Politechnika Krakowska
Wydział Inżynierii
Środowiska i Energetyki

Praca doktorska

Szybka metoda wyznaczania naprężeń cieplnych w stanach quasi-ustalonych i nieustalonych w grubościennych cylindrycznych elementach kotłów z otworami

Fast method for determining thermal stresses in quasi-steady and unsteady states in thick-walled cylindrical boiler elements with holes

Autor: *mgr inż. Iwona Gołdasz*
Dyscyplina: *Inżynieria środowiska, górnictwo i energetyka*
Promotor: *prof. dr hab. inż. Jan Taler*
Promotor pomocniczy: *dr hab. inż. Karol Kaczmarski, prof. PK*

Kraków, 30 sierpnia 2025

Uprzedzony o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystycznego wykonania albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.”, a także uprzedzony o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 211 ust. 1 ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym (t.j. Dz. U. z 2012 r. poz. 572, z późn. zm.): „Za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyny uchybiające godności studenta student ponosi odpowiedzialność dyscyplinarną przed komisją dyscyplinarną albo przed sądem koleżeńskim samorządu studenckiego, zwanym dalej «sądem koleżeńskim».”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i że nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Mojej najbliższej Rodzinie pracę tę poświęcam.

Panu Prof. dr hab. inż. Janowi Talerowi oraz Panu dr hab. inż. Karolowi Kaczmarskiemu, prof. PK chcę serdecznie podziękować za merytoryczną opiekę i cenne sugestie, które przyczyniły się do powstania tej rozprawy.

Spis treści

Spis rysunków ... iii

Spis tabel ... vi

Nomenklatura ... vii

Słownik pojęć i skrótów ... xi

1. Wprowadzenie ... 1

1.1. Uzasadnienie podjęcia tematu ... 1

1.2. Cele i tezy pracy ... 3

1.3. Metody badawcze ... 5

1.4. Zawartość pracy ... 6

2. Przegląd literatury – analiza stanu wiedzy ... 8

2.1. Wprowadzenie ... 8

2.2. Metody odwrotne i klasyfikacja ... 11

2.2.1. Metody deterministyczne ... 11

2.2.2. Metody numeryczne – FDM/FEM/FVM ... 12

2.2.3. Metody probabilistyczne ... 13

2.2.4. Metody sztucznej inteligencji ... 14

2.2.5. Metody regularyzacyjne ... 15

2.3. Problematyka szacowania naprężeń termicznych w grubościennych elementach kotłów ... 16

2.4. Podsumowanie ... 17

3. Metoda regulacyjna – model liniowy ... 18

3.1. Model płaski – płyta ... 19

3.2. Model cylindryczny – cylinder ... 28

3.3. Naprężenia cieplne w elementach cylindrycznych ... 35

3.4. Badanie odporności na zakłócenia ... 40
3.4.1. Filtr Kalmana ... 42
3.4.2. Filtry uśredniające ... 45
3.5. Podsumowanie ... 47
4. Metoda regulacyjne – model nieliniowy ... 49
4.1. Model nieliniowy ... 49
4.2. Podsumowanie ... 54
5. Wyznaczanie naprężeń cieplnych w elementach z otworami ... 55
5.1. Model bezpośredni (liniowy) ... 55
5.2. Model bezpośredni (nieliniowy) ... 58
5.3. Zagadnienie odwrotne ... 61
5.4. Podsumowanie ... 65
6. Wnioski ... 67
6.1. Podsumowanie i wnioski ... 67
A. Zadanie proste – model MES ... 70
A.1. Rozwiązanie zadania prostego - ANSYS Transient Thermal ... 70
B. Własności materiałowe stali 10H2M ... 72
B.1. 1 ... 73
Dorobek naukowy ... 74
Streszczenie ... 75
Literatura ... 77

Spis rysunków

2.1 Izolowana cieplne płyta poddana działaniu gęstości strumienia ciepła $q(t)$, $x = 0$; a) zagadnienie proste, b) zagadnienie odwrotne [10] 9

2.2 Dekompozycja zagadnienia obliczeniowego na zadanie proste (DHCP) i odwrotne (IHCP) [10]; T_{meas} – temperatura w punkcie pomiaru 10

3.1 Koncepcja metody regulacyjnej, a) dekompozycja obszaru płyty w modelu prostym, b) schemat blokowy metody [59], $e(t)$ – uchyb, $T_{E,meas}$ – temperatura w punkcie pomiaru na powierzchni zewnętrznej, $T_E = T_N = T_4$ 19

3.2 Metoda regulacyjna: diagram modelu odwrotnego zbudowanego w środowisku Simulink 22

3.3 Odpowiedź układu płaskiego liniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 4$ 23

3.4 Odpowiedź układu płaskiego liniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 6$ 24

3.5 Odpowiedź układu płaskiego liniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 8$ 25

3.6 Odpowiedź układu na wymuszenie trójkątne, gradient szybkości zmiany gęstości strumienia ciepła– 41.67 W/m$^2 \cdot s$, $T_0 = 480$ s, $N = 4$ 26

3.7 Odpowiedź układu na wymuszenie trójkątne, $q_m = 41.67$ W/m$^2 \cdot s$, $T_0 = 480$ s, $N = 6$ 27

3.8 Odpowiedź układu na wymuszenie trójkątne, gradient szybkości zmiany gęstości strumienia ciepła– 41.67 W/m$^2 \cdot s$, $T_0 = 480$ s, $N = 8$ 28

3.9 Odpowiedź układu płaskiego na okresowe wymuszenie prostokątne $q_s(t)$, $T_0 = 480$ s, $N = 4$ 29

3.12 Dekompozycja ścianki cylindra na $N = 4$ węzły kontrolne 29

3.10 Odpowiedź układu płaskiego na okresowe wymuszenie prostokątne $q_s(t)$, $T_0 = 480$ s, $N = 6$ 30

3.11 Odpowiedź układu płaskiego na okresowe wymuszenie prostokątne $q_s(t)$, $T_0 = 480$ s, $N = 8$ 31

3.13 Odpowiedź modelu cylindrycznego liniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 4$ 32

3.14 Odpowiedź modelu cylindrycznego liniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 6$ 33

3.15 Odpowiedź modelu cylindrycznego liniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 8$ 34

3.16 Odpowiedź modelu cylindrycznego na wymuszenie trójkątne, gradient szybkośći zmiany gęstości strumienia ciepła– 41.67 W/m$^2 \cdot s$, $T_0 = 480$ s, $N = 4$ 36

3.17 Odpowiedź modelu cylindrycznego na wymuszenie trójkątne, gradient szybkości zmiany gęstości strumienia ciepła– 41.67 W/m$^2 \cdot s$, $T_0 = 480$ s, $N = 6$ 37

3.18 Odpowiedź modelu cylindrycznego na wymuszenie trójkątne, gradient szybkości zmiany gęstości strumienia ciepła– 41.67 W/m$^2 \cdot s$, $T_0 = 480$ s, $N = 8$ 38

3.19 Odpowiedź modelu cylindrycznego na okresowe wymuszenie prostokątne $q_s(t)$, $T_0 = 480$ s, $N = 4$ 39

3.20 Odpowiedź modelu cylindrycznego na okresowe wymuszenie prostokątne $q_s(t)$, $T_0 = 480$ s, $N = 6$ 40

3.21 Odpowiedź modelu cylindrycznego na okresowe wymuszenie prostokątne $q_s(t)$, $T_0 = 480$ s, $N = 8$ 41

3.22 Odpowiedź skokowa: porównanie naprężeń zredukowanych σ_{red} na powierzchni wewnętrznej cylindra, $N = \{4, 8\}$ 42

3.23 Odpowiedź na wymuszenie liniowe: porównanie naprężeń zredukowanych σ_{red} na powierzchni wewnętrznej cylindra, $N = \{4, 8\}$ 42

3.24 Odpowiedź na wymuszenie prostokątne: porównanie naprężeń zredukowanych σ_{red} na powierzchni wewnętrznej cylindra, $N = \{4, 8\}$ 43

3.25 Wymuszenie skokowe: KF – porównanie przebiegów czasowych a) temperatury T_1 na powierzchni wewnętrznej cylindra, b) błędu ΔT_1, $N = \{4, 8\}$ 44

3.26 Wymuszenie trójkątne: KF – porównanie przebiegów czasowych a) temperatury T_1 na powierzchni wewnętrznej cylindra, b) błędu ΔT_1, $N = \{4, 8\}$ 45

3.27 Wymuszenie prostokątne: KF – porównanie przebiegów czasowych a) temperatury T_1 na powierzchni wewnętrznej cylindra, b) błędu ΔT_1, $N = \{4, 8\}$ 45

3.28 Wymuszenie skokowe: MA – porównanie przebiegów czasowych a) temperatury T_1 na powierzchni wewnętrznej cylindra, b) błędu ΔT_1, $N = \{4, 8\}$ 46

3.29 Wymuszenie trójkątne: MA – porównanie przebiegów czasowych a) temperatury T_1 na powierzchni wewnętrznej cylindra, b) błędu ΔT_1, $N = \{4, 8\}$ 47

3.30 Wymuszenie prostokątne: MA – porównanie przebiegów czasowych a) temperatury T_1 na powierzchni wewnętrznej cylindra, b) błędu ΔT_1, $N = \{4, 8\}$ 47

4.1 Własności materiałowe materiału cylindra, a) $a = a(T)$, b) $\lambda = \lambda(T)$ 50

4.2 Odpowiedź modelu cylindrycznego nieliniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 4$ 51

4.3 Odpowiedź modelu cylindrycznego nieliniowego na wymuszenie trójkatne 52

4.4 Odpowiedź modelu cylindrycznego nieliniowego na wymuszenie prostokątne 53

5.1 Model cylindra z otworem, a) przekrój, b) dekompozycja ścianki cylindra 56

5.2 Model bezpośredni (liniowy): przebiegi czasowe temperatury T_i i naprężeń termicznych σ_t 59

5.3 Model bezpośredni (nieliniowy): przebiegi czasowe temperatury T_i i naprężeń termicznych σ_t 60

5.4 Model odwrotny (liniowy): $v_T = \{3, 6, 12\}$ K/min 62

5.5 Model odwrotny (liniowy): $v_T = \{18, 24, 36\}$ K/min 63

5.6 Model odwrotny (nieliniowy): $v_T = \{3, 6, 12\}$ K/min 64

5.7 Model odwrotny (nieliniowy): $v_T = \{18, 24, 36\}$ K/min 65

A.1 Models MES: a) siatka modelu MES cylindra (Ansys Meshing), b) przykład rozkładu temperatury w cylindrze 70

A.2 Porównanie nieliniowego modelu MES i dynamicznego (zob. Rozdział 5) 71

B.1 Własności materiałowe stali 10H2M [67] 73

Spis tabel

3.1 Dane wejściowe – płyta, własności materiałowe i wymiary 21

3.2 Nastawy regulatora PID 22

3.3 Dane wejściowe – cylinder, wymiary i własności materiałowe 32

4.1 Nastawy regulatora PID – model nieliniowy 50

Nomenklatura

$\mathbf{A}$ – macierz stanu

$\mathbf{A}_m$ – stała

a – współczynnik dyfuzyjności cieplnej, m^2/s

$\mathbf{B}$ – macierz wymuszeń

$\mathbf{B}_m$ – stała

$\mathbf{C}$ – macierz wyjścia (obserwacji)

c – ciepło właściwe, J/(kg · K)

$\mathbf{D}$ – macierz wpływu

d_w – średnica wewnętrzna, m

d_z – średnica zewnętrzna, m

E – moduł Younga, MPa

e – uchyb, K

e_H – grubość ścianki (otwór), m

$\mathbf{f}(.)$ – funkcja stanu

$\mathbf{g}(.)$ – funkcja wyjścia (obserwacji)

$\mathbf{H}$ – macierz obserwacji (filtr Kalmana)

$\mathbf{K}$ – macierz Kalmana (wzmocnień)

i – indeks

k – indeks

k_d – wzmocnienie części różniczkującej regulatora PID

k_i – wzmocnienie części całkującej regulatora PID

k_p – wzmocnienie części proporcjonalnej regulatora PID

r – promień, m

r_i – promień węzła kontrolnego o indeksie i, m

r_w – promień wewnętrzny, m

r_z – promień zewnętrzny, m

Δr – odległość między węzłami kontrolnymi (model cylindryczny), m

N – liczba węzłów kontrolnych

n – rozmiar okna czasowego (filtr MA)

$\mathbf{P}$ – macierz kowariancji

p – ciśnienie, Pa

$\mathbf{Q}$ – macierz kowariancji szumu przetwarzania

q – gęstość strumienia ciepła, W/m^2

q_A – prędkość wzrostu (spadku) strumienia ciepła, W/(m$^2 \cdot$ s)

q_m – amplituda (gęstości) strumienia ciepła, W/m^2

q_{ref} – zadany (referencyjny) strumień ciepła, W/m^2

q_s – gęstość strumienia ciepła na powierzchni wewnętrznej, W/m^2

q_E – gęstość strumienia ciepła na powierzchni zewnętrznej, W/m^2

$\mathbf{R}$ – macierz kowariancji szumu pomiarowego

$\mathbf{S}$ – macierz pomocnicza

T – temperatura, K

T_d – czas wyprzedzenia, s

T_E – temperatura powierzchni zewnętrznej, K

T_i – temperatura w węźle kontrolnym o indeksie i, K

T_{ii} – czas całkowania, K

T_{int} – temperatura początkowa, K

T_m – temperatura średnia, K

T_{mean} – temperatura średnia, K

T_s – temperatura powierzchni wewnętrznej, K

T_0 – okres, s

t – czas, s

v_T – szybkość wzrostu (spadku) temperatury, K/min

W – grubość płyty (cylindra), m

x – współrzędna (układ kartezjański), m

y – wyjście układu, K

Δx – odległość między węzłami kontrolnymi (model płaski), m

$\mathbf{y}$ – wektor wyjść układu, K

z – zmienna pomocnicza (stosunek średnic: otworu i wewnętrznej cylindra)

α – współczynnik wnikania ciepła, W/(m$^2 \cdot$ K)

α_m – współczynnik koncentracji naprężeń wywołanych ciśnieniem

α_T – współczynnik koncentracji naprężeń termicznych

β – współczynnik rozszerzalności cieplnej, 1/K

Δt – długość kroku czasowego, s

ζ – stała

λ – współczynnik przewodzenia ciepła, W/(m · K)

ν – liczba Poissona

ρ – gęstość, kg/m^3

σ – naprężenia, MPa

σ_r – naprężenia obwodowe, MPa

σ_t – naprężenia styczne, MPa

σ_{red} – naprężenia zredukowane, MPa

Słownik pojęć i skrótów

AI – sztuczna inteligencja

ANN – sztuczna sieć neuronowa, Artificial Neural Network

CAE – komputerowane wspomaganie projektowania, Computer Aided Engineering

CNN – konwolucyjna sieć neuronowa, Convolutional Neural Network

CPU – jednostka centralna, Central Processing Unit

DHCP – zadanie proste (bezpośrednie), Direct Heat Conduction Problem

DL – uczenie głębokie, Deep Learning

EA – algorytm ewolucyjny, Evolutionary Algorithm

FDM – metoda różnic skończonych, Finite Difference Method

FEM – metoda elementów skończonych, Finite Element Method

FVM – metoda objęctości skończonych, Finite Volume Method

FL – logika rozmyta, Fuzzy Logic

GA – algorytm genetyczny, Genetic Algorithm

GPU – procesor graficzny, Graphics Processing Unit

IHCP – zadanie odwrotne, Inverse Heat Conduction Problem

LSTM – rekurencyjna sieć o długiej pamięci krótkotrwałej, Long Short Term Memory (Neural Network)

MCMC – metoda Monte Carlo łańcuchów Markowa, Markov Chain Monte Carlo

ML – uczenie maszynowe, Machine Learning

MLP – sieć wielwarstwowa perceptronowa, Multilayer Perceptron

NN – sieć neuronowa, Neural Network

ODE – równanie różniczkowe zwyczajne, Ordinary Differential Equation

PDE – równanie różniczkowe cząstkowe, Partial Differential Equation

PI – proporcjonalno-całkujący, Proportional-Integral

PID – proporcjonalno, całkująco-różniczkujący, Proportional-Integral-Differential

PINN – fizyczne sieci neuronowe, Physics Informed Neural Network

RNN – rekurencyjna sieć neuronowa, Recurrent Neural Network

SS – przestrzeń stanów, State-Space

RL – uczenie posiłkowe, Reinforced Learning

1. Wprowadzenie

1.1. Uzasadnienie podjęcia tematu

Raport sporządzy przez Instytut Fraunhofera [1] podaje, iż źródła odnawialne z Polsce odpowiadały za 26% produkcji energii elektrycznej w roku 2023. Był to rok rekordowy; dla porównania jeszcze w roku 2021 udział OZE wynosił ok. 15%. Wg autorów raportu, największy udział w produkcji energii elektrycznej z OZE miały elektrownie wiatrowe (8.7%), fotowoltaika 8.7%, pozostałe 3.7% zostały wygenerowane przez spalanie biomasy i elektrownie wodne. To są, oczywiście, liczby uśrednione, zakłamujące nieco rzeczywistość. W trakcie roku dochodziło bowiem do sytuacji, kiedy udział OZE w produkcji energii przekraczał 60% [2].

Taki stan rzecz (spowodowany niewątpliwie stochastyczną naturą wytwarzania energi wiatrowej i słonecznej oraz efektem skali) generuje określone problemy, prowadząc do głębokich ingerencji w pracę polskiego systemu energetycznego. Operator systemu przesyłowego w kraju jest niekiedy zmuszony redukować produkcję energii elektrycznej z OZE (głównie z turbin wiatrowych lub farm fotowoltaicznych). Tego typu sytuacje, niegdyś incydentalne, stały się niemalże codziennością. Dochodzi więc do absurdalnych sytuacji, z jednej strony rośnie liczba instalacji OZE, a z drugiej strony ograniczana jest ilość energii z OZE w godzinach szczytu. Wg prezesa Polskich Sieci Energetycznych, Wojciecha Muchy, Polskie Sieci Przesyłowe, niemalże w każde dni wolne, weekendy i godziny szczytu występują problemy z nadmiarem energii elektrycznej (tzw. *peak* energetyczny), i równie często problemy z pokryciem zapotrzebowania szczytowego [3].

Technologie produkcji z OZE nie są zatem dyspozycyjne. Nie działają w sposób ciągły, ani nie zapewniają bezpieczeństwa energetycznego. Dyspozycyjność, ciągłość i bezpieczeństwo zapewniają jedynie technologie konwencjonalne w tym elektrownie jądrowe [4] i to pomimo stale rosnącego udziału OZE w produkcji energii elektrycznej.

Jest zatem oczywistym, iż OZE wpływa na eksploatacje elektrowni konwencjonalnych. Niestety, jest to wpływ także negatywny. Elektrownie konwencjonalne muszą być bardziej elastyczne i reagować na

zmienne warunki pogodowe. Trzeba jednocześnie pamiętać, iż konwencjonalne bloki energetyczne były projektowane z reguły do ciągłej pracy przy stałym obciążeniu. Stale rosnący udział OZE, a zwłaszcza energetyki wiatrowej i fotowoltaicznej, zmusza je do częstych zmian generowanej ilości energii, szybkiego startu i zatrzymywania wymuszonych zmianami w ilości energii produkowanej przez OZE. Podsumowując, główne czynniki obniżające trwałość tychże podzespołów to: cykliczność i częstotliwość rozruchu, wyłączenia z ruchu oraz zmiany obciążenia. Elementy kotłów takie jak: komory, przegrzewacze, rurociągi, skraplacze, walczaki, itp., są narażone są narażone na duże zmiany temperatury podczas chłodzenia i nagrzewania, co powoduje duże zmiany naprężeń cieplnych. Powoduje to zmęczenie materiałowe, a w rezultacie wzrost ryzyka pojawienia się np. pęknięć. W podobnym stopniu narażone są turbiny, w których zmienne warunki obciążenia skutkują naprężeniami cieplnymi i przyspieszonym zużyciem łopatek, uszczelnień, etc. Problem jest ten szczególnie istotny w przypadku grubościennych elementów ciśnieniowych kotłów, w ściankach których to mogą pojawić się znaczne różnice temperatur. Jeżeli szybkości ochładzania i nagrzewania będą zbyt duże, to trwałość takiego elementu może ulec znacznemu zmniejszeniu. Miejsca szczególnie narażone na tego typu sytuacje to brzegi otworów, gdzie występuje największa koncentracja naprężeń. Przykładowo, Taler [5] wymienia kryteria determinujące parametry uruchamiania i wyłączania kotła. Są to: a) maksymalna szybkość ochładzania (nagrzewania) elementów ciśnieniowych, b) minimalizacja strat energii, c) bezpieczeństwo.

Należy zwrócić tu uwagę, iż przepisy dotyczące optymalnych procedur rozruchu i wyłączania kotła określane są aktualnie na podstawie danych i zaleceń producenta kotłów czy turbin lub odpowiednich norm (np. PN-EN 12952-3). Zastosowane jednak w tej normie założenie quasi-stacjonarnego pola temperatur jest mało realistyczne. Kolejnym problemem są długie czasy ochładzania / nagrzewania zalecane przez tę normę lub nieuwzględnianie zależności współczynnika koncentracji naprężeń od wartości współczynnika wnikania ciepła czy też stosowanie określonych rekomendacji w oparciu o analizę prostych kształtów geometrycznych zawodnych w przypadku bardziej złożonych geometrii.

Wg wiedzy Autorki, próby rozwijania i wdrażania systemów monitoringu naprężeń cieplnych i pochodzących od ciśnienia mają miejsce od lat kilkudziesięciu. Jednocześnie, liczba prac poświęconych tej tematyce świadczy o tym, iż problem ten jest w dalszym ciągu aktualny, a działanie opracowanych do tej pory narzędzi monitoringu ma najwyraźniej charakter zachowawczy. Jest kilka przyczyn tego stanu rzeczy.

Ogólnie, działanie, takiego systemu, w większości przypadków polega na takiej kontroli określonych parametrów układu, aby np. naprężenia zredukowane w elementach grubościennych kotłów podczas pracy, rozruchu i wyłączania z ruchu nie przekraczały wartości dopuszczalnych. Wyznaczane na

bieżąco szybkości nagrzewania i ochładzania elementów ciśnieniowych umożliwia odpowiednie zarządzanie procedurą rozruchu i wyłączania kotła z ruchu zgodnie z zaleceniami np. normy PN-EN 12952-3. Powszechnie stosowana praktyka polega na szacowaniu temperatury na powierzchni wewnętrznej poprzez pomiar temperatury w dwóch punktach: na zewnątrz lub w środku grubości ścianki i w pobliżu powierzchni wewnętrznej [5]. Jak wiadomo, największe naprężenia cieplne zależą bezpośrednio od różnicy temperatury na powierzchni wewnętrznej i temperatury średniej, $\Delta T = T_s - T_m$, gdzie T_s – temperatura powierzchni wewnętrznej, T_m – temperatura średnia. Pomiar temperatury T_s jest pośredni i polega na rozwiązaniu zadania odwrotnego przewodzenia ciepła. Wyznaczenie rozkładu temperatur w ściance monitorowanego elementu ma bezpośrednie przełożenie na wartości naprężeń w elemencie i umożliwia takie określenie zmian temperatury w układzie, aby nie doprowadzić do przekroczenia naprężeń dopuszczalnych. Ponieważ zagadnienie to jest słabo uwarunkowane, otrzymane w ten sposób dane są obarczone sporym błędem i są następnie korygowane przy użyciu opracowanych na przestrzeni lat metod i technik, w tym metod rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła w połączeniu z modelem matematycznym pozwalającym na oszacowanie powstałych naprężeń.

Podsumowując, poruszane w rozprawie zagadnienie mieści się w szeroko pojętym obszarze diagnostyki technicznej. Obecne tu trendy wymuszają ciągłą potrzebę doskonalenia metod oceny stanu procesu lub obiektu [6, 7] często przy minimalizacji udziału człowieka a przy jednoczesnej minimalizacji kosztów eksploatacji. W opisywanym przypadku ocena stanu obiektu jest o tyle utrudniona, iż specyfika pracy kotła, tj. wysoka temperatura, duże ciśnienia robocze, zasadniczo wyklucza możliwość przeprowadzenia oceny stanu w sposób bezpośredni na skutek pomiaru lub serii pomiarów. Dla porównania, ocena pośrednia wymusza zidentyfikowanie relacji między co najmniej dwoma wielkościami fizycznymi, przy czym informacja o przynajmniej jednej z nich pozyskiwana jest bezpośrednio, a wiedza o pozostałych z wykorzystaniem określonego modelu matematycznego. We współczesnych systemach monitoringu taka ocena odbywa się w trybie online przy zachowaniu określonych reżimów czasowych. Istotna jest zatem jakość modelu, stopień jego uproszczenia, a jednocześnie dokładność i odporność na zakłócenia pomiarowe i procesowe (przetwarzania). W przypadku systemów wykorzystujących metody sztucznej inteligencji ważna jest także zdolność modelu do adaptacji (uczenia się) na skutek pozyskiwanej na bieżąco wiedzy.

1.2. Cele i tezy pracy

Na podstawie przeprowadzonych badań literaturowych, analizy metod i algorytmów numerycznych obejmujacych problematykę rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła, które zostały przez Autorkę opisane w Rozdziale 2 postawiono następujące tezy i cele pracy:

Teza 1. Zmiana temperatury w punkcie pomiaru w elemencie grubościennym może być traktowana jako nośnik informacji (sygnał diagnostyczny) o jego stanie.

Teza 2. Odtworzenie pola temperatur w elemencie grubościennym kotła pozwala na rekonstrukcję naprężeń cieplnych w badanym elemencie.

Teza 3. Możliwe jest utworzenie metody odwrotnej bazującej na modelu prostym procesu przewodzenia ciepła, działajacej w oparciu o rejestrowany sygnał temperatury generowany przez procesy zachodzące w badanym kotle. Główne zadanie zaproponowanej metody ma polegać na ciągłym lub okresowym monitorowaniu stanu grubościennych elementów kotła w kontekście zmiany temperatur i naprężeń cieplnych, co pozwoli na ocenę jego stanu.

Cel 1. Stworzenie sprzężonego modelu matematycznego, tj. układu równań termomechanicznych umożliwiających oszacowanie rozkładu temperatur i naprężeń termicznych w grubościennym cylindrycznym elemencie kotła (z otworami).

Cel 2. Stworzenie modelu odwrotnego bazującego na modelu prostym procesu przewodzenia ciepła.

Cel 3. Sformułowanie modelu matematycznego opisywanego procesu, dobór metody pozwalającej na szybką realizację obliczeń przy niewymagających zasobach sprzętowych.

Osiągnięcie celu pracy wymagało przeprowadzenia następujących zadań badawczych:

Zadanie 1. Dekompozycja geometrii elementu grubościennego przy użyciu równań równowagi cieplnej.

Zadanie 2. Przekształcenie otrzymanego układu równań do postaci równań stanu i obserwatora.

Zadanie 3. Wybór rodzaju 'wirtualnego' regulatora, jego integracja w modelem prostym i strojenie parametrów regulatora.

Zadanie 4. Studium parametryczne sprzężonego modelu odwrotnego – badanie wpływu liczby węzłów (modelu elementu po dekompozycji) oraz zdolności metody do rekonstrukcji pola temperatur w układzie w obecności zakłóceń (wybór odpowiedniej metody filtracji)

Zadanie 5. Rozszerzenie otrzymanego termomechnicznego modelu odwrotnego o obecność otworów

Zadanie 6. Realizacja symulacji numerycznych z użyciem opracowanego modelu

Wykazanie słuszności tych tez i realizacja powyższych celów i zadań badawczych pozwoli Autorce na podjęcie dalszych prac mających na celu dalszy rozwój przedstawionej metody. Jest to ważne w kontekście potencjalnych zastosowań w systemach monitoringu celem wydłużenie czasu kotłów, redukcję

kosztów ich remontów oraz uniknięcie nieoczekiwanych postojów w produkcji energii elektrycznej na skutek ich awarii.

Należy tu podkreślić, iż istotą proponowanej przez Autorkę koncepcji jest oparcie się na modelu prostym badanego zagadnienia w połączeniu, zasadniczo rzecz biorąc, z dowolnym (i wirtualnym) układem regulacji. Pozwala to, chociażby, zmniejszyć wpływ zakłóceń na działanie algorytmu, z którymi zmagają się typowe algorytmy odwrotne.

1.3. Metody badawcze

Wg definicji, metody badawcze są sposobem pracy badawczej charakteryzującym się zarówno określonymi czynnościami postępowania (procedurą badawczą), jak i zastosowaniem odpowiednich narzędzi badawczych. Istota metody badawczej powinna zmierzać do skoordynowania sposobu postępowania z zakładanym celem badań [8].

W kontekście podjętej tematyki, głównym celem pracy było opracowanie szybkiej numerycznej metody wyznaczania naprężeń cieplnych w stanach quasi-ustalonych i nieustalonych w grubościennych cylindrycznych elementach kotłów z otworami. Przymiotnik 'szybka' narzuca zatem określone restrykcji co do rozmiaru modelu matematycznego i efektywności wybranych algorytmów obliczeniowych, eliminując zatem z góry, np. złożone i dokładne modele przestrzenne MES (ale kosztowne obliczeniowo), dla rozwiązania których wymagane są spore zasoby obliczeniowe. Opisana w pracy metoda jest zatem kompromisem między dokładnością, szybkością działania, a także wielkością zasobów obliczeniowych potrzebnych do jej realizacji.

Do realizacji badań wykorzystano model matematyczny w postaci równań stanu, otrzymany w wyniku dekompozycji obszaru obliczeniowego, tj. grubościennego elementu kotła, z równań równowagi cieplnej. Otrzymany model matematyczny to model prosty dynamiki procesu przewodzenia ciepła rzedu N-tego, gdzie N – liczba węzłów kontrolnych. Model prosty pozwala wyznaczyć wartości temperatury w węzłach kontrolnych modelu na podstawie znanej wartości gęstości strumienia ciepła oddziaływającego na wewnętrzną powierzchnię elementu. W ogólnym przypadku jest to model nieliniowy (uwzględniający zależność własności materiałowych od temperatury). Następnie, w celu umożliwienia rozwiązywania zagadnień termomechanicznych, tj. wyznaczenia rozkładu naprężeń termicznych w elemencie poddanym działaniu zmiennego w czasie pola temperatur uzupełniono powyższy model o zależności opisujące naprężenia zredukowane w badanym elemencie. W rezultacie uzyskano sprzężony układu równań

termomechanicznych, który posłużył do zdefiniowania modelu matematycznego, opisującego zachowanie badanego elementu w czasie. Otrzymany termomechaniczny model prosty stanowi integralną część metody regulacyjnej.

Otrzymany model prosty wykorzystano do budowy modelu odwrotnego, którego drugim integralnym elementem jest wirtualny regulator PIG. Jedno z wyjść modelu termomechnicznego opisuje bowiem zmiany temperatury w punkcie jej pomiaru. Wykorzystania regulatora w połączeniu z modelem prostym procesu przewodzenia ciepła pozwoliło na stworzeniu uniwersalnego modelu odwrotnego, pozwalającego na rekonstrukcję wartości pola temperatur w modelowanym elemencie oraz gęstości strumienia ciepła działającego na ściankę wewnętrznego elementu rurociągu. Efektywne działanie zaproponowanej metody polega zatem na właściwym strojeniu parametrów wirtualnego regulatora i określeniu liczby węzłów w tworzonym modelu prostym.

1.4. Zawartość pracy

Niniejsza rozprawa obejmuje swoim zakresem problematykę wyznaczania naprężeń cieplnych w wysokociśnieniowych elementach rurociągów parowych. Rozprawa zawiera, m.in.

1. Uzasadnienie podjęcia tematu
2. Cele i tezy badawcze
3. Przegląd literatury badawczej – analizę obecnego stanu wiedzy w obszarze zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła i wyznaczania naprężeń cieplnych w elementach rurociągów
4. Modele matematyczne rozważanych obiektów o własnościach (nie)zależnych od temperatury
5. Symulacje rozwiązania odwrotnego przy użyciu metody regulacyjnej, w tym badanie odporności metody na błędy pomiarowe (zakłócenia)
6. Wyznaczenie naprężeń cieplnych w wysokociśnieniowych elementach rurociągów parowych na wybranych przykładach.

W szczególności, w Rozdziale 1.1 przedstawiono obszernie powody podjęcia tematyki przez Autorkę ze szczególnym uwzględnieniem aspektu bezawaryjnej pracy systemów energetycznych elektrociepłowni także w kontekście rosnących udziałów OZE w produkcji energii elektrycznej. Następnie, tezy i cele badawcze zdefiniowano i omówiono w Rozdziale 1.2. Problematykę rozwiązywania zagadnienia

odwrotnego przewodzenia ciepła (rekonstrukcji) omówiono szczegółowo w Rozdziale 2, gdzie przedstawiono ogólną klasyfikację metod rozwiązywania problematyki odwrotnej począwszy od chronologicznie najstarszych metod analitycznych, a skończywszy na metodach uczenia maszynowego. Istotną cześć problematyki omówionej w Rozdziale 2 stanowią techniki obliczeniowe pozwalające na oszacowanie naprężeń cieplnych w elementach poddanych niestacjonarnemu działaniu pól temperatury. Koncepcję metody regulacyjnej służącej rekonstrukcji wartości gęstości strumienia ciepła oraz temperatury ścianki wewnętrznej opisano kolejno w Rozdziale 3 oraz 4. Zasadniczą częścią metody regulacyjnej jest wykorzystanie modelu prostego w przeciwieństwie do opisanych w Rozdziale 1 metod. W szczególności, w Rozdziale 3 opisano działanie metody regulacyjnej na dwóch prostych obiektach typu płyta i cylinder, których wewnętrzne powierzchnie były poddane działaniu niestacjonarnego wymuszenia (gęstości strumienia ciepła $q_s(t)$). Przedstawiono działanie metody regulacyjnej dla wybranych wymuszeń, a także w obecności zakłóceń. Dla porównania, działanie metody regulacyjnej zademonstrowano w Rozdziale 4 z użyciem podobnych przykładów, ale przy założeniu nieliniowości w postaci własności materiałowych zależnych od temperatury. Przykład sprzężenia metody regulacyjnej z algorytmem szacowania naprężeń cieplnych w elementach obciążonych termicznie przedstawiono w Rozdziale 3.3. Badania działania algorytmu szacowania naprężeń cieplnych w grubościennych cylindrycznych elementach kotłów osłabionych otworami zaprezentowano w Rozdziale 5, a wnioski dotyczące stosowalności zastosowanej metody opisano w Rozdziale 6.

2. Przegląd literatury – analiza stanu wiedzy

2.1. Wprowadzenie

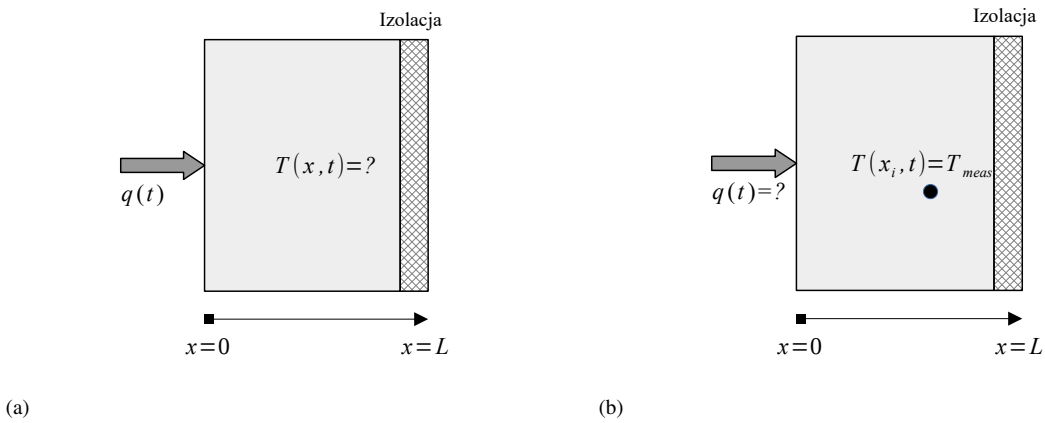
Zagadnienia przewodnictwa ciepła dzielimy zwykle na dwie grupy: problemy bezpośrednie (proste) i odwrotne. W problemach bezpośrednich (DHCP – direct heat conduction problem), jeśli znamy strumień ciepła (lub gęstość strumienia ciepła) lub temperaturę na powierzchni ciała stałego, rozkład temperatury w badanej objętości można obliczyć, rozwiązując równanie dyfuzji ciepła, przy wykorzystaniu technik analitycznych, numerycznych lub hybrydowych. Problemy odwrotne, takie jak odwrotne przewodnictwo ciepła (IHCP – inverse heat conduction problem), polegają na określeniu strumienia ciepła (lub gęstości strumienia ciepła) lub historii temperatury powierzchni na podstawie pomiarów temperatury wewnętrznej. Zagadnienie IHCP jest trudniejsze do rozwiązania analitycznego, ponieważ w praktyce mogą pojawić się trudności w precyzyjnych pomiarach na powierzchni, co powoduje konieczność wyboru między niedokładnymi pomiarami a skomplikowanymi obliczeniami analitycznymi.

Pomimo trudności w dokładnym obliczeniu wartości strumienia ciepła, problem IHCP koncentruje się na estymacji historii strumienia ciepła na powierzchni wewnętrznej na podstawie zmierzonych danych temperatury. Błędy w pomiarze temperatury mogą wpływać na dokładność obliczeń, dlatego precyzyjne rozwiązanie tego problemu jest wyzwaniem, które wymaga minimalizacji obu tych trudności.

Beck [9] wymienia szereg wciąż aktualnych kryteriów, które każda metoda służąca rozwiązaniu zagadnienia odwrotnego powinna spełniać:

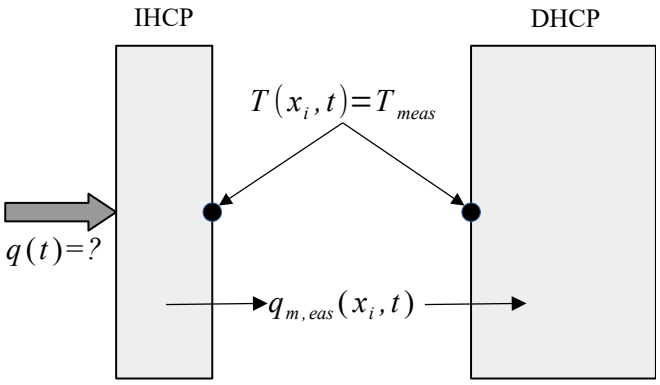
1. Dokładność.
2. Niewrażliwość na błędy pomiarowe.
3. Stabilność przy małych krokach czasowych, co umożliwiłoby zdobycie większej ilości informacji (dynamika procesu).
4. Możliwość pomiaru temperatury przy użyciu jednego lub więcej czujników.
5. Możliwość uwzględnienia nieliniowości materiałowych, tj. własności zależnych od temperatury.

6. Możliwość stosowania dla materiałów kompozytowych.
7. Łatwość implementacji.
8. Możliwość oszacowania błędu metody.
9. Niewielki (umiarkowany) koszt obliczeniowy.
10. Umiarkowane wymagania dot. kwalifikacji operatora.
11. Możliwość rozszerzenia na więcej niż jedną powierzchnię grzewczą.
12. Ciągłość pochodnej pierwszego rzędu gęstości strumienia ciepła oraz stosowalność w sytuacji skokowych zmian.
13. Otrzymany wynik nie może zależeć od czasu rozpoczęcia aplikacji gęstości strumienia ciepła na powierzchnię. Początek ogrzewania często nie jest zsynchronizowany z czasem pomiaru temperatury. Często, czas rozpoczęcia jest trudny do wyznaczenia lub dokładne zmierzenie go jest niemożliwe. Czas, w którym występują nagłe zmiany strumienia ciepła, również może być nieznany.
14. Niezależność wyniku od liczby pomiarów temperatury.
15. Niezależność od przyjętego układu współrzędnych i możliwość implementacji niezależnie od przyjętego układu współrzędnych (kartezjański, cylindryczny).
16. Uwzględnienie mechanizmu przepływu ciepła pomiędzy ciałami w kontakcie (kontaktowy opór cieplny).



Rysunek 2.1. Izolowana cieplne płyta poddana działaniu gęstości strumienia ciepła $q(t)$, $x = 0$; a) zagadnienie proste, b) zagadnienie odwrotne [10]

Na Rys 2.1a oraz 2.1b przedstawiono odpowiednio problem prosty i odwrotny na przykładzie izolowanej termicznie płyty, która jest podgrzewana w punkcie $x = 0$ i izolowana w punkcie $x = L$. W sytuacji przedstawionej na Rys. 2.1a na powierzchni wewnętrznej znana jest (stała lub zmienna w czasie) gęstość strumienia ciepła $q(t)$, a zadanie polega na wyznaczeniu rozkładu temperatury w płycie w funkcji czasu. Dla porównania, w przypadku zagadnienia odwrotnego znana jest temperatura w określonym punkcie płyty $(0 < x < L)$, a celem jest wyznaczenie wartości czynnika powodującego zmiany temperatury w płycie, a więc wartości gęstości strumienia ciepła na powierzchni. Zakłada się przy tym, że znane są: lokalizacja czujnika, wymiary płyty i jej (stałe lub zależne od temperatury) własności materiałowe.



Rysunek 2.2. Dekompozycja zagadnienia obliczeniowego na zadanie proste (DHCP) i odwrotne (IHCP) [10]; T_{meas} – temperatura w punkcie pomiaru

Znajomość rozkładu temperatury w elementach, podzespołach i układach obciążonych cieplnie jest istotna ze względu na związane z nimi naprężenia termiczne. Dotyczy to zwłaszcza tych elementów układu, których prawidłowe funkcjonowanie jest istotne, np. w celu zapewnienia jego bezawaryjnej pracy, monitorowania jego stanu, predykcji lub skrócenia czasu postojów. Naprężenia cieplne na wewnętrznej powierzchni elementów ciśnieniowych powinny być zwłaszcza w czasie szybkich rozruchów wyłączeń z ruchu oraz zmiany obciążenia jednostki monitorowane, gdyż szybkie zmiany temperatury wody lub pary wywołują określone stany naprężeń cieplnych, które mogą znacznie skrócić trwałość obiektu lub podzespołu obciążonego cieplnie. W czasach gdy w energetyce kładziony jest nacisk na zastosowanie i pozyskiwanie energii z niekonwencjonalnych źródeł energii (geotermia, wiatraki, panele fotowoltaiczne) monitoring temperatury (i naprężeń) jest jak najbardziej zasadny, choćby w celu włączenia i wyłączenia bloków energetycznych lub zmiany obciążenia bloku. W związku z dynamicznym rozwojem OZE, konwencjonalne elektrociepłownie i elektrownie cieplne powinny odznaczać się dobrą elastycznością celem skrócenia czasu dołączenia/odłączenia do/z sieci. Na przeszkodzie szybkich uruchomień i wyłączeń cieplnych bloków energetycznych stoją m.in. wysokie naprężenia cieplne w elementach ciśnieniowych

kotła i turbiny, np. takich jak, walczaki, komory cylindryczne przegrzewaczy, trójniki rurociągów, korpusy zaworów i turbin, etc. Wysokie naprężenia i koszty związane z przestojem, niezbędne do uruchomienie i odłączenia bloku energetycznego, generują określone straty finansowe.

2.2. Metody odwrotne i klasyfikacja

Biorąc pod uwagę rodzaj otrzymanego rozwiązania, rozwijane do tej metody odwrotne można podzielić na metody bezpośrednie (deterministyczne), optymalizacyjne, regularyzacyjne, probabilistyczne oraz oparte na technikach uczenia maszynowego [10]. W grupie metod bezpośrednich należy wyróżnić metody analityczne [11, 12], metody różnic/elementów/objętości skończonych [13–16] lub ich hybrydy [17]. Następnie, zasada działania metod optymalizacyjnych polega na zastosowaniu wybranych algorytmów optymalizacyjnych (genetycznych, gradientowych) w celu minimalizacji wartości funkcji celu, tj. błędu pomiędzy temperaturą zmierzoną w określonym punkcie a temperaturą przewidywaną przez zastosowany model matematyczny. Z reguły, są to metody offline. Rozwinięciem metod optymalizacyjnych są techniki regularyzacyjne (np. Tichonowa [18, 19]), w których dodaje się dodatkowy człon do funkcji celu stabilizujący rozwiązanie (proces obliczeniowy). Z kolei, metody Bayesowskie pozwalają uwzględnić niepewności szukanego rozwiązania. W przeciwieństwie do metod deterministycznych traktują one dane wejściowe i wyjściowe jako zmienne losowe [20, 21]. Wśród metod opartych na technikach uczenia maszynowego można wyróżnić, np. klasyczne sieci neuronowe, sieci głębokie czy sieci neuronowe oparte na prawach fizyki (PINN – Physics Informed Neural Networks) [22–24]. W szczególności, te ostatnie pozwalają na lepszą integrację wiedzy fizycznej (praw fizyki) z wiedzą pozyskaną z przeprowadzanych pomiarów. W szczególności, wspomniane powyżej metody zostaną pokrótce omówione w kolejnych podrozdziałach poniżej.

2.2.1. Metody deterministyczne

Metody analityczne rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła należą do najstarszych opracowań tego typu [11, 25–27]. Ich zaletą jest rozwiązanie w formie jawnej. Z drugiej strony, istotnym problemem jest ograniczenie do zagadnień liniowych (przy założeniu własności materiałowych niezależnych od temperatury) oraz prostych kształtów typu pręty, płyty czy sfery. Na przykład, jedna z pierwszych prac dotyczących IHCP Sparrow'a et al. [25] opisuje zastosowania całki Duhamela do otrzymania rozwiązania odwrotnego na przykładzie obiektów o nieskomplikowanych kształtach. Całka Duhamela jest narzędziem pozwalającym rozwiązać równanie różniczkowe cząstkowe lub układu równań

cząstkowych, w których występuje człon źródłowy (wymuszenie) zależny od czasu. Pozwala przekształcić rozwiązanie z wymuszeniem na podstawie znanego rozwiązania problemu ze stałym wymuszeniem jednostkowym. Umożliwia wyrażenie odpowiedzi układu (a więc temperaturę) jako splot wymuszenia z funkcją odpowiedzi układu. Wadą całki Duhamela jest ograniczenie zastosowań do przypadków liniowych oraz częste niestabilności. Te ostatnie eliminuje się np. poprzez wykorzystanie regularyzacji [18].

Z kolei, Novikov [28] opisuje zastosowanie transformaty Laplace'a do rozwiązania zagadnienia prostego i odwrotnego na przykładzie półnieskończonego pręta. Liczne przykłady ilustrujące zastosowanie transformaty Laplace'a można znaleźć także w pracy Dudy i Talera [29]. Transformata Laplace'a jest ogólnie znanym narzędziem służącym rozwiązywaniu równań różniczkowych poprzez ich algebraizację i rozwiązanie w dziedzinie Laplace'a (a następnie wykonaniu przekształcenia odwrotnego), ale jej przydatność ograniczona jest do modeli liniowych lub słabo nieliniowych oraz modeli obiektów o prostych kształtach. Mogą pojawić się też określone trudności przy odwracaniu transformaty. Obecnie, jest to metoda bardzo rzadko stosowana w zagadnieniach praktycznych.

2.2.2. Metody numeryczne – FDM/FEM/FVM

Metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła bazujące na metodzie elementów skończonych, różnic skończonych czy objętości skończonych należą do najczęściej używanych w praktyce. Wynika to przede wszystkim z uniwersalności w/w metod. Ogólnie ujmując, są one przydatne do rozwiązywania szerokiego spektrum zagadnień od stanów (quasi)ustalonych po problemy o charakterze niestacjonarnym. Ich niewątpliwą wadą są wymagania sprzętowe, ale w dobie paralelizacji obliczeń i rozwijania technik obliczeniowych na procesorach graficznych (GPU) uzyskanie rozwiązania nawet bardzo złożonego zagadnienia może się odbyć w rozsądnych ramach czasowych.

Główna idea metody elementów skończonych polega, jak ogólnie wiadomo, na dyskretyzacji (podziale) ośrodka ciągłego skończoną liczbą elementów o prostej geometrii połączonych ze sobą węzłami ulokowanymi w narożach w/w elementów lub pomiędzy nimi. W porównaniu z metodą różnic skończonych, gdzie algebraizowane są równania (układy równań), w metodzie MES dyskretyzowany jest analizowany obszar.

Ogólnie, sekwencja działań w przypadku metody MES jest następująca [30]

– dyskretyzacja (podział) obszaru na podobszary o prostej geometrii (np. trójkątów czy prostokątów w przypadku zagadnień płaskich lub czworościanów czy prostopadłościanów w przypadku zagadnień przestrzennych),

– wybór punktów węzłowych w danym elemencie, w którym szukane będą (nieznane) wartości wielkości fizycznych,

– wybór funkcji rozkładu niewiadomych wielkości fizycznych w elemencie,

– przekształcenie równań różniczkowych do układu równań algebraicznych,

– sformułowanie układu równań algebraicznych dla badanego obszaru,

– uwzględnienie warunków brzegowych i początkowych,

– rozwiązanie w/w układu równań i znalezienia wartości poszukiwanych niewiadomych w węzłach,

– iteracyjne rozwiązywanie (powtarzanie) układu równań j.w. aż do spełnienia określonych warunków zbieżności i dokładności (dla problemów nieliniowych).

Nie jest więc problemem rozwiązanie określonego zagadnienia dla obszaru o złożonym kształcie. Co więcej, warunki brzegowe i początkowe mogą zależeć od czasu i położenia oraz być nieliniowe, a dyskretyzacja obszaru (utworzenie siatki) jest możliwa do uzyskania w wielu współczesnych pakietach CAE automatycznie lub z niewielką ingerencją użytkownika. Jest to zrozumiałe z uwagi na fakt, iż czynności związane z dyskretyzacją obszaru i jakością siatki były uważane za bardzo pracochłonne. Z drugiej strony, koszt obliczeniowy jest często wysoki, a w przypadku gdy istnieje potrzeba uzyskania rozwiązania w czasie rzeczywistym, okazuje się to być często utrudnione lub wręcz niemożliwe w realizacji, chyba że zostaną poczynione odpowiednie założenia upraszczające celem przyspieszenia obliczeń.

Wedle wiedzy Autorki brakuje obecnie na rynku pakietu CAE posiadającego algorytm rozwiązywanie zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła przy użyciu metod MES. Problemem jest dostęp nie tyle dostęp do kodu źródłowego, ponieważ ten z oczywistych względów jest zamknięty dla użytkownika, ale często możliwość interakcji z programem w sposób umożliwiający istotną modyfikację jego działania np. przez funkcje użytkownika. Znacznie lepszym wyborem w tym przypadku są algorytmy (solvery) rozwiązywania równań różniczkowych (PDE), w których w/w metody są zaimplementowane, ale jednocześnie umożliwiają zaawansowaną interakcję z użytkownikiem w celu rozszerzenia ich funkcjonalności.

2.2.3. Metody probabilistyczne

Metoda wnioskowania bayesowskiego znalazła zastosowanie w odwrotnych zagadnieniach przewodzenia ciepła. Także i w tym przypadku celem jest odtworzenie nieznanych parametrów układu (źródeł ciepła, warunków brzegowych) na podstawie ograniczonych i zaszumionych pomiarów temperatury.

Wnioskowanie bayesowskie pozwala uwzględnić w obliczeniach niepewność pomiaru i otrzymać rozkład prawdopodobieństwa nieznanych parametrów układu zamiast wyznaczania pojedynczego rozwiązania. Algorytmy te zwykle dobrze radzą sobie z zaszumionymi danymi, co jest istotną wadą metod deterministycznych (numerycznych, analitycznych, itp.) i pozwalają oszacować marginesy błędu i wiarygodność otrzymanych wyników. Chociaż technika wnioskowania bayesowskiego była znana i rozwijana od dawna, dopiero po upowszechnieniem wydajnych metod próbkowania typu Łańcuch Markowa Monte Carlo (MCMC – Markov Chain Monte Carlo), jej zastosowanie do rozwiązywania problemów odwrotnych przewodzenia ciepła stało się możliwe [31, 32]. Krótko, Wang i Zabaras [33, 34] przedstawili rozwiązanie zagadnienie odwrotnego przy użyciu wnioskowania bayesowskiego i MCMC na wybranych przykładach. Zeng et al. [35] zaproponowali podejście adaptacyjne celem zmniejszenia ilości obliczeń. Metoda adaptacyjna została przez autorów zademonstrowana przy użyciu modeli liniowych i nieliniowych. Ramos et al. [36] wykorzystali metodę bayesowską do oszacowania własności materiałowych stali. Niestety, wadą tych metod jest w dalszym ciągu stosunkowo ich duża złożoność obliczeniowa [37]. Co więcej, metoda wymaga modelu matematycznego dobrej jakości i wydajnego algorytmu obliczeniowego. Nie bez znaczenia jest też zależność pomiędzy przyjętym rozkładem prawdopodobieństwa a ostatecznym wynikiem.

2.2.4. Metody sztucznej inteligencji

Od połowy lat 90-tych ubiegłego wieku sztuczne sieci neuronowe (ANNs) są stosunkowo często używane do rozwiązywania zadań odwrotnych przewodzenia ciepła [38, 39]. Tylko pobieżna analiza zawartości popularnych baz naukowych publikacji zwraca kilka tysięcy rekordów. Sieci neuronowe można wykorzystać do uczenia modelu odwrotnego na podstawie danych historycznych. Niewątpliwą ich wadą jest rozmiar zbioru danych treningowych wykorzystywanych w procesie uczenia, ale z drugiej strony, uważa się, iż dobrze radzą sobie z nieliniowościami i są relatywnie odporne na obecność zakłóceń w danych pomiarowych [40]. Uważane są też za szybkie narzędzie (po zakończeniu procesu uczenia), co jest niewątpliwą zaletą w przypadku ich wykorzystania w systemach monitoringu w czasie rzeczywistym. Z drugiej strony, ponieważ jest to narzędzie nieparametryczne ogólnego stosowania służące odwzorowywaniu relacji wejście-wyjście, częstym problemem w przypadku sieci NN jest obecność rozwiązań niefizycznych (tej wady nie mają sieci fizyczne typu PINN). Historycznie, w dostępnej literature spotyka się zastosowania większości znanych typów sieci NN do rozwiązywania zadań odwrotnych przewodzenia ciepła, tj. MLP [41], konwolucyjne [42], rekurencyjne [43], sieci głębokie [44] czy sekwencyjne LSTM [45], uczenie posiłkowe [46] lub sieci PINN [40].

Zdaniem Autorki, dyskusyjna jest powszechnie stosowana praktyka polegająca na generowaniu danych treningowych na drodze symulacji rozwiązań bezpośrednich – znikają wtedy ich niewątpliwe przewagi nad klasycznymi metodami odwrotnymi, jakimi są korzystanie z danych historycznych i stosunkowo prosty aparat matematyczny. Uczenie sieci NN zwykle odbywa się poprzez wykorzystanie programów MES do rozwiązywania zadań prostych dla zadanego zbioru wartości gęstości strumienia ciepła działającego na powierzchnię wewnętrzną. Otrzymany wynik jest w postaci zbioru wartości pola temperatur w węzłach odpowiadających położeniu termopar podczas badań. Wtedy, po ukończeniu obliczeń MES, sieć neuronowa jest trenowana w oparciu o przebiegi czasowe obliczonych uprzednio temperatur.

Ciekawą alternatywą dla klasycznych sieci neuronowych stały się wspomniane wyżej neuronowe sieci fizyczne (PINN), które przekształcają równania przewodzenia ciepła (np. równanie paraboliczne) bezpośrednio w funkcję kosztu sieci NN. Jak wspomniano powyżej, klasyczne sieci neuronowe ignorują powiązania pomiędzy danymi wynikające z praw fizyki. Sieci PINN pozwalają na rekonstrukcję rozkładu temperatury lub nieznanych parametrów materiału w przestrzeni i czasie. Sama sieć jest trenowana z wykorzystaniem zrealizowanych pomiarów temperatury oraz modelu matematycznego zgodnego z prawami fizyki [40, 47].

2.2.5. Metody regularyzacyjne

Jedną z metod stosowanych do rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła jest regularyzacja Tichonova [48, 49]. Metoda polega na wprowadzeniu członów regularyzacyjnych rzędu zerowego lub pierwszego czy drugiego do słabo uwarunkowanego układu równań. Ponieważ zagadnienie odwrotne jest słabo uwarunkowane, typowe podejście polega na zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów do rozwiązania funkcjonału błędu

$$\min_{\mathbf{q}} \|\mathbf{Hq} - \mathbf{T}_{\text{meas}}\|^2 + \beta \|\mathbf{Lq}\|^2 \tag{2.1}$$

gdzie $\mathbf{H}$ – macierz odpowiedzi układu, $\mathbf{q}$ – nieznany strumień ciepła, $\mathbf{T}_{\text{meas}}$ – zmierzona wartość temperatury, $\beta > 0$ – parametr regularizacji, $\mathbf{L}$ – macierz różnic skończonych (np. tożsamościowa, różnic pierwszego i drugiego rzędu). Macierz $\mathbf{L}$ zerowego rzędu penalizuje duże, pierwszego rzędu zmienność, a drugiego krzywiznę. Typowe metody doboru β to: metoda L-krzywej, reguła dyskrepancji (discrepancy principle). Człony określonych rzędów można łączyć. Na przykład, Samadi et al. [50] analizowali sposób optymalizacji parametrów regularyzacji, łącząc człony zerowego, pierwszego i drugiego rzędu, aby uzyskać stabilne rozwiązanie do oszacowania gęstości strumienia ciepła. Ich badania potwierdziły, iż zastosowanie kombinacji członów kilku rzędów regularyzacji Tichonov'a może znacznie poprawić jakość rozwiązania odwrotnego. Dotyczy to zwłaszcza praktycznych scenariuszy, kiedy rzeczywisty strumień

ciepła jest nieznany a priori. Regularyzacja Tichonowa jest uważana za metodę prostą i szybką w implementacji, pozwalając dodatkowo kontrolować gładkość i zmienność rozwiązania. Wymaga jednak doświadczenia co do doboru wartości parametru β i nie umożliwia oceny niepewności pomiarów, co z kolei jest możliwe przy użyciu metod probabilistycznych.

2.3. Problematyka szacowania naprężeń termicznych w grubościennych elementach kotłów

Problematyka szacowania naprężeń mechanicznych w walcowych elementach konstrukcyjnych przewodzących ciecz lub gaz pod wysokim ciśnienie była badana m.in. przez G. Lamégo [51], a opracowane przez niego wyrażenia matematyczne (znane pod nazwą wzorów Lamégo) stosowane są do dziś. W obszarach geometrycznych nieciągłości typu otwory lub karby metody obliczania naprężeń mechanicznych uwzględniają lokalną korektę w postaci współczynników naprężeń [52]. W razie występowania bardziej złożonych kształtów sięga się po metody MES. Wspomniane metody są ogólnie znane, a ich stosowanie nie wzbudza kontrowersji.

Dla porównania, problematyka szacowania naprężeń termicznych w grubościennych elementach kotłów powiązana jest ściśle z rozwiązaniem zagadnienia odwrotnego przewodzenia ciepła. Jakość i dokładność wyznaczonego w ten sposób stanu naprężeń w badanym elemencie konstrukcyjnym zależy bezpośrednio od dokładności tego rozwiązania. Z uwagi na wysokie temperatury panujące w kotłach bezpośredni pomiar naprężeń tego typu nie jest praktykowany [53].

Naprężenia cieplne pochodzące od pola temperatur wyznacza się na powierzchni, dla której są one największe. W przypadku cylindrycznych grubościennych elementów kotłów są to powierzchnie wewnętrzne lub miejsca koncentracji naprężeń jak otwory. Jak wspomniano w Rozdziale 1, powszechnie stosowana praktyka we współczesnych systemach monitoringu naprężeń cieplnych w elementach grubościennych polega na szacowaniu temperatury na powierzchni wewnętrznej poprzez pomiar temperatury w dwóch punktach: na zewnątrz lub w pobliżu środka grubości ścianki i w pobliżu powierzchni wewnętrznej [5]. Największe naprężenia cieplne zależą bezpośrednio od różnicy temperatury na powierzchni wewnętrznej i temperatury średniej, $\sigma_t = E\beta/(1-\nu)\Delta T$, $\Delta T = T_s - T_m$, gdzie E – moduł Younga, β – temperaturowy współczynnik rozszerzalności, ν – liczba Poissona, T_s – temperatura powierzchni wewnętrznej, T_m – temperatura średnia. Pomiar temperatury T_s jest zatem pośredni i polega na rozwiązaniu zadania odwrotnego przewodzenia ciepła w pierwszej kolejności, a w następnej stanu naprężeń. Ponieważ zagadnienie odwrotne jest słabo uwarunkowane, otrzymane w ten sposób dane są

obarczone błędem. Są one następnie korygowane przy użyciu opracowanych na przestrzeni lat metod i technik. Trzeba pamiętać, że czujniki temperatury nie mogą być umieszczone arbitralnie. Położony zbyt blisko powierzchni wewnętrznej doprowadzi do pogorszenia wytrzymałości monitorowanego elementu, a z drugiej strony, położony zbyt daleko od niej spowoduje, iż szybkie zmiany temperatury czynnika nie będą przezeń wychwytywane. Co więcej, położenie punktu wewnątrz ścianki, dla którego przyjmowana jest temperatura średnia, ulega zmianom w czasie.

W miejscach występowania koncentracji naprężeń cieplnych są one wyznaczane w sposób uproszczony lub bardziej dokładny przy użyciu ogólnie znanych narzędzi i metod MES [5, 54]. Wyznaczenie rozkładu temperatur w ściance monitorowanego elementu ma bezpośrednie przełożenie na wartości naprężeń w elemencie i umożliwia zarządzanie zmianami temperatury w układzie, aby nie doprowadzić do przekroczenia naprężeń dopuszczalnych.

Dopuszczalne szybkości zmian ciśnienia i temperatury są zwykle określane na podstawie normy PN-EN 12952-3 [55] lub innych przepisów [54]. Uważa się jednak, iż wyliczenia na podstawie wspomnianej normy są zbyt konserwatywne, tj. ich stosowanie prowadzi do zbyt długich czasu rozruchu czy wyłączania [56], bazują bowiem na nierealistycznym założeniu quasi-stacjonarnego pola temperatur w ściance elementu konstrukcyjnego. Nieco bardziej współcześnie opracowane algorytmy i metody obliczeniowe [57, 58] pozwalają oszacować naprężenia cieplne bardziej realistycznie, prowadząc do krótszych czasów rozruchu i wyłączania w porównaniu np. z w/w normami.

2.4. Podsumowanie

Podsumowując, dokładność metod wyznaczania naprężeń cieplych w grubościennych elementach kotłów ściśle zależy od jakości oszacowanego pola temperatur otrzymanego przy użyciu metod odwrotnych. Niedoskonałości znaczącej większości metod odwrotnych (są słabo uwarunkowane i wrażliwe na szumy pomiarowe) znacząco wpływają na dokładność obliczeń, dlatego precyzyjne rozwiązanie tego problemu jest wyzwaniem badawczym. Jest to w dalszym ciągu istotny problem badawczy. O jego znaczeniu świadczy przede wszystkim znaczna liczba recenzowanych prac naukowych poświęconych tej tematyce ukazujących się corocznie.

W kontekście podjętej przez Autorkę tematyki, a także potencjalnego wykorzystania opracowanej metody w systemach monitoringu, istotny jest kompromis pomiędzy dokładnością a prędkością działania i przetwarzania danych, co de facto eliminuje znaczną część omawianych w niniejszym rozdziale metod. Znajdujący się w temacie rozprawy przymiotnik 'szybka' narzuca określone restrykcje co do rozmiaru modelu matematycznego i efektywności wybranych algorytmów obliczeniowych.

3. Metoda regulacyjna – model liniowy

Rozwiązanie odwrotne zagadnienia przewodzenia ciepła można sprowadzić do problemu regulacji (gęstości) strumienia ciepła w badanym obiekcie. Zakładając obecność wirtualnego regulatora gęstości strumienia ciepła w badanym układzie, obliczenie wartości wymuszenia sprowadza się minimalizacji błędu pomiaru, tj. różnicy między wartością zmierzoną w określonej lokalizacji a wartością otrzymaną z rozwiązania zagadnienia prostego [59, 60].

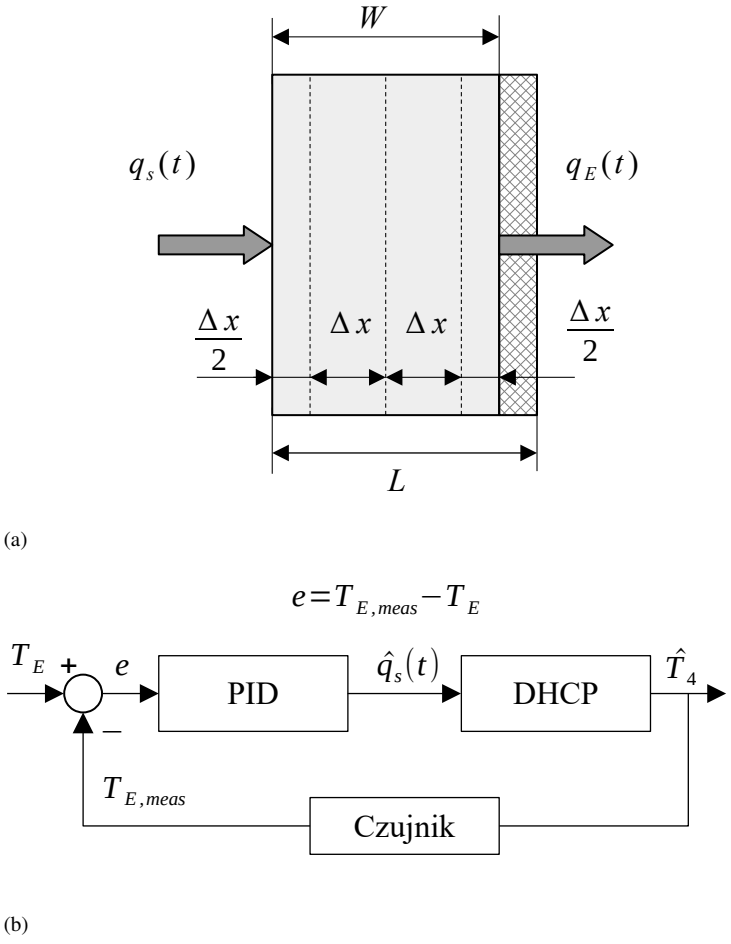
Zasadniczo, metoda wykorzystuje model prosty (bezpośredni) w dowolnej formie, np. w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych i/lub cząstkowych lub sieci neuronowej. Prawidłowe działanie metody uzależnione jest m.in. od wyboru punktu pomiaru temperatury i doboru nastaw regulatora określonego typu.

Działanie metody regulacyjnej zostanie w niniejszym rozdziale przedstawione na przykładzie obiektu płaskiego (płyta) i cylindrycznego (cylinder). Jako regulator zostanie wykorzystany prosty regulator PI (proporcjonalno-całkujący), ale działanie tej metody nie jest ograniczone do klasycznych regulatorów. Każdorazowo, zostanie zbadana zdolność metody do rekonstrukcji temperatury na powierzchniach: wewnętrznej i zewnętrznej badanego obiektu oraz naprężeń cieplnych zredukowanych σ_{red} na ich powierzchniach wewnętrznych dla wybranych rodzajów wymuszenia zmiany temperatury w obiekcie gęstością strumieniem ciepła $q_s(t)$ także w warunkach symulowanego zniekształcenia pomiaru temperatury addytywnym szumem gaussowskim o zerowej wartości oczekiwanej i stałej wariancji.

Jak wspomniano powyżej, celem tego rozdziału jest demonstracja działania metody regulacyjnej. W związku z tym jej działanie zostało zilustrowane przy użyciu modelu prostego (płyty, cylindra) o stosunkowo niewielkiej liczbie węzłów kontrolnych. Model bezpośredni, który jest integralną częścią metody regulacyjnej, może być łatwo rozszerzony o dowolną liczbę węzłów kontrolnych. Dodatkowo, założono liniowość modelu, tj. niezależność własności materiałowych; rozszerzenie metody dla modelu nieliniowego o własnościach zależnych od temperatury przedstawiono w osobnym materiale zaprezentowanym w Rozdziale 4.

3.1. Model płaski – płyta

Dla płyty o grubości W przedstawionej na Rys. 3.1 znane są: temperatura na powierzchni zewnętrznej T_E oraz gęstość strumień ciepła $q_E(t) = 0$ (powierzchnia zewnętrzna jest izolowana cieplnie). Całkowita grubość płyty wraz z izolacją wynosi L. Poszukiwana jest zarówno temperatura na powierzchni wewnętrznej T_s oraz gęstość strumienia ciepła $q_s(t)$. Powyższe wielkości są zmienne w czasie. Szukamy temperatur T_i w równomiernie oddalonych od siebie węzłach. Lokalizacje węzłów można wyliczyć zgodnie z zależnością $x_i = \Delta x(i-1)$, $i = 1, N+1$, gdzie $\Delta x = W/(N-1)$. Własności materiału płyty są stałe i niezależne od temperatury. Przykładowo, po dekompozycji obszaru płyty na $N = 4$ objętości kontrolnych, z równań równowagi otrzymujemy [29]



Rysunek 3.1. Koncepcja metody regulacyjnej, a) dekompozycja obszaru płyty w modelu prostym, b) schemat blokowy metody [59], $e(t)$ – uchyb, $T_{E,meas}$ – temperatura w punkcie pomiaru na powierzchni zewnętrznej, $T_E = T_N = T_4$

$$\begin{cases} c\rho\dot{T}_4\frac{\Delta x}{2} &= \frac{\lambda}{\Delta x}(T_3 - T_4) - q_E \\ c\rho\dot{T}_3\Delta x &= \frac{\lambda}{\Delta x}(T_2 - T_3) + \frac{\lambda}{\Delta x}(T_4 - T_3) \\ c\rho\dot{T}_2\Delta x &= \frac{\lambda}{\Delta x}(T_1 - T_2) + \frac{\lambda}{\Delta x}(T_3 - T_2) \\ c\rho\dot{T}_1\frac{\Delta x}{2} &= \frac{\lambda}{\Delta x}(T_2 - T_1) + q_s \end{cases} \tag{3.1}$$

gdzie ρ – gęstość materiału płyty, c – ciepło właściwe, λ – przewodność cieplna. Powyższe równania zapisane w postaci typowego układu równań stanu i równania obserwatora przyjmują ogólnie znaną postać

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{AX} + \mathbf{Bq} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{CX} + \mathbf{Dq} \tag{3.3}$$

gdzie $\mathbf{X} = [T_1, T_2, T_3, T_4]^T$, $\mathbf{q} = [q_s, 0, 0, 0]^T$, a pozostałe składniki mają następujące formę

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{2\lambda}{c\rho}\frac{1}{(\Delta x)^2} & \frac{2\lambda}{c\rho}\frac{1}{(\Delta x)^2} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{c\rho}\frac{1}{(\Delta x)^2} & -\frac{2\lambda}{c\rho}\frac{1}{(\Delta x)^2} & \frac{k}{c\rho}\frac{1}{(\Delta x)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{c\rho}\frac{1}{(\Delta x)^2} & -\frac{2\lambda}{c\rho}\frac{1}{(\Delta x)^2} & \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda}{c\rho}\frac{1}{(\Delta x)^2} & -\frac{2\lambda}{c\rho}\frac{1}{(\Delta x)^2} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{c\rho\Delta x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & T_4 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{D} = 0 \tag{3.7}$$

Jeśli temperatura znana jest wyłącznie w chwilach czasu $k = 1, \ldots, M$, to po dyskretyzacji powyższego układu równań stanu przy użyciu różnic skończonych otrzymujemy

$$\frac{\Delta T_{i,k}}{\Delta t} = \frac{T_{i,k+1} - T_{i,k}}{\Delta t} \tag{3.8}$$

gdzie $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ =const, $T_{i,k}$ – temperatura w węźle i w czasie k (t_k). Wtedy, otrzymujemy następujący układ równań algebraicznych przy pomocy którego można określić temperaturę we wszystkich węzłach kontrolnych i modelu w chwili $k + 1$

$$\mathbf{T}_{i,k+1} = \mathbf{T}_{i,k} + \Delta t\mathbf{AX}_{i,k} + \mathbf{Bq}_i \tag{3.9}$$

Tabela 3.1. Dane wejściowe – płyta, własności materiałowe i wymiary

W, m	N	Δx, m	c, J/(kg K)	λ, W/(m K)	ρ, kg/m^3
0.025	4	0.0083	520	40	7720

który należy rozwiązywać w kolejnych chwilach czasu t_k. Dla potrzeb niniejszych rozważań zakładamy w dalszym ciągu ciągłość modelu w czasie, w związku z tym rozważany dalej będzie układ równań 3.2.

Do celów niniejszej demonstracji wybrano klasyczny regulator PID. Ogólne równanie opisujące zachowanie regulatora PID jest następujące:

$$q_s = k_p \left[e(t) + \frac{k_i}{T_{ii}} \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \tag{3.10}$$

gdzie uchyb $e(t)$ obliczany jest jako różnica między wartością zmierzoną w punkcie pomiaru a wartością temperatury przewidywaną przez model. Natomiast, w przestrzeni Laplace'a

$$Q_s(s) = k_p E(s) \left[1 + \frac{k_i}{T_{ii} s} + k_d T_d s \right] \tag{3.11}$$

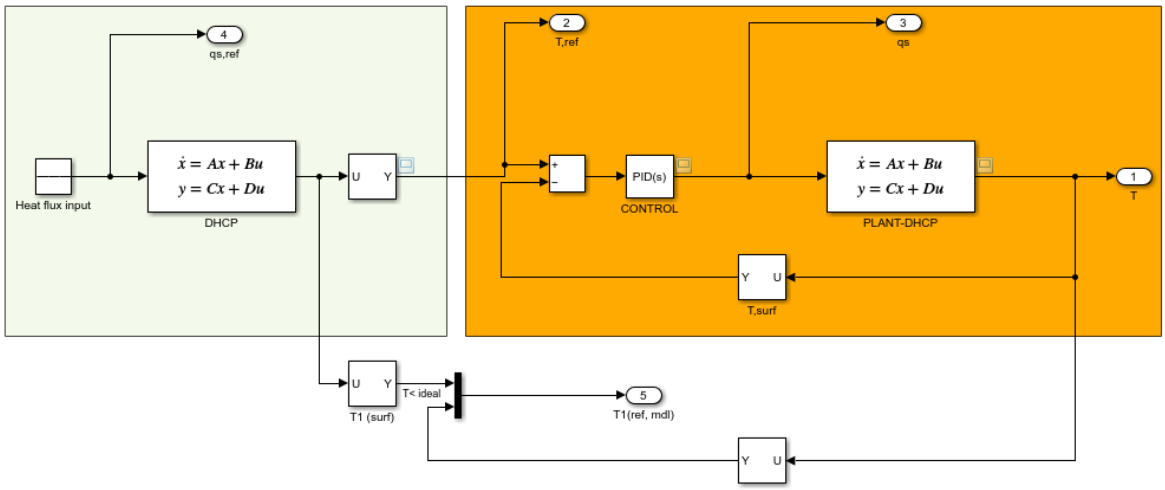
gdzie k_p - wzmocnienie częsci proporcjonalnej regulatora, k_i, T_{ii} – nastawy części całkującej, k_d,T_d – nastawy części różniczkującej. Korzystając z przekształcenia Laplace'a, otrzymujemy równanie wyjścia (zob. Równanie 3.3) w postaci

$$\mathbf{Y} = T_E(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}(s) \tag{3.12}$$

Na potrzeby tychże rozważań, zakładamy obecność idealnego czujnika temperatury powierzchni zewnętrznej. Problem oszacowania temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 oraz gęstości strumienia ciepła $q_s(t)$ sprowadza się zatem do typowego zagadnienia regulacji, gdzie w tym przypadku celem jest takie dostrojenie nastaw regulatora, aby uchyb regulacji $e(t)$ będący różnicą między temperaturą zmierzoną na powierzchni a obliczoną przez model prosty przedstawiony na schemacie na Rys. 3.1b na podstawie wysterowania $q_s(t)$ był minimalny. Innymi słowy, temperatura na powierzchni wewnętrznej jest określona pośrednio (bezczujnikowo) na podstawie pomiaru temperatury $T_E(t)$.

Na podstawie schematu blokowego przedstawionego na Rys. 3.1a zbudowano model prosty (opisany układem równań 3.2 oraz 3.3, a także schemat układu 'regulacji' w celu oszacowania wartości gęstości strumienia ciepła $q_s(t)$ oraz temperatury powierzchni wewnętrznej płyty T_1. Założono obecność idealnego czujnika temperatury w pętli sprzężenia zwrotnego, tj. działającego z zerową zwłoką czasową. Korzystając z danych wejściowych w Tabeli 3.1, przeprowadzono szereg symulacji w celu oceny przydatności niniejszej metody. Strojenie regulatora (dobór nastaw) PID wstępnie przeprowadzono przy

użyciu narzędzi z modułu Simulink Control Design 24.1 pod kątem minimalizacji zarówno czasu regulacji t_r i wielkości przesterowania. Dla badanego układu czas regulacji to najkrótszy czas po upływie którego wartość temperatury $T_E(t)$ nie różni się od wartości ustalonej nie więcej niż o zadaną odchyłkę. Następnie, przyjęta definicja przeregulowania $\Delta T_{E,r}$ opisuje nadwyżkę dynamiczną temperatury $T_E(t)$ w stosunku do wartości ustalonej. Wynikowe nastawy regulatora zamieszczono w Tabeli 3.2.



Rysunek 3.2. Metoda regulacyjna: diagram modelu odwrotnego zbudowanego w środowisku Simulink

Wymuszenie skokowe $q_s(t)$ opisane jest równaniem

$$q_s(t) = q_m \cdot \mathbf{1}(t),\ t > 0 \tag{3.13}$$

gdzie q_m – amplituda skoku. Następnie, wymuszenie trójkątne liniowo narastające (opadające) jest następującej postaci

$$q_s(t) = \begin{cases} q_a t,\ t > 0\ \&\ t \leq T_0/2 \\ q_a T_0 - g_m t,\ t > T_0/2\ \&\ t \leq T_0 \end{cases} \tag{3.14}$$

gdzie q_a – szybkość wzrostu (spadku), T_0 – okres. Ostatecznie, równanie fali prostokątnej o wypełnieniu 50% opisuje zależność

$$q_s(t) = q_m \left[\cdot \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T_0/2)\right],\ t \in < 0, T_0 > \tag{3.15}$$

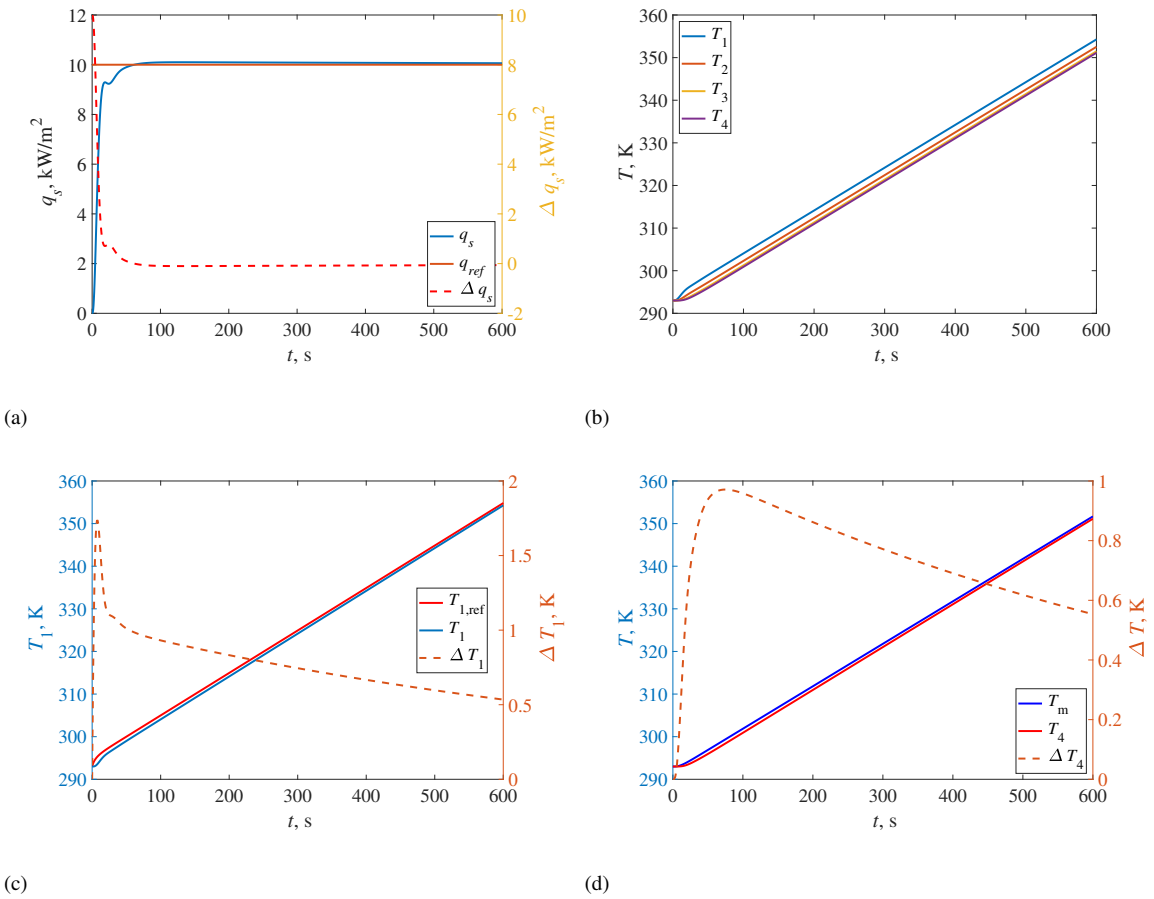
Tabela 3.2. Nastawy regulatora PID

k_p, W/(K·m^2)	$\frac{k_i}{T_{ii}}$, W/(K·m^2)	$k_d T_d$, W/(K·m^2)
9776.1	10.56	118499.5

lub ogólnie

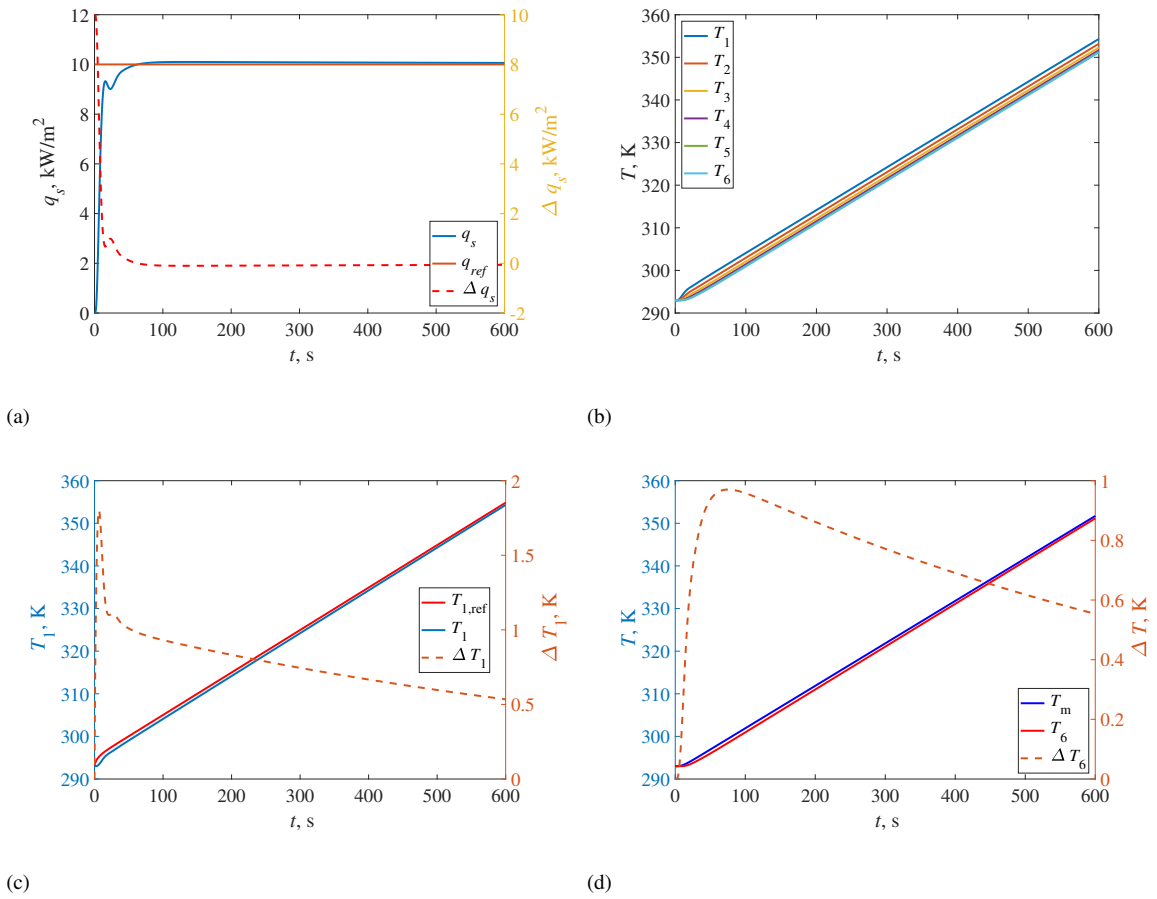
$$q_s(t) \quad = \quad q_m \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cdot \mathbf{1}(\frac{t}{T_0} - n) - \mathbf{1}(\frac{t}{T_0} - (n - \frac{1}{2})) \right] \tag{3.16}$$

Badano zdolność modelu do odwzorowania wartości gęstości strumienia $q_s(t)$ oraz temperatury T_1 i T_E w następujących przypadkach: a) wymuszenie skokowe, b) wymuszenie liniowo narastające (opadające), c) wymuszenie prostokątne o okresie T_0 i stałym wypełnieniu. Symulacje przeprowadzono dla modelu o rożnej liczbie węzłów $N = \{4, 6, 8\}$. Do rozwiązania numerycznego układu równań 3.2 użyto algorytmu stałokrokowego ode14x w środowisku Simulink. Temperatura początkowa we wszystkich węzłach modelu płaskiego była równa $T_a = 293$ K. Wyniki obliczeń dla obiektu płaskiego przedstawiono na Rys. 3.3–3.11.



Rysunek 3.3. Odpowiedź układu płaskiego liniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 4$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanej gęstości strumienia ciepła $q_{ref}(t)$ z odtworzoną $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_4 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_4(t)$

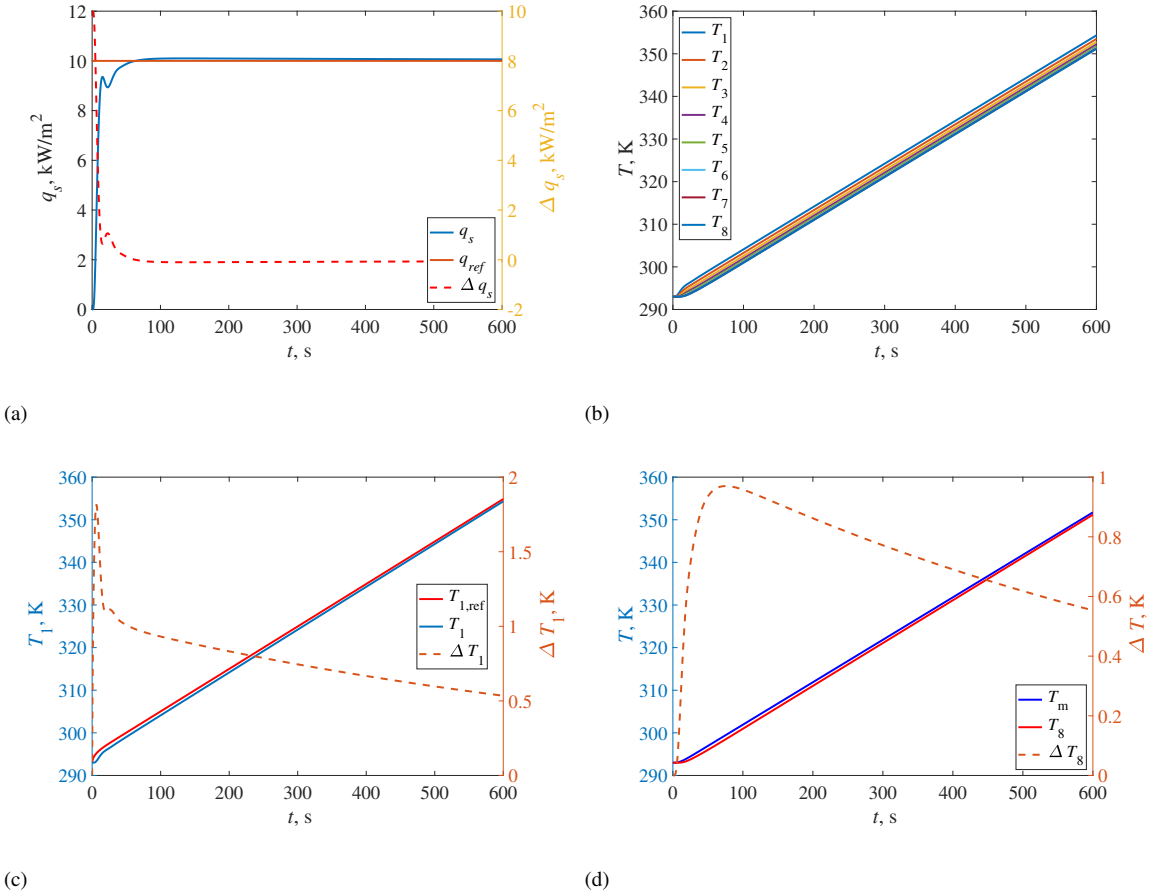
Rys. 3.3–3.5 przedstawia odpowiedź modelu na wymuszenie skokowe opisane Równaniem 3.13 odpowiednio dla modeli płyty o 4, 6, 8 węzłach kontrolnych. W szczególności, ilustrują one a) porównanie przebiegów czasowych gęstości strumienia ciepła zrekonstruowanego przez model z zadaną gęstością strumienia ciepła $q_{ref}(t)$, a także zmienność błędu bezwzględnego w czasie $\Delta q_s(t) = q_{ref} - q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w poszczególnych węzłach płyty oraz c) porównanie temperatury oszacowanej przez model T_1 z wartością otrzymaną z modelu prostego $T_{1,ref}$ oraz błędu $\Delta T_1 = T_{1,ref} - T_1$, a także d) przebiegi czasowe zmierzonej na powierzchni temperatury T_m z wartością temperatury otrzymanej z modelu prostego T_N, gdzie $N = \{4, 6, 8\}$.



Rysunek 3.4. Odpowiedź układu płaskiego liniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 6$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_6 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_6(t)$

Z obserwacji wykresów gęstości strumienia ciepła, temperatury powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej wynika, iż błędy stosunkowo w niewielkim stopniu zależą od liczby węzłów (w analizowanym

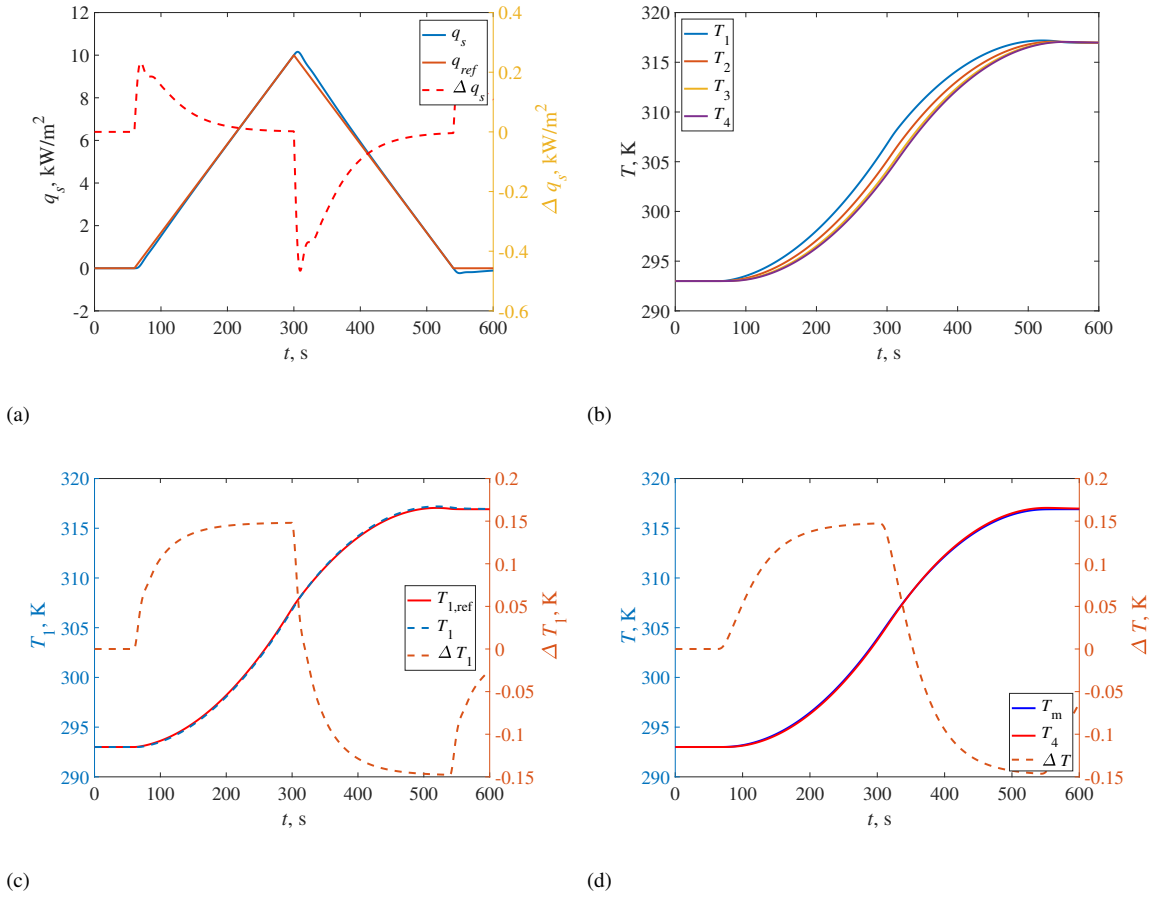
zakresie wartości liczby N). Błąd oszacowania gęstości strumienia ciepła już po kilku sekundach spada poniżej 2 kW/m^2, a po kilkudziesięciu mieści się w zakresie 1%. Przykładowo, czas ten dla modelu 4-węzłowego wynosi 50.5 s, a dla 8-węzłowego jest równy 54.5 s. Maksymalna wartość błędu oszacowania temperatury wewnętrznej nie przekracza 2 K, a już po pięćdziesięciu kilku sekundach spada poniżej progu 1 K. Nieco dokładniej szacowana jest temperatura powierzchni zewnętrznej T_N. W każdym z analizowanych przypadków maksymalna wartość błędu nie przekracza 1 K.



Rysunek 3.5. Odpowiedź układu płaskiego liniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 8$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanej gęstości strumienia ciepła $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_8 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_8(t)$

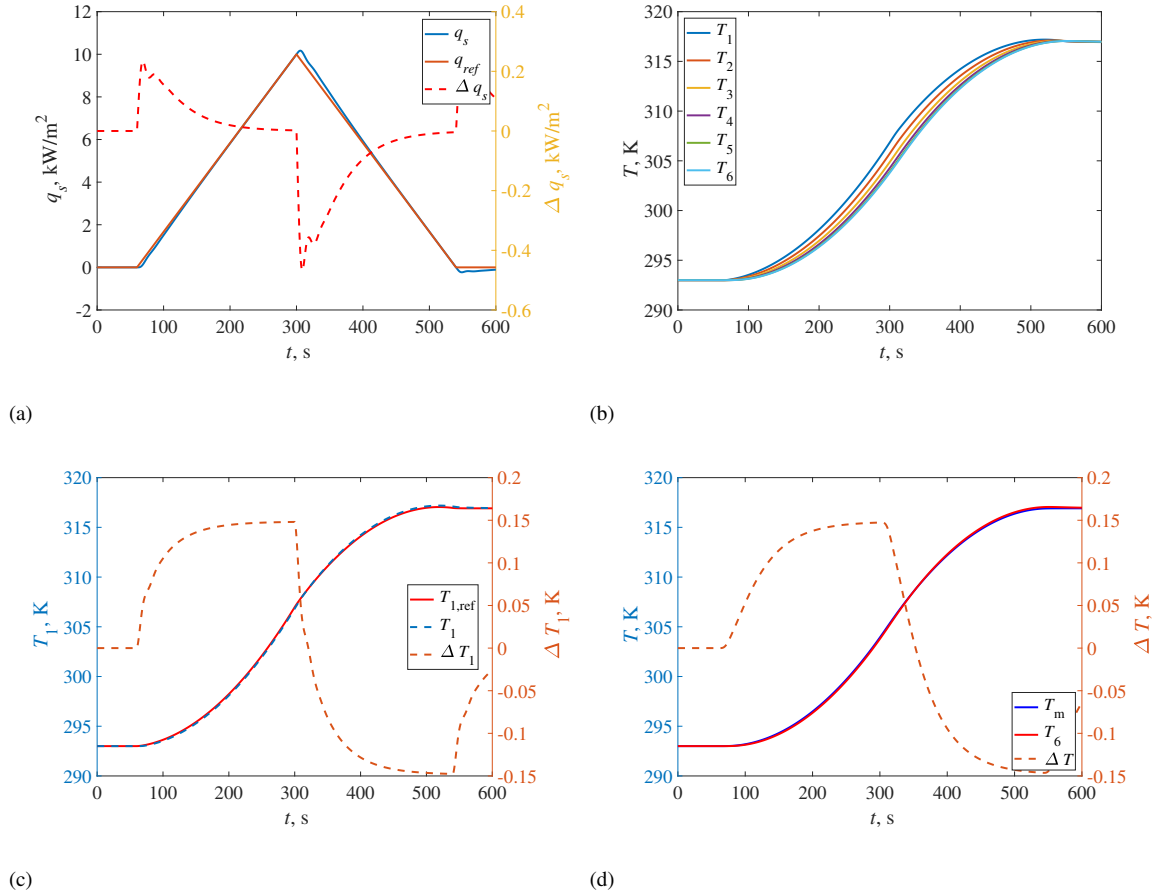
Analogicznie Rys. 3.6- 3.8 przedstawiają odpowiedź modelu na wymuszenie $q_s(t)$ o profilu trójkątnym ze stała prędkością wzrostu (spadku) równą 41.67 W/m^2 · s (2.5 kW/m^2 · min). W szczególności, Rys. 3.6 ilustruje odpowiedź modelu płaskiego 4-węzłowego, Rys. 3.7 ukazuje odpowiedź modelu 6-węzłowego, a Rys. 3.8 przedstawia odpowiedź modelu 8-węzłowego. Także i w tym przypadku, liczba

węzłów w modelu płaskim zasadniczo nie wpływa w znaczącym stopniu na błąd oszacowania zarówno gęstości strumienia ciepła jak i temperatur powierzchni wewnętrznej (i zewnętrznej). Jak widać na przedstawionych powyżej wykresach, największy błąd występuje w niewielkim przedziale czasowym po zmianie znaku szybkości narastania (z dodatniego przy wzroście na ujemny przy spadku). Dla gęstości strumienia ciepła błąd maksymalny nie przekracza 0.24 kW/m^2, a dla temperatury T_1 mieści się w zakresie do ok. 0.15 K (0.14 K dla temperatury powierzchni zewnętrznej).



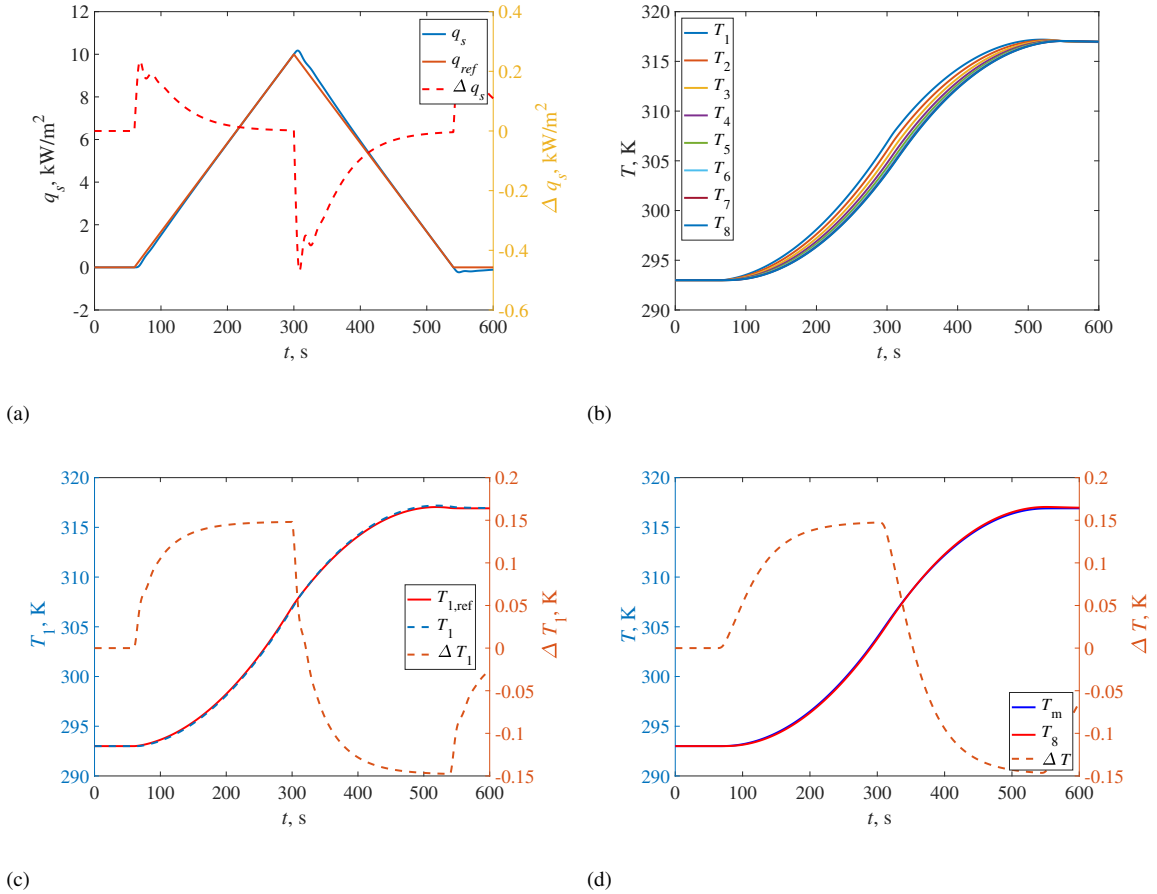
Rysunek 3.6. Odpowiedź układu na wymuszenie trójkątne, $q_m = 41.67$ W/m$^2 \cdot s$, $T_0 = 480$ s, $N = 4$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_4 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_4(t)$

Ostatni analizowany przypadek dotyczy odpowiedzi układu płaskiego na okresowe wymuszenie prostokątne – zob. Rys. 3.9-3.11. Podobnie jak w poprzednich rozważanych przypadkach, Rys. 3.9 przedstawia odpowiedź modelu płaskiego 4-węzłowego, Rys. 3.10 ilustruje zachowanie modelu 6-węzłowego, a Rys. 3.11 dotyczy modelu 8-węzłowego.



Rysunek 3.7. Odpowiedź układu na wymuszenie trójkątne, $q_m = 41.67$ W/m$^2 \cdot s$, $T_0 = 480$ s, $N = 6$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_6 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_6(t)$

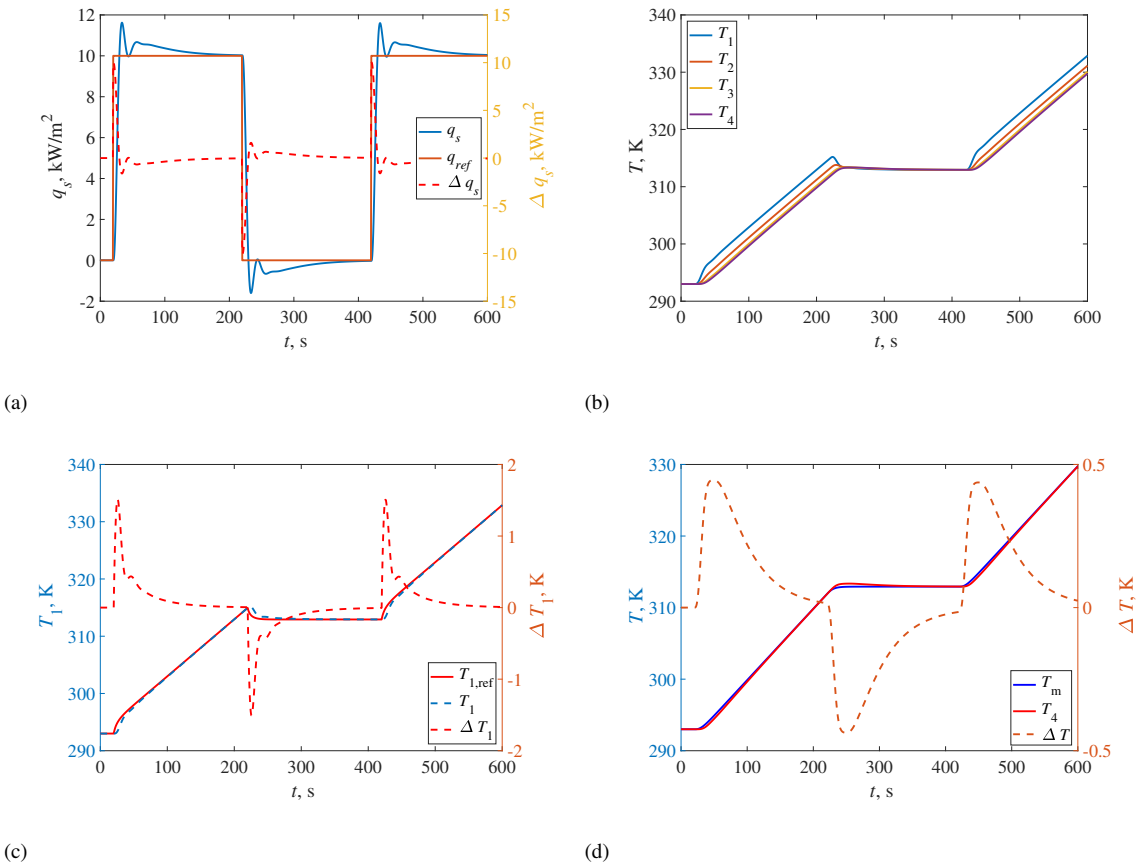
W analizowanych przypadkach błąd oszacowania temperatury powierzchni wewnętrznej nie przekracza 1.5 K i jest największy w chwilach skoku wartości gęstości strumienia ciepła, natomiast błąd oszacowania temperatury powierzchni zewnętrznej mieści się w zakresie ± 0.5 K. Największy co do wartości błąd dotyczy gęstości strumienia ciepła $q_s(t)$; w chwilach skokowej zmiany wartości gęstości strumienia ciepła jest on największy i jest równy wartości amplitudy wymuszenia. Wielkość przesterowania sygnału wymuszenia nie przekracza natomiast 2 kW/m^2. Podobnie jak we wcześniej analizowanych przypadkach, także i w tym scenariuszu liczba węzłów w modelu nie wpływa znacząco na jakość modelu (tj. na jego zdolność do oszacowania temperatury powierzchni wewnętrznej).



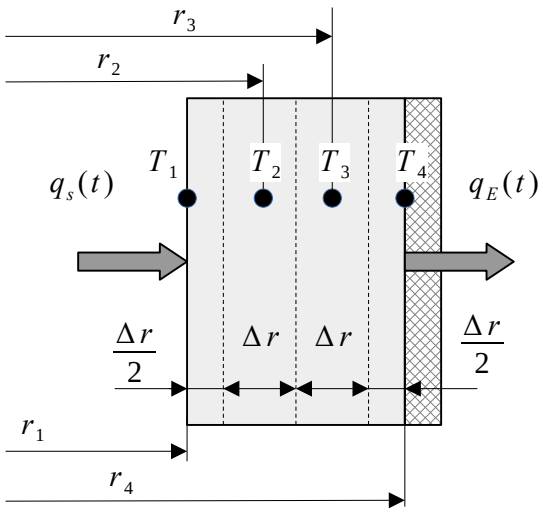
Rysunek 3.8. Odpowiedź układu na wymuszenie trójkątne, $q_m = 41.67$ W/m$^2 \cdot s$, $T_0 = 480$ s, $N = 8$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_8 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_8(t)$

3.2. Model cylindryczny – cylinder

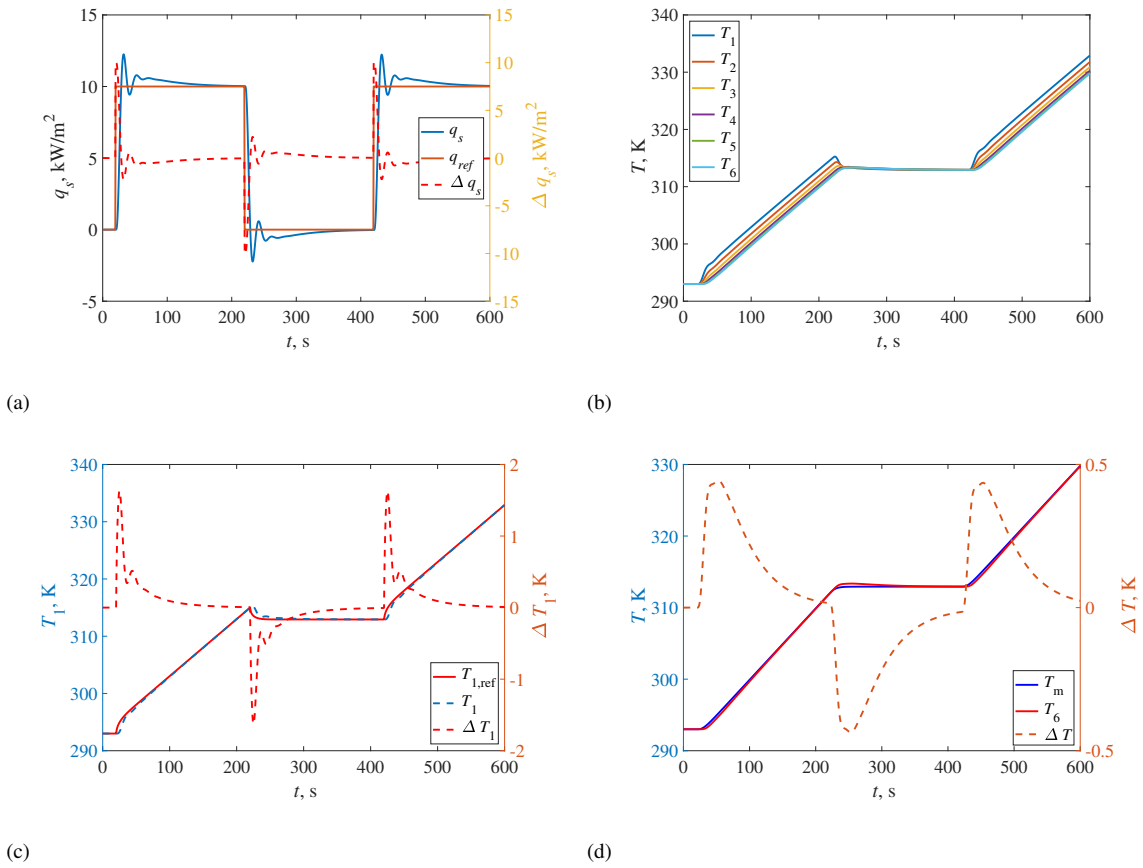
Drugi wybrany przez Autorkę przykład dotyczy przykładowego modelu cylindra przedstawionego na Rys. 3.12. Znane są: temperatura na powierzchni zewnętrznej T_E oraz gęstość strumienia ciepła $q_E(t) = 0$ (powierzchnia jest izolowana cieplnie). Nieznana jest zarówno temperatura na powierzchni wewnętrznej jak i gęstość strumień ciepła $q_s(t)$, który na nią oddziaływuje. Promień wewnętrzny cylindra jest równy $r_w = r_1$, a zewnętrzny $r_z = r_N$, gdzie N – liczba węzłów. Własności materiału cylindra są stałe i nie zależą od temperatury, a więc model można w dalszym ciągu traktować jako liniowy. Po dekompozycji obszaru cylindra na $N = 4$ objętości kontrolne, z równań równowagi otrzymujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych 3.17 opisujących dynamikę przedstawionego na w/w rysunku modelu cylindra następującej postaci



Rysunek 3.9. Odpowiedź układu płaskiego na okresowe wymuszenie prostokątne $q_s(t)$, $T_0 = 480$ s, $N = 4$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_4 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_4(t)$



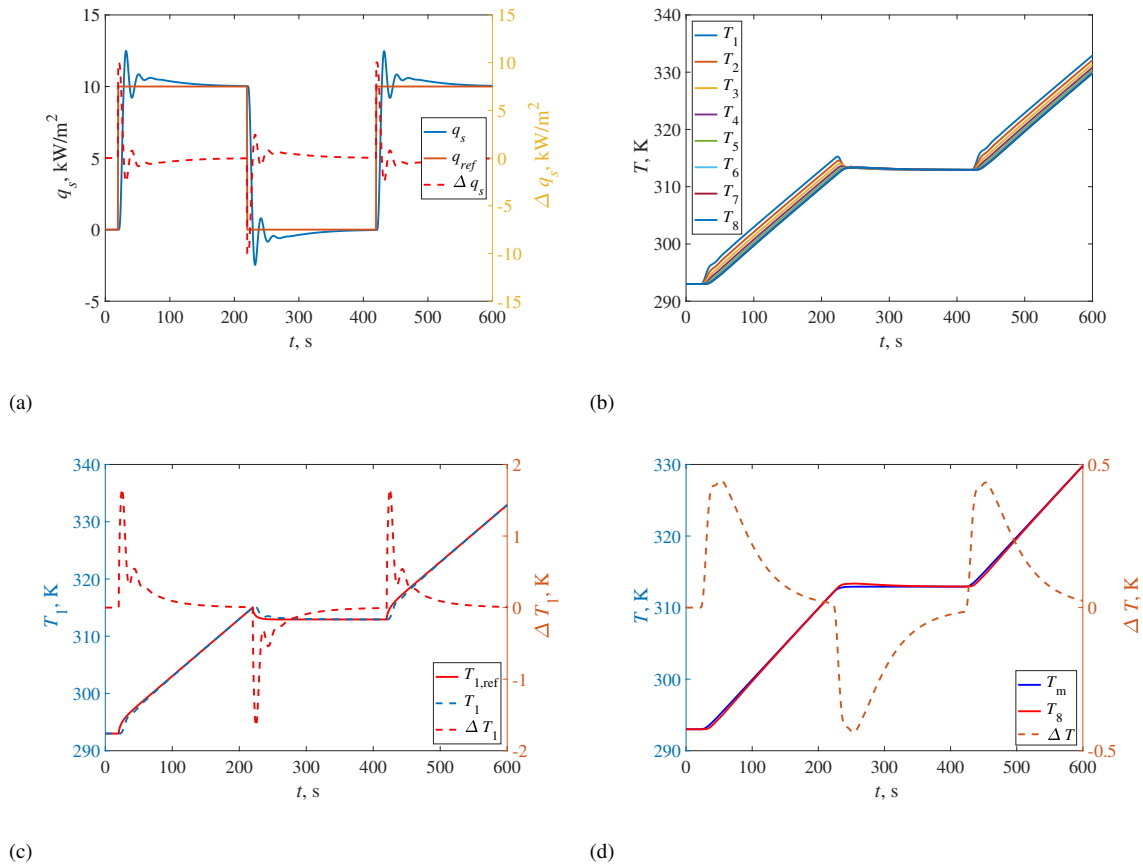
Rysunek 3.12. Dekompozycja ścianki cylindra na $N = 4$ węzły kontrolne



Rysunek 3.10. Odpowiedź układu płaskiego na okresowe wymuszenie prostokątne $q_s(t)$, $T_0 = 480$ s, $N = 6$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_6 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_6(t)$

$$
\begin{cases}
2\pi r_4 c\rho\Delta r\dot{T}_4 &= \frac{2\pi\lambda}{\Delta r}(r_4 - \frac{\Delta r}{2})(T_3 - T_4) - q_E \\
2\pi r_3 c\rho\Delta r\dot{T}_3 &= \frac{2\pi\lambda}{\Delta r}(r_3 - \frac{\Delta r}{2})(T_2 - T_3) + \frac{2\pi\lambda}{\Delta r}(r_3 + \frac{\Delta r}{2})(T_4 - T_3) \\
2\pi r_2 c\rho\Delta r\dot{T}_2 &= \frac{2\pi\lambda}{\Delta r}(r_2 - \frac{\Delta r}{2})(T_1 - T_2) + \frac{2\pi\lambda}{\Delta r}(r_2 + \frac{\Delta r}{2})(T_3 - T_2) \\
2\pi r_1 c\rho\Delta r\dot{T}_1 &= \frac{2\pi\lambda}{\Delta r}(r_1 + \Delta r)(T_2 - T_1) + q_s
\end{cases}
\tag{3.17}
$$

gdzie lokalizacje węzłów można wyliczyć zgodnie z zależnością $\Delta r = (r_z - r_w)/(N - 1)$. Po przekształceniach powyższego układu równań otrzymujemy macierze w układzie równań stanu 3.2 i równaniu wyjścia 3.3 w następującej formie



Rysunek 3.11. Odpowiedź układu płaskiego na okresowe wymuszenie prostokątne $q_s(t)$, $T_0 = 480$ s, $N = 8$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_8 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_8(t)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{c\rho}\frac{1}{(\Delta r)^2}(1+\frac{\Delta r}{2r_1}) & \frac{k}{c\rho}\frac{1}{(\Delta r)^2}(1+\frac{\Delta r}{2r_1}) & 0 & 0 \\ \frac{k}{c\rho}\frac{1}{(\Delta r)^2}(1-\frac{\Delta r}{2r_2}) & -\frac{2k}{c\rho}\frac{1}{(\Delta r)^2} & \frac{k}{c\rho}\frac{1}{(\Delta r)^2}(1+\frac{\Delta r}{2r_2}) & 0 \\ 0 & \frac{k}{c\rho}\frac{1}{(\Delta r)^2}(1-\frac{\Delta r}{2r_3}) & -\frac{2k}{c\rho}\frac{1}{(\Delta r)^2} & \frac{k}{c\rho}\frac{1}{(\Delta r)^2}(1+\frac{\Delta r}{2r_3}) \\ 0 & 0 & \frac{k}{c\rho}\frac{1}{(\Delta r)^2}(1-\frac{\Delta r}{2r_4}) & -\frac{k}{c\rho}\frac{1}{(\Delta r)^2}(1-\frac{\Delta r}{2r_4}) \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi c\rho r_1 \Delta r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

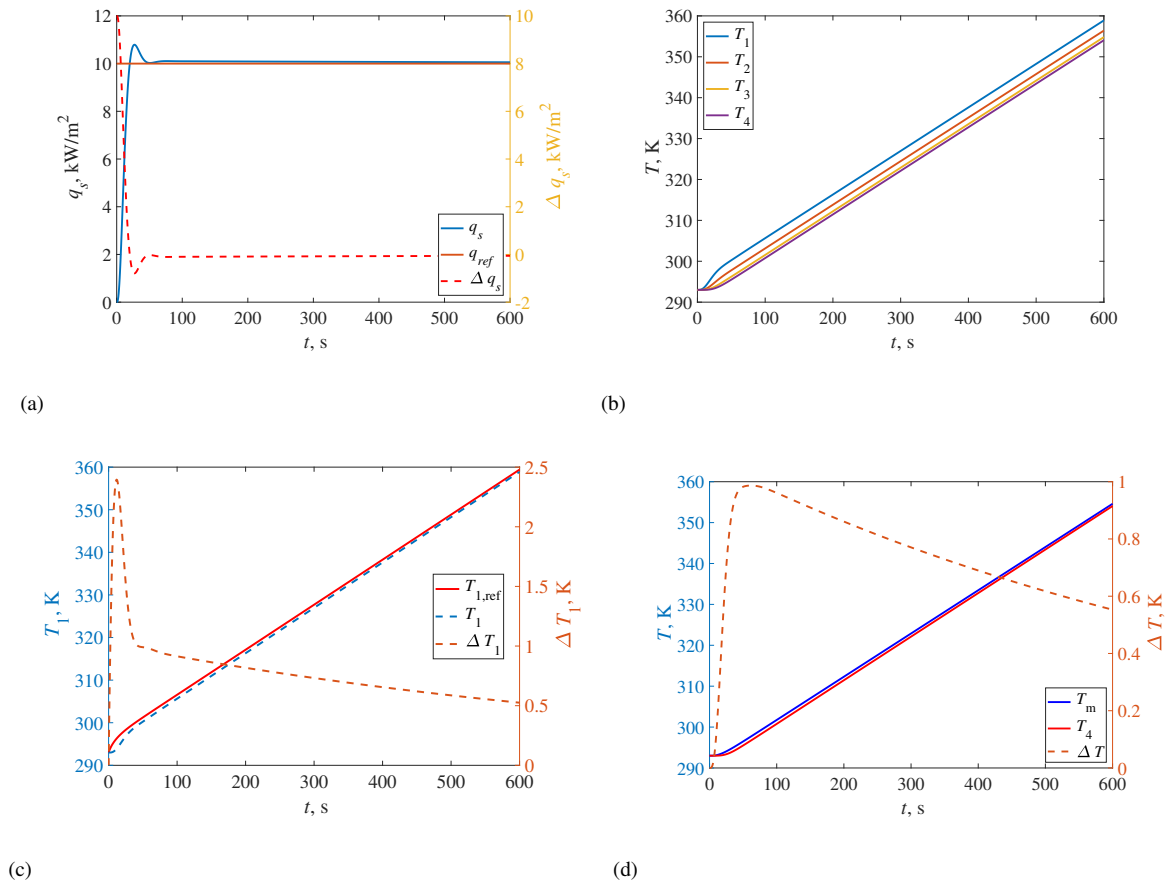
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & T_4 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

$$\mathbf{D} = 0 \tag{3.21}$$

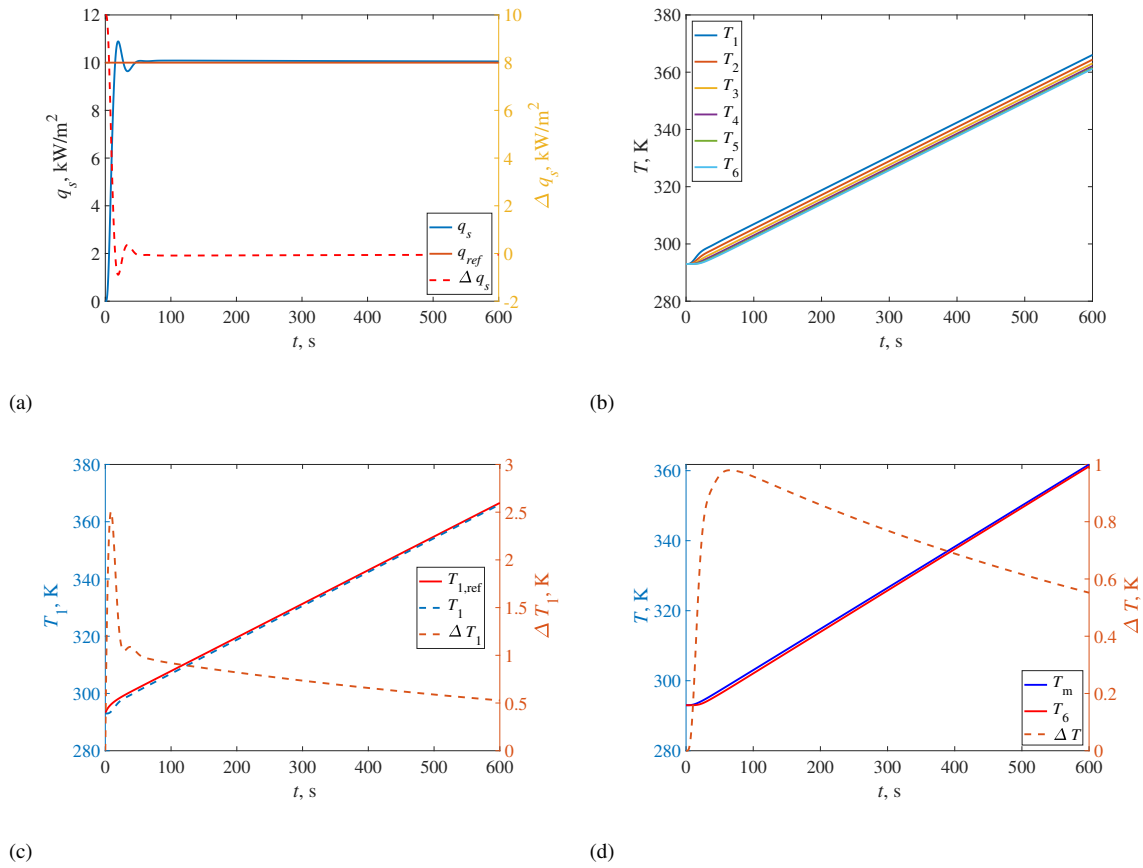
Tabela 3.3. Dane wejściowe – cylinder, wymiary i własności materiałowe

r_1, m	r_z, m	Δr	c, J/(kg K)	λ, W/(m K)	ρ, kg/m^3
0.1	0.125	0.0083	520	40	7720

Podobnie jak w poprzednim przypadku, przeprowadzono szereg symulacji w użyciem modelu opisanego powyższym równaniem. Dla modelu 4-węzłowego przyjęto dane wejściowe z Tabeli 3.3. Przeprowadzone z wykorzystaniem niniejszego modelu symulacje posłużyły do oceny przydatności niniejszej metody. W przeprowadzonych symulacjach użyto tych samych wymuszeń co w Rozdziale 3.1 oraz identycznych nastaw regulatora PID (zob. Tabela 3.2). Uzyskane wyniki przedstawiono na Rys. 3.13-3.21.



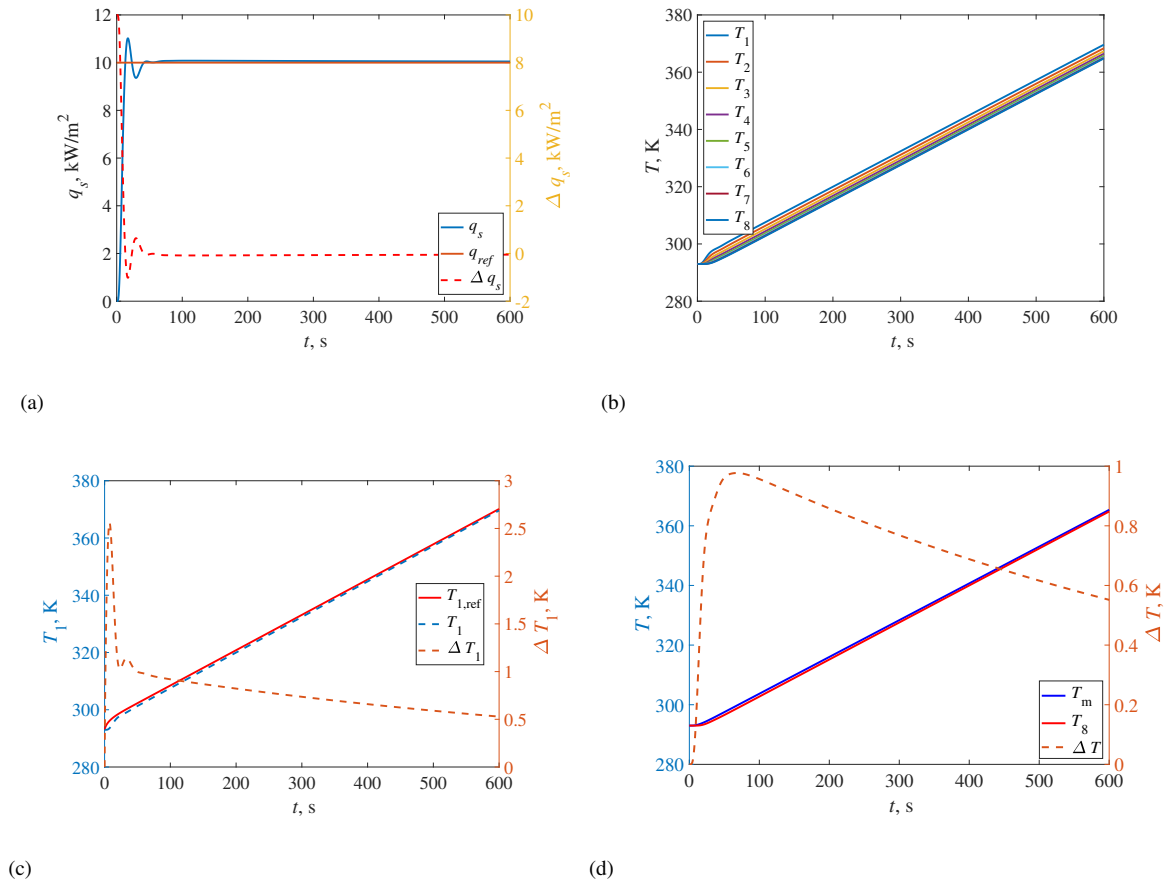
Rysunek 3.13. Odpowiedź modelu cylindrycznego liniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 4$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_4 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_4(t)$



Rysunek 3.14. Odpowiedź modelu cylindrycznego liniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 6$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_6 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_6(t)$

Rys. 3.13–3.15 przedstawiają odpowiedź modelu cylindryczne na wymuszenie skokowe opisane Równaniem 3.13 odpowiednio dla modeli płyty o 4, 6, 8 węzłach kontrolnych. Pokrótce, ilustrują one a) porównanie przebiegów czasowych gęstości strumienia ciepła zrekonstruowanego przez model z zadaną gęstością strumienia ciepła $q_{ref}(t)$, a także zmienność błędu bezwzględnego w czasie $\Delta q_s(t) = q_{ref} - q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w poszczególnych węzłach płyty oraz c) porównanie temperatury oszacowanej przez model T_1 z wartością otrzymaną z modelu prostego $T_{1,ref}$ oraz błędu $\Delta T_1 = T_{1,ref} - T_1$, a także d) przebiegi czasowe zmierzonej na powierzchni temperatury T_m z wartością temperatury otrzymanej z modelu prostego T_N, gdzie $N = \{4, 6, 8\}$.

Jak można zaobserwować, błąd oszacowania temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 spada poniżej 1 K już po około 50 s. Dla porównania, błąd 'pomiaru' temperatury zewnętrznej nie przekracza 1 K i jest największy na początku symulacji. Po czasie 600 s osiąga wartość 0.6 K. Niemal identycznie jak w



Rysunek 3.15. Odpowiedź modelu cylindrycznego liniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 8$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_8 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_8(t)$

przypadku modelu płaskiego, błąd oszacowania gęstości strumienia ciepła $q_s(t)$ już po kilku sekundach spada poniżej 2 kW/m^2, a po kilkudziesięciu mieści się w zakresie 1%. Co więcej, z obserwacji zachowania pozostałych modeli (6- i 8-węzłowego) wynika, iż błędy oszacowania powyższych wielkości tylko w niewielkim stopniu zależą od liczby węzłów (w analizowanym zakresie liczby węzłów kontrolnych N).

Następnie, Rys. 3.16-3.18 ilustrują zachowanie modelu cylindra poddanego działaniu symulowanej gęstości strumienia ciepła w postaci okresowego wymuszenia trójkątnego. Odpowiadają one kolejno modelom 4-, 6- i 8-węzłowym. Ilustrują one kolejno a) przebiegi czasowe gęstości strumienia ciepła odtworzonego przez model z zadanym wymuszeniem $q_{ref}(t)$, a także przebieg czasowy odchyłki $\Delta q_s(t) = q_{ref} - q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w N węzłach płyty, gdzie $N = \{4, 6, 8\}$ oraz c) porównanie temperatury T_1 (model odwrotny) z wartością otrzymaną z modelu prostego $T_{1,ref}$ oraz

błędu $\Delta T_1 = T_{1,ref} - T_1$, a także d) przebiegi czasowe temperatury powierzchni zewnętrznej T_m z wartością temperatury otrzymanej z modelu prostego T_N. Można zauważyć, iż odchyłka gęstości strumienia ciepła $q_s(t)$ nie przekracza w tym przypadku 0.6 kW/m^2 i jest ona największa w chwili zmiany kierunku ruchu (znaku pochodnej). W pozostałych chwilach czasowych nie przekracza ona 0.2-0.4 kW/m^2. Błąd oszacowania temperatury T_1 mieści się w przedziale $\pm$0.15 K, a temperatury powierzchni zewnętrznej także nie przekracza wartości $\pm$0.15 K. Znowu, są to przedziały praktycznie niezależne od liczby węzłów kontrolnych w modelu.

Ostatecznie, Rys. 3.19-3.21 przedstawiają zachowanie modelu cylindra poddanego działaniu wymuszenia w postaci fali prostokątnej o okresie T_0 i wypełnieniu 50%. Rys. 3.19 ilustruje zachowanie modelu 4-węzłowego. Odpowiedź modelu 6-węzłowego jest ilustrowana na Rys 3.20, a modelu 8-węzłowego na Rys. 3.21. Jak można zauważyć, błąd oszacowania gęstości strumienia ciepła jest największy w chwilach skoku. Co więcej, przesterowaniu towarzyszą oscylacje trwające kilkadziesiąt sekund. Chwilowa wartość błędu Δq_s przekracza amplitudę wymuszenia. Dla porównania, błąd oszacowania temperatury powierzchni wewnętrznej sięga 2 K, a błąd oszacowania temperatury powierzchni zewnętrznej T_N nie przekracza 0.6 K.

3.3. Naprężenia cieplne w elementach cylindrycznych

Model węzłowy opisany układem równań stanu 3.2 bardzo dobrze nadaje się do szacowania naprężeń cieplnych wywołanych zmianami temperatury w badanej próbce. Godier i Timoschenko [61] oraz Taler [62] sformułowali wyrażenia matematyczne pozwalające oszacować rozkład naprężeń obwodowych, promieniowych i zredukowanych w badanej próbce cylindrycznej, jeśli znane są temperatury w węzłach modelu o parametrach skupionych lub modelu o elementach skończonych

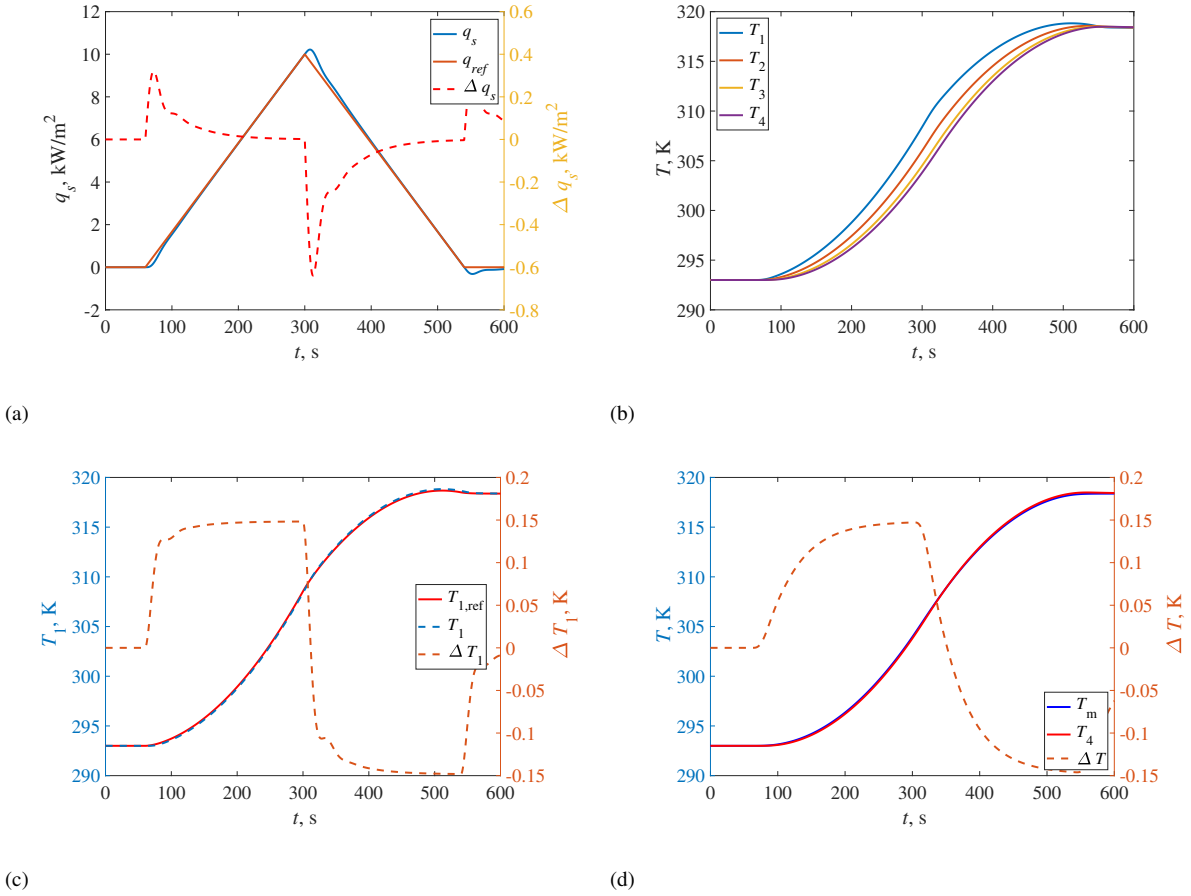
$$\begin{cases} \sigma_r(r) &= \dfrac{E\beta}{2(1-\nu)}\left(1-\dfrac{r_1^2}{r^2}\right)[T_m(t)-T_{r,m}(r,t)] \\ \sigma_t(r) &= \dfrac{E\beta}{2(1-\nu)}\left[\left(1+\dfrac{r_1^2}{r^2}\right)T_m(t)+\left(1-\dfrac{r_1^2}{r^2}\right)T_{r,m}(t)-2T(r,t)\right] \\ \sigma_{red} &= \sqrt{(\sigma_r^2-\sigma_r\sigma_t+\sigma_t^2)} \end{cases} \tag{3.22}$$

gdzie E - moduł Younga, β - liniowy współczynnik rozszerzalności cieplnej, ν – liczba Poissona. Temperatura średnia T_{mean} wyrażona jest zależnością poniżej

$$T_{mean}(t) = \frac{2}{r_z^2-r_1^2}\int_{r_1}^{r_z} rTdr \tag{3.23}$$

oraz lokalnie w węźle

$$T_{mean}(r,t) = \frac{2}{r^2-r_1^2}\int_{r_1}^{r} rTdr,\ r_1 < r < r_2 \tag{3.24}$$



Rysunek 3.16. Odpowiedź modelu cylindrycznego na wymuszenie trójkątne, gradient szybkości zmiany gęstości strumienia ciepła– 41.67 W/m$^2 \cdot s$, $T_0 = 480$ s, $N = 4$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_4 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_4(t)$

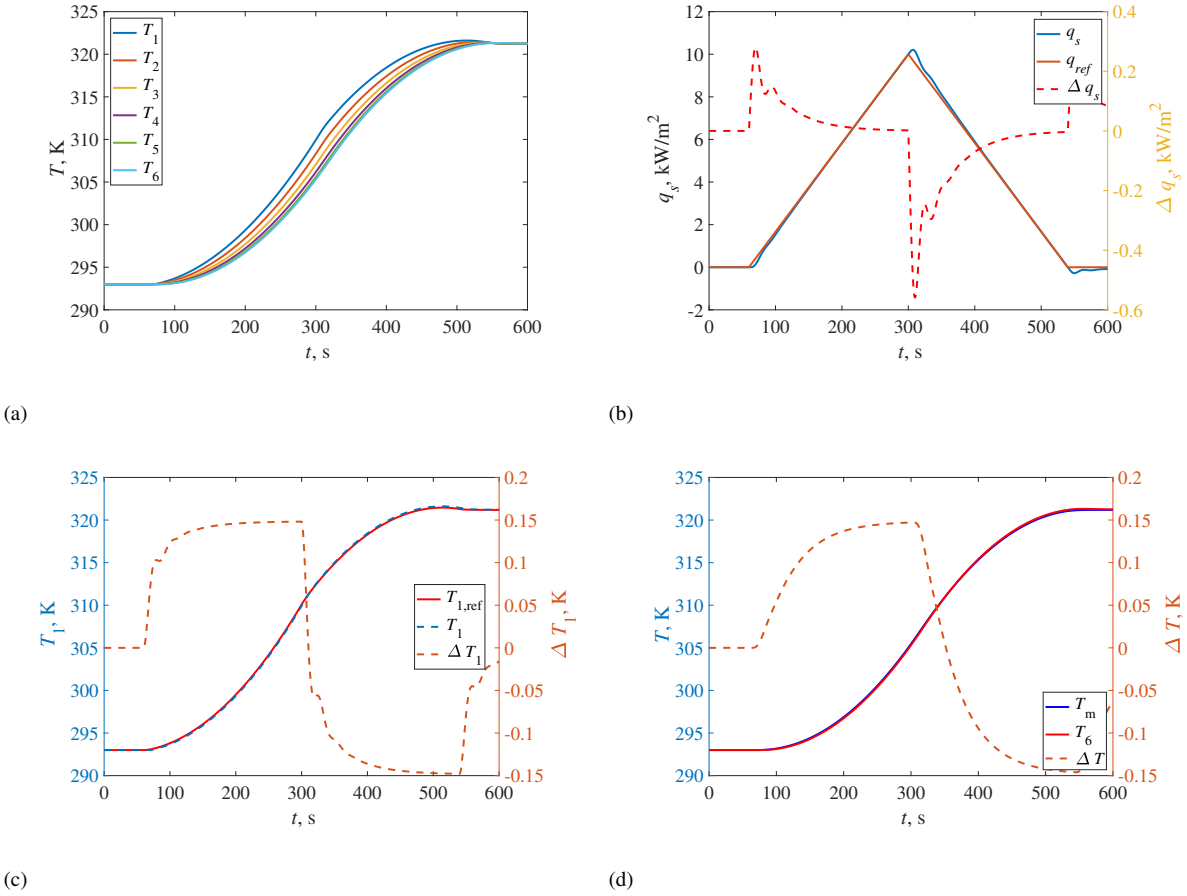
Ponieważ temperatura w węzłach o współrzędnych r_i jest znana, do obliczenia obu całek w powyższym układzie równań można posłużyć się metodą trapezów [29]. Wtedy, po dyskretyzacji, powyższe wyrażenia upraszczają się do postaci

$$T_{mean}(t) \approx \frac{2\Delta r}{r_z^2 - r_1^2} \sum_{i=2}^{N} 0.5(r_{i-1}T_{i-1} + r_i T_i) \tag{3.25}$$

oraz

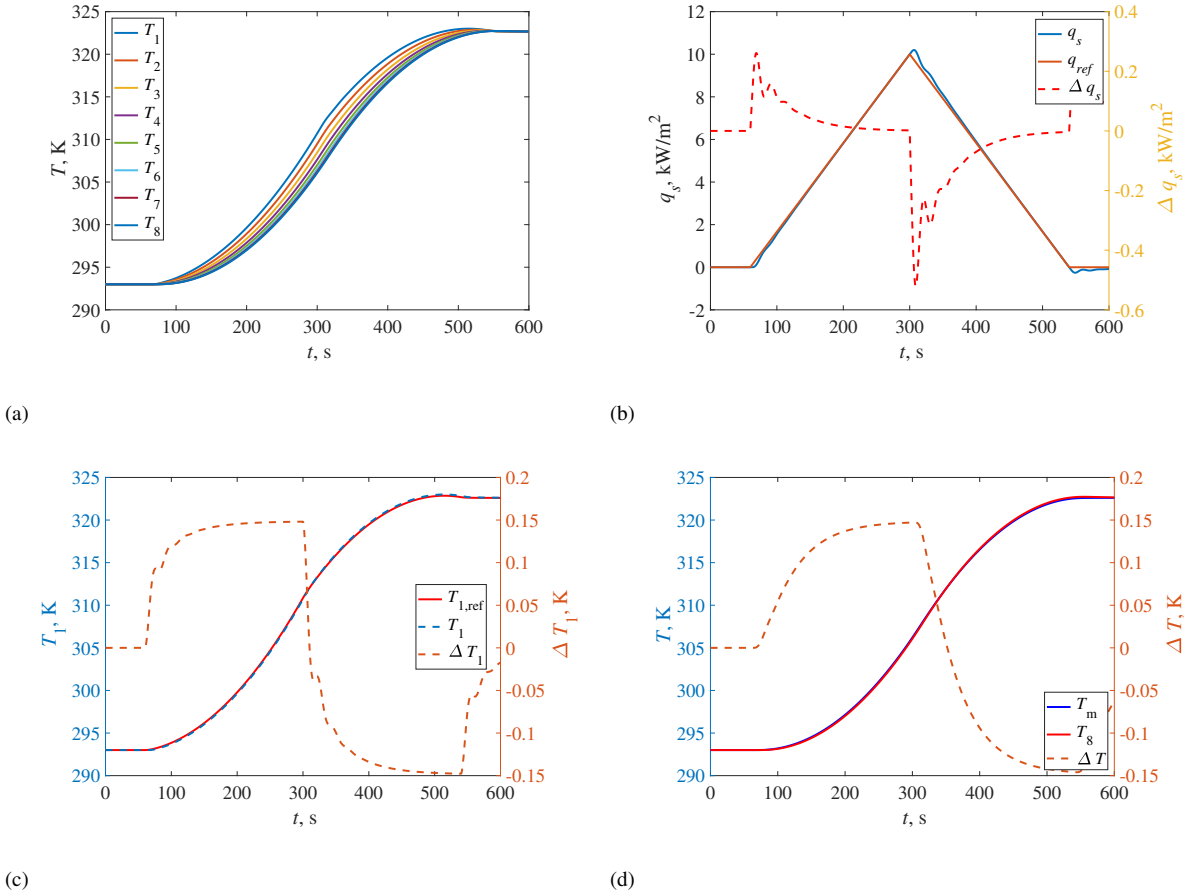
$$T_{mean}(r_i, t) \approx \frac{2\Delta r}{r_i^2 - r_1^2} \sum_{j=2}^{i} 0.5(r_{j-1}T_{j-1} + r_j T_j) \tag{3.26}$$

gdzie $i = 2, \ldots, N$ oraz $T_{mean}(r_1, t) = T_1$. W celu oceny przydatności niniejszej metody do szacowania naprężeń wywołanych zmianami temperatury rozszerzono powyższy model cylindryczny opisany układem równań 3.2 o powyższe wyrażenia w celu uzupełnienia algorytmu o obliczenia naprężeń



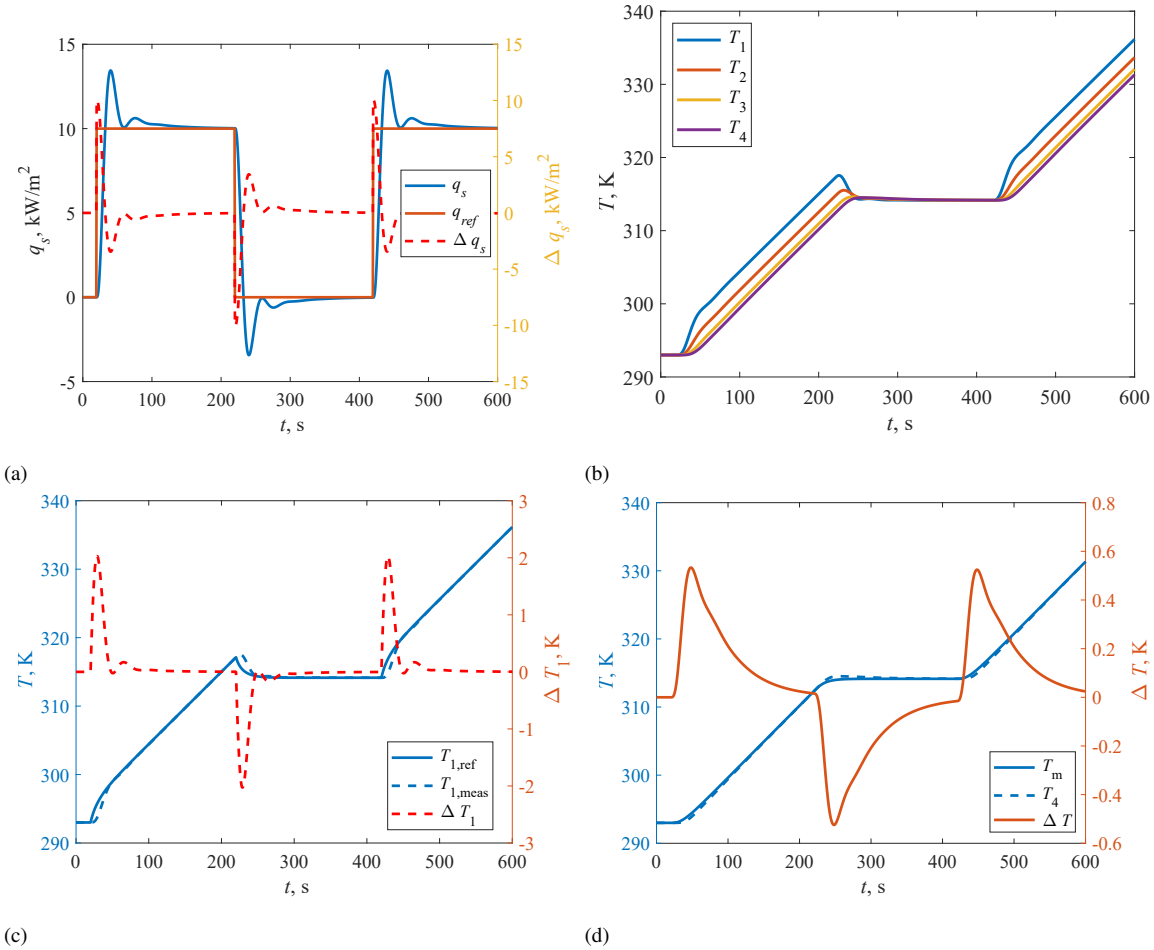
Rysunek 3.17. Odpowiedź modelu cylindrycznego na wymuszenie trójkątne, gradient szybkości zmiany gęstości strumienia ciepła– 41.67 W/m$^2 \cdot s$, $T_0 = 480$ s, $N = 6$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_6 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_6(t)$

cieplnych. W związku z tym model cylindra poddano działaniu wymuszeń: a) skokowego (opisanego Równaniem 3.13), b) trójkątnego (opisanego Równaniem 3.14), c) prostokątnego zgodnie z Równaniem 3.16. Wyniki symulacji numerycznych przedstawiono na Rys. 3.22–3.24. Z uwagi na fakt, iż liczba węzłów modelu w analizowanym zakresie wartości ma niewielki wpływ na oszacowanie rozkładu temperatur powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej, obliczenia wytrzymałościowe przeprowadzono tylko dla modeli o o $N = \{4, 8\}$ węzłach. Odpowiednio, Rys. 3.22 ilustruje odpowiedź modelu cylindra na wymuszenie skokowe. Rys. 3.23 przedstawia odpowiedź modelu na wymuszenie trójkątne, a Rys. 3.24 odpowiedź tegoż modelu na wymuszenie prostokątne. Wspomniane wykresy ilustrują porównanie pomiędzy naprężeniami zredukowanymi σ_{red}, które zostały obliczone na podstawie rozkładu temperatur w węzłach modelu prostego (DHCP), a naprężeniami zrekonstruowanymi w wyniku obliczeń przy użyciu



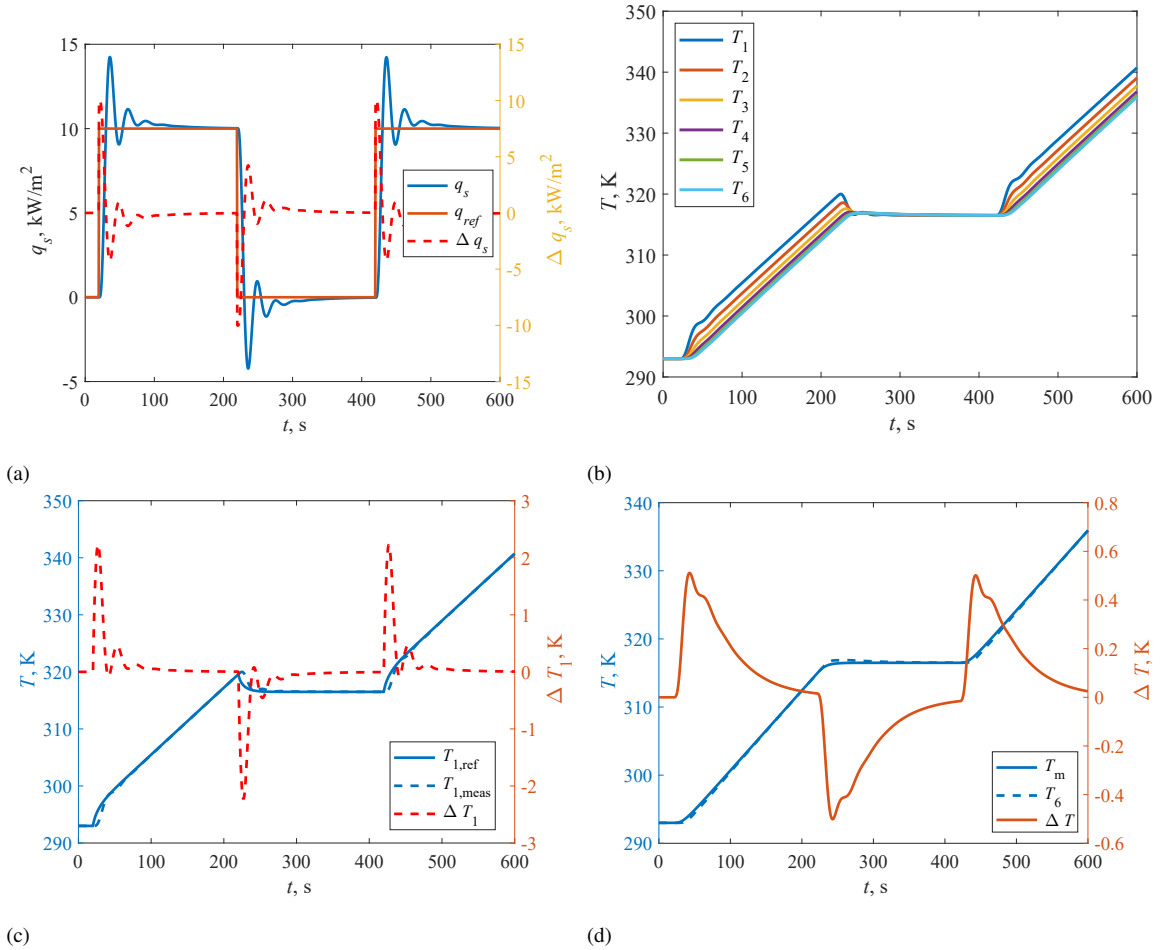
Rysunek 3.18. Odpowiedź modelu cylindrycznego na wymuszenie trójkątne, gradient szybkości zmiany gęstości strumienia ciepła– 41.67 W/m$^2 \cdot s$, $T_0 = 480$ s, $N = 8$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_8 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_8(t)$

modelu odwrotnego. Ogólnie, otrzymane wyniki są satysfakcjonujące. Dla analizowanego przypadku z wymuszeniem skokowym, największa różnica pomiędzy modelem prostym a odwrotnym występuje w chwili skoku, ale już po kilkunastu sekundach nie przekracza kilku procent, aby finalnie uzyskać poziom poniżej 1%. W przypadku odpowiedzi modelu cylindra na wymuszenie trójkątne największe różnice rzędu 0.4-0.5 MPa (mniejsza z tych liczb dotyczy modelu 8-węzłowego) występują w chwilach zmiany kierunku 'ruchu' (zmiany znaku pochodnej $\dot{q}_s(t)$). Dla modelu poddanego działaniu wymuszenia prostokątnego błąd oszacowania naprężeń zredukowanych jest największy w chwilach skoku i sięga wartości 6 MPa (przy amplitudzie naprężeń w ściance modelu cylindra ok. 12 MPa). Po kilkunastu sekundach błąd spada poniżej 1 MPa.



Rysunek 3.19. Odpowiedź modelu cylindrycznego na okresowe wymuszenie prostokątne $q_s(t)$, $T_0 = 480$ s, $N = 4$, , a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_4 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_4(t)$

Podsumowując, model węzłowy umożliwia naturalne rozszerzenie metody regulacyjnej o obliczenia naprężeń cieplnych. Co więcej, zastosowany algorytm umożliwia oszacowanie nie tylko temperatury powierzchni wewnętrznej (gdzie zwykle naprężenia są największe), ale także obliczenia wartości temperatur w poszczególnych węzłach. Jako całość obliczenia rozkładu temperatur i naprężeń nie są czasochłonne i wymagają stosunkowo niewielkiego kosztu obliczeniowego (proporcjonalnego do stopnia złożoności modelu, tj. liczby węzłów). Zastosowanie niniejszego algorytmu jest także możliwe w przypadku modeli nieliniowych z własnościami materiałowi zależnymi od temperatury, co zostanie zademonstrowane przez Autorkę w kolejnym rozdziale.

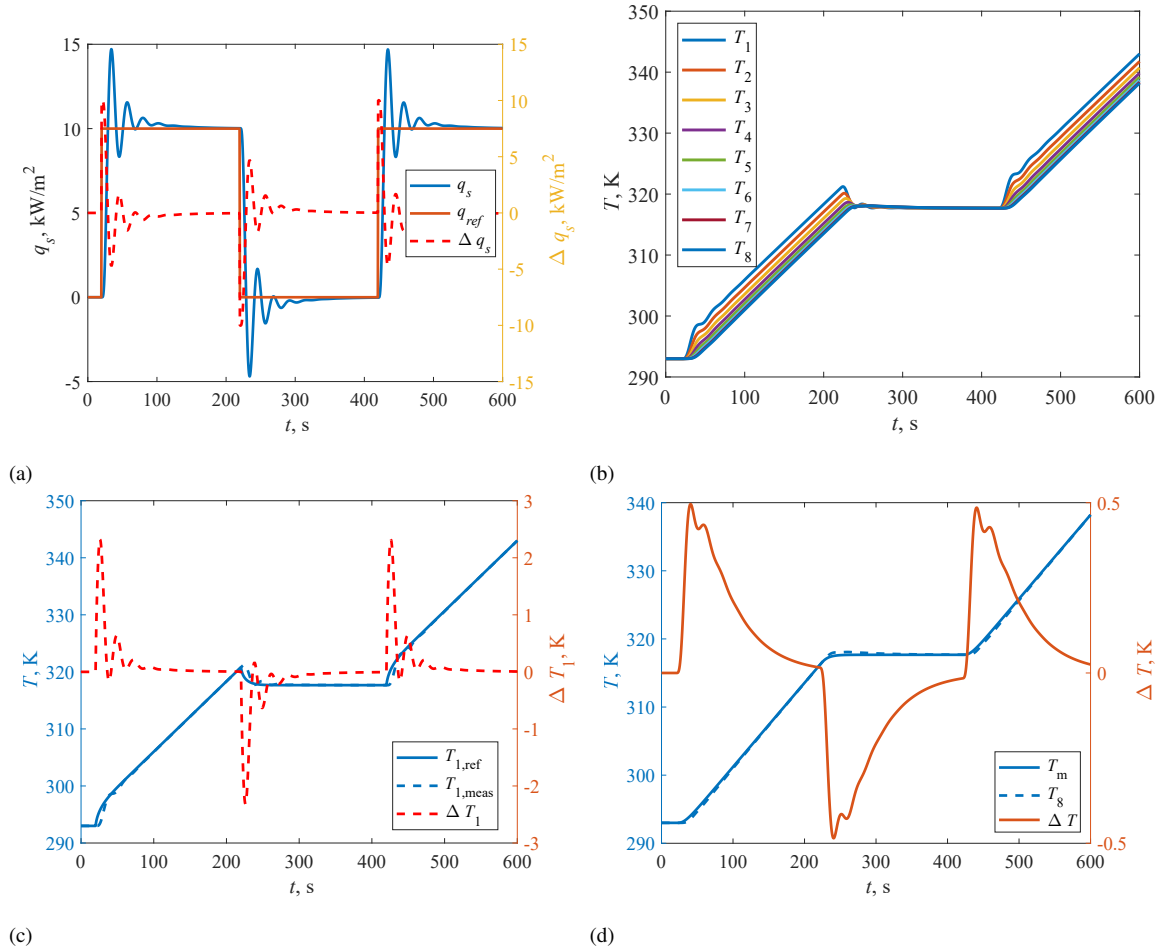


Rysunek 3.20. Odpowiedź modelu cylindrycznego na okresowe wymuszenie prostokątne $q_s(t)$, $T_0 = 480$ s, $N = 6$, , a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_6 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_6(t)$

3.4. Badanie odporności na zakłócenia

W poprzednim rozdziale przedstawiono wyniki symulacji numerycznych idealnego modelu odwrotnego. Założono niezależność i stałość własności materiałowych od temperatury, a także obecność idealnego czujnika w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego, tj. o charakterystyce amplitudowo-fazowej niezależnej od częstotliwości oraz brak zakłóceń pomiarowych i przetwarzania.

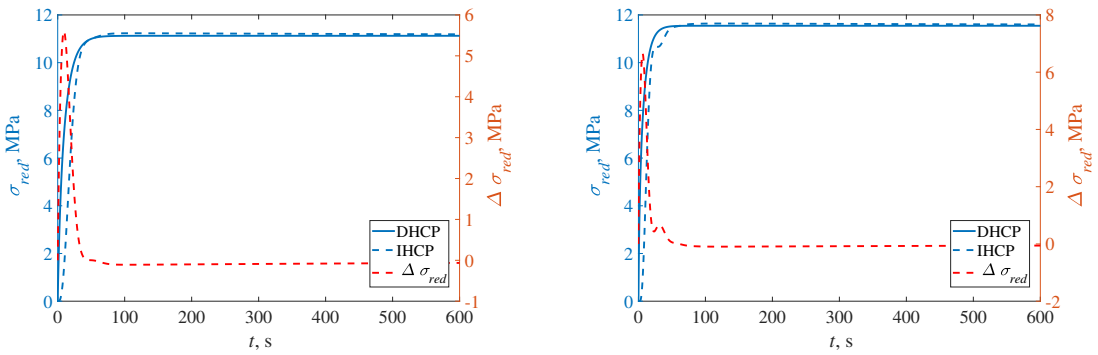
Tymczasem, w rzeczywistości, mamy do czynienia z sytuacją, w której na skutek zakłóceń towarzyszących każdemu pomiarowi, pomiar temperatury zewnętrznej jest obarczony niepewnością. W związku z tym celowym jest uzupełnienie niniejszego algorytmu o filtr cyfrowy działający w czasie rzeczywistym.



Rysunek 3.21. Odpowiedź modelu cylindrycznego na okresowe wymuszenie prostokątne $q_s(t)$, $T_0 = 480$ s, $N = 8$, , a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_8 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_8(t)$

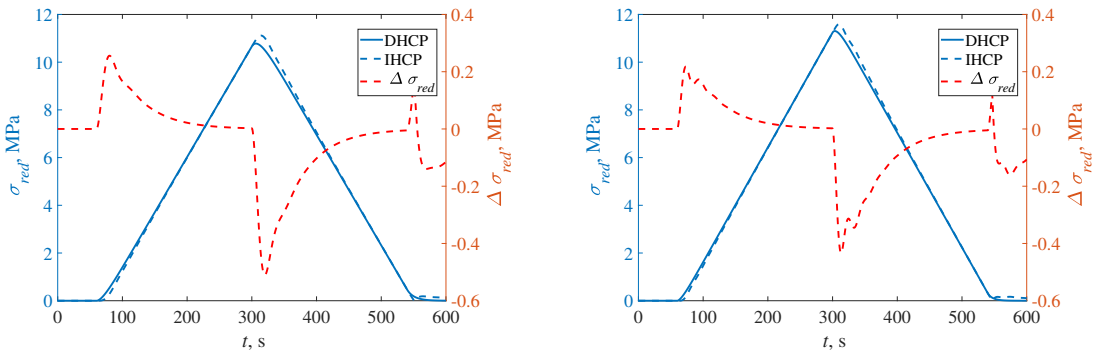
Liczba stosowanych metod filtracji jest ogromna, począwszy od prostych filtrów cyfrowych dolnoprzepustowych, filtrów uśredniających, wielomianowych, itp. po (nie)liniowe estymatory stanu [10]. Jest to jednocześnie dowód na brak ogólnie przyjętego algorytmu filtracji w różnym stopniu wpływającego na jakość otrzymanego wyniku przy użyciu metody odwrotnej.

W ramach badań opisanych w niniejszym rozdziale przeprowadzono szereg badań mających na celu ocenę odporności metody na zakłócenia pomiarowe oraz obecność czujnika o charakterystyce zależnej od częstotliwości. W symulacjach zastosowano prosty filtr predykcyjny (Kalmana) oraz filtr ze średnią ruchomą. Wyniki obliczeń opisano poniżej.



(a) $\sigma_{red}(t)$, $N = 4$ (b) $\sigma_{red}(t)$, $N = 8$

Rysunek 3.22. Odpowiedź skokowa: porównanie naprężeń zredukowanych σ_{red} na powierzchni wewnętrznej cylindra, $N = \{4, 8\}$



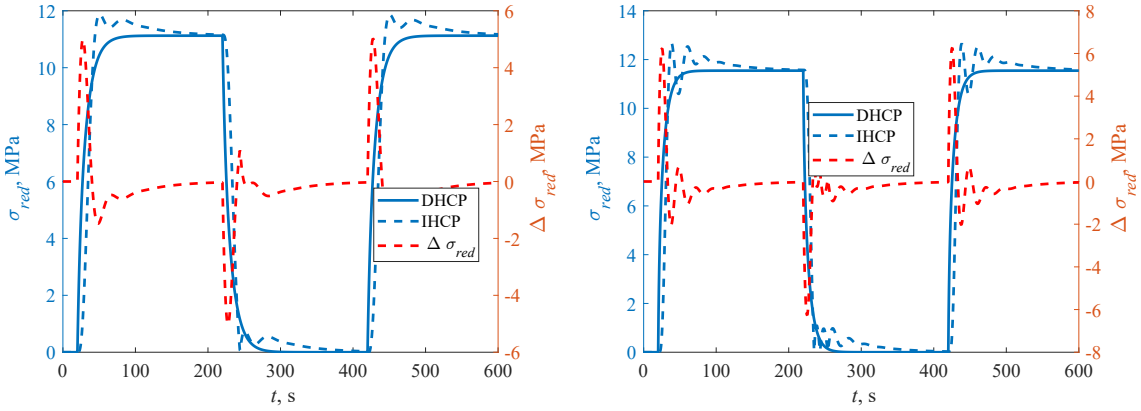
(a) $\sigma_{red}(t)$, $N = 4$ (b) $\sigma_{red}(t)$, $N = 8$

Rysunek 3.23. Odpowiedź na wymuszenie liniowe: porównanie naprężeń zredukowanych σ_{red} na powierzchni wewnętrznej cylindra, $N = \{4, 8\}$

3.4.1. Filtr Kalmana

Filtr Kalmana jest powszechnie znanym estymatorem stanu układu [63]. Zasada jego działania polega na określaniu minimalno-wariacyjnej estymaty wektora stanu, mając do dyspozycji pomiary wejścia oraz wyjścia badanego układu. Filtr Kalmana należy do metod rekurencyjnych. W każdym cyklu obliczeniowym wykonuje on dwie główne operacje: a) predykcję, b) korekcję. Podczas fazy predykcji filtr przewiduje nowy stan układu oraz niepewność tego stanu. W trakcie fazy korekcji filtr porównuje przewidywany nowy stan układu (przewidywany pomiar) z bieżącym, oblicza tzw. macierz Kalmana a, finalnie, aktualizuje stan i niepewność tego stanu. Ogólnie, filtr Kalmana wymaga modelu układu w postaci dyskretnej.

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \tag{3.27}$$



(a) $\sigma_{red}(t)$, $N = 4$ (b) $\sigma_{red}(t)$, $N = 8$

Rysunek 3.24. Odpowiedź na wymuszenie prostokątne: porównanie naprężeń zredukowanych σ_{red} na powierzchni wewnętrznej cylindra, $N = \{4, 8\}$

oraz równania obserwacji

$$z_k = Hx_k + v_k \tag{3.28}$$

gdzie x_k – wektor stanu w chwili k, u_k – wektor sterujący, z_k – pomiar w chwili k, H – macierz obserwacji, $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ – szum procesu, $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$ – szum pomiaru

Równania filtru Kalmana

Predykcja

$$\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1} \tag{3.29}$$

$$P_{k|k-1} = AP_{k-1|k-1}A^T + Q \tag{3.30}$$

Korekta

$$K_k = P_{k|k-1}H^T(HP_{k|k-1}H^T + R)^{-1} \tag{3.31}$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H\hat{x}_{k|k-1}) \tag{3.32}$$

$$P_{k|k} = (I - K_kH)P_{k|k-1} \tag{3.33}$$

W formie pseudokodu powyższe równania można przedstawić następująco

Algorithm 1 Filtr Kalmana – algorytm dyskretny

Require: A, B, H, Q, R, x_0, P_0

for $k = 1$ to N **do**

  Predykcja stanu:

  $\hat{x}_{k|k-1} \leftarrow A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1}$

  Predykcja błędu:

  $P_{k|k-1} \leftarrow AP_{k-1|k-1}A^T + Q$

  Obliczanie wzmocnienia Kalmana:

  $K_k \leftarrow P_{k|k-1}H^T(HP_{k|k-1}H^T + R)^{-1}$

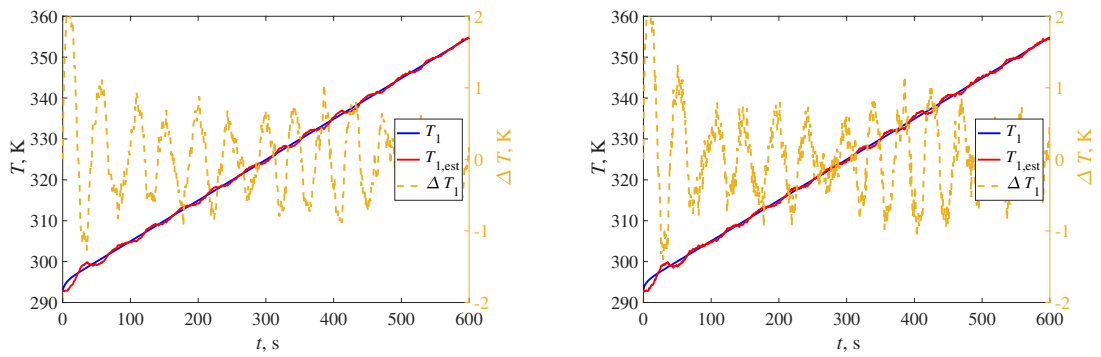
  Korekta stanu:

  $\hat{x}_{k|k} \leftarrow \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H\hat{x}_{k|k-1})$

  Korekta kowariancji:

  $P_{k|k} \leftarrow (I - K_kH)P_{k|k-1}$

W ramach opisanych tu badań posłużono się uproszczoną wersją filtra do 'śledzenia' (filtracji) temperatury powierzchni zewnętrznej T_N. Taki filtr Kalmana jest de facto wersją tzw. prostego rekurencyjnego filtra $\alpha - \beta$ [64, 65]. Jeśli założyć, że model 'ruchu' układu jest opisany prostym modelem liniowym, szum procesu i pomiaru są stałe oraz nie jest potrzebna pełna macierz kowariancji i pomiary są dostępne w regularnych równo oddalonych odstępach czasu, to filtr Kalmana redukuje się do specyfycznej postaci ze stałym wzmocnieniem.

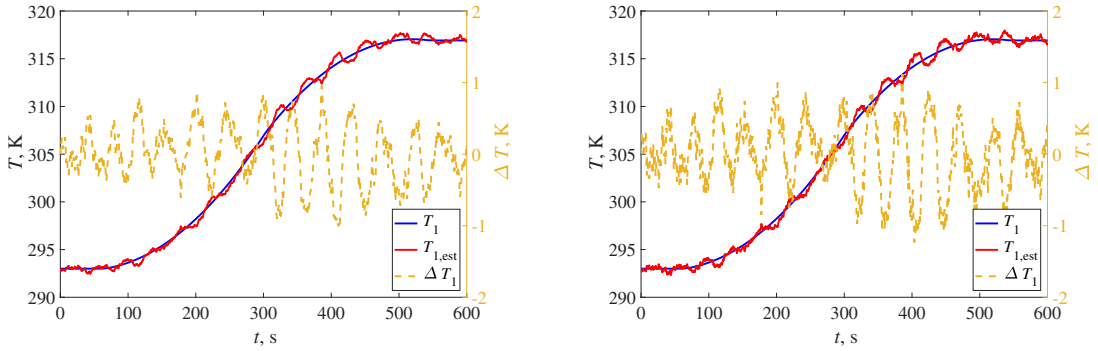


(a) (b)

Rysunek 3.25. Wymuszenie skokowe: KF – porównanie przebiegów czasowych a) temperatury T_1 na powierzchni wewnętrznej cylindra, b) błędu ΔT_1, $N = \{4, 8\}$

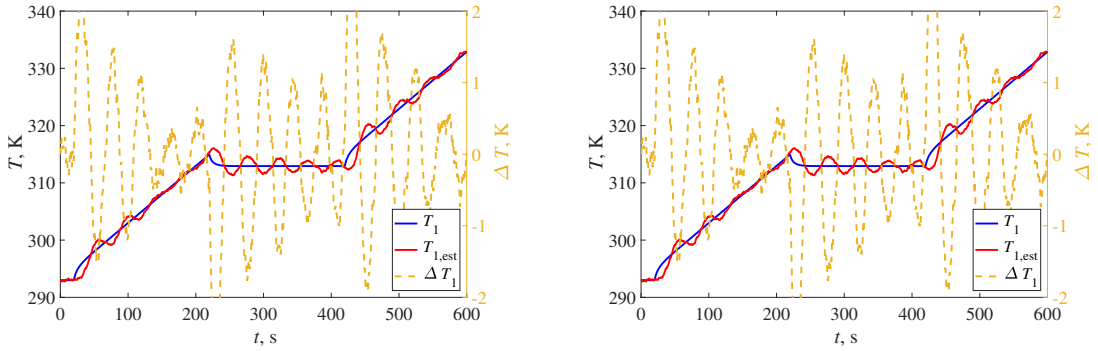
Ponownie, w celu zbadania odporności metody na obecność zakłóceń przeprowadzono szereg symulacji z użyciem opisanych wcześniej wymuszeń i identycznych parametrach jak poprzednio. Założono

obecność szumu o rozkładzie normalnym o zerowej średniej i stałej wariancji. Parametry filtra były następujące: $A = [0 \quad \Delta t; 0 \quad 1]^T$, $H = [1 \quad 0]$, $x = [T_E \quad \dot{T}_E]$, $x(0) = [T_E(0) \quad 0]$, $Q = [0.1 \quad 0; 0 \quad 1]^T$, $R = 0.1$, $P = 0.1$. Obliczenia przeprowadzono dla modelu 4-węzłowego i 8-węzłowego. Otrzymane wyniki przedstawiono na Rys. 3.25-3.27. W szczególności, Rys. 3.25 przedstawia odpowiedź modelu cylindra na wymuszenie skokowe. Odpowiedź tegoż modelu na wymuszenie trójkątne ilustrują wykresy na Rys. 3.26, a Rys. 3.27 przedstawia odpowiedź modelu na okresowe wymuszenie prostokątne. Otrzymane wyniki można uznać za satysfakcjonujące.



(a) (b)

Rysunek 3.26. Wymuszenie trójkątne: KF – porównanie przebiegów czasowych a) temperatury T_1 na powierzchni wewnętrznej cylindra, b) błędu ΔT_1, $N = \{4, 8\}$



(a) (b)

Rysunek 3.27. Wymuszenie prostokątne: KF – porównanie przebiegów czasowych a) temperatury T_1 na powierzchni wewnętrznej cylindra, b) błędu ΔT_1, $N = \{4, 8\}$

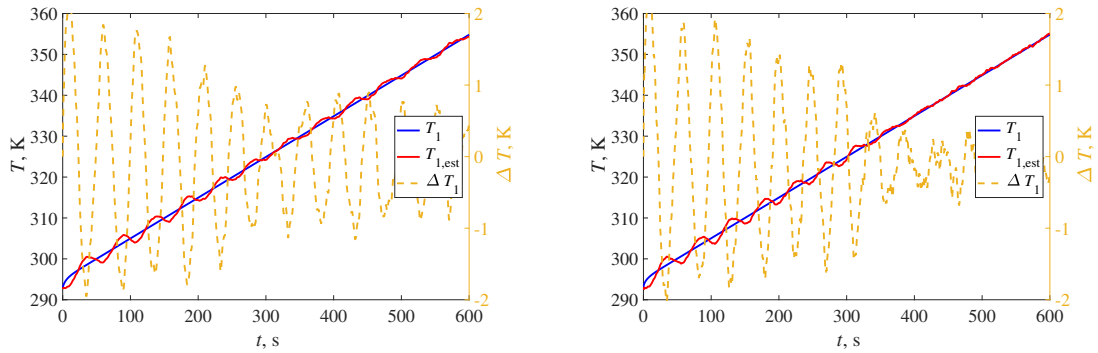
3.4.2. Filtry uśredniające

Filtr ze średnia ruchomą (MA – moving average) jest jednym z najprostszych, ale też bardzo popularnych, filtrów cyfrowych. Jego działanie jest bardzo proste – filtr zwraca w chwili czasu k średnią wartość

z liczby próbek w liczbie n w poprzednich chwilach czasu, gdzie n – rozmiar okna, wg zależności

$$\bar{x}_k = \frac{\sum_{i=k-n+1}^{i=k} x_i}{n} \tag{3.34}$$

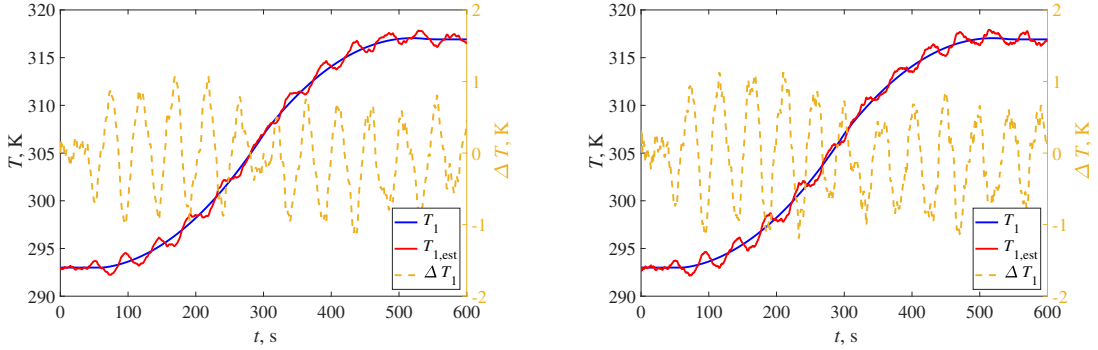
$\bar{x}_k$ – wartość średniej ruchomej w chwili k, x_i – wartość próbki w chwili czasu o indeksie i, $k = \{1, \ldots, M\}$. Oprócz zwykłego filtra ze średnią ruchomą, w praktyce stosowanego są filtry ze średnią ruchomą ważoną, gdzie wagi stosuje się w celu określenia horyzontu pamiętania lub jego bardziej zaawansowane odmiany w rodzaju, np. filtru Savitzky'ego-Golaya [66]. Filtr uśredniający stosowany jest właśnie do wygładzanie danych bez znacznego zniekształcania analizowanego sygnału. Jego wadą jest przesunięcie fazowe (opóźnienie) zależne od rozmiaru okna. Użycie zbyt szerokiego okna czasowego prowadzi do usunięcia szybkozmiennych składowych z analizowanego sygnału czasowego. Z drugiej strony, zbyt wąskie okno ma ograniczoną skuteczność filtracji.



(a) (b)

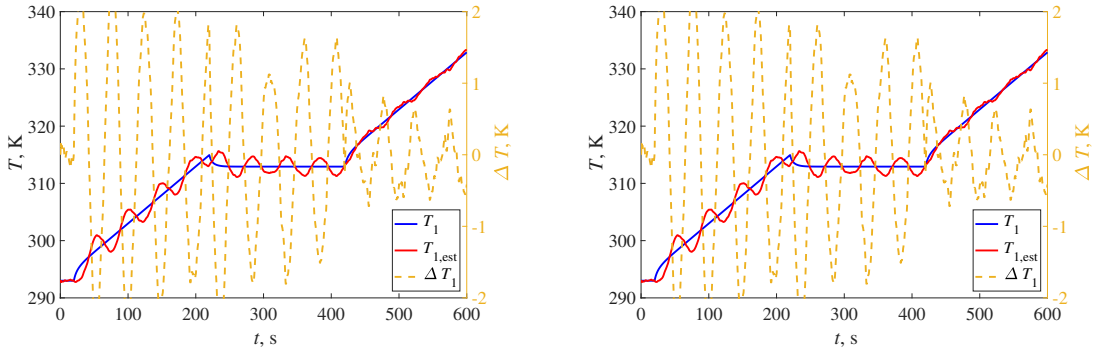
Rysunek 3.28. Wymuszenie skokowe: MA – porównanie przebiegów czasowych a) temperatury T_1 na powierzchni wewnętrznej cylindra, b) błędu ΔT_1, $N = \{4, 8\}$

Ponownie, w celu zbadania odporności metody na obecność zakłóceń przeprowadzono symulacje z użyciem opisanych wcześniej wymuszeń i identycznych parametrach jak poprzednio. Obliczenia przeprowadzono ponownie dla modelu 4-węzłowego i 8-węzłowego. Otrzymane wyniki przedstawiono na Rys. 3.28-3.30. W szczególności, Rys. 3.28 przedstawia odpowiedź modelu cylindra na wymuszenie skokowe. Odpowiedź tegoż modelu na wymuszenie trójkątne ilustrują wykresy na Rys. 3.29, a Rys. 3.30 przedstawia odpowiedź modelu na okresowe wymuszenie prostokątne. Do obliczeń użyto filtru o rozmiarze okna równym 10 próbek. W tym przypadku konieczne było 2-krotne zmniejszego kroku czasowego do 0.25 s. Dłuższe kroki czasowe skutkowały pogorszeniem dokładności (większą odchyłką temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 lub brakiem stabilności)



(a) (b)

Rysunek 3.29. Wymuszenie trójkątne: MA – porównanie przebiegów czasowych a) temperatury T_1 na powierzchni wewnętrznej cylindra, b) błędu ΔT_1, $N = \{4, 8\}$



(a) (b)

Rysunek 3.30. Wymuszenie prostokątne: MA – porównanie przebiegów czasowych a) temperatury T_1 na powierzchni wewnętrznej cylindra, b) błędu ΔT_1, $N = \{4, 8\}$

3.5. Podsumowanie

W niniejszym Rozdziale opisano podstawy działania metody regulacyjnej. Do demonstracji działania niniejszej metody wybrano dwa typowe modele liniowe (płyta, cylinder) o własnościach stałych niezależnych od temperatury. Oba modele poddano dyskretyzacji, tj. dekompozycji analizowanego obszaru na określoną liczbę węzłów kontrolnych. Sformułowano układy równań stanu i obserwacji (wyjścia). Zaproponowano prosty regulator PI i dostrojono jego nastawy. Przeprowadzono szereg symulacji numerycznych dla wybranych typów wymuszenia w postaci gęstości strumienia ciepła. Zbadano wpływ liczby węzłów kontrolnych na jakość otrzymanego rozwiązania oraz odporność metody na obecność zakłóceń (szumu pomiarowego). Finalnie, wykazano przydatność stosowanej metody do szacowania naprężeń termicznych w badanym modelu cylindrycznym. Podsumowując, analizowaną metodę cechuje stosunkowo

niewielki koszt obliczeniowy (choć zależny od liczby węzłów w modelu prostym), możliwość stosowania ogólnie przyjętego i powszechnie używanego aparatu matematycznego oraz precyzja w rekonstrukcji rozkładu temperatury w badanym obiekcie, a co za tym idzie, także naprężeń cieplnych. Istotny jest też aspekt uniwersalności. Metoda regulacyjna wykorzystuje model prosty (bezpośredni), który może być zaimplementowany w dowolnej formie (nadającej się do obliczeń online).

W niniejszym rozdziale nie badano wpływu lokalizacji czujnika na zbieżność metody. Ten aspekt był poza programem przeprowadzonych przez Autorkę badań. W świetle analizowanych przez Autorkę publikacji, pozycjonowanie czujnika bliżej powierzchni wewnętrznej ma istotny wpływ na jakość otrzymanego rozwiązania. Jest jednak rozwiązaniem inwazyjnym, tj. prowadzi do osłabienia ścianki.

4. Metoda regulacyjne – model nieliniowy

W niniejszym rozdziale opisano dzialanie metody z Rozdziału 3 z uwzględnieniem własności materiałowych zależnych od temperatury. Oprócz celów demonstracyjnych, zakres stosowalności metody regulacyjnej dla modeli o własnościach niezależnych od temperatury (liniowych) jest mocno ograniczony tylko i wyłącznie do niewielkich zmian temperatury względem punktu pracy. W rzeczywistości, przy dużych zmianach temperatury w badanym obiekcie rzędu, należy uznać, iż wpływ zmienności własności materiałowych względem temperatury nie jest pomijalny i zasługuje na oddzielne traktowanie.

Co więcej, obecność wyżej wspomnianych nieliniowości ma przełożenie na strojenie i finalny dobór nastaw regulatora, stanowiącego integralną część metody regulacyjnej. W ogólnym przypadku, dla układu nieliniowego nastawy regulatora nie są optymalne. Dlatego też, w niniejszym rozdziale zostały przedstawione wyniki stosowania metody regulacyjnej z wykorzystaniem modelu nieliniowego. Biorąc pod uwagę otrzymane wyniki w Rozdziale 3 badania zostały przeprowadzone dla modelu nieliniowego o $N = 4$ węzłach kontrolnych i z użyciem tych samych wymuszeń, które zostały wykorzystane w poprzedniej serii symulacji.

4.1. Model nieliniowy

Podobnie jak w Rozdziale 3, dla cylindra przedstawionego na Rys. 3.12 znane są: temperatura na powierzchni zewnętrznej T_E; powierzchnia zewnętrzna jest izolowana cieplnie. Poszukiwana jest zarówno temperatura na powierzchni wewnętrznej T_s oraz gęstość strumienia ciepła $q_s(t)$. Powyższe wielkości są zmienne w czasie. Szukamy zmiennych w czasie temperatur T_i w równomiernie oddalonych od siebie węzłach. Współrzędne węzłów są równe $r_i = r_w + \Delta r(i-1)$, $i = 1, N+1$, gdzie $\Delta r = (r_z - r_w)/(N-1)$. Własności materiału cylindra są zależne od temperatury – zob. Rys. 4.1. Po dekompozycji obszaru cylindra na N objętości kontrolnych otrzymujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych, który zapisany w postaci równań stanu jest

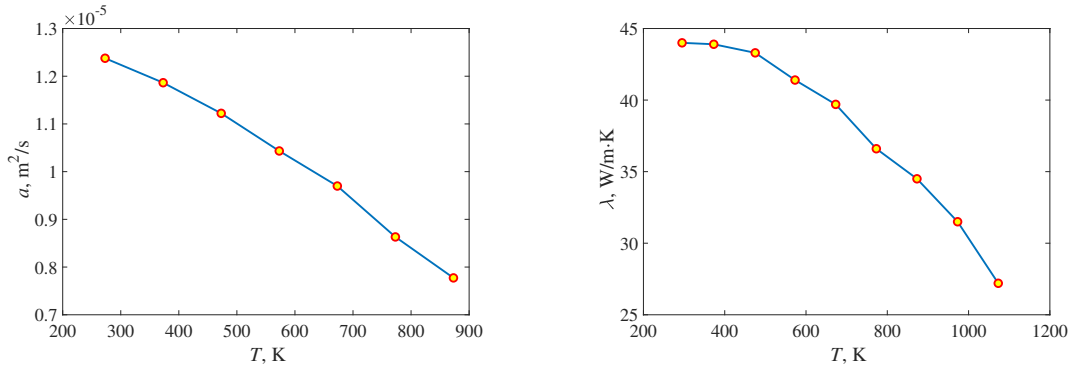
$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{T}, \mathbf{q}, t) \tag{4.1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{T}, \mathbf{q}, t) \tag{4.2}$$

W szczególności,

$$\dot{\mathbf{T}} = \begin{cases} \frac{a_1}{(\Delta r)^2}\frac{1}{2\lambda_1}\left[(\lambda_1+\lambda_2)(1+\frac{\Delta r}{2r_1})(T_2-T_1)+\frac{a_1}{2\pi r_1 \Delta r \lambda_1}q_s(t)\right] \\ \frac{a_2}{(\Delta r)^2}\frac{1}{2\lambda_2}\left[(\lambda_1+\lambda_2)(1-\frac{\Delta r}{2r_2})(T_1-T_2)+(\lambda_2+\lambda_3)(1+\frac{\Delta r}{2r_2})(T_3-T_2)\right] \\ \frac{a_3}{(\Delta r)^2}\frac{1}{2\lambda_3}\left[(\lambda_2+\lambda_3)(1-\frac{\Delta r}{2r_3})(T_2-T_3)+(\lambda_3+\lambda_4)(1+\frac{\Delta r}{2r_3})(T_4-T_3)\right] \\ \frac{a_4}{(\Delta r)^2}\frac{1}{2\lambda_4}\left[(\lambda_3+\lambda_4)(1-\frac{\Delta r}{2r_4})(T_3-T_4)\right] \end{cases} \tag{4.3}$$

gdzie $\lambda_i = \lambda_i(T_i)$, $a_i = a_i(T_i) = \lambda_i(T_i)/(c_i(T_i)\rho_i(T_i))$, $i = 1, \ldots, N$, $N = 4$. Powyższy model matematyczny został utworzony w środowisku Simulink wraz z układem regulacji PID w celu oszacowania wartości gęstości strumienia ciepła $q_s(t)$ oraz temperatury powierzchni wewnętrznej płyty T_1. Podobnie jak w poprzednim przypadku, założono obecność idealnego czujnika temperatury w pętli sprzężenia zwrotnego, tj. działającego z zerową zwłoką czasową i wzmocnieniem niezależnym od częstotliwości.



(a) (b)

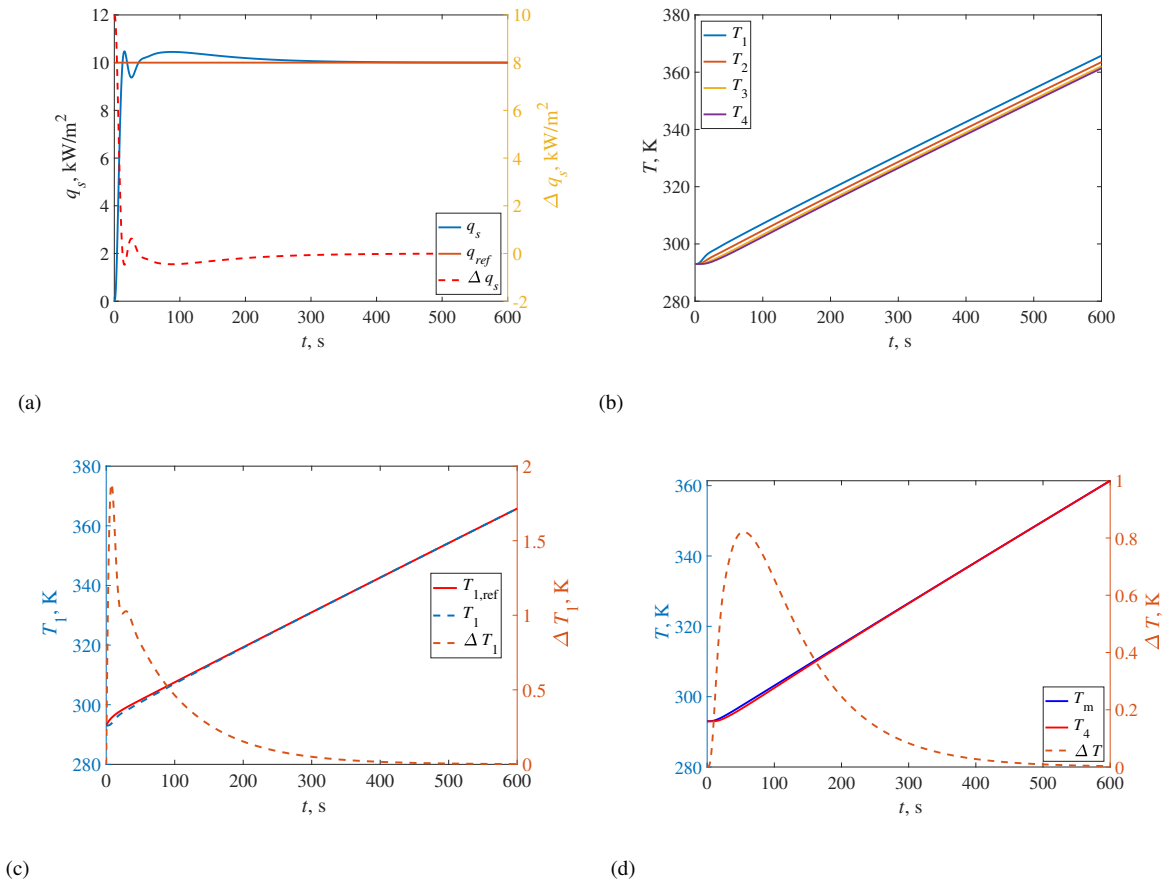
Rysunek 4.1. Własności materiałowe materiału cylindra, a) $a = a(T)$, b) $\lambda = \lambda(T)$

Procedurę strojenia regulatora PID przeprowadzono podobnie jak w Rozdziale 3, a wyniki zamieszczono w Tabeli 4.1.

Otrzymane wyniki symulacji z użyciem modelu nieliniowego przedstawiono na Rys. 4.2-4.4. W szczególności, odpowiedź modelu na wymuszenie skokowe opisane równaniem 3.13 jest zilustrowana Rys 4.2. Następnie, odpowiedź modelu na wymuszenie trójkątne (zob. Równanie 3.14) przedstawia

Tabela 4.1. Nastawy regulatora PID – model nieliniowy

k_p, W/(K·m^2)	$\frac{k_i}{T_{ii}}$, W/(K·m^2)	$k_d T_d$, W/(K·m^2)
9763.1	77.3	175828.1

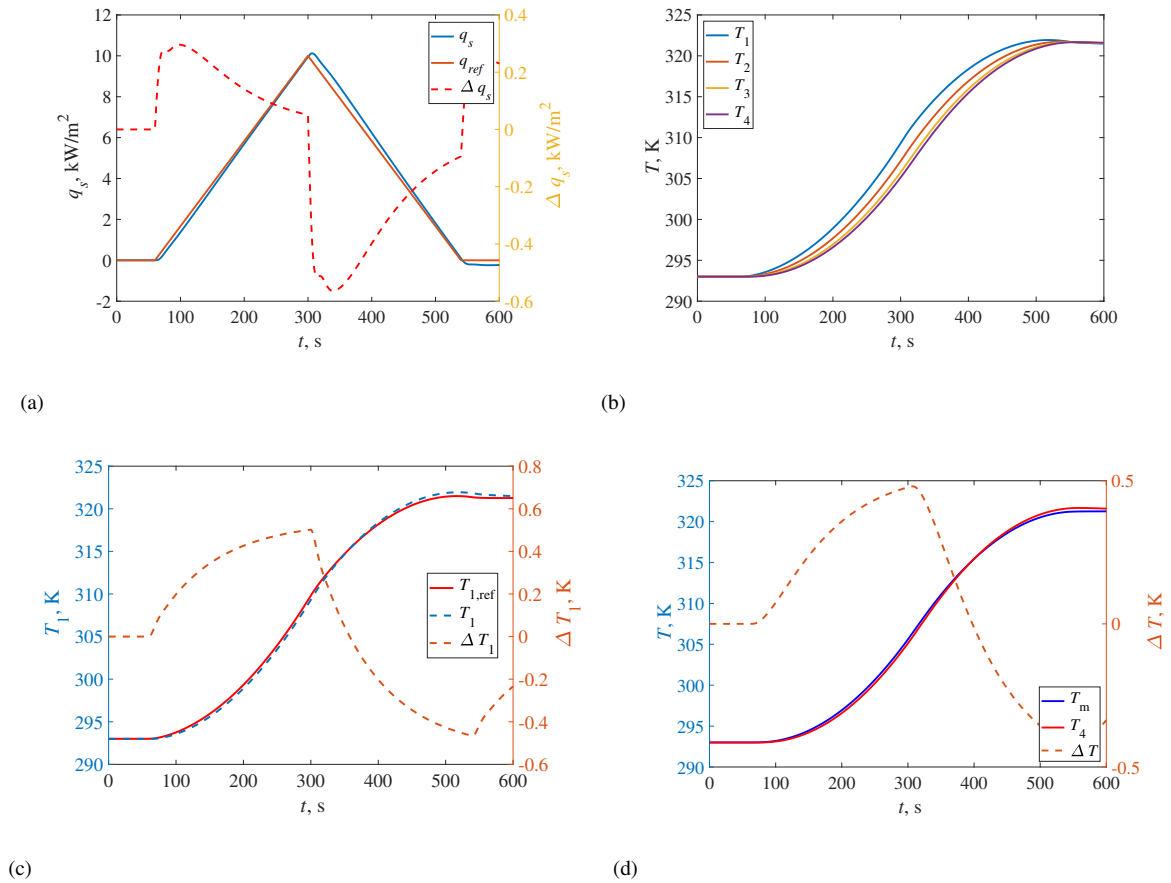


Rysunek 4.2. Odpowiedź modelu cylindrycznego nieliniowego na wymuszenie skokowe $q_s(t) = 10000 \cdot \mathbf{1}(t)$ W/m^2, $N = 4$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_4 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_4(t)$

Rys. 4.3, a odpowiedź modelu na wymuszenie prostokątne (zob. Rys. 3.16) można zaobserwować na Rys. 4.4.

Dla scenariusza z wymuszeniem skokowym na Rys. 4.2 odchyłka temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 mieści się w zakresie $0-2$ K i osiąga maksimum na początku symulacji; po około 40 s spada poniżej 1 K, a po 80 s jest poniżej 0.5 K. Z kolei, wartość błędu temperatury powierzchni zewnętrznej T_E przewidywanej przez model nie przekracza 0.8 K. Jednocześnie, można zauważyć przeregulowanie rzędu 0.3 kW/m^2 na Rys. 4.2a oraz stosunkowo długi czas dochodzenia do położenia równowagi rzędu 200 s.

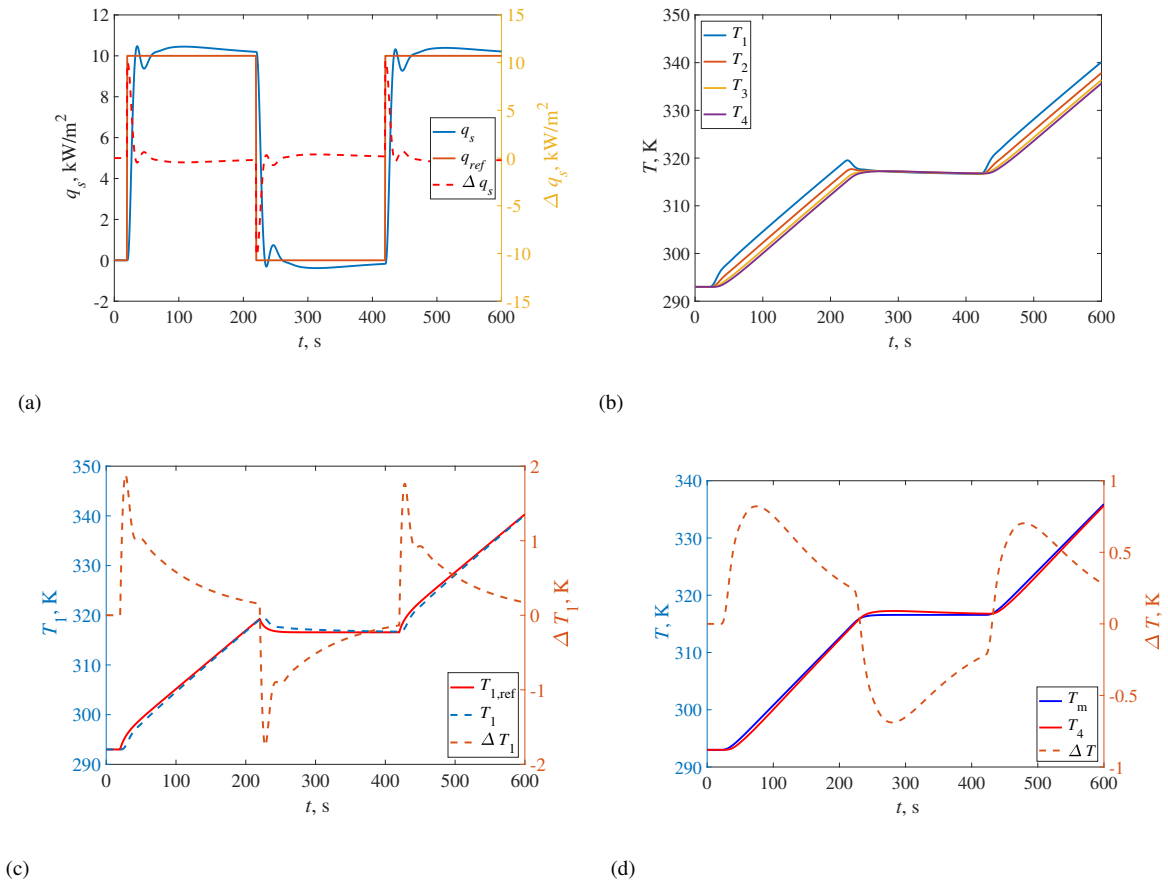
Następnie, dla przypadku z wymuszeniem trójkątnym na Rys. 4.3 wartość odchyłki temperatury T_1 nie przekracza 0.5 K i jest największa w chwili zmiany kierunku ruchu, tj. zmiany znaku pochodnej



Rysunek 4.3. Odpowiedź modelu cylindrycznego nieliniowego na wymuszenie trójkątne, $N = 4$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_4 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_4(t)$

strumienia q_s. Analogicznie, błąd predykcji temperatury powierzchni zewnętrznej T_E jest w granicach $0 - 0.5$ K, a błąd oszacowania gęstości strumienia ciepła q_s znajduje się w przedziale ± 0.4 kW/m^2.

W sytuacji, gdy układ jest poddany działaniu wymuszenia o charakterze prostokątnym (zob. Rys. 4.4) błąd oceny gęstości strumienia ciepła jest największy w chwili skoku, ale już po około 20 s jego wartość nie przekracza 1 kW/m^2. Z drugiej strony, podobnie jak w scenariuszu z wymuszeniem skokowym widoczny jest długi okres dochodzenia do położenia równowagi. Ma to przełożenie na wartość odchyłek temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 i zewnętrznej T_E. Wartość pierwszej z tych wartości mieści się w przedziale ± 1.8 K; po około 40 s od chwili skoku spada poniżej wartości 1 K. Analogicznie, wartość odchyłki temperatury powierzchni zewnętrznej T_E jest w przedziale ± 0.8 K i także osiąga maksimum w chwili skoku.



Rysunek 4.4. Odpowiedź modelu cylindrycznego nieliniowego na wymuszenie prostokątne, $N = 4$, a) porównanie przebiegów czasowych zadanego wymuszenia $q_{ref}(t)$ z odtworzonym $q_s(t)$ oraz błąd $\Delta q_s(t)$, b) przebiegi czasowe temperatury w węzłach kontrolnych $T_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, c) porównanie zrekonstruowanej wartości temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 z temperaturą zadaną $T_{1,ref}$ z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_1(t)$, d) porównanie wartości temperatury powierzchni zewnętrznej 'zmierzonej' T_m z temperaturą T_4 z modelu prostego oraz błąd $\Delta T_4(t)$

Otrzymane wyniki można uznać za satysfakcjonujące. Wartości odchyłek obu temperatur stosunkowo szybko od chwili zmiany znajdują się w akceptowalnych granicach. Warto jednak pamiętać, iż z uwagi na obecność nieliniowości w analizowanym modelu, wartości nastaw regulatora PID nie są, oczywiście, optymalne.

Autorka porównała otrzymane wyniki z użyciem modelu nieliniowego z modelem liniowym, w którym własności materiałowe został uśrednione względem spodziewanego zakresu temperatur. W przedstawionym przykładzie zmiany własności materiałowych nie były jednak znaczące (w wynikowym zakresie temperatur) i stąd otrzymane wyniki z użyciem równoważnego modelu liniowego niewiele odbiegały od zachowania modelu nieliniowego.

4.2. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale zaprezentowano działanie metody regulacyjnej w odniesieniu do modelu cylindra i z uwzględnieniem nieliniowości materiałowych (zależnych od temperatury). Działanie metody zilustrowano na wybranych przykładach, poczynając od wymuszenia gęstością strumienia ciepła o charakterze skokowym, trójkątnym oraz wymuszeniu w postaci fali prostokątnej. Otrzymane wyniki obarczone są niewielkim błędem.

Zdaniem Autorki, chociaż otrzymane wyniki przy użyciu klasycznego regulatora są dobrej jakości, należy jednak pamiętać, iż dla układów nieliniowych istnieją alternatywne rozwiązania, oferujące lepsze osiągi, zdolności adaptacyjne czy odporność na zakłócenia, np. sterowanie ślizgowe, adaptacyjne czy też algorytmy sterowania oparte na uczeniu maszynowym, których wykorzystanie w ramach wykorzystywanej metody mogłoby przyczynić się do poprawy osiągniętych wyników. Na obecnym etapie badań ich zastosowanie wykracza jednak poza ramy niniejszej pracy.

5. Wyznaczanie naprężeń cieplnych w elementach z otworami

5.1. Model bezpośredni (liniowy)

Stosując model cylindra jak na Rys. 5.1, wyznaczymy rozkład temperatury w cylindrze z otworem. W tym celu można się posłużyć zmodyfikowanym modelem bezpośrednim z Rozdziału 3. Zmiana polega na uwzględnieniu temperatury medium roboczego T_F oraz dekompozycji modelu cylindra na dowolną liczbą objętości kontrolnych. Średnica wewnętrzna cylindra wynosi $d_w = 1700$ mm, a jego średnica zewnętrzna jest równa $d_z = 1880$ mm, grubość $W = 90$ mm. Wymiary otworu są następujące: $d_H = 90$ mm – średnica otworu, $e_H = 6$ mm – grubość ścianki. Temperatura początkowa medium wynosi $T_{F,0} = 818$ K. Następnie, współczynnik wnikania ciepła na powierzchni wewnętrznej jest równy $\alpha = 1500$ W/(m$^2 \cdot$ K). Do obliczeń przyjęto uśrednione własności stali 10H2M (10CrMo910) wg normy EN 12952-3 [55] oraz [29]: $\lambda = 38.32$ W/(m·K), $\rho = 7699$ kg/m^3, $c = 644.78$ J/(kg·K), $E = 18166$ MPa. Przyjęte własności materiałowe dla w/w materiału zamieszczono w Rozdziale B. Możemy założyć, że zmiana temperatury cieczy T_F odbywa się skokowo lub liniowo z szybkością v_T w zakresie temperatur $T_F \in < 350, 545 >$ ^{o}C ($T_F \in < 623, 818 >$ K, a więc temperatura średnia wynosi 447.4 ^{o}C (720.5 K).

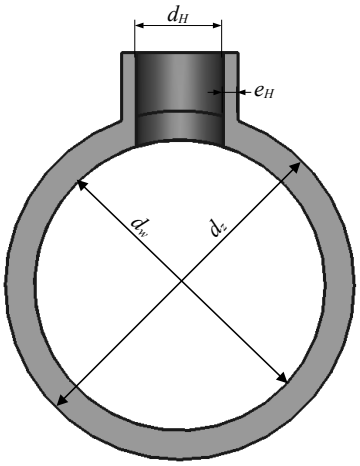
Równanie równowagi (bilansu cieplnego) dla węzła o indeksie $i = 1, \ldots, N$ dla układu przedstawionego na Rys. 5.1b ma następującą postać

$$\pi \left[\left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right] c\rho \frac{dT_i}{dt} = 2\pi \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right) \lambda \frac{T_{i-1} - T_i}{\Delta r} + \\ +2\pi \left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right) \lambda \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta r} \tag{5.1}$$

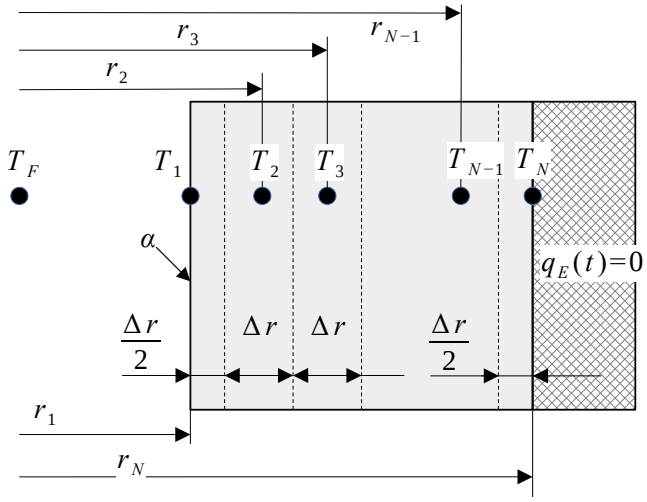
$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{a}{(\Delta r)^2} \left[\left(1 - \frac{\Delta r}{2r_i} \right) (T_{i-1} - T_i) + \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_i} \right) (T_{i+1} - T_i) \right] \tag{5.2}$$

a po uporządkowaniu

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{a}{(\Delta r)^2} \left[\left(1 - \frac{\Delta r}{2r_i} \right) T_{i-1} - 2T_i + \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_i} \right) T_{i+1} \right] \tag{5.3}$$



(a)



(b)

Rysunek 5.1. Model cylindra z otworem, a) przekrój, b) dekompozycja ścianki cylindra

gdzie $a = \lambda/(c\rho)$. W powyższym układzie równań pojawiają się temperatury T_{N+1} i T_0, które można wyznaczyć w sposób analogiczny do [29]. Ponieważ zewnętrzna powierzchnia ścianki cylindra jest izolowana cieplnie ($q_E(t) = 0$), to $T_{N+1} = T_{N-1}$. Zatem, temperaturę w węźle N możemy wyznaczyć ostatecznie z równania

$$\frac{dT_N}{dt} = \frac{a}{(\Delta r)^2}\left[-2T_N + 2T_{N-1}\right] \tag{5.4}$$

Analogicznie, korzystając z odpowiednich warunków brzegowych na ściance wewnętrznej otrzymujemy

$$T_0 = T_2 + 2\Delta r\frac{\alpha}{\lambda}(T_F - T_1) \tag{5.5}$$

a po uporządkowaniu temperaturę T_1 na ścience wewnętrznej wyznaczymy z równania

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{a}{(\Delta r)^2}\left[\left(1 - \frac{\Delta r}{2r_1}\right)T_0 - 2T_i + \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_1}\right)T_2\right] \tag{5.6}$$

W sytuacji gdy w rozważanym elemencie brak otworów naprężenia termiczne można wyznaczyć zgodnie z procedurą opisaną w Rozdziale 3.3. Jeżeli, w ściance rozważanego elementu znajduje się otwór jak na Rys. 5.1a, to naprężenia w osłabionej części przekroju cylindra można wyznaczyć przy użyciu zmodyfikowanego wzoru

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \alpha_T \frac{\beta E}{1-\nu} \Delta T \\ \Delta T &= T_m - T_1 \end{aligned} \tag{5.7}$$

gdzie α_T – współczynnik koncentracji naprężeń cieplnych wyznaczany wg [55]

$$\alpha_T = \left\{ \left(2 - \frac{\alpha + 2700}{\alpha + 1700} z + \frac{\alpha}{\alpha + 1700} \left(e^{-7z} - 1 \right) \right)^2 + 0.81 z^2 \right\}^{1/2} \tag{5.8}$$

gdzie $z = d_H/d_w$, d_H – średnica otworu, $d_w = 2r_w$ – średnica wewnętrzna rurociągu W analogiczny sposób modyfikujemy naprężenia wywołane ciśnieniem

$$\sigma_P = \alpha_m \frac{d_w}{2W} p \tag{5.9}$$

gdzie $W = (d_z - d_w)/2$. Współczynnik koncentracji naprężeń wywołanych zmianą ciśnienia p w rurociągu obliczymy podobnie z zależności [55]

$$\begin{cases} \alpha_m = 2.2 + e^{A_m} \cdot \zeta^{B_m} \\ \zeta = \frac{d_H}{d_w} \sqrt{\frac{d_w}{2W}} \\ A_m = -1.14(\frac{e_H}{W})^z - 0.89(\frac{e_H}{W}) + 1.43 \\ B_m = 0.326(\frac{e_H}{W})^2 - 0.59(\frac{e_H}{W}) + 1.08 \end{cases} \tag{5.10}$$

Podsumowując, równania 5.2–5.6 tworzą układ równań różniczkowych zwyczajnych pozwalających wyznaczyć rozkład temperatury w ściance cylindra w N węzłach. W połączeniu z równaniami 5.7–5.10 stanowią one model termomechaniczny służący oszacowaniu naprężeń zredukowanych w cylindrze z otworem przy założeniu stanu sprężystego. Tego typu połączenia można spotkać m.in. w układach walczak-rura opadowa.

Dla podanych powyżej danych współczynnik koncentracji naprężeń termicznych $\alpha_T = 1.786$, a współczynnik koncentracji naprężeń od ciśnienia $\alpha_m = 2.421$. Zgodnie z zależnością 5.9 naprężenie strukturalne w osłabionej części przekroju wynosi zatem $\sigma_P = 228$ MPa ($p = 10$ MPa).

Autorka przeprowadziła szereg symulacji z użyciem modelu bezpośredniego w celu wygenerowania danych wzorcowych dla modelu odwrotnego. Obliczenia zostały wykonane dla 6 różnych szybkości ochładzania (nagrzewania) $v_T = \{3, 6, 12, 18, 24, 36\}$ K/min w okresie czasu pozwalającym na obserwację 3 pełnych cykli i w zakresie temperatur $T_F \in < 623, 818 >$ K. Założono wymuszenie w postaci

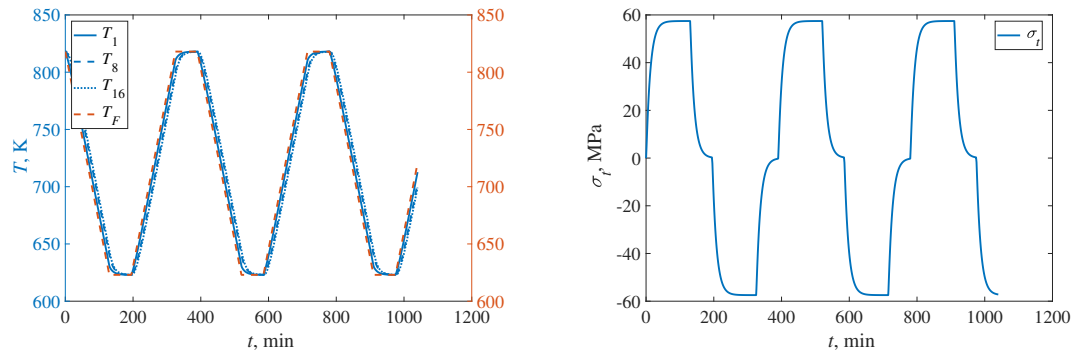
temperatury T_F. Wymuszenie było realizowane w taki sposób, aby od stanu początkowego zrealizować cykl chłodzenia z szybkością v_T (i czasie $\Delta T_F/v_T$), następnie utrzymać temperaturę T_F na stałym poziomie celem częściowej stabilizacji, i finalnie przejść do cyklu nagrzewania, itp. Model cylindra został zdyskretyzowany na $N = 16$ objętości kontrolnych. Wyniki obliczeń dla modelu bezpośredniego zostały przedstawione na Rys. 5.2. Ponownie, model utworzono w środowisku Simulink 24.1, a do rozwiązania układu równań różniczkowych użyto algorytmu stałokrokowego ode14x z krokiem czasowym równym $\Delta t = 1$ s. Na Rys. 5.2 przedstawiono przebiegi czasowe temperatur w węzłach kontrolnych o nr 1, 8, 16. Wezeł nr 1 znajduje się na powierzchni wewnętrznej cylindra, węzeł nr 8 jest położony w środku ścianki cylindra, a węzeł nr 16 znajduje się na jego powierzchni zewnętrznej. Jak widać na przedstawionych wykresach, w miarę wzrostu szybkości v_T wzrasta różnica temperatury $T_1 - T_{16}$. Towarzyszy temu wzrost maksymalnych naprężeń σ_T.

5.2. Model bezpośredni (nieliniowy)

Analogicznie, zakładając zależność własności fizycznych materiału cylindra od temperatury, równanie równowagi (bilansu cieplnego) dla węzła o indeksie $i = 1, \ldots, N$ dla układu przedstawionego na Rys. 5.1 jest postaci

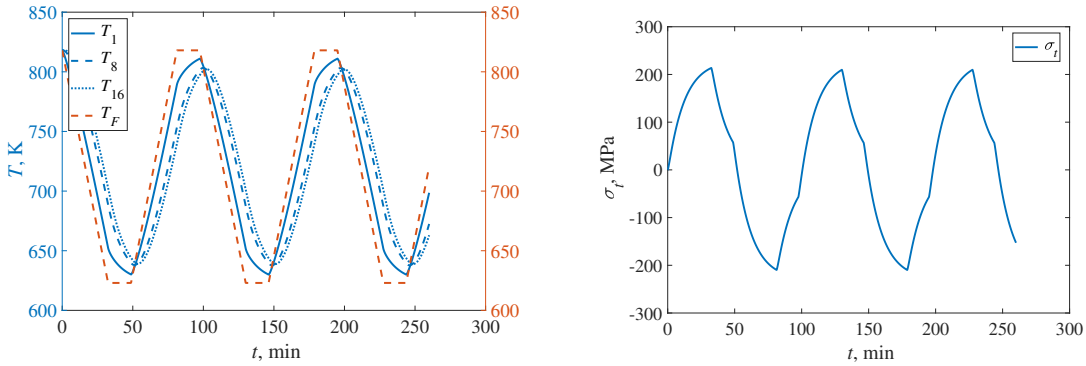
$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dt} &= \frac{a_i}{(\Delta r)^2}\left[\frac{\lambda_{i-1}-\lambda_i}{2\lambda_i}\left(1-\frac{\Delta r}{2r_i}\right)(T_{i-1}-T_i) + \right. \\ &\left. + \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_i}{2\lambda_i}\left(1+\frac{\Delta r}{2r_i}\right)(T_{i+1}-T_i)\right] \end{aligned} \tag{5.11}$$

gdzie $a_i = \lambda_i/(c_i\rho_i)$, $\rho_i = \rho(T_i)$, $c_i = c(T_i)$, $\lambda_i = \lambda(T_i)$, $E_i = E(T_i)$, $\beta_i = \beta(T_i)$. Analogicznie, model nieliniowy utworzono w środowisku Simulink 24.1, a do rozwiązania nieliniowego układu równań różniczkowych 5.11 użyto algorytmu stałokrokowego ode14x z krokiem czasowym równym $\Delta t = 1$ s. Na Rys. 5.3 przedstawiono przebiegi czasowe temperatur w węzłach kontrolnych o nr 1, 8, 16. Także i w tym przypadku widoczny jest wpływ wzrostu szybkości v_T na różnicę temperatur między ścianką zewnętrzną a wewnętrzną, a także wzrost amplitudy naprężeń wywołanych szokiem termicznym σ_T. W szczególności, różnice między modelem liniowym a nieliniowym widoczne są w wartościach minimalnych i maksymalnych $\sigma_T(t)$, a także w kształcie tychże przebiegów czasowych.



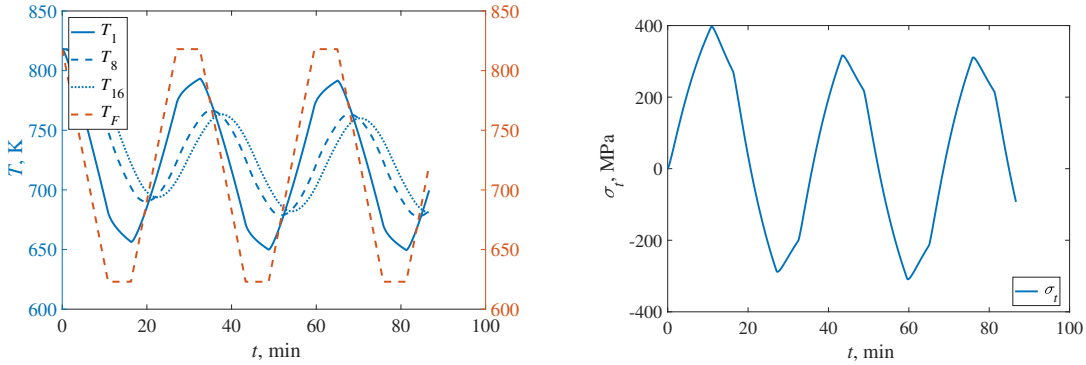
(a) $T - t$, $v_T = 3$ K/min

(b) $\sigma_T - t$, $v_T = 3$ K/min



(c) $T - t$, $v_T = 12$ K/min

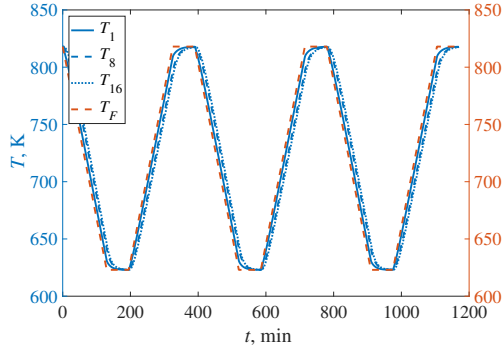
(d) $\sigma_T - t$, $v_T = 12$ K/min



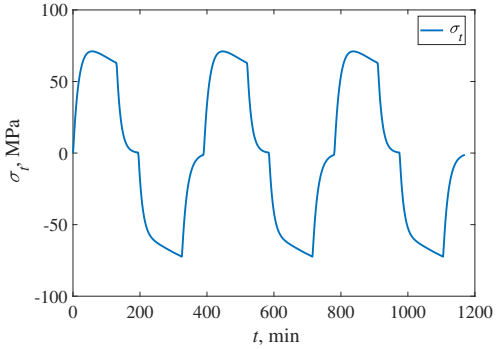
(e) $T - t$, $v_T = 36$ K/min

(f) $\sigma_T - t$, $v_T = 36$ K/min

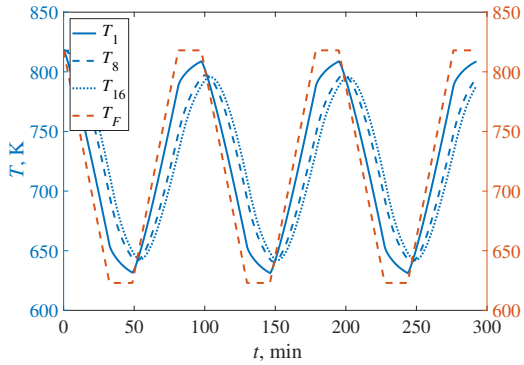
Rysunek 5.2. Model bezpośredni (liniowy): przebiegi czasowe temperatury T_i i naprężeń termicznych σ_t



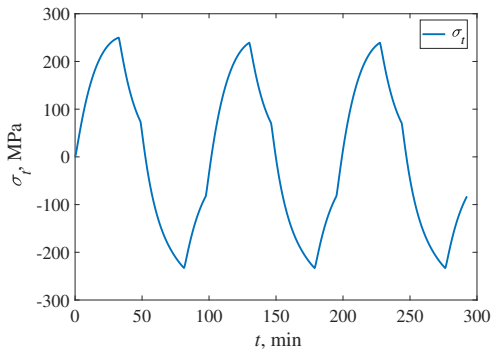
(a) $T - t$, $v_T = 3$ K/min



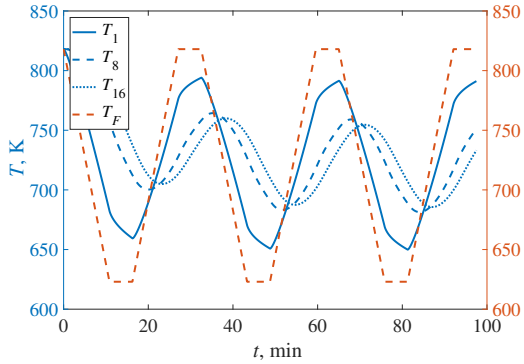
(b) $\sigma_T - t$, $v_T = 3$ K/min



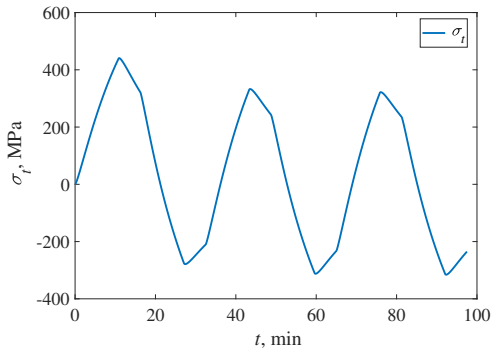
(c) $T - t$, $v_T = 12$ K/min



(d) $\sigma_T - t$, $v_T = 12$ K/min



(e) $T - t$, $v_T = 36$ K/min



(f) $\sigma_T - t$, $v_T = 36$ K/min

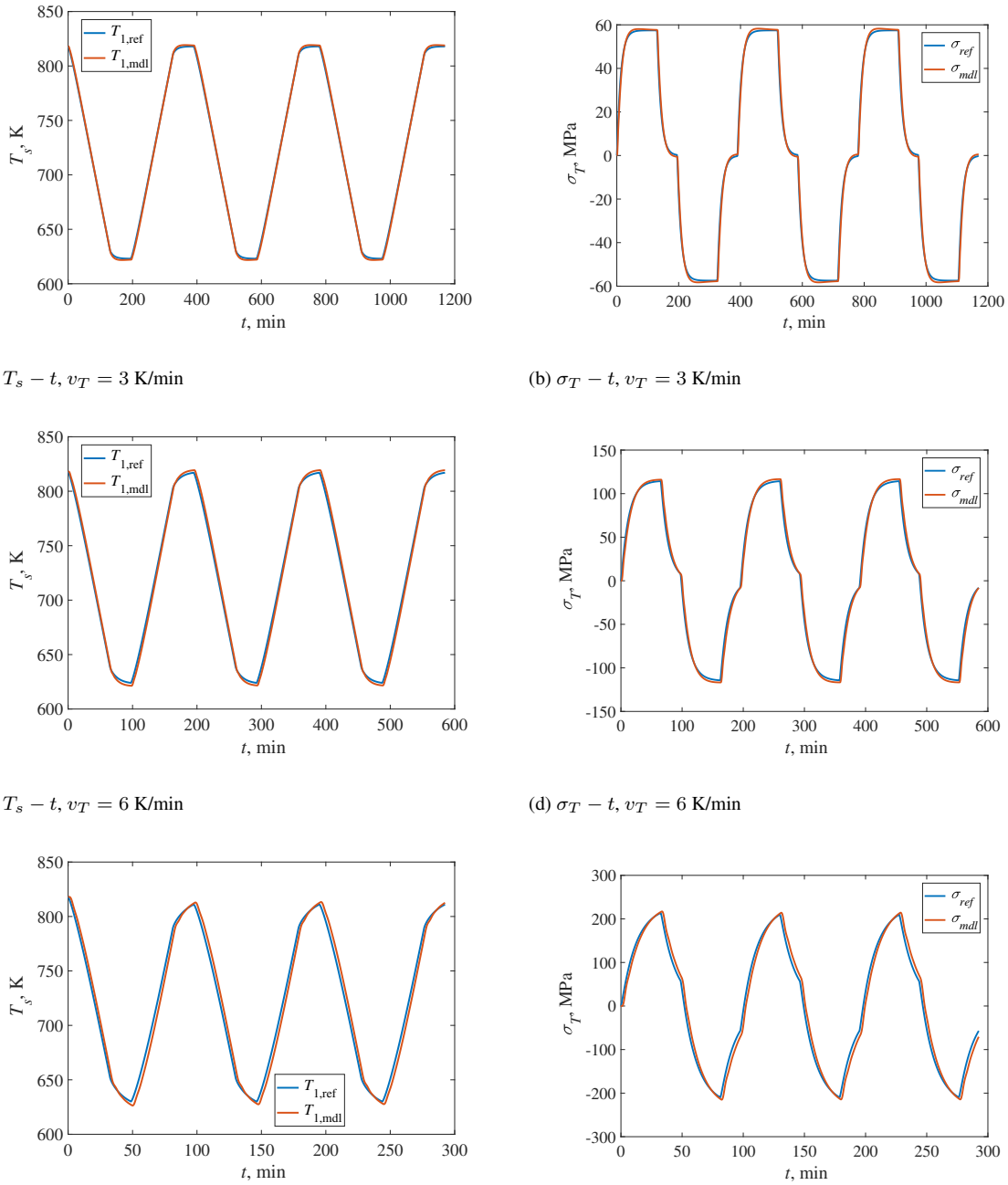
Rysunek 5.3. Model bezpośredni (nieliniowy): przebiegi czasowe temperatury T_i i naprężeń termicznych σ_t

5.3. Zagadnienie odwrotne

Obliczenia z użyciem liniowego modelu odwrotnego przedstawiono na Rys. 5.4 i 5.5 w postaci przebiegów czasowych temperatury T_1 oraz naprężeń σ_T. Każdorazowo, załączone wykresy zawierają porównanie danych wzorcowych (wyznaczonych przy pomocy modelu bezpośredniego) z wynikami obliczeń uzyskanych z zastosowaniem metody regulacyjnej. Także w tym przypadku użyto algorytmu stałokrokowego z próbkowaniem równym 1 s. W wyniku przeprowadzonej procedury strojenia regulatora PID uzyskano następujące nastawy: $k_p = 4192.02$ W/(K·m^2), $k_i/T_{ii} = 1.35$ W/(K·m^2), $k_d/T_d = 951114$ W/(K·m^2). Jak można zauważyć, model odwrotny prawidłowo odwzorowuje zarówno temperaturę T_1 jak i naprężenia σ_T na powierzchni wewnętrznej. Dla najniższej szybkości $v_t = 3$ K/min różnica pomiędzy temperaturą wzorcową a przewidywaną mieści się w granicach 2 K; błąd predykcji naprężeń σ_T nie przekracza 2 MPa (przy naprężeniach maksymalnych równych około 58 MPa). Zwiększaniu szybkości v_T towarzyszy niewielki wzrost błedu predykcji temperatury i naprężeń. Co więcej, istotne jest przesunięcie w czasie między temperaturą wzorcową a temperaturą przewidywaną przez model. Przykładowo, dla szybkości $v_T = 12$ K/min zmiana w fazie wynosi ok. 3 min., a błąd predykcji temperatury (naprężeń) nie przekracza 4 K (10 MPa) (przy naprężeniach maksymalnych równych 214 MPa). Dla najwyższej testowanej szybkości $v_T = 36$ K/min błąd predykcji temperatury mieści się w granicach 12 K, a błąd odczytu naprężeń σ_T jest nieco poniżej 15 MPa.

Następnie, obliczenia z użyciem nieliniowego modelu odwrotnego przedstawiono na Rys. 5.6 i 5.7 w postaci przebiegów czasowych temperatury T_1 oraz naprężeń σ_T. Każdorazowo, załączone wykresy zawierają porównanie danych wzorcowych (wyznaczonych przy pomocy modelu bezpośredniego) z wynikami obliczeń uzyskanych z zastosowaniem metody regulacyjnej. Także w tym przypadku użyto algorytmu stałokrokowego z próbkowaniem równym 1 s. W wyniku przeprowadzonej procedury strojenia regulatora PID uzyskano następujące nastawy: $k_p = 3253.3$ W/(K·m^2), $k_i/T_i = 0.77$ W/(K·m^2), $k_d/T_d = 916727.7$ W/(K·m^2). Wpływ szybkości v_T na otrzymane wyniki jest podobny jak w przypadku modeli liniowego. Dla najniższej szybkośći $v_T = 3$ K/min błąd predykcji temperatury nie przekracza 2 K, a dla naprężeń σ_T wynosi 3 MPa (przy naprężeniach maksymalnych wynoszących ok. 74 MPa). Przy szybkości $v_T = 12$ K/min widoczne jest przesunięcie fazowe mieszczące się w granicach 3 min, a błąd predykcji temperatury powierzchni wewnętrznej nie przekracza 9 K. Dla naprężeń σ_T błąd predykcji wynosi ok. 12 MPa, natomiast różnica w odczycie wartości maksymalnych (i minimalnych) wynosi 9 MPa ($\sigma_{T,max} = 246$ MPa). Finalnie, dla najwyższej testowanej szybkości $v_T = 36$ K/min przesunięcie w czasie mieści się w granicach 3.5 min., a błąd predykcji temperatury jest poniżej 11 K przy

różnicy w odczycie naprężeń maksymalnych w granicach 30 MPa (($\sigma_{T,max} = 332$ MPa)). Choć są to wyniki akceptowalne, zdaniem Autorki, to konieczna w rozważanym przypadku jest optymalizacja lokalizacji czujnika temperatury T_E, tj. przesunięcie w głąb ścianki cylindra, co pozwoliłoby na zmniejszenie wspomnianego już powyżej przesunięcia fazowego.



(a) $T_s - t$, $v_T = 3$ K/min

(b) $\sigma_T - t$, $v_T = 3$ K/min

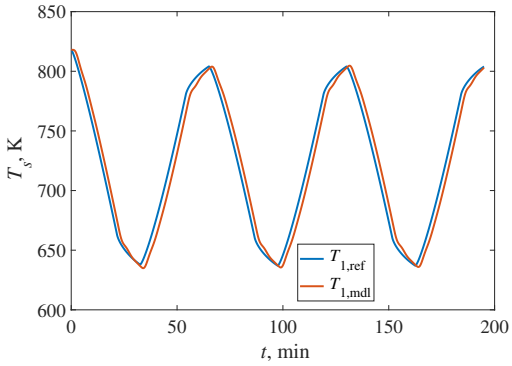
(c) $T_s - t$, $v_T = 6$ K/min

(d) $\sigma_T - t$, $v_T = 6$ K/min

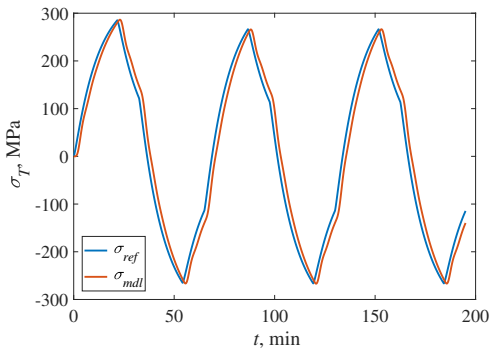
(e) $T_s - t$, $v_T = 12$ K/min

(f) $\sigma_T - t$, $v_T = 12$ K/min

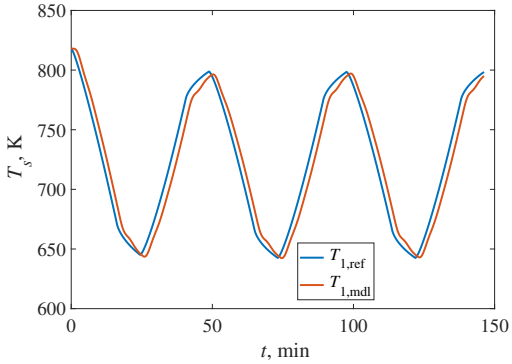
Rysunek 5.4. Model odwrotny (liniowy): przebiegi czasowe temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 (T_s) oraz naprężeń termicznych σ_T, $v_T = \{3, 6, 12\}$ K/min



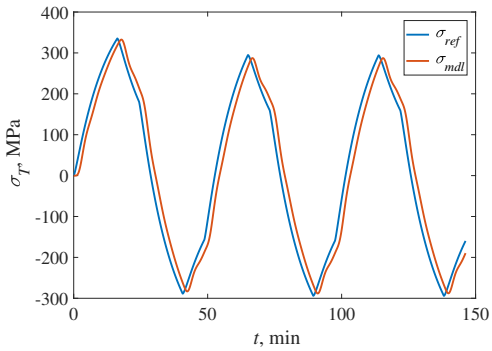
(a) $T_s - t$, $v_T = 18$ K/min



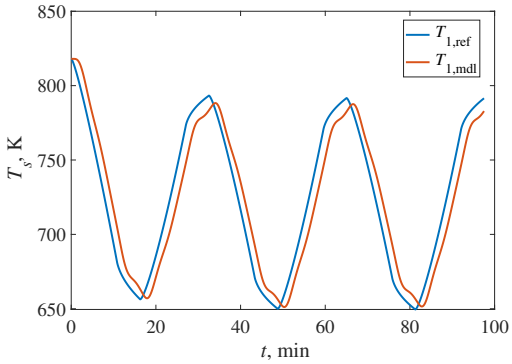
(b) $\sigma_T - t$, $v_T = 18$ K/min



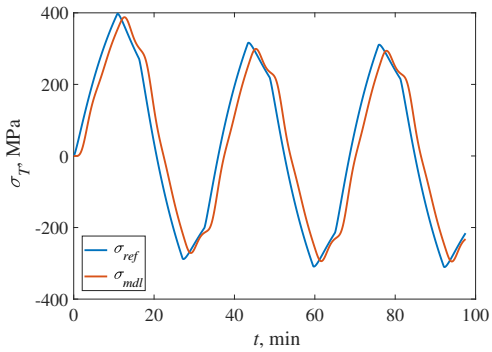
(c) $T_s - t$, $v_T = 24$ K/min



(d) $\sigma_T - t$, $v_T = 24$ K/min

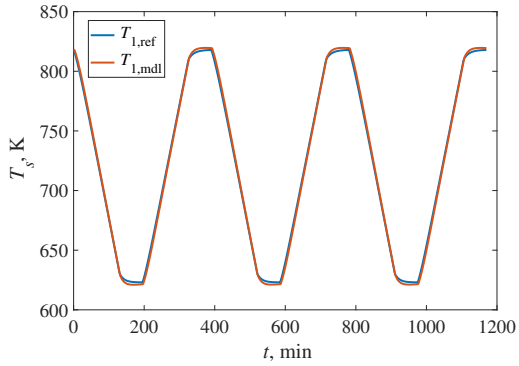


(e) $T_s - t$, $v_T = 36$ K/min

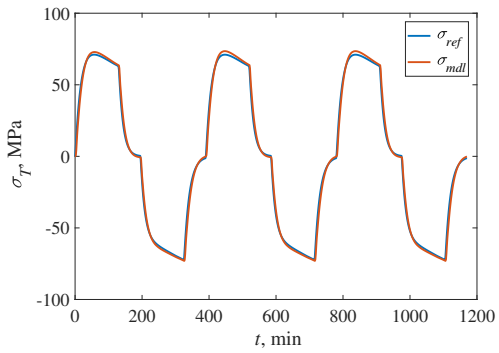


(f) $\sigma_T - t$, $v_T = 36$ K/min

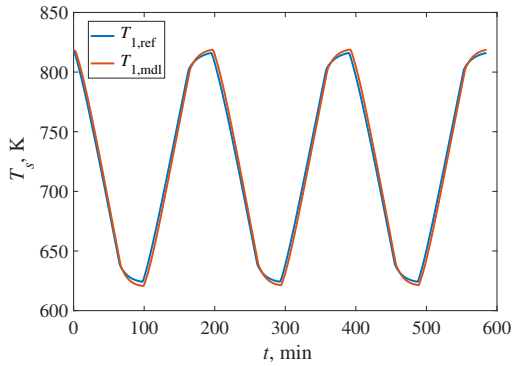
Rysunek 5.5. Model odwrotny (liniowy): przebiegi czasowe temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 (T_s) oraz naprężeń termicznych σ_T, $v_T = \{18, 24, 36\}$ K/min



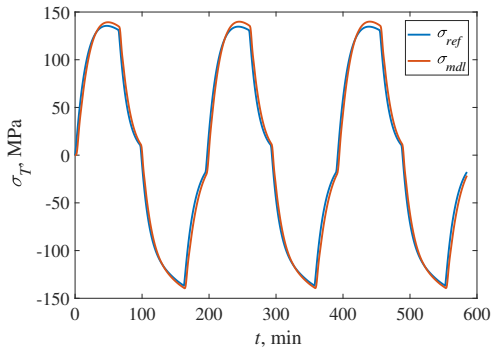
(a) $T_s - t$, $v_T = 3$ K/min



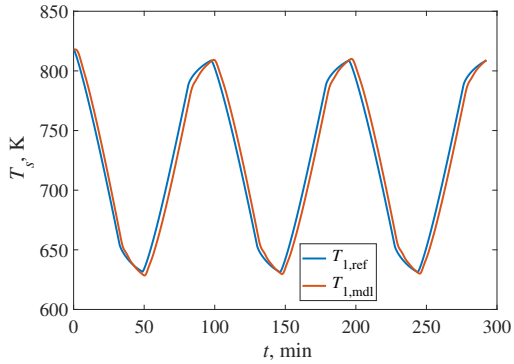
(b) $\sigma_T - t$, $v_T = 3$ K/min



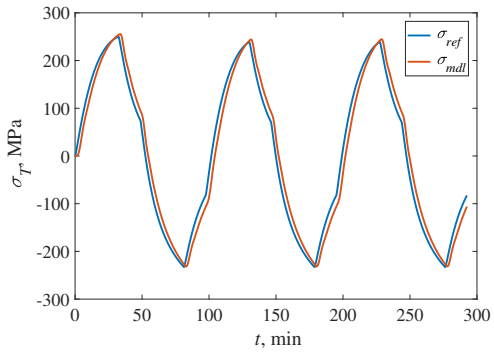
(c) $T_s - t$, $v_T = 6$ K/min



(d) $\sigma_T - t$, $v_T = 6$ K/min

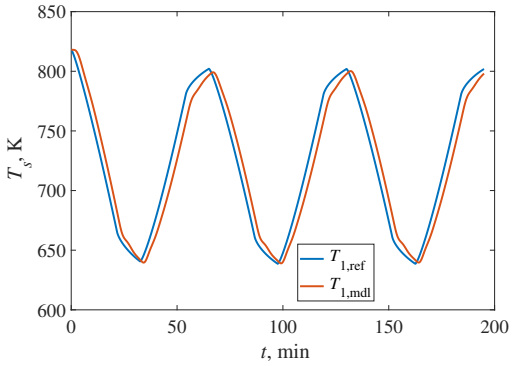


(e) $T_s - t$, $v_T = 12$ K/min

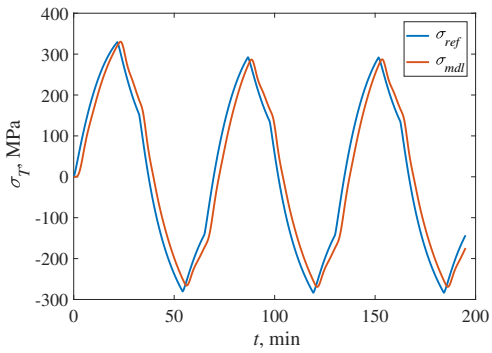


(f) $\sigma_T - t$, $v_T = 12$ K/min

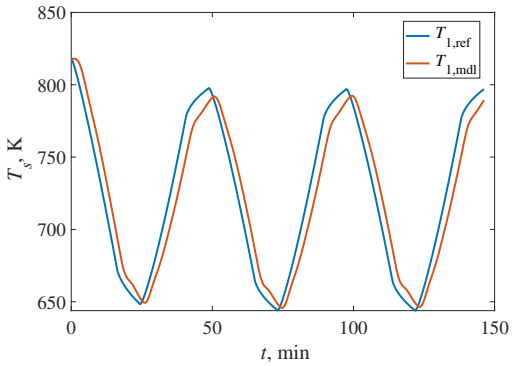
Rysunek 5.6. Model odwrotny (nieliniowy): przebiegi czasowe temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 (T_s) oraz naprężeń termicznych σ_T, $v_T = \{3, 6, 12\}$ K/min



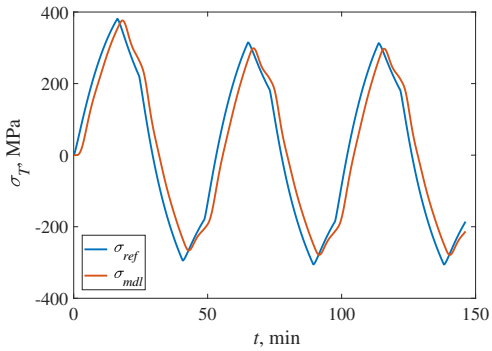
(a) $T_s - t$, $v_T = 18$ K/min



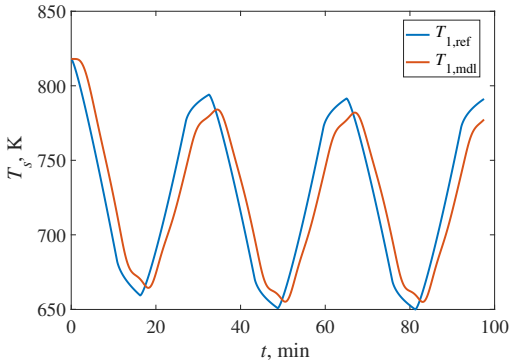
(b) $\sigma_T - t$, $v_T = 18$ K/min



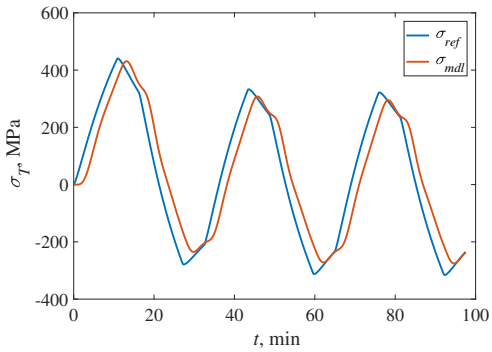
(c) $T_s - t$, $v_T = 24$ K/min



(d) $\sigma_T - t$, $v_T = 24$ K/min



(e) $T_s - t$, $v_T = 36$ K/min



(f) $\sigma_T - t$, $v_T = 36$ K/min

Rysunek 5.7. Model odwrotny (nieliniowy): przebiegi czasowe temperatury powierzchni wewnętrznej T_1 (T_s) oraz naprężeń termicznych σ_T, $v_T = \{18, 24, 36\}$ K/min

5.4. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale zaprezentowano działanie modelu odwrotnego na przykładzie cylindra z otworem i z uwzględnieniem nieliniowości materiałowych (zależnych od temperatury). Model prosty (bezpośredni) został zweryfikowany poprzez porównanie z wynikami otrzymanymi z modelu MES

(utworzonym w środowisku Ansys Transient Thermal R2020).Wykazano, m.in. istotne różnice w poziomie naprężeń σ_T pomiędzy modelem liniowym a nieliniowym. Jakość modelu można uznać za zadowalającą, choć konieczna jest optymalizacja położenia czujnika wewnątrz ścianki cylindra. Przedstawiono uproszczony model termomechaniczny pozwalający na szacowanie naprężeń w elementach kotła z otworami; trzy kluczowe składniki modelu sprzężonego to: model prosty (bezpośredni), regulator, model analityczny na bazie normy PN-EN 12952-3 [55]. Dwa pierwsze elementy stanowią integralną część metody regulacyjnej. Warto zwrócić uwagę, iż wszystkie składniki modelu są wymienne. Jak wspomniano w poprzednich rozdziałach, model prosty może być użyty w formie układu równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych albo nieparametrycznej, tj. modelu uzyskanego na drodze uczenia maszynowego z wykorzystaniem danych historycznych. Podobnie, zamiast klasycznych metod regulacji możliwe jest wykorzystanie bardziej zaawansowanych technik regulacji odpornych na zakłócenia. Analogicznie, wyrażenia analityczne pozwalające na oszacowanie współczynników korekcji (koncentracji) naprężeń można zastąpić dokładniejszym modelem MES lub podobnym. Pojawiające się tu ograniczenia wynikają z założeń samej metody, której idea sprowadza się do wykorzystania w systemach monitoringu – koszt obliczeniowy powinien być na tyle niski, aby umożliwić realizację w czasie rzeczywistym z odpowiednim krokiem czasowym przy zachowaniu zadowalającej dokładności obliczeń.

6. Wnioski

6.1. Podsumowanie i wnioski

Główny cel badań, których wyniki zostały przedstawione w niniejszej rozprawie, dotyczył opracowania koncepcji szybkiej metody wyznaczania naprężeń cieplnych w stanach quasi-ustalonych i nieustalonych w grubościennych cylindrycznych elementach kotłów z otworami. W tym celu Autorka opracowała przegląd literatury poświęcony w zasadniczej części metodom rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła. Następnie, na podstawie opracowanego przeglądu literatury sformułowała tezy i cele badawcze, których słuszność, zdaniem Autorki, została w rozprawie udowodniona na podstawie otrzymanych wyników badań numerycznych.

Podsumowując, materiał zawarty w rozprawie zawiera wyniki symulacji numerycznych. Poczynając od Rozdziału 3, a więc od części poświęconej oryginalnym wynikom badań, Autorka opisuje zasadę działania metody regulacyjnej jako koncepcji rozwiązania zagadnienia odwrotnego przewodzenia ciepła. Zaletą metody regulacyjnej jest wprost oparcie się na modelu bezpośrednim. W celu prezentacji działania wspomnianej metody Autorka posłużyła się w Rozdziale 3 dwoma typowymi modelami liniowymi, tj. o własnościach niezależnych od temperatury. Oba modele po dyskretyzacji sformułowano w formie układu równań stanu; rząd układu równań jest równy liczbie węzłów kontrolnych po dyskretyzacji. Integralną częścią metody regulacyjnej jest odpowiednio dostrojony regulator. W omawianym przykładzie zaproponowano klasyczny regulator PID i dobrano jest nastawy. Następnie, dla wybranych typów wymuszenia (gęstość strumienia ciepła) oddziaływającego na ściankę wewnętrzną obu obiektów przeprowadzono szereg symulacji numerycznych. Badano przydatność metody do oszacowania (rekonstrukcji) gęstości strumienia ciepła i temperatury ścianki wewnętrznej cylindra i płyty, a także jej odporność na zakłócenia pomiarowe w postaci szumu addytywnego o stałej wariancji i zerowej wartości średniej. Należy podkreślić, iż prezentowane podejście do rozwiązania zagadnienia odwrotnego cechuje duża uniwersalność. Koszt obliczeniowy w omawianych przypadkach był niewielki (zależny od liczby węzłów w modelu dynamicznym), a model matematyczny badanego obiektu może mieć, zasadniczo, dowolną formę. Mogą

tu być użyte zarówno modele MES jak i maszynowe w postaci np. odpowiednio wytrenowanych sztucznych sieci neuronowych. Zasadniczo, korzystanie z każdego modelu matematycznego jest możliwe, pod warunkiem, iż może on być zaimplementowany w formie nadającej się do obliczeń online. Co więcej, do budowy modelu odwrotnego można się posłużyć dowolnym regulatorem (bardziej zaawansowanym niż klasyczne regulatory PID). Model odwrotny zawiera komponent obliczeniowy pozwalający na oszacowano naprężeń zredukowanych w badanym komponencie (zob. Rozdział 3.3).

Rozszerzeniem materiału zawartego w Rozdziale 3 jest model nieliniowy opisany w Rozdziale 4, tj. o własnościach materiałowych zależnych od temperatury. Zaprezentowano tu działanie metody regulacyjnej z użyciem nieliniowego modelu cylindra. Działanie metody zilustrowano na wybranych przykładach obliczeniowych, wykorzystując analogiczne wymuszenia w formie gęstości strumienia ciepła jak w poprzednim rozdziale. Każdorazowo, wyniki rekonstrukcji są obarczone niewielkim błędem. Warto w tym miejscu podkreślić iż dla układów nieliniowych można posłużyć się wydajniejszymi metodami regulacji niż klasyczne regulatory PID, a zwłaszcza takimi, które są zdecydowanie bardziej odporne na zakłócenia pomiarowe. Ten kontekst obliczeniowy wykraczał jednak poza wytyczone ramy pracy i nie był przez Autorkę studiowany.

Materiał opisany w Rozdziałach 3 i 4 stanowił punkt wyjścia do rozszerzenia przedstawionej tamże metody o moduł pozwalający na szybkie oszacowanie naprężeń cieplnych w elementach z otworami. Dodatkowy element obliczeniowy zawiera wyrażenia analityczne pozwalające na szacowanie naprężeń cieplnych i strukturalnych (wywołanych ciśnieniem) w elementach cylindrycznych, a w szczególności w osłabionych przekrojach tychże elementów. Na przykładzie 2 modeli: liniowego (o własnościach stałych i niezależnych od temperatury) i nieliniowego (zob. Rozdziały 5.1 oraz 5.2), Autorka przedstawia zastosowania proponowanej metody w Rozdziale 5.3, gdzie opisano jej zastosowanie na wybranych przykładach obliczeniowych. Opisano, m.in. wyniki uzyskane na drodze symulacji cyklu ochłodzenia-nagrzewania w formie przebiegów czasowych temperatur w węzłach kontrolnych modelu, zrekonstruowane przebiegi temperatur na wewnętrznej powierzchni ścianki przy pomocy modelu odwrotnego, a także szacunkowe wartości naprężeń cieplnych w badanym elemencie. Uzyskane wyniki można uznać za akceptowalne. Pewną poprawę można by uzyskać poprzez zmianę lokalizacji czujnika temperatury T_E. W przedstawianym modelu jest ona mierzona przy pomocy czujnika zamocowanego na zewnętrznej ściance cylindra izolowanego cieplnie. Niewątpliwą zaletą takiego rozwiązania jest bezinwazyjność, ale jednocześnie sprawia to, iż model reaguje na szybkie zmiany temperatury cieczy T_F z opóźnieniem wynoszącym nawet kilka minut. Powszechnie stosowana praktyka pomiarowa polega na usytuowaniu czujnika temperatury wewnątrz badanej ścianki, co skutkuje jednak pogorszeniem jej wytrzymałości.

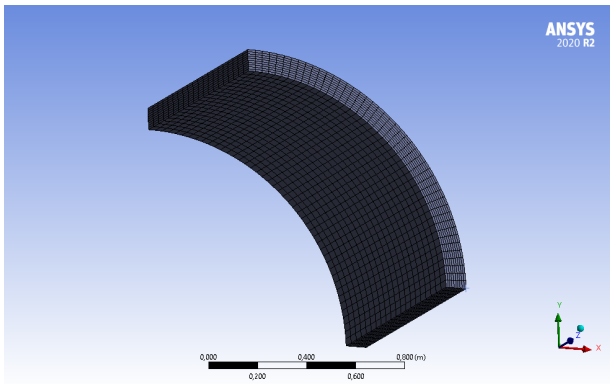
W obliczu przedstawionych wyników badań, można uznać, iż założone przez Autorkę cele i zadania badawcze postawione w Rozdziale 1.2 zostały zrealizowane, a tezy udowodnione. Zaproponowana przez Autorkę metoda obliczeniowa realizuje założone działania. Jej niewątpliwą zaletą jest wykorzystanie modelu prostego (w połączeniu z wybraną metodą regulacji) do rozwiązania problemu odwrotnego przewodzenia ciepła.

Dalsze prace badawcze prowadzone będą przez Autorkę w kierunku poprawy działania proponowanej metody i rozszerzenia jej o dodatkowe elementy, np. MES lub modele zredukowane z zastosowaniem sieci nauronowych optymalizację położenia czujnika. Zaproponowana przez Autorkę metoda może z powodzeniem służyć za punkt wyjścia do dalszych badań na tym polu. Jej niezaprzeczalną zaletą jest stosunkowo niewielki koszt obliczeniowy (aczkolwiek zależny od przyjętego modelu matematycznego).

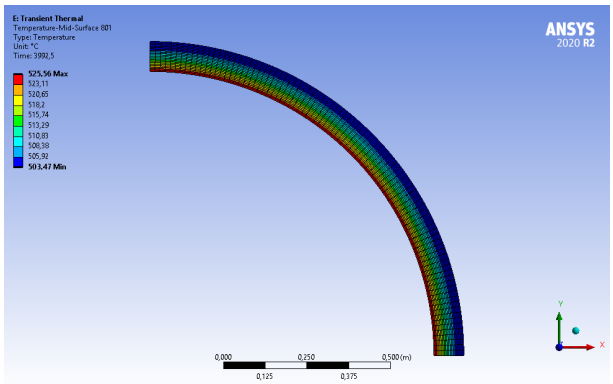
A. Zadanie proste – model MES

A.1. Rozwiązanie zadania prostego - ANSYS Transient Thermal

W celu weryfikacji obliczeń niestacjonarnych, których wyniki zostały przedstawione w Rozdziale 5 utworzono model MES cylindra o wymiarach odpowiadających badanemu obiektowi i wymuszeniom opisanym tamże. Co więcej, założono identyczne własności materiałowe jak w analizowanym uprzednio modelu. Dla uproszczenia, geometrię modelu ograniczono do 1/4 objętości cylindra, nakładając odpowiednie warunki brzegowe (symetria).

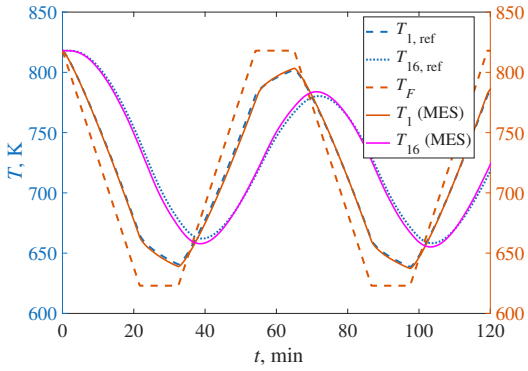


(a)

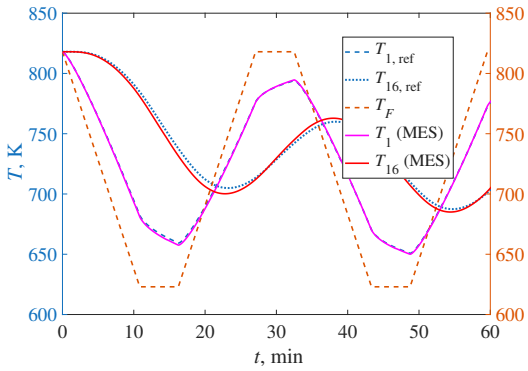


(b)

Rysunek A.1. Models MES: a) siatka modelu MES cylindra (Ansys Meshing), b) przykład rozkładu temperatury w cylindrze



(a) $v_T = 18$ K/min

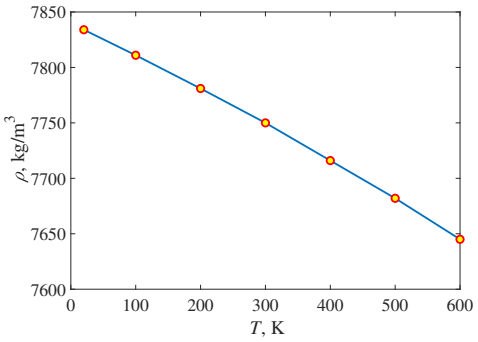


(b) $v_T = 36$ K/min

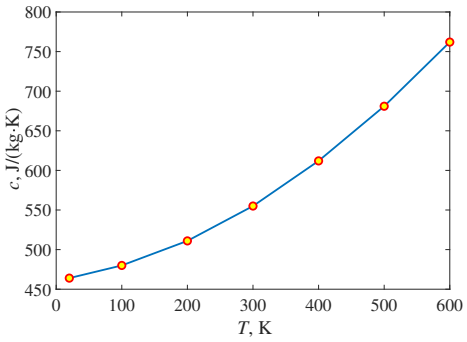
Rysunek A.2. Porównanie nieliniowego modelu MES i dynamicznego (zob. Rozdział 5)

Obliczenia MES przeprowadzono z użyciem programu Ansys Transient Thermal dla 2 wybranych szybkości $v_T = \{18, 36\}$ K/min. Wyniki przeprowadzonych symulacji przedstawiono na Rys.A.2. Podobnie jak w Rozdziale 5, otrzymane wyniki są w formie przebiegów czasowych temperatur wyznaczonych na powierzchniach cylindra: wewnętrznej, środkowej (w połowie grubości ścianki) oraz zewnętrznej. Z porównania wynika, iż zgodność otrzymanych wyników przy użyciu modelu MES i tych z Rozdziału 5 dla modelu nieliniowego jest co najmniej zadowalająca.

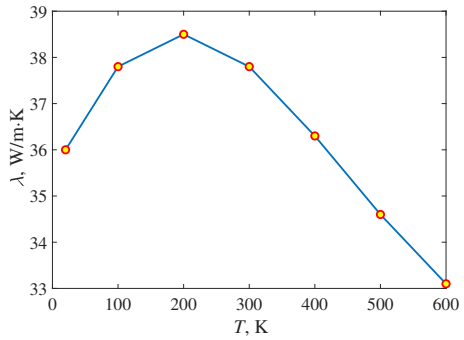
B. Własności materiałowe stali 10H2M



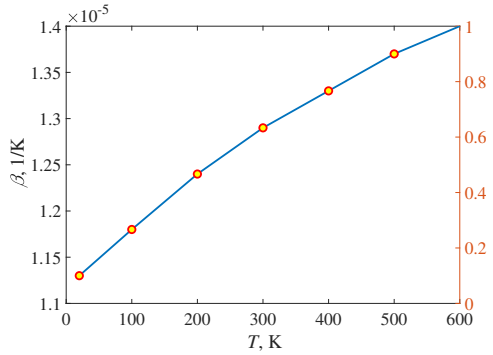
(a) $\rho - T$



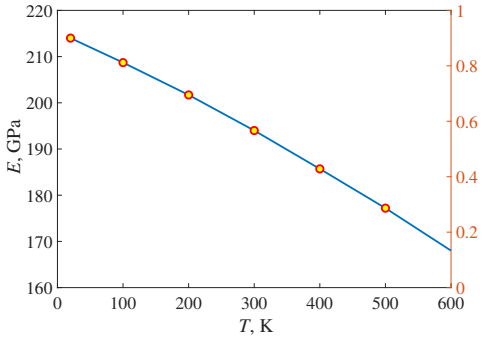
(b) $c - T$



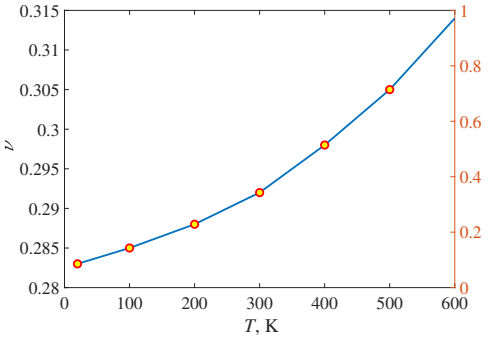
(c) $\lambda - T$



(d) $\beta - T$



(e) $E - T$



(f) $\nu - T$

Rysunek B.1. Własności materiałowe stali 10H2M [67]: a) gęstość, b) ciepło właściwe, c) współczynnik przewodzenia ciepła, d) współczynnik rozszerzalności cieplnej, e) moduł Younga, f) liczba Poissona

Dorobek naukowy

Artykuły w czasopismach naukowych

1. Mahmood, M. A., Hastuty, S., Gołdasz, I., & Caesarendra, W. (2024). A prototype design of a vertical axis wind turbine as one of the renewable energy sources in Brunei. *INTENSIF: Jurnal Ilmiah Penelitian dan Penerapan Teknologi Sistem Informasi*, 8(2), 213-232.

2. Tomczyk, M., Mielnik, R., Plichta, A., Goldasz, I., & Sułowicz, M. (2021). Identification of inter-turn short-circuits in induction motor stator winding using simulated annealing. *Energies*, 15(1), 117.

3. Hayder, I. A., Khan, S. N., Althobiani, F., Irfan, M., Idrees, M., Ullah, S. & Martis, R. (2021). Towards controlled transmission: a novel power-based sparsity-aware and energy-efficient clustering for underwater sensor networks in marine transport safety. *Electronics*, 10(7), 854.

4. Irfan, M., Ali, F., Muhammad, F., Alwadie, A. S., Glowacz, A., Goldasz, I. & Khan, H. (2021). An optimal framework for WDM systems using analytical characterization of refractive index-related nonlinear impairments. *Electronics*, 10(3), 221.

5. Tomczyk, M., Mielnik, R., Plichta, A., Gołdasz, I., & Sułowicz, M. (2021). Application of genetic algorithm for inter-turn short circuit detection in stator winding of induction motor. *Energies*, 14(24), 8523.

Referaty konferencyjne

1. Gołdasz, I.& Taler, J. (2025). Fast Method for Determining Stresses in Thick-Walled Heating Elements Using the Regulation Method. *International Conference on Future Energy Solutions 2025*, Cluj-Napoca, Rumunia, 24-26/09/2025.

Streszczenie

Autorka rozprawy postawiła sobie za cel opracowanie szybkiej metody wyznaczania naprężeń cieplnych w grubościennych cylindrycznych elementach kotłów z otworami, w stanach quasi-ustalonych i nieustalonych. W tym celu przeanalizowała literaturę dotyczącą zagadnień odwrotnych przewodzenia ciepła, a następnie zaproponowała własną koncepcję opartą na metodzie regulacyjnej. Należy tu zwrócić uwagę na kluczowe słowo 'szybka' występujące w tytule rozprawy. Determinuje ono nie tylko obszar potencjalnych zastosowań (systemy monitoringu online), ale także wybór określonych technik czy metod matematycznych służących rozwiązywania równań bilansu ciepła przy zachowaniu określonych reżimów czasowych. Istotne są też takie czynniki jak: jakość modelu i stopień jego uproszczenia, dokładność i odporność na zakłócenia pomiarowe i procesowe (przetwarzania).

W pracy przedstawiono wyniki symulacji numerycznych, początkowo z wykorzystaniem wybranych modeli liniowych dynamicznych (o własnościach stałych i niezależnych od temperatury), a następnie nieliniowych (z uwzględnieniem zależności właściwości materiałowych od temperatury). Kluczowym elementem metody jest regulator (np. PID), który pozwala na rekonstrukcję gęstości strumienia ciepła i temperatury ścianki wewnętrznej. W badaniach zweryfikowano jej skuteczność, uniwersalność oraz odporność na zakłócenia pomiarowe. Badano m.in. wykorzystanie filtrów rekurencyjnych typu filtry Kalmana i uśredniających.

W dalszej części pracy metoda została rozszerzona o moduł do szybkiego szacowania naprężeń w elementach cylindrycznych z otworami, uwzględniając zarówno obciążenia cieplne, jak i te, które są wywołane ciśnieniem. Symulacje pokazały, że uzyskane wyniki są akceptowalne, choć na dokładność otrzymanych wyników wpływa m.in. lokalizacja czujnika temperatury, skutkująca przesunięciem fazowym między sygnałem wzorcowym a zrekonstruowanym na podstawie pomiaru temperatury zewnętrznej ścianki.

Podsumowując, Autorka udowodniła tezy i zrealizowała cele badawcze postawione we wstępie, wykazując, że metoda regulacyjna w połączeniu z odpowiednio dobranym modelem termomechanicznym

może skutecznie rozwiązywać zagadnienia odwrotne przewodzenia ciepła i sprzężone (termomechaniczne) przy niewielkim koszcie obliczeniowym. Zaznaczono również możliwość dalszego rozwoju metody, np. poprzez integrację z MES lub sieciami neuronowymi.

Literatura

1. Burger, B. *Electricity generation in Germany in 2023* Fraunhofer ISE. 2024.
2. Anon. *Polski rekord OZE – powód do radości, ale i niepokoju* Portal Energetyka24. 2024.
3. Mucha, W. Europejski Kongres Gospodarczy, Katowice. June 2024.
4. Mielczarski, W. Odnawialne źródła energii jako element Nowego Zielonego Ładu. *ACADEMIA. Magazyn Polskiej Akademii Nauk,* 84–87 (2021).
5. Taler, J. *Procesy cieplne i przepływowe w dużych kotłach energetycznych: modelowanie i monitoring* (Wydawnictwo Naukowe PWN, 2011).
6. Skupnik, D. *Wieloaspektowe modele diagnostyczne* (Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn. Politechnika Śląska, Gliwice, 2009).
7. Łój, P. Heuristic method for assessing the condition of the vacuum pump vanes. *Mechanik* **95** (2022).
8. Apanowicz, J. *Metodologia ogólna* (Wydawnictwo BERNARDINUM, Gdynia, 2002).
9. Beck, J. Criteria for comparison of methods of solution of the inverse heat conduction problem. *Nuclear Engineering and Design* **53,** 11–22 (1979).
10. Woodbury, K., Najafi, H, De Monte, F & Beck, J. *Inverse heat conduction: Ill-Posed problems* (John Wiley & Sons, 2023).
11. Burggraf, O. An Exact Solution of the Inverse Problem in Heat Conduction Theory and Applications. *Journal of Heat Transfer* **86,** 373–380 (Aug. 1964).
12. Taler, J & Zima, W. Solution of inverse heat conduction problems using control volume approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **42,** 1123–1140 (1999).
13. Beck, J., Litkouhi, B & Clair Jr, C. Efficient sequential solution of the nonlinear inverse heat conduction problem. *Numerical Heat Transfer, Part A Applications* **5,** 275–286 (1982).

14. Osman, A., Dowding, K. & Beck, J. Numerical Solution of the General Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem (IHCP). *Journal of Heat Transfer* **119,** 38–45 (Feb. 1997).

15. Taler, J *et al.* Monitoring of transient 3D temperature distribution and thermal stress in pressure elements based on the wall temperature measurement. *Journal of Thermal Stresses* **42,** 698–724 (2019).

16. Abou Khachfe, R & Jarny, Y. Numerical solution of 2-D nonlinear inverse heat conduction problems using finite-element techniques. *Numerical Heat Transfer: Part B: Fundamentals* **37,** 45–67 (2000).

17. Cebula, A, Taler, J & Ocłoń, P. Heat flux and temperature determination in a cylindrical element with the use of Finite Volume Finite Element Method. *International journal of Thermal Sciences* **127,** 142–157 (2018).

18. Dowding, K. & Beck, J. A Sequential Gradient Method for the Inverse Heat Conduction Problem (IHCP). *Journal of Heat Transfer* **121,** 300–306 (May 1999).

19. Pourgholi, R, Esfahani, A & Abtahi, M. A numerical solution of a two-dimensional IHCP. *Journal of Applied Mathematics and Computing* **41,** 61–79 (2013).

20. Zeng, Y *et al.* A novel adaptive approximate Bayesian computation method for inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **134,** 185–197 (2019).

21. Kaipio, J & Fox, C. The Bayesian Framework for Inverse Problems in Heat Transfer. *Heat Transfer Engineering* **32,** 718–753 (2011).

22. Qian, W *et al.* Physics-informed neural network for inverse heat conduction problem. *Heat Transfer Research* **54** (2023).

23. Palar, P. *et al. Using Physics-Informed Neural Networks to Solve Inverse Heat Conduction Problems* in *AIAA SCITECH 2023 Forum* (2023), 0537.

24. Najafi, H & Woodbury, K. Online heat flux estimation using artificial neural network as a digital filter approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **91,** 808–817 (2015).

25. Sparrow, E., Haji-Sheikh, A & Lundgren, T. The Inverse Problem in Transient Heat Conduction. *Journal of Applied Mechanics* **31,** 369–375 (Sept. 1964).

26. Stolz, G. Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes. *Journal of Heat Transfer* **82,** 20–25 (Feb. 1960).

27. Beck, J. Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **13,** 703–716 (1970).

28. Novikov, I. Solution of the linear one-dimensional inverse heat-conduction problem on the basis of a hyperbolic equation. *Journal of engineering physics* **40,** 668–672 (1981).

29. Taler, J & Duda, P. *Solving direct and inverse heat conduction problems* (Springer, 2006).

30. Zienkiewicz, O & Taylor, R. *The finite element method for solid and structural mechanics* (Elsevier, 2005).

31. Brooks, S. Markov chain Monte Carlo method and its application. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (the Statistician)* **47,** 69–100 (1998).

32. Wang, J & Zabaras, N. A Bayesian inference approach to the inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **47,** 3927–3941 (2004).

33. Wang, J & Zabaras, N. *A computational statistics approach to stochastic inverse problems and uncertainty quantification in heat transfer* in *Proceedings of the VI World Conference on Computational Mechanics* (2004), 5–10.

34. Wang, J & Zabaras, N. Using Bayesian statistics in the estimation of heat source in radiation. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **48,** 15–29 (2005).

35. Zeng, Y *et al.* A novel adaptive approximate Bayesian computation method for inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **134,** 185–197 (2019).

36. P, N., de Melo Antunes, M, Guimarães, G & de Lima e Silva, S. Simultaneous Bayesian estimation of the temperature-dependent thermal properties of a metal slab using a three-dimensional transient experimental approach. *International Journal of Thermal Sciences* **179,** 107671 (2022).

37. Mota, C *et al.* Bayesian Estimation of Temperature-Dependent Thermophysical Properties and Transient Boundary Heat Flux. *Heat Transfer Engineering* **31,** 570–580 (2010).

38. Dumek, V, Druckmuller, M, Raudensky, M & Woodburg, K. *Novel approaches to the IHCP: neural networks and expert systems* in *PROC 1 INT CONF INVERSE PROBL ENG THEORY PRACT, ASME, NEW YORK, NY,(USA), 1993,* (1993), 275–282.

39. Krejsa, J, Woodbury, K., Ratliff, J. & Raudensky, M. Assessment of strategies and potential for neural networks in the inverse heat conduction problem. *Inverse Problems in Engineering* **7,** 197–213 (1999).

40. Cai, S *et al.* Physics-informed neural networks for heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer* **143,** 060801 (2021).

41. Soeiro, F., Velho, H. & Neto, A. S. A combination of artificial neural networks and the levenberg-marquardt method for the solution of inverse heat conduction problems. *Anais do VI Encontro de Modelagem Computacional* (2003).

42. Edalatifar, M, Tavakoli, M., Ghalambaz, M & Setoudeh, F. Using deep learning to learn physics of conduction heat transfer. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry* **146,** 1435–1452 (2021).

43. Allard, D. *A Comparative Study on the Application of Intelligent Algorithms as the Solution of Inverse Heat Conduction Problems* PhD thesis (Florida Institute of Technology, 2021).

44. Tamaddon-Jahromi, H *et al.* Data-driven inverse modelling through neural network (deep learning) and computational heat transfer. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **369,** 113217 (2020).

45. Wang, Y, Wang, N & Ren, Q. Predicting surface heat flux on complex systems via Conv-LSTM. *Case Studies in Thermal Engineering* **33,** 101927 (2022).

46. Beintema, G, Corbetta, A, Biferale, L & Toschi, F. Controlling Rayleigh–Bénard convection via reinforcement learning. *Journal of Turbulence* **21,** 585–605 (2020).

47. Zobeiry, N & Humfeld, K. A physics-informed machine learning approach for solving heat transfer equation in advanced manufacturing and engineering applications. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* **101,** 104232 (2021).

48. Tikhonov, A. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Math Dokl.* **4,** 1035–1038 (1963).

49. Baba, K & Ochi, M. *Monitoring of transient temperature distribution in piping* in *Proceedings of the Conference Inverse Problems and Optimal Design in Industry: July 8–10, 1993 Philadelphia, Pa. USA* (1994), 169–186.

50. Samadi, F, Woodbury, W & Kowsary, F. Optimal combinations of Tikhonov regularization orders for IHCPs. *International Journal of Thermal Sciences* **161,** 106697 (2021).

51. Salencon, J. Handbook of Continuum Mechanics: General Concepts, Thermoelasticity. *Applied Mechanics Reviews* **55,** B43–B44 (June 2002).

52. Pilkey, W., Pilkey, D. & Bi, Z. *Peterson's stress concentration factors* (John Wiley and Sons, 2020).

53. Taler, J. *Teoria i praktyka identyfikacji procesów przepływu ciepła* (Ossolineum, 1995).

54. *TRD 301: Zylinderschalen unter inneren Uberdruck. Technische Regeln fur Dampfkessel (TRD)* 2001.

55. *European Standard EN 12952-3. Water-tube boilers and auxiliary installations. Part 3: design and calculation for pressure parts* 2011.

56. Taler, J & Michalczyk, K. Analiza cieplno-wytrzymałościowa połączenia walczaka i rury opadowej w warunkach nieustalonych. *Mechanics/AGH University of Science and Technology* **25,** 41–46 (2006).

57. Taler, J & Taler, D. Analysis of the possibility of reducing the heating time of thick-walled cylindrical components with holes. *Energy* **303,** 131982 (2024).

58. Dzierwa, P, Taler, D & Taler, J. Optimum heating of cylindrical pressure vessels. *Forschung im Ingenieurwesen* **79,** 163–173 (2015).

59. Wan, S *et al.* Real-time estimation of thermal boundary of unsteady heat conduction system using PID algorithm. *International Journal of Thermal Sciences* **153,** 106395 (2020).

60. Gołdasz, I & Taler, J. *Fast Method for Determining Stresses in Thick-Walled Heating Elements Using the Regulation Method* in *International Conference on Future Energy Solutions 2025, Cluj-Napoca, Romania* (2025).

61. Goodier, J. & Timoshenko, S. *Theory of elasticity* (McGraw-Hill, 1970).

62. Taler, J & Zima, W. Solution of inverse heat conduction problems using control volume approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **42,** 1123–1140 (1999).

63. Welch, G & Bishop, G. *An introduction to the Kalman filter* (Chapel Hill, NC, USA, 1995).

64. Sudano, J. The alpha-beta-gamma tracking filter with a noisy jerk as the maneuver model. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **29,** 578–580 (1993).

65. Ng, K., Yeong, C., Su, E & Wong, L. Alpha beta gamma filter for cascaded PID motor position control. *Procedia Engineering* **41,** 244–250 (2012).

66. Bromba, M & Ziegler, H. Application hints for Savitzky-Golay digital smoothing filters. *Analytical Chemistry* **53,** 1583–1586 (1981).

67. Duda, P & Taler, J. Rozwiązywanie prostych i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła. *Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa* (2003).