numerycznie.	62

Rys. 2.23. Wielobok Gergesa dla silnika symetrycznego.	63
Rys. 2.24. Dystrybucje amplitud prądów dla silnika symetrycznego.	63
Rys. 2.25. Wielobok Gergesa dla silnika z uszkodzonym 1 prętą klatki.	64
Rys. 2.26. Dystrybucje amplitud prądów dla uszkodzonego 1 pręta klatki.	64
Rys. 2.27. Wielobok Gergesa dla silnika z uszkodzonym 1 i 2 prętami klatki.	65
Rys. 2.28. Dystrybucje amplitud prądów dla uszkodzonego 1 i 2 pręta klatki.	65
Rys. 2.29. Wielobok Gergesa dla silnika z uszkodzonym 1 i 3 prętami klatki.	66
Rys. 2.30. Dystrybucje amplitud prądów dla uszkodzonego 1 i 3 pręta klatki.	66
Rys. 2.31. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika.	68
Rys. 2.32. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika.	68
Rys. 2.33. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika.	69
Rys. 2.34. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika.	69
Rys. 2.35. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia.	70
Rys. 2.36. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia.	71
Rys. 2.37. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia.	71
Rys. 2.38. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia.	72
Rys. 2.39. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	74
Rys. 2.40. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf_0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	74
Rys. 2.41. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf_0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	75
Rys. 2.42. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,20 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	75
Rys. 2.43. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf_0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,20 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	76
Rys. 2.44. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf_0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,20 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	76
Rys. 2.45. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	77
Rys. 2.46. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 2 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	77

Rys. 2.47. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	78
Rys. 2.48. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	78
Rys. 2.49. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 2 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	79
Rys. 2.50. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	79
Rys. 2.51. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	80
Rys. 2.52. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 2 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	80
Rys. 2.53. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 3 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	81
Rys. 3.1. Widok pełnego modelu 2D badanego silnika.	85
Rys. 3.2. Siatka FEM dla całego modelu 2D badanego silnika.	85
Rys. 3.3. Schemat obwodów: a) stojana, b) wirnika (część obwodu).	86
Rys. 3.4. Pełny schemat ideowy obwodu wirnika.	87
Rys. 3.5. Przebieg prądu stojana dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla 2J, 8Nm 88	88
Rys. 3.6. Widmo bezwzględne prądu stojana dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla 2J, 8Nm dla obliczeń połowo-obwodowych.	89
Rys. 3.7. Widmo względne prądu stojana dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla 2J, 8Nm dla obliczeń połowo-obwodowych.	89
Rys. 3.8. Widma względne prądu stojana uzyskane z modelu połowo-obwodowego dla uszkodzonego 1 pręta klatki wirnika, momentu obciążenia 8Nm i momentu bezwładności: a) 2J; b) 3J; c) 4J; d) 5J.	90
Rys. 3.9. Widma względne prądu stojana uzyskane z modelu połowo-obwodowego dla uszkodzonego 1 i 2 pręta klatki wirnika, momentu obciążenia 8Nm i momentu bezwładności: a) 2J; b) 3J; c) 4J; d) 5J.	91
Rys. 3.10. Widma względne prądu stojana uzyskane z modelu połowo-obwodowego dla uszkodzonego 1 i 3 pręta klatki wirnika, momentu obciążenia 8Nm i momentu bezwładności: a) 2J; b) 3J; c) 4J; d) 5J.	92
Rys. 3.11. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika dla obliczeń połowych.	93
Rys. 3.12. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika dla obliczeń połowych.	94
Rys. 3.13. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika dla obliczeń połowych.	94

Rys. 3.14. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika dla obliczeń polowych.	95
Rys. 3.15. Przebieg momentu elektromagnetycznego dla badanego silnika uzyskany z modelu polowo-obwodowego dla uszkodzonego 1 pręta klatki wirnika, liniowy obwód magnetyczny, zadany moment bezwładności $J=0.04 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, zadany moment mechaniczny 8Nm	96
Rys. 3.16. Widmo względne momentu elektromagnetycznego dla badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręta klatki wirnika, liniowy obwód magnetyczny, zadany moment bezwładności $J=0.04 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, zadany moment mechaniczny 8Nm	96
Rys. 4.1. Termogram wirnika symetrycznego wykonany kamerą termowizyjną.	98
Rys. 4.2. Termogram wirnika z uszkodzonym jednym prętem wykonany kamerą termowizyjną.	99
Rys. 4.3. Fazowy schematu zastępczy silnika.	100
Rys. 4.4. Widok stanowiska pomiarowego z połączonymi maszynami przygotowanymi do badań diagnostycznych.	101
Rys. 4.5. Zestaw dodatkowych kół umożliwiających uzyskanie zwiększenia momentów bezwładności.	102
Rys. 4.6. Widok na zestawione stanowisko pomiarowe przygotowane do badań diagnostycznych wraz z układem pomiarowym i układem zasilnia.	102
Rys. 4.7. Przebieg prądu stojana badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla $2J$, 7Nm uzyskanego z pomiarów laboratoryjnych.	104
Rys. 4.8. Przebieg napięcia zasilającego stojana badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla $2J$, 7Nm uzyskanego z pomiarów laboratoryjnych.	104
Rys. 4.9. Przebieg momentu obciążenia badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla $2J$, 7Nm uzyskanego z pomiarów laboratoryjnych.	105
Rys. 4.10. Widmo bezwzględne prądu stojana badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla $2J$, 7Nm uzyskane z pomiarów laboratoryjnych.	105
Rys. 4.11. Widmo względne prądu stojana badanego silnika dla uszkodzonego 1 pręt klatki wirnika, dla $2J$, 7Nm uzyskane z pomiarów laboratoryjnych.	106
Rys. 4.12. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika, pomiar laboratoryjny.	108
Rys. 4.13. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika, pomiar laboratoryjny.	108
Rys. 4.14. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika, pomiar laboratoryjny.	109
Rys. 4.15. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu bezwładności wirnika, pomiar laboratoryjny.	109
Rys. 4.16. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, pomiar.	110
Rys. 4.17. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+2s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, pomiar.	111
Rys. 4.18. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1-4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, pomiar.	111
Rys. 4.19. Zmiana maksymalnych amplitud składowych $f_0(1+4s)$ widm prądów stojana dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, pomiar.	112

Rys. 4.20. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.	114
Rys. 4.21. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.	114
Rys. 4.22. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,08 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.	115
Rys. 4.23. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,14 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.	115
Rys. 4.24. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,14 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.	116
Rys. 4.25. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla trzech różnych uszkodzeń klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia, przy momencie bezwładności wirnika $J=0,14 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.	116
Rys. 4.26. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	117
Rys. 4.27. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 2 prętów klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	117
Rys. 4.28. Zmiana maksymalnych amplitud składowej stałej momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 3 prętów klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	118
Rys. 4.29. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	118
Rys. 4.30. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 2 prętów klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	119
Rys. 4.31. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{2sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 3 prętów klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	119
Rys. 4.32. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 pręta klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	120
Rys. 4.33. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 2 prętów klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	120
Rys. 4.34. Zmiana maksymalnych amplitud składowej T_{4sf0} momentu elektromagnetycznego dla uszkodzenia 1 i 3 prętów klatki wirnika w zależności od momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności wirnika.	121
Rys. 5.1. Równoważny schemat silników indukcyjnych z uszkodzoną klatką dla składowej zgodnej.	124
Rys. 5.2. Równoważny uproszczony schemat zastępczy silników indukcyjnych z uszkodzoną klatką dla składowej zgodnej.	124

<i>Rys. 5.3. Czysto rezystancyjny równoważny schemat zastępczy silników indukcyjnych z uszkodzoną klatką dla składowej zgodnej.</i>	125
<i>Rys. 5.4. Równoważny schemat zastępczy silników indukcyjnych z uszkodzoną klatką dla składowej przeciwnej.</i>	126
<i>Rys. 5.5. Równoważny uproszczony schemat zastępczy silników indukcyjnych z uszkodzoną klatką dla składowej przeciwnej.</i>	127
<i>Rys. 5.6. Czysto rezystancyjny równoważny schemat zastępczy silników indukcyjnych z uszkodzoną klatką dla składowej przeciwnej.</i>	127
<i>Rys. 5.7. Zależna od poślizgu składowa prądów stojana $I_{s,-2p}^2$ w funkcji poślizgu z pełnego (linia ciągła) i modeli uproszczonych (linia przerywana).</i>	128
<i>Rys. 5.8. Zależności składowych prądów stojana $I_{s,-2p}^2$ w zależności od rozłożenia miejsca uszkodzenia prętów na obwodzie wirnika dla: a) uszkodzonego 1 i 2 pręta klatki wirnika, b) uszkodzonego 1 i 2 pręta klatki wirnika.</i>	129

Spis tabel

<i>Tabela 2.1. Zestawienie wskaźników diagnostycznych uzyskanych z modelu pełnego dla przypadków badanych w laboratorium.</i>	<i>36</i>
<i>Tabela 2.2. Zestawienie wskaźników diagnostycznych uzyskanych z modelu pełnego dla przypadków narastającego uszkodzenia prętów klatki wirnika od jednego uszkodzonego pręta do czternastu sąsiednich uszkodzonych prętów.</i>	<i>37</i>
<i>Tabela 2.3. Zestawienie wskaźników diagnostycznych uzyskanych z modelu uproszczonego dla przypadków badanych w laboratorium.</i>	<i>45</i>
<i>Tabela 2.4. Zestawienie wskaźników diagnostycznych uzyskanych z modelu całkowalnego numerycznie z pełnym odwzorowaniem klatki dla wybranych przypadków do 10 uszkodzonych prętów klatki.</i>	<i>57</i>
<i>Tabela 2.5. Parametry znamionowe oraz dane geometryczne i konstrukcyjne badanego silnika Sg 112 M4.</i>	<i>60</i>
<i>Tabela 2.6. Zestawienie maksymalnych amplitud składowych widm prądów stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń, obliczenia numeryczna dla modelu monoharmonicznego z pełnym odwozrowaniem klatki, całkowalnego numerycznie – wpływ momentu bezwładności.</i>	<i>67</i>
<i>Tabela 2.7. Zestawienie amplitud składowych widm prądu stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń, obliczenia numeryczna dla modelu monoharmonicznego z pełnym odwozrowaniem klatki, całkowalnego numerycznie – dla różnego momentu obciążenia.</i>	<i>70</i>
<i>Tabela 2.8. Zestawienie amplitud składowych widm momentu elektromagnetycznego dla analizowanych przypadków uszkodzeń, obliczenia numeryczna dla modelu monoharmonicznego z pełnym odwozrowaniem klatki, całkowalnego numerycznie – dla różnego momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności.</i>	<i>73</i>
<i>Tabela 3.1. Warunki rozwiązania modelu polowego.</i>	<i>84</i>
<i>Tabela 3.2. Zestawienie amplitud składowych widm prądów stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń, obliczenia polowe – wpływ momentu bezwładności.</i>	<i>93</i>
<i>Tabela 4.1. Zestawienie wartości parametrów fazowego schematu zastępczego.</i>	<i>101</i>
<i>Tabela 4.2. Zestawienie amplitud składowych widm prądów stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń, pomiary laboratoryjne – wpływ momentu bezwładności.</i>	<i>107</i>
<i>Tabela 4.3. Zestawienie amplitud składowych widm prądu stojana dla analizowanych przypadków uszkodzeń, pomiary laboratoryjne – dla różnego momentu obciążenia.</i>	<i>110</i>
<i>Tabela 4.4. Zestawienie amplitud składowych widm momentu elektromagnetycznego dla analizowanych przypadków uszkodzeń, pomiary laboratoryjne – dla różnego momentu obciążenia i dwóch różnych momentów bezwładności.</i>	<i>113</i>