

Der Zweigelenkbogen
als
statisch unbestimmtes Hauptssystem

Von

Dr. = Ing. R. Kirchhoff
Regierungsbaumeister

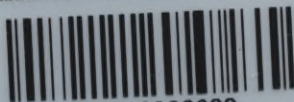
Mit 84 Textabbildungen



Berlin 1911
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

Alle Rechte vorbehalten

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000302688

Der Zweigelenkbogen

als

statisch unbestimmtes Hauptsystem

Von

Dr. = Ing. R. Kirchhoff
Regierungsbaumeister

Mit 84 Textabbildungen



Berlin 1911
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

III 34206

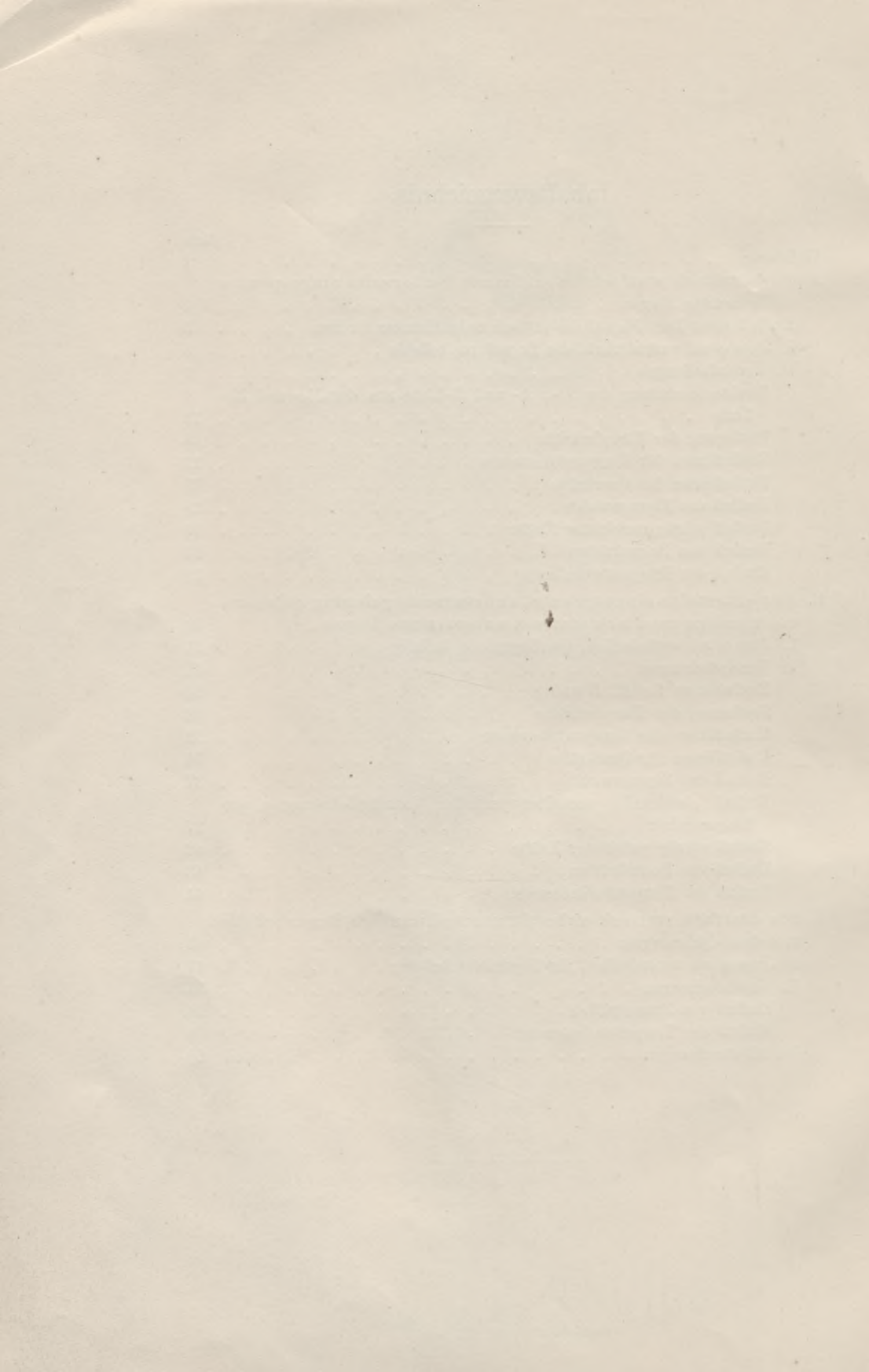


Alle Rechte vorbehalten

Akc. Nr. K-846/60

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
A. Der dreifach statisch unbestimmte beiderseits eingespannte vollwandige Bogen	2
Einfluß einer Last P_m auf die statisch unbestimmten Größen	5
I. $J \cos \varphi$ sei veränderlich, die Bogenform beliebig	5
II. Vereinfachungen	9
Direkte Herleitung der H -, A - und B -Linie aus der X_a - und X_b -Linie	13
Festlegung der Kämpferkräfte	15
Einflußlinien für Kernpunktmente	17
Einflußlinien für Querkräfte	18
Einfluß des Eigengewichts	18
Einfluß schräg gerichteter Kräfte	19
Einfluß von Bremskräften	24
Einfluß der Temperaturänderung	28
B. Der einerseits eingespannte, andererseits gelenkig gelagerte vollwandige zweifach statisch unbestimmte Bogen	30
I. $J \cos \varphi$ sei veränderlich, die Bogenform beliebig	31
II. Vereinfachungen	31
Einflußlinien für H , B und A	32
Festlegung der Kämpferkräfte	33
Einflußlinien für Kernpunktmente	35
Einflußlinien für Querkräfte	36
Einfluß des Eigengewichts	37
Einfluß gleichmäßig verteilter partieller Verkehrsbelastung p pro Längeneinheit	37
Einfluß schräg gerichteter Kräfte	42
Einfluß von Bremskräften	43
Einfluß der Temperaturänderung	44
C. Die dreifach statisch unbestimmte vollwandige Bogenbrücke mit drei Öffnungen	45
I. $J \cos \varphi$ sei veränderlich, die Bogenform beliebig	47
II. Vereinfachungen	51
Einfluß von Bremskräften	54
Einfluß der Temperaturänderung	58
Schlußbetrachtungen	60



X_b , d. h. setzt man X_a und $X_b = 0$, so entsteht als statisch unbestimmtes Hauptsystem ein Zweigelenbogen, dessen Spannungszustand als bekannt vorausgesetzt werden darf (s. Seite 3 und 4). Die diesem Zustand entsprechenden statischen Größen sollen durch den Index 0 gekennzeichnet werden (z. B. H'_0 , A_0 , B_0 usw.). Durch Belastung des statisch unbestimmten Hauptsystems mit $X_a = -1$ bzw. $X_b = -1$ entstehen sta-

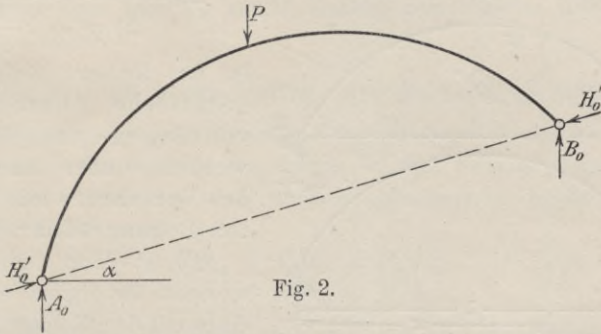


Fig. 2.

tische Größen, die mit dem Index a bzw. b versehen sein mögen (z. B. A_a , B_a , H'_a ... bzw. A_b , B_b , H'_b ...). Es ergeben sich dann sämtliche statischen Größen für den beiderseits eingespannten Bogen in der Form

$$Y = Y_0 - Y_a \cdot X_a - Y_b \cdot X_b;$$

$$\text{z. B. } H' = H'_0 - H'_a \cdot X_a - H'_b \cdot X_b$$

$$A = A_0 - A_a \cdot X_a - A_b \cdot X_b$$

usw.

Die Grundlagen für die weiteren Entwicklungen sollen in folgendem kurz zusammengestellt werden.

1. Unter der Annahme $J \cdot \cos \varphi = \text{Const.}$ und parabolischer Bogenform ist $H_0 = \frac{5 P_m}{8 f l^3} (x l^3 - 2 l x^3 + x^4) \cdot r$ (Müller-Br., Graph. Stat. II. 2, S. 518).

2. Die Einflußlinie für H_0 , die unter denselben Annahmen wie unter 1 genau nach der dort aufgestellten Formel für $P_m = 1 t$ berechnet werden kann, ist genügend genau eine Parabel vom Pfeil $\alpha = \frac{3 l}{16 f} \cdot r$ (Müller-Br., Graph. Stat. II. 2, S. 519).

3. Der Horizontalschub infolge Temperaturerhöhung bzw. -Erniedrigung ist nach Müller-Br., Graph. Stat. II. 2, S. 538

$$H_{0t} = \pm \frac{15}{8} \frac{\varepsilon E t J'}{f^2}, \text{ worin } J' = J \cdot \cos \varphi = \text{Const.}$$

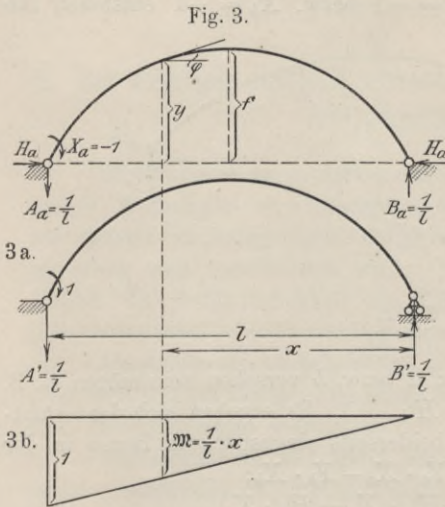
Der Wert r berücksichtigt den Einfluß der Längskräfte und ist zu setzen

$$r = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{J_c}{F \cdot f^2}}$$

Soll der Einfluß der Längskräfte vernachlässigt werden, so ist $r = 1$ zu setzen. J_c ist ein mittleres, konstantes Trägheitsmoment.

Für die ferneren Untersuchungen ist noch von Wichtigkeit die Berechnung des Horizontalschubs H_a infolge Belastung des statisch unbestimmten Hauptsystems mit einem Moment $X_a = -1$ am Bogenende. Es sei:

a) $J \cdot \cos \varphi$ veränderlich. Alsdann ist



$$H_a = \frac{\sum_1^n M \cdot y}{\sum_1^n y^2 + k \cdot \frac{S}{F_0}}$$

(s. Dr. Robert Schönhöfer, „Statische Untersuchung von Bogen- und Wölbttragwerken unter Anwendung des Verfahrens mit konstanten Bogengrößen“, Seite 9).

M ist darin das Biegemoment für irgend eine Stelle eines mit dem Moment $X_a = -1$ belasteten einfachen Balkens = $\frac{1}{l} \cdot x$ (s. Fig. 3a und 3b). S ist die Länge der ausgestreckten Bogenachse, F_0 der Mittelwert der verschiedenen Querschnitte F .

$$k = \frac{J}{s} = \text{Const.}$$

b) Es sei $J \cdot \cos \varphi = \text{Const.}$, der Bogen ein Parabelbogen. Alsdann wird

$$H_a = \frac{\int M' \cdot y dx}{\int y^2 dx} = \frac{\frac{1}{l} \int y dx \cdot x}{\int y^2 dx}$$

$\int y \cdot dx \cdot x$ ist das statische Moment der von der Bogenachse und Sehne eingeschlossenen Fläche für den rechten Auflagerpunkt

$$= \frac{2}{3} f \cdot l \cdot \frac{l}{2} = \frac{f l^2}{3} \quad (\text{Fig. 4})$$

$$\int y^2 dx = \int_0^l \left[\frac{4f}{l^2} \cdot x(l-x) \right]^2 dx = \frac{8}{15} f^2 \cdot l$$

Somit wird

$$H_a = \frac{\frac{f l^2}{3}}{\frac{8}{15} f^2 \cdot l} = \frac{5}{8 f}$$

Ist der Bogen nach irgend einer anderen Kurve gekrümmt, so ändern sich sinngemäß die Integrale.

Ebenso groß ergibt sich der Horizontalschub H_b bei Belastung mit $X_b = -1$ am andern Bogenende.

Es sei noch bemerkt; daß unter a) und b) der Einfluß der Längskräfte auf H_a als völlig unwesentlich vernachlässigt wurde.

Nach diesen einleitenden Voraussetzungen möge der

Einfluß einer Last P_m auf die statisch unbestimmten Größen
untersucht werden.

I. $J \cos \varphi$ sei veränderlich, die Bogenform beliebig.

Es mögen gleich hoch liegende Kämpfer angenommen werden, eine Voraussetzung, die wohl in der Praxis in den weitaus meisten Fällen zutreffen wird. Zwischen den statisch unbestimmten Größen bestehen alsdann die Gleichungen

$$\begin{aligned} X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab} &= P_m \delta_{ma} \\ X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb} &= P_m \delta_{mb}. \end{aligned}$$

Die Ermittlung der Werte δ_{ma} , δ_{mb} , δ_{aa} , δ_{bb} , δ_{ab} erfolge unter Benutzung des von Dr. Robert Schönhöfer in seinem Buche „Statische Untersuchung von Bogen- und Wölbtragwerken unter Anwendung des Verfahrens mit konstanten Bogengrößen“ veröffentlichten Verfahrens.

1. Berechnung der Werte δ_{ma} , d. h. der Biegelinie infolge des Zustandes $X_a = -1$.

Die allgemeine Formel für das elastische Gewicht w_{ma} eines Stabzuges lautet $w_{ma} = \Delta \tau_m + \frac{\sigma_{m+1}}{E} \operatorname{tg} \varphi_{m+1} - \frac{\sigma_m}{E} \operatorname{tg} \varphi_m$ (s. Mehrtens, Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre, 3. Band, S. 124). Darin ist $\Delta \tau_m = \frac{M_a ds}{EJ}$ zu setzen, so daß $w_{ma} = \frac{M_a ds}{EJ} + \frac{\sigma_{(m+1)a}}{E} \operatorname{tg} \varphi_{m+1} - \frac{\sigma_{ma}}{E} \operatorname{tg} \varphi_m$.

Der Wert $\frac{M_a ds}{EJ}$ stellt den Einfluß der Momente auf die Durchbiegungen dar, die beiden übrigen Glieder den Einfluß der Längskräfte. Die beiden Einflüsse mögen getrennt ermittelt werden.

- a) Der Einfluß der Momente M_a .

$$w_{ma} = \frac{M_a ds}{EJ}; \quad EJw_{ma} = M_a ds.$$

Streckt man den Bogen und die Momentenfläche aus, so kann $M_a ds$ aufgefaßt werden als Flächeninhalt eines Flächenelements der ausgestreckten M_a -Fläche. An Stelle eines unendlich kleinen Flächenelements darf ein endlicher Flächenstreifen gewählt werden von der Größe $\frac{M_{ra} + M_{ta}}{2} \cdot s = M'_a \cdot s$, wenn M' der Mittelwert von M_{ra} und M_{ta} ist, der durch die im Schwerpunkt der Fläche liegende Vertikale von der Mo-

mentenfläche abgeschnitten wird (Fig. 5 b). Dann wird

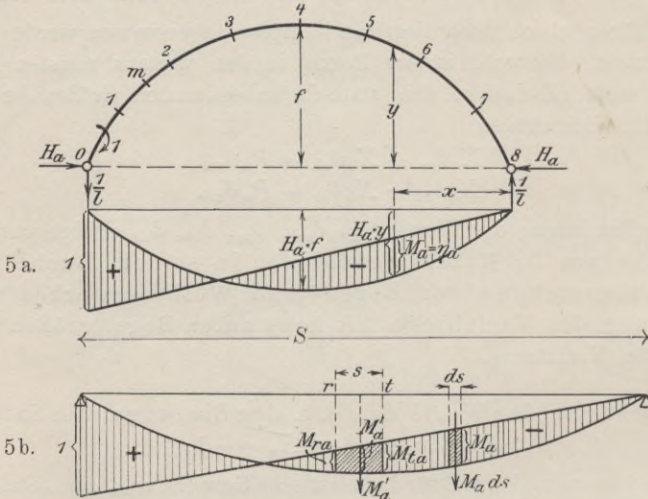
$$E \cdot J \cdot w_{ma} = M'_a \cdot s$$

$$E \cdot \frac{w_{ma}}{s} = M'_a \cdot \frac{1}{J}$$

Die M_a -Fläche ist gegeben durch die Gleichung

$$M_a = \frac{1}{l} \cdot x - H_a \cdot y = \mathfrak{M} - H_a \cdot y.$$

Fig. 5.



Sie setzt sich also zusammen aus einer positiven Dreiecksfläche mit der Ordinate 1 unter dem linken Auflager und einer durch eine Kurve mit den Ordinaten $H_a \cdot y$ begrenzten Fläche.

$$H_a = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} y}{\sum_1^n y^2 + \frac{k \cdot S}{F_0}}$$

S ist darin die Länge des ausgestreckten Bogens, F_0 der Mittelwert der verschiedenen Werte F (s. S. 4).

Nunmehr wird die Teilung des ausgestreckten Bogens nach dem auf Seite 4 der Schönhöferschen Schrift beschriebenen Verfahren so vorgenommen, daß

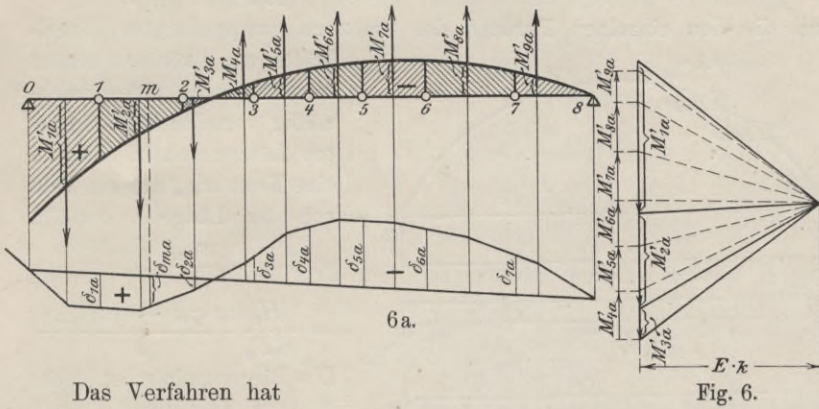
$$\frac{s_1}{J_1} = \frac{s_2}{J_2} = \frac{s_3}{J_3} = \dots = \frac{s_n}{J_n} = \frac{1}{k} = \text{Const.}$$

wird. Alsdann kann man setzen

$$E \cdot \frac{w_{ma}}{1} = M'_a; \quad E \cdot k \cdot w_{ma} = M'_a.$$

Man zeichne also zu den Kräften M'_a mit der konstanten Polweite $E \cdot k$ ein Seilpolygon; dieses ist dann die δ_{ma} -Linie des ausgestreckten

Stabzuges. Die Ordinaten dieser Biegelinie trage man nun senkrecht unter den entsprechenden Punkten des Bogens als Ordinaten auf (Fig. 6b).



Das Verfahren hat nicht nur die Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Trägheitsmomente, sondern auch der Neigungswinkel φ der Bogentangenten gegen die Horizontalen ermöglicht.

Ebenso wird der Einfluß der Momente auf die Durchbiegungen δ_{mb} berücksichtigt. Die δ_{mb} -Linie ist das Spiegelbild der δ_{ma} -Linie; sie braucht daher nicht mehr berechnet zu werden.

b) Der Einfluß der Längskräfte N_a bzw. N_b auf die Durchbiegungen δ_{ma} bzw. δ_{mb} .

Nach Seite 5 ist zu setzen

$$w_{ma} = \frac{\sigma_{(m+1)a}}{E} \operatorname{tg} \varphi_{m+1} - \frac{\sigma_{ma}}{E} \operatorname{tg} \varphi_m.$$

Da die Längskräfte nur bei flachen Bögen eine Rolle spielen, dann aber die vertikalen Reaktionen nur sehr geringen Einfluß auf die Längskräfte haben, genügt es, wenn man nur den Einfluß der Horizontalkräfte auf die Längskräfte berücksichtigt. Genau genug darf dann gesetzt werden

$N_{ma} = N_{(m+1)a} = \dots = -H_a$. Daher $\sigma_{ma} = \sigma_{(m+1)a} = -\frac{H_a}{F_0}$, so daß

$$1 \cdot w_{ma} = \frac{H_a}{E \cdot F_0} (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1}).$$

Man zeichne daher zu den Kräften $\frac{H_a}{E \cdot F_0} (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1})$ mit der Polweite 1 ein Seilpolygon; dieses ist dann die δ_{ma} -Linie. Das Seil-

polygon darf man, ohne einen nennenswerten Fehler zu begehen, durch eine Parabel vom Pfeil $\frac{\omega l^2}{8}$ ersetzen, worin $\omega = \frac{H_a \operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1}}{E F_0 \lambda}$,

denn die den einzelnen Punkten des Stabzugs entsprechenden Einzelkräfte w_{ma} können ersetzt werden durch eine gleichmäßig verteilte Belastung ω pro Längeneinheit. Da nun eine Kraft w_{ma} auf ein Feld von der Länge λ entfällt,

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{w_{ma}}{\lambda} \\ &= \frac{H_a \operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1}}{E F_0 \lambda} \end{aligned}$$

Die Biegelinie ist daher eine Parabel vom Pfeil $\frac{\omega l^2}{8}$.

Dasselbe gilt für die Durchbiegungen infolge der Längskräfte N_b , da $N_b = -H_b = -H_a$ ist. Die gesamte Durchbiegung δ_{ma} ist nunmehr gleich der Summe der unter a) und b) ermittelten Durchbiegungen $= \delta_{ma}^M + \delta_{ma}^N$. Ebenso ergibt sich $\delta_{mb} = \delta_{mb}^M + \delta_{mb}^N$ (s. Fig. 8).

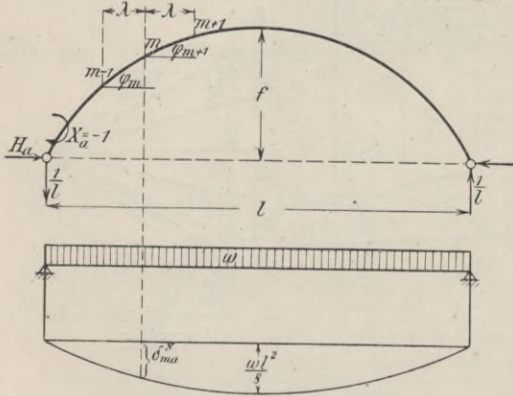


Fig. 7.

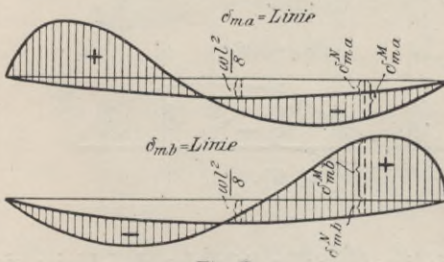


Fig. 8.

2. Berechnung von δ_{aa} .

$$\begin{aligned} \delta_{aa} &= \int M_a^2 \frac{ds}{EJ} + \int N_a^2 \frac{ds}{EF_0} = \Sigma \eta_a^2 \cdot \frac{s}{EJ} + \frac{H_a^2}{EF_0} \Sigma s \\ &= \Sigma \eta_a^2 \cdot \frac{1}{E \cdot k} + \frac{H_a^2 \cdot S}{EF_0} = \frac{\Sigma \eta_a^2 + H_a^2 \cdot \frac{S}{F_0} \cdot k}{E \cdot k} = \delta_{bb} \end{aligned}$$

S = Länge der ausgestreckten Bogenachse.

3. Berechnung von δ_{ab} .

$$\begin{aligned} \delta_{ab} &= \int M_a \frac{M_b ds}{E \cdot J} + \int \frac{N_a N_b ds}{EF_0} = \Sigma \eta_a \eta_b \frac{s}{EJ} + \Sigma H_a H_b \cdot \frac{s}{EF_0} \\ &= \Sigma \eta_a \eta_b \frac{1}{E \cdot k} + \frac{H_a^2}{EF_0} \cdot \Sigma s = \frac{\Sigma \eta_a \eta_b + H_a^2 \cdot \frac{S}{F_0} \cdot k}{E \cdot k} \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Maxwell ist $\delta_{ba} = \delta_{ab}$.

Die Werte η sind unter den den konstanten Bogengrößen entsprechenden Bogenteilpunkten aus der M_a - bzw. M_b -Fläche abzugreifen.

Durch Auflösung der auf Seite 5 aufgestellten Gleichungen nach X_a und X_b ergibt sich

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma} \delta_{bb} - \delta_{mb} \delta_{ba}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}$$

$$= P_m \cdot E \cdot k \frac{\delta_{ma} \left(\sum \eta_a^2 + H_a^2 \cdot \frac{S}{F_0} \cdot k \right) - \delta_{mb} \left(\sum \eta_a \eta_b + H_a^2 \cdot \frac{S}{F_0} \cdot k \right)}{\left[\sum \eta_a^2 + H_a^2 \cdot \frac{S}{F_0} \cdot k \right]^2 - \left[\sum \eta_a \eta_b + H_a^2 \cdot \frac{S}{F_0} \cdot k \right]^2}$$

Vernachlässigt man die Längskräfte, was bei hohem Bogenfeil zulässig ist, so ergibt sich

$$X_a = P_m \cdot E \cdot k \frac{\delta_{ma}^M \cdot \sum \eta_a^2 - \delta_{mb}^M \cdot \sum \eta_a \eta_b}{\left[\sum \eta_a^2 \right]^2 - \left[\sum \eta_a \cdot \eta_b \right]^2}$$

Setzt man $P_m = 1t$, errechnet nach obiger Formel für eine Reihe von Laststellungen die zugehörigen Werte X_a und trägt diese Werte unter der jedesmaligen Laststellung als Ordinaten auf, so erhält man durch Verbindung der Endpunkte dieser Ordinaten die Einflußlinie für X_a . Die X_b -Linie ist dann aus Symmetriegründen das Spiegelbild der X_a -Linie. Sie braucht daher nicht besonders berechnet zu werden.

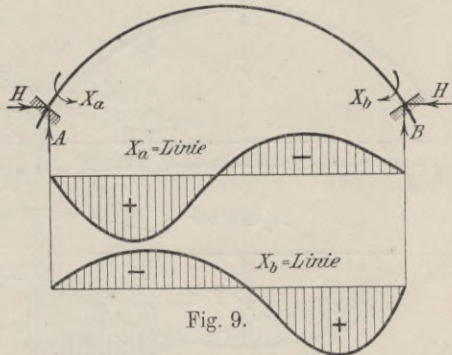


Fig. 9.

Die Form der Einflußlinien ist in Fig. 9 dargestellt.

Nach Errechnung dieser Einflußlinien können aber die Einflußlinien für sämtliche übrigen statischen Größen leicht mit Hilfe der Formeln

$$H = H_0 - H_a \cdot X_a - H_b \cdot X_b$$

$$A = A_0 - A_a \cdot X_a - A_b \cdot X_b$$

usw.

abgeleitet werden, wie weiter unten ausführlich gezeigt wird.

II. Vereinfachungen.

Da man im ersten Rechnungsgang nur ein durch Schätzung bestimmtes Trägheitsmoment in die Rechnung einführen kann, hat die genaue Bestimmung der statisch unbestimmten Größen nach dem entwickelten genaueren Verfahren keinen Zweck. Sie kommt erst im zweiten Rechnungsgang (bzw. bei Umrechnung von Brücken zwecks Verstärkung) in Betracht. Es ist daher im ersten Rechnungsgang zu empfehlen, die vereinfachende Annahme $J \cdot \cos \varphi = \text{const.}$ zu machen. Ferner sei der Einfluß der Längskräfte auf die Formänderungen vernachlässigt. Ganz

besonders bequeme geschlossene Formeln lassen sich aufstellen für den Fall, daß der Bogen ein Parabelbogen ist, ein Fall, der in der Praxis für den beiderseits eingespannten Bogen häufig in Betracht kommen wird.

Auf Grund dieser Annahmen mögen die nachfolgenden Untersuchungen durchgeführt werden.

An Stelle der Verschiebungen δ_{aa} , δ_{ab} , δ_{ma} , δ_{mb} sollen die $E \cdot J \cdot \cos \varphi$ -fachen Verschiebungen ermittelt werden, was sich als zweckmäßig erweisen wird. Es sei zur Abkürzung $J \cdot \cos \varphi = J'$ gesetzt. Alsdann ist

$$E \cdot J' \cdot \delta_{bb} = \int M_b^2 dx;$$

$$M_b = \frac{x}{l} - H_b \cdot y$$

(s. Fig. 10 c u. d).

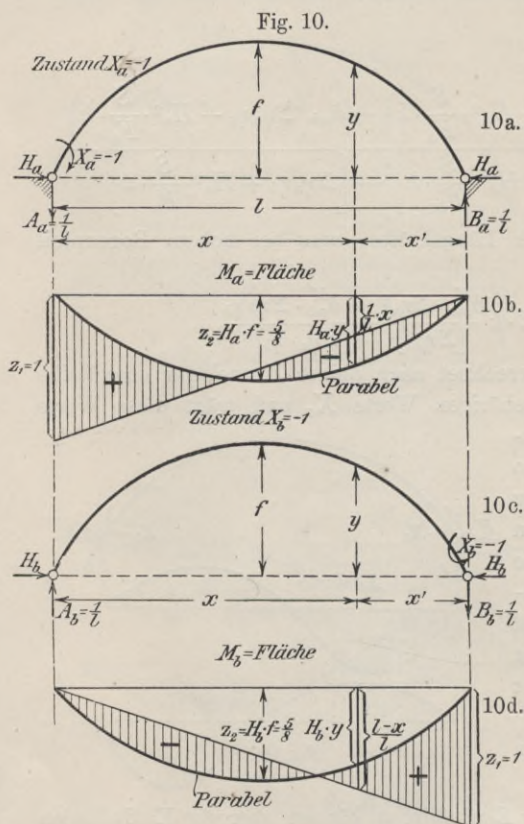
Darin ist jetzt nach Seite 4 (unter b)

$$H_b = H_a = \frac{5}{8f}, \text{ so daß}$$

$$M_b = \frac{x}{l} - \frac{5}{8f} \cdot y.$$

Die Gleichung der Parabel lautet

$$y = \frac{4f \cdot x(l-x)}{l^2}.$$



$$\begin{aligned} E \cdot J' \cdot \delta_{bb} &= \int_0^l \left[\frac{x}{l} - \frac{5}{8f} \cdot \frac{4f}{l^2} \cdot x(l-x) \right]^2 dx \\ &= \frac{l}{3} - \frac{5}{3} l + \frac{5}{4} l + \frac{25}{12} l - \frac{25}{8} l + \frac{5}{4} l = \frac{l}{8}. \end{aligned}$$

Aus der Symmetrie folgt, daß $E \cdot J' \cdot \delta_{bb} = E \cdot J' \cdot \delta_{aa}$ ist.

$$E \cdot J' \cdot \delta_{ba} = \int M_b M_a \cdot dx.$$

$$M_b = \frac{x}{l} - \frac{5}{8f} \cdot y = \frac{x}{l} - \frac{5}{8f} \cdot \frac{4f}{l^2} \cdot x(l-x).$$

$$M_a = \frac{l-x}{l} - H_a \cdot y \text{ (Fig. 10a).}$$

$$H_b = H_a, \text{ daher}$$

$$M_a = \frac{l-x}{l} - \frac{5}{8f} \cdot \frac{4f}{l^2} \cdot x(l-x).$$

$$\begin{aligned}
 E \cdot J' \cdot \delta_{ba} &= \int_0^l \left[\frac{x}{l} - \frac{5}{2l^2} \cdot x(l-x) \right] \left[\frac{l-x}{l} - \frac{5}{2l^2} \cdot x(l-x) \right] dx \\
 &= \frac{l^3}{2l^2} - \frac{l^3}{3l^2} - \frac{5l^4}{4l^3} + \frac{10l^4}{6l^3} - \frac{5l^4}{8l^3} - \frac{5l^4}{6l^3} + \frac{5l^4}{8l^3} + \frac{25l^5}{12l^4} - \frac{50l^5}{16l^4} + \frac{25l^5}{20l^4} \\
 &= -\frac{1}{24} l.
 \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Maxwell ist $E \cdot J' \cdot \delta_{ab} = E \cdot J' \cdot \delta_{ba}$.

Berechnung der Durchbiegung $E \cdot J' \cdot \delta_{ma}$.

Nach Mohr sind die $E \cdot J'$ -fachen Durchbiegungen δ_{ma} die Biegemomente des mit der Momentenfläche infolge $X_a = -1$ belasteten statisch unbestimmten Hauptsystems. Die Momentenfläche für den Zustand $X_a = -1$ ist in Fig. 10b dargestellt. Die Berechnung der durch diese Belastung entstehenden Biegemomente kann schnell mit Hilfe der im Müller-Br. Graph. Stat. II, 3. Aufl. S. 425 zusammengestellten ω -Hilfswerte durchgeführt werden. Es ist

$$\begin{aligned}
 E \cdot J' \cdot \delta_{ma} &= \omega_D \cdot \alpha_1 \cdot \frac{l^2}{6} - \omega_P' \cdot \alpha_2 \cdot \frac{l^2}{3} \\
 \omega_D &= \frac{l-x}{l} - \frac{(l-x)^3}{l^3} = \frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}
 \end{aligned}$$

$\omega_P' = 2\omega_D - \omega_P$; hierin darf ω_D wegen der symmetrischen parabolischen Belastung $= \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}$ gesetzt werden.

$$\omega_P = \frac{x}{l} - \frac{x^4}{l^4}; \quad \alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = \frac{5}{8} \quad (\text{s. Fig. 10b}).$$

Demgemäß ergibt sich

$$\begin{aligned}
 E \cdot J' \cdot \delta_{ma} &= \frac{1 \cdot l^2}{6} \left(\frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) - \frac{5}{8} \cdot \frac{l^2}{3} \left(\frac{2x}{l} - \frac{2x^3}{l^3} - \frac{x}{l} + \frac{x^4}{l^4} \right) \\
 &= \frac{1}{8} x \cdot l - \frac{x^2}{2} + \frac{7}{12} \frac{x^3}{l} - \frac{5}{24} \frac{x^4}{l^2}.
 \end{aligned}$$

Berechnung der Durchbiegungen $E \cdot J' \cdot \delta_{mb}$ (Fig. 10d).

$$\begin{aligned}
 E \cdot J' \cdot \delta_{mb} &= \alpha_1 \cdot \frac{l^2}{6} \cdot \omega_D - \alpha_2 \cdot \frac{l^2}{3} \omega_P'; \quad \omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}; \quad \omega_P' = 2\omega_D - \omega_P \\
 \omega_P &= \frac{x}{l} - \frac{x^4}{l^4}; \quad \alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = \frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

$$E \cdot J' \cdot \delta_{mb} = -\frac{1}{24} x \cdot l + \frac{1}{4} \frac{x^3}{l} - \frac{5}{24} \frac{x^4}{l^2}.$$

Demgemäß ergibt sich für $P_m = 1$ t.

$$X_a = \frac{\delta_{ma} \delta_{bb} - \delta_{mb} \delta_{ba}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}; \quad E \cdot J' \text{ hebt sich heraus.}$$

$$X_a = \frac{\frac{1}{64} x l^2 - \frac{1}{16} x^2 \cdot l + \frac{7}{96} x^3 - \frac{5}{192} \frac{x^4}{l} + \frac{1}{24} l \left(-\frac{1}{24} x \cdot l + \frac{1}{4} \frac{x^3}{l} - \frac{5}{24} \frac{x^4}{l^2} \right)}{\frac{l}{8} \cdot \frac{l}{8} - \left(-\frac{l}{24} \right)^2}$$

$$= x - 4,5 \frac{x^2}{l} + 6 \frac{x^3}{l^2} - 2,5 \frac{x^4}{l^3} = x \left(1 - 4,5 \frac{x}{l} + \frac{6x^2}{l^2} - 2,5 \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Ebenso ergibt sich

$$X_b = \frac{\delta_{mb} \delta_{aa} - \delta_{ma} \delta_{ab}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{192} x l^2 + \frac{1}{32} x^3 - \frac{5}{192} \frac{x^4}{l} + \frac{1}{192} x l^2 - \frac{x^2 \cdot l}{48} + \frac{7}{288} x^3 - \frac{5}{576} \frac{x^4}{l}}{\frac{l^2}{72}}$$

$$= \frac{4x^3}{l^2} - 2,5 \frac{x^4}{l^3} - \frac{1,5x^2}{l} = \frac{4x^3}{l^2} - \frac{4x^4}{l^3} + 1,5 \frac{x^4}{l^3} - \frac{1,5x^2}{l}$$

$$= \frac{4x^3}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) - 1,5 \frac{x^2}{l} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) = \frac{4x^3}{l^2} \frac{l-x}{l} - \frac{1,5x^2}{l} \frac{l^2-x^2}{l^2}$$

$$= \frac{l-x}{l^3} x^2 [4x - 1,5(l+x)] = \frac{x \cdot x^2}{l^2} \left[\frac{2,5x}{l} - 1,5 \right]; \quad x' = l-x \text{ gesetzt.}$$

Da diese Gleichung eine einfachere Gestaltung hat wie die für X_a aufgestellte Formel, erweist es sich als zweckmäßig, die X_b -Linie zu berechnen. Die X_a -Linie ist dann das Spiegelbild der X_b -Linie.

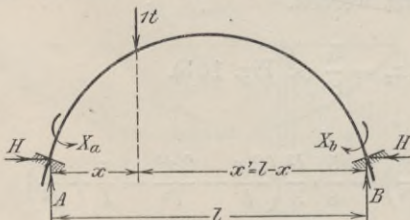


Fig. 11.

Man berechne daher für eine Reihe von Werten x die zugehörigen Werte X_b und trage diese Werte senkrecht unter der jedesmaligen Lastenstellung als Ordinaten auf. Diese Ordinaten sind dann Ordinaten der Einflußlinie für X_b .

Weiter ergibt sich

$$H = H_0 - H_a \cdot X_a - H_b \cdot X_b.$$

Nach Seite 3, 1 ist $H_0 = \frac{5}{8f} \left(x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3} \right)$ für $P_m = 1$ t.

$$H_a = H_b = \frac{5}{8f}.$$

$$H = \frac{5}{8f} \left(x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3} \right) - \frac{5}{8f} \left[x - \frac{4,5x^2}{l} + \frac{6x^3}{l^2} - \frac{2,5x^4}{l^3} \right]$$

$$- \frac{5}{8f} \left[\frac{4x^3}{l^2} - \frac{2,5x^4}{l^3} - \frac{1,5x^2}{l} \right]$$

$$= \frac{5}{8f} \left(6 \frac{x^4}{l^3} - \frac{12x^3}{l^2} + 6 \frac{x^2}{l} \right) = \frac{15x^2}{4 \cdot f \cdot l} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{2x}{l} + 1 \right) = \frac{15x^2}{4 \cdot f \cdot l^3} (l-x)^2$$

$$= \frac{15x^2 \cdot x'^2}{4 \cdot f \cdot l^3}. \quad \text{Dadurch ist die Einflußlinie für } H \text{ bestimmt.}$$

Durch eine Momentengleichung in bezug auf die rechte Einspannung ergibt sich

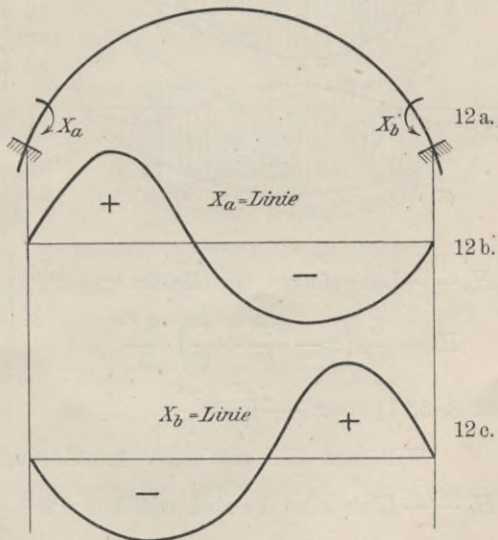
$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1(l-x)}{l} + \frac{X_a}{l} - \frac{X_b}{l} \\
 &= 1 - \frac{1 \cdot x}{l} + \frac{x}{l} - \frac{4,5x^2}{l^2} + \frac{6x^3}{l^3} - \frac{2,5x^4}{l^4} - \frac{4x^3}{l^3} + 2,5 \frac{x^4}{l^4} \\
 &+ 1,5 \frac{x^2}{l^2} = 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} = 1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{2x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \\
 &= \frac{l^2 - x^2}{l^2} - \frac{2x^2}{l^2} \left(\frac{l-x}{l} \right) = \frac{l-x}{l^2} \left[(l+x) - \frac{2x^2}{l} \right] \\
 &= \frac{l-x}{l^3} (l^2 + l \cdot x - 2x^2) = \frac{l-x}{l^3} (l^2 + 2lx - 2x^2 - lx) \\
 &= \frac{l-x}{l^3} [l(l-x) + 2x(l-x)] = \frac{(l-x)^2}{l^3} [l+2x] = \frac{x^2}{l^3} (l+2x).
 \end{aligned}$$

Damit ist auch die Einflußlinie für A gegeben. Die B -Linie ist dann das Spiegelbild der A -Linie.

Direkte Herleitung der H -, A - und B -Linie aus der X_a - und X_b -Linie.

Mit Hilfe der für X_a und X_b aufgestellten Formeln ergeben sich Einflußlinien von der in Fig. 12 b u. c dargestellten Form. Aus diesen Einflußlinien können nun ohne weiteres die H -, A - und B -Linie gefolgert werden, wie nachstehende Entwicklungen zeigen. Es ist $H = H_0 - H_a \cdot X_a - H_b \cdot X_b$.

Fig. 12.



Da $H_a = H_b = \frac{5}{8f}$ ist, so folgt

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 - \frac{5}{8f} (X_a + X_b) \\
 &= \frac{5}{8f} \left[H_0 \cdot \frac{8f}{5} - (X_a + X_b) \right].
 \end{aligned}$$

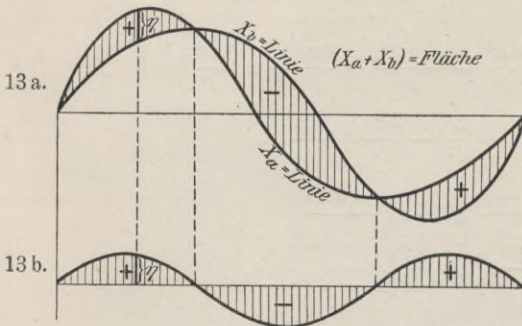
Man zeichne also die $H_0 \cdot \frac{8f}{5}$ -Fläche und ziehe davon die $(X_a + X_b)$ -Fläche ab. Die hieraus sich ergebende Einflußfläche ist die

H -Fläche mit dem Multiplikator $\mu = \frac{5}{8f}$.

Man erhält die $(X_a + X_b)$ -Fläche, wenn man die X_a -Fläche und X_b -Fläche so aufeinander legt, daß die negativen Flächen sich addieren

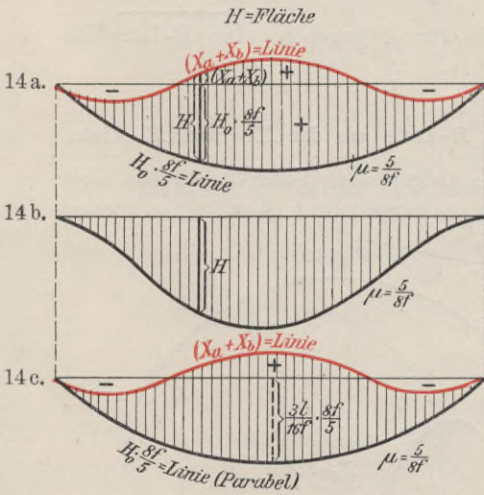
und von den positiven abgezogen werden können (Fig. 13a). In Fig. 13b sind die Ordinaten der $(X_a + X_b)$ -Fläche von einer Horizontalen abgetragen.

Fig. 13.



Diese Fläche ist von der $H_0 \cdot \frac{8f}{5}$ -Fläche abzuziehen, so daß sich die in Fig. 14a dargestellte Einflußfläche für H mit dem Multiplikator $\mu = \frac{5}{8f}$ ergibt. In Fig. 14b sind die Ordinaten dieser Einflußfläche von einer Horizontalen abgetragen. Die Ordinaten der

Fig. 14.



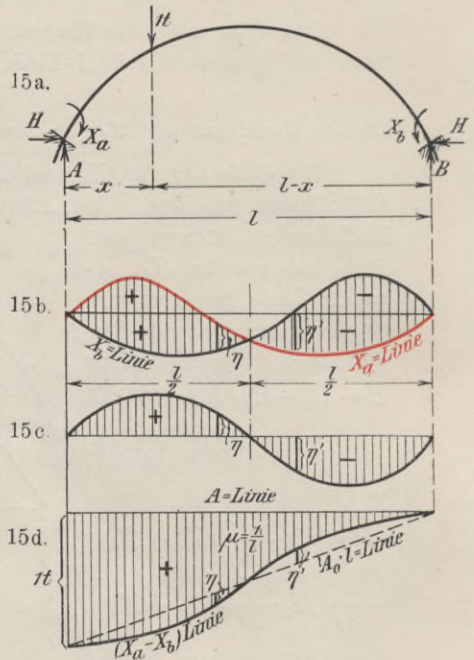
$H_0 \cdot \frac{8f}{5}$ -Linie folgen der Gleichung

$$H_0 = \frac{5}{8f} \left(x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3} \right) \cdot \frac{8f}{5}$$

(s. S. 3, 1) $= x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3}$.

Will man sich mit einer Annäherung begnügen, so darf man als $H_0 \cdot \frac{8f}{5}$ -Linie eine Parabel mit dem Pfeil $\frac{3l}{16f} \cdot \frac{8f}{5} = \frac{3}{10}l$ wählen (siehe S. 3, 2). Fig. 14c.

Fig. 15.



Die A-Linie.

Nach Seite 13 ist

$$A = \frac{l-x}{l} + \frac{X_a}{l} - \frac{X_b}{l} = A_0 + \frac{1}{l}(X_a - X_b) = \frac{1}{l}[A_0 \cdot l + (X_a - X_b)].$$

Die Konstruktion ist durch rote Linien angedeutet.

Durch Zerlegung von P nach den Richtungen K_l und K_r ergeben sich die Größen von K_l und K_r . Damit sind auch die Auflagerdrücke A und B sowie der Horizontalschub H bestimmt. Mit Hilfe dieser Konstruktion ist es leicht, die

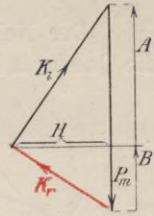


Fig. 19.

Einflußlinien für Kernpunktmente

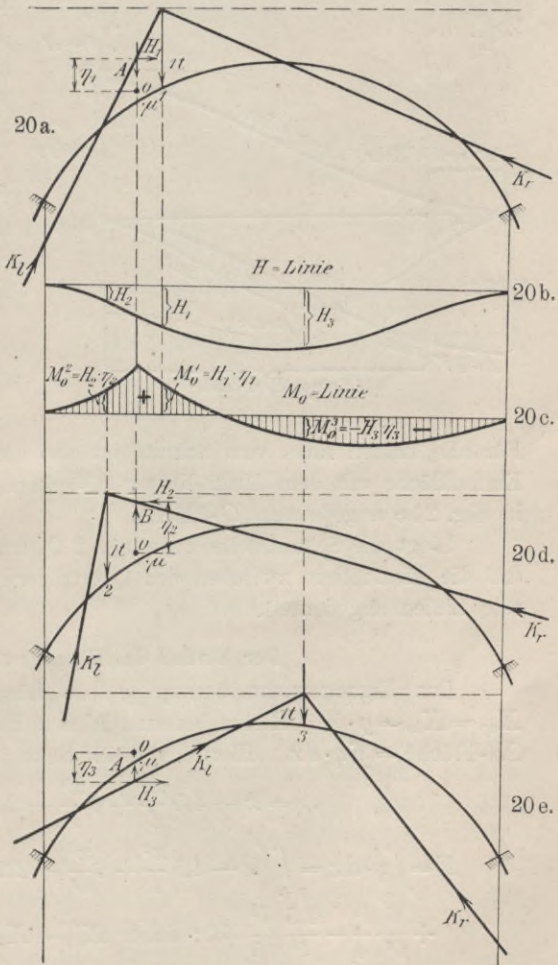
zu bestimmen. Man setze $P_m = 1$ t. Steht diese Last rechts vom Momentendrehpunkt (es handele sich um die Einflußlinie für den Kernpunkt 0), so zerlege man senkrecht über 0 den nach dem vorhin beschriebenen Verfahren bestimmten

Fig. 20.

Kämpferdruck K_l nach H_1 und A und bestimme $M_0^1 = H_1 \cdot \eta_1$ (Fig. 20 a). Der Wert H_1 kann auch aus der bereits bekannten H -Linie entnommen werden, so daß nur die Bestimmung von η_1 erforderlich ist. Steht die Last 1 t links vom Drehpunkt 0 (Fig. 20 d), so zerlege man K_r über 0 nach H_2 und B bzw. bestimme η_2 und berechne $M_0^2 = H_2 \cdot \eta_2$. Senkrecht unter der jedesmaligen Lastenstellung trage man die entsprechenden Werte $H \cdot \eta$ als Ordinaten ab. Durch Verbindung der Endpunkte der Ordinaten entsteht die Einflußlinie für M_0 . Dabei ist zu beachten, daß, falls H oberhalb des Drehpunktes wirkt, M_0 positiv wird; greift H unterhalb von 0 an, so wird M_0 negativ. Steht z. B. die Last 1 t im Punkte 3, so ergibt sich

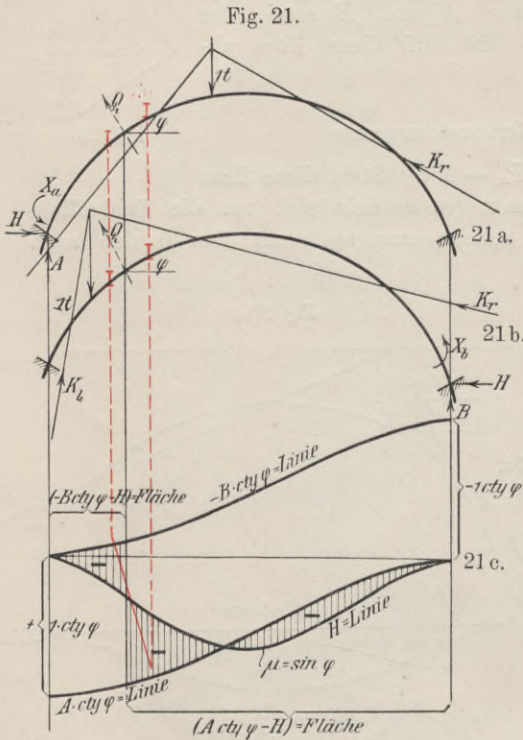
$$M_0^3 = -H_3 \cdot \eta_3$$

(Fig. 20 e).



Einflußlinien für Querkräfte.

Der Neigungswinkel der Tangente an die Schnittstelle, für welche die Querkraft berechnet werden soll, sei = φ . Steht die Last 1 t rechts vom Schnitt (Fig. 21 a), so



berechne man die Querkraft vom links abgetrennten Teil aus durch Projektion von H und A auf die Richtung des Krümmungsradius an der Schnittstelle. Es ergibt sich

$$Q = A \cos \varphi - H \sin \varphi = \sin \varphi \left(A \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - H \right) = \sin \varphi (A \operatorname{ctg} \varphi - H).$$

Für alle Lastenstellungen rechts vom Schnitt ist also die $(A \operatorname{ctg} \varphi - H)$ -Fläche Einflußfläche mit dem Multiplikator $\mu = \sin \varphi$.

Steht die Last 1 t links vom Schnitt, so berechne man die Querkraft vom rechts abgetrennten Teil aus. Es wird

$$Q = -H \sin \varphi - B \cos \varphi = \sin \varphi \left(-B \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - H \right) = \sin \varphi (-B \operatorname{ctg} \varphi - H).$$

Für alle Lasten links vom Schnitt ist also die $(-B \operatorname{ctg} \varphi - H)$ -Fläche Einflußfläche mit dem Multiplikator $\mu = \sin \varphi$. Demgemäß entsteht die in Fig. 21 c) angedeutete Q -Fläche.

Liegt die Schnittstelle zwischen 2 Querträgern, so ist zu beachten, daß die Einflußlinie zwischen den Querträgern geradlinig verläuft (durch rote Linien angedeutet).

Der Einfluß des Eigengewichts.

Das Eigengewicht betrage g pro Längeneinheit. Es ist dann $X_{ag} = X_{bg} = g \cdot F$. Hierin bedeutet F den Flächeninhalt der X_a - bzw. X_b -Fläche = $\int \eta \cdot dx$. Hierin ist nach Seite 12

$$\eta = x - 4,5 \frac{x^2}{l} + 6 \frac{x^3}{l^2} - 2,5 \cdot \frac{x^4}{l^3}$$

$$F = \int \eta \cdot dx = \int_0^l \left(x - 4,5 \frac{x^2}{l} + 6 \frac{x^3}{l^2} - 2,5 \frac{x^4}{l^3} \right) dx = \frac{l^2}{2} - \frac{4,5}{l} \cdot \frac{l^3}{3} + \frac{6}{l^2} \cdot \frac{l^4}{4} - \frac{2,5}{l^3} \cdot \frac{l^5}{5} = 0; \text{ daher } X_{ag} = X_{bg} = g \cdot F = 0.$$

$$H_g = H_{og} - H_a \cdot X_{ag} - H_b \cdot X_{bg} = H_{og}.$$

Nach Seite 3, 1 lautet die Gleichung für H_0 :

$$\eta = \frac{5}{8f} \left(x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3} \right)$$

$$H_g = H_{og} = g \cdot \int_0^l \eta dx = \frac{5g}{8f} \int_0^l \left(x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3} \right) dx$$

$$= \frac{5g}{8f} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{2}{l^2} \cdot \frac{l^4}{4} + \frac{1}{l^3} \cdot \frac{l^5}{5} \right) = \frac{gl^2}{8f}$$

$$A_g = \frac{gl}{2}$$

Dieselben Resultate gelten für irgend eine andere sich über die ganze Spannweite erstreckende gleichmäßig verteilte Belastung, z. B. Menschengedränge.

Das Biegemoment für irgend einen Querschnitt ergibt sich infolge voller gleichmäßig verteilter Belastung = 0, da die Stützlinie mit der Bogenachse zusammenfällt; denn

$$M_{xg} = \frac{gl}{2} \cdot x - \frac{gx^2}{2} - \frac{gl^2}{8f} \cdot y = \frac{g \cdot x}{2} (l - x) - \frac{gl^2}{8f} \cdot y = M_x' - \frac{gl^2}{8f} \cdot y.$$

M_x' ist darin gleich dem Biegemoment für die Stelle x eines einfachen Balkens von der Spannweite l . Die M_x' -Fläche ist daher eine Parabel mit dem Pfeil $\frac{gl^2}{8}$; die $\frac{gl^2}{8f} \cdot y$ -Fläche ist ebenfalls eine Parabel mit dem Pfeil $\frac{gl^2}{8f} \cdot f = \frac{gl^2}{8}$. Beide Flächen heben sich also auf.

Der Einfluß auf irgend ein Kernmoment M_0 ist alsdann

$$M_{og} = -\frac{gl^2}{8f} \cdot \eta_0,$$

auf ein Kernmoment M_u

$$M_{ug} = +\frac{gl^2}{8f} \cdot \eta_u.$$

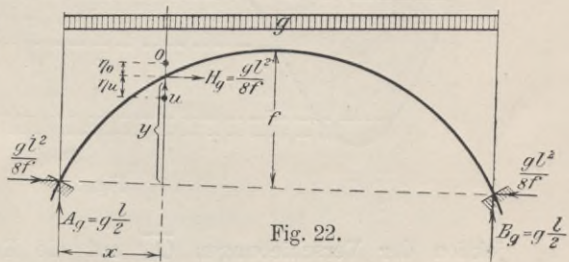


Fig. 22.

Der Einfluß des Eigengewichts auf die Querkräfte ist = 0, da die Stützlinie mit der Bogenachse zusammenfällt.

Einfluß schräg gerichteter Kräfte.

Für den wenn auch seltenen Fall, daß der beiderseits eingespannte Bogen im Hallenbau Verwendung findet, ist noch der Einfluß schräger Windkräfte von Interesse. Die Werte δ_{ma} und δ_{mb} haben nunmehr eine andere Deutung wie bisher. δ_{ma} ist die Verschiebung eines Punktes m im Sinne einer in m angreifenden schrägen Last P_m infolge $X_a = -1$. Entsprechend muß δ_{mb} gedeutet werden. Diese Verschiebungen können aus den Biegungslinien für $X_a = -1$ bzw. $X_b = -1$ mit Hilfe von Normalenzügen gefunden werden (Müller-Breslau, Graph. Stat. II. 2, Seite 485 u. 527). Es möge wieder mit den $E \cdot J$ -fachen Verschiebungen

gerechnet werden. Die Biegelinie für das mit $X_a = -1$ belastete statisch unbestimmte Hauptsystem ist bestimmt aus der Gleichung

$$E \cdot J' \cdot \delta_{ma} = \frac{1}{8} x \cdot l - \frac{x^2}{2} + \frac{7 x^3}{12 l} - \frac{5 x^4}{24 l^2} \quad (\text{S. 11}).$$

Für die Berechnung der schrägen Verschiebungen $E \cdot J' \delta_{ma}$ ist zu beachten, daß der aus Stäben von unendlich kleiner Länge ds bestehende Stabzug durch einen Stabzug mit Stäben von endlicher Länge (etwa entsprechend den Feldweiten) ersetzt werden darf. Durch Projizieren der Vertikalverschiebungen auf die zu den Stäben $01, 12, 2m$ usw. senkrechten Strecken $0'1', 1'2', 2'm'$ usw. erhält man dann den Verschiebungsplan, aus welchem die Verschiebungen $E \cdot J' \delta_{ma}$ leicht durch Pro-

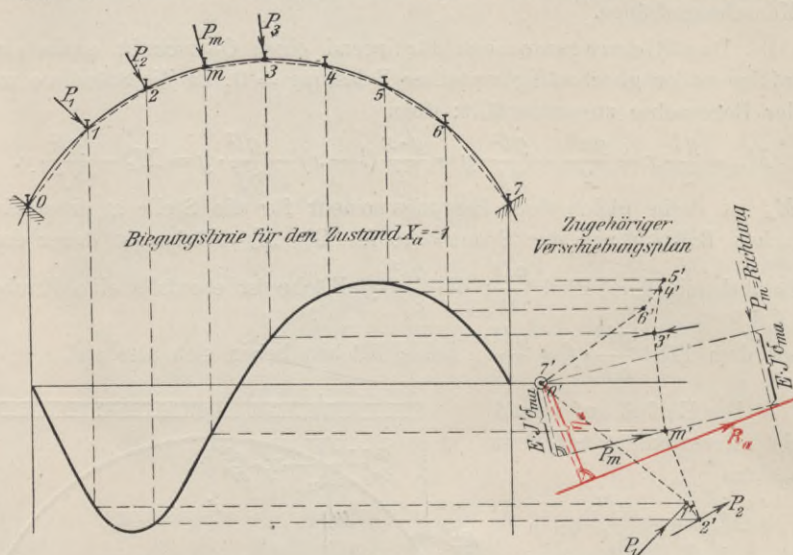


Fig. 23.

jektion der Verschiebungen $\overline{O_m'}$ auf die Kräfte P_m gefunden werden können. Dreht man die Kräfte P_m um 90° so, daß sie in den Punkten m' angreifen, so können die Werte $E \cdot J' \cdot P_m \cdot \delta_{ma}$ als statische Momente der Kräfte P_m in bezug auf den Pol des Verschiebungsplanes (0) gedeutet werden. Dabei sind die Momente der über dem positiven Teil der Biegelinie wirkenden Kräfte als positiv, die übrigen als negativ anzusehen. Es ergibt sich somit

$$E \cdot J' \cdot \sum P_m \delta_{ma} = (P_m \delta_{ma} + P_1 \delta_{1a} + P_2 \delta_{2a} - P_3 \delta_{3a}) \cdot E \cdot J' = R_a \cdot \eta_a.$$

R_a ist die Resultante der um 90° gedrehten Kräfte P und kann mit Hilfe eines Seilpolygons ermittelt werden, wodurch auch der Hebelarm η_a gegeben ist.

Ebenso ergibt sich $E \cdot J' \cdot \sum P_m \delta_{mb}$ aus dem Kräftezustand $X_b = -1$ (Fig. 24). Es wird

$$E \cdot J' \cdot \sum P_m \delta_{mb} = (-P_1 \delta_{1b} - P_2 \delta_{2b} - P_m \delta_{mb} - P_3 \delta_{3b}) E \cdot J' = -R_b \cdot \eta_b.$$

Nach Seite 9 ist

$$X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma} \delta_{bb} - \sum P_m \delta_{mb} \cdot \delta_{ba}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2} \cdot \frac{E \cdot J'}{E \cdot J} = \frac{R_a \cdot \eta_a \cdot \frac{l}{8} - (-R_b \cdot \eta_b) \cdot -\frac{1}{24} l}{\frac{1}{7^2} l^2}$$

$$= \frac{9 R_a \cdot \eta_a - 3 R_b \cdot \eta_b}{l}$$

$$X_b = \frac{\sum P_m \delta_{mb} \delta_{aa} - \sum P_m \delta_{ma} \cdot \delta_{ab}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2} \cdot \frac{E \cdot J'}{E \cdot J} = \frac{-R_b \cdot \eta_b \cdot \frac{l}{8} - R_a \cdot \eta \left(-\frac{1}{24} l\right)}{\frac{1}{7^2} l^2}$$

$$= \frac{3 R_a \eta_a - 9 R_b \cdot \eta_b}{l}$$

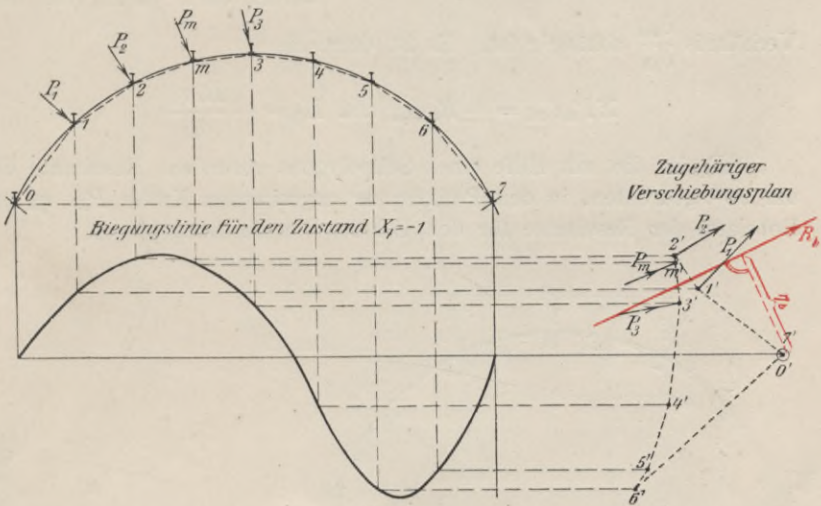


Fig. 24.

Damit sind sämtliche übrigen Reaktionen gegeben. Es ist nach Seite 14

$$A = A_0 + \frac{X_a - X_b}{l}$$

$$B = B_0 + \frac{X_b - X_a}{l}$$

$$A_0 = \frac{P_1 \cdot r_1 + P_2 \cdot r_2 + P_m \cdot r_m + P_3 \cdot r_3}{l}$$

$$B_0 = \frac{P_1 \cdot r'_1 + P_2 \cdot r'_2 + P_m \cdot r'_m + P_3 \cdot r'_3}{l}$$

Ferner ist $H = H_0 - H_a \cdot X_a - H_b \cdot X_b$, worin

$$H_0 = \frac{\sum P_m \cdot \delta_{mh}}{\delta_{hh}}$$

δ_{mh} ist die Verschiebung eines Punktes m im Sinne der in m angreifenden Kraft P_m infolge des in Fig. 26 dargestellten Belastungs-

zustandes, δ_{hh} die Verschiebung des Punktes h im Sinne der Kraft $H = -1$ infolge $H = -1$. Diese Verschiebungen können analog den Verschiebungen δ_{ma} und δ_{mb} aus der Biegelinie infolge $H = -1$ mit Hilfe eines Normalenzuges gefunden werden. Sie sind alle negativ, da der Kraftsinne dem Verschiebungssinne entgegen gerichtet ist. Die Biegelinie infolge $H = -1$ ist eine Parabel (s. auch S. 3, 2), deren Pfeil beliebig gewählt werden darf, da H_0 von dem

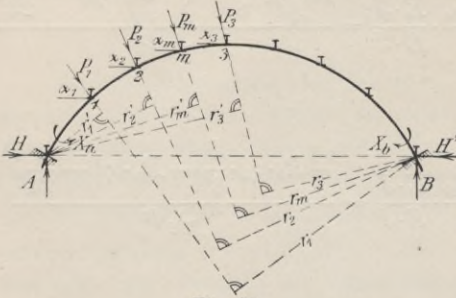


Fig. 25.

Verhältnis $\frac{\delta_{mh}}{\delta_{hh}}$ abhängig ist. Es ist demnach

$$\sum P_m \delta_{mh} = -R_h \cdot \eta_h \text{ und } H_0 = -\frac{R_h \eta_h}{\delta_{hh}}$$

R_h ist die mit Hilfe eines Seilpolygons gefundene Resultante der um 90° gedrehten, in den Punkten m' angreifenden Kräfte P_m , η_h der Hebelarm der Resultante für den Pol des Verschiebungsplanes.

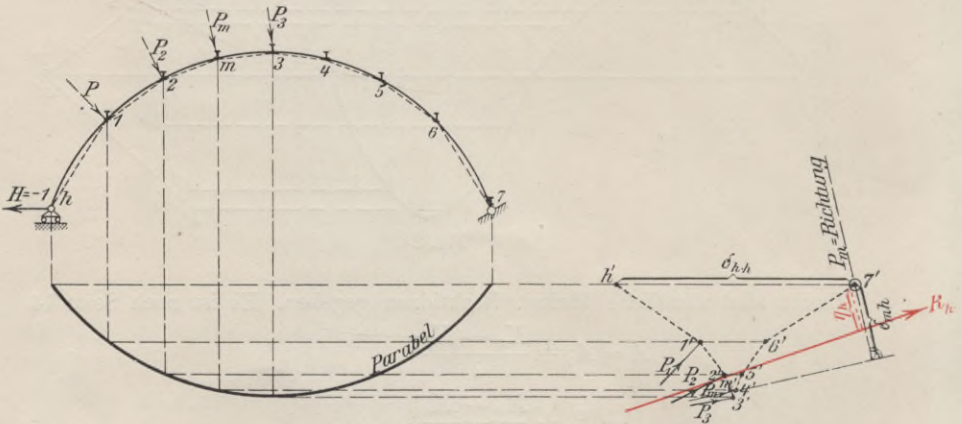


Fig. 26.

Damit ist H gegeben.

H' ergibt sich alsdann aus der Bedingung: „Summe der Horizontal-komponenten = 0“ (Fig. 25).

$$H' = H + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_m \cos \alpha_m + P_3 \cos \alpha_3.$$

Für die Zeichnung der Stützzlinie möge angenommen werden, daß sich X_a positiv, X_b negativ ergeben habe.

Zerlegt man K_I im Schnittpunkt mit der Vertikalen durch die linke Einspannung in A und H und bringt H im Einspannungspunkt zwei-

mal in entgegengesetzter Richtung an, so entsteht ein Kräftepaar vom Moment $H \cdot c$, das $= X_a$ sein muß. Daraus $c = \frac{X_a}{H}$.

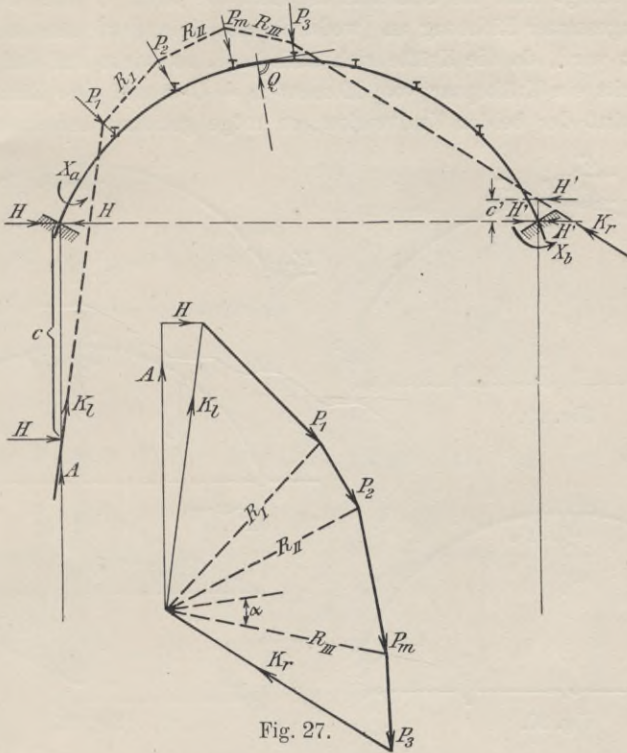


Fig. 27.

Damit ist der Angriffspunkt von K_l bestimmt, worauf die Stützlinie gezeichnet werden kann. Als Genauigkeitskontrolle kann man die Bedingung benutzen, daß die Resultante aus R_{III} und P_3 (K_r) die rechte Einspannungsvertikale im Abstand $c' = \frac{X_b}{H'}$ von der Einspannung schneiden muß.

Nach Zeichnung der Stützlinie ergibt sich das Moment für irgend einen Kernpunkt $0 = -R_{III} \cdot \eta_0$. Die Querkraft Q für die Schnittstelle wird ermittelt durch Zerlegung von R_{III} in eine Komponente $R_{III} \cos \alpha$ parallel zur Tangente an die Schnittstelle und in eine Komponente senkrecht dazu $= R_{III} \sin \alpha$. Demgemäß wird $Q = -R_{III} \sin \alpha$.

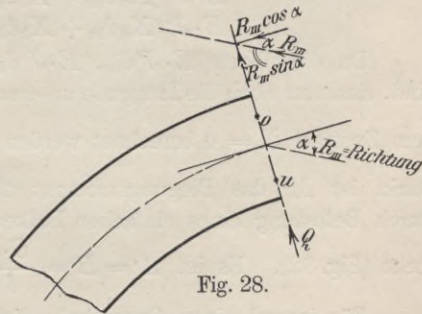


Fig. 28.

Einfluß von Bremskräften.

Die Übertragung der Bremskraft C erfolge im Scheitel des Bogens und zwar, wie es praktisch der Fall sein wird, exzentrisch zur Bogenachse. Bringt man im Scheitelachspunkt die Kraft C noch zweimal in entgegengesetzter Richtung an (wodurch am Gleichgewichtszustand nichts geändert wird, da die Kräfte sich aufheben), so wirkt auf den Scheitelquerschnitt ein Kräftepaar vom Moment $\mu = C \cdot e$ und eine Einzelkraft C . Der Einfluß der beiden Kraftwirkungen möge getrennt berechnet werden.

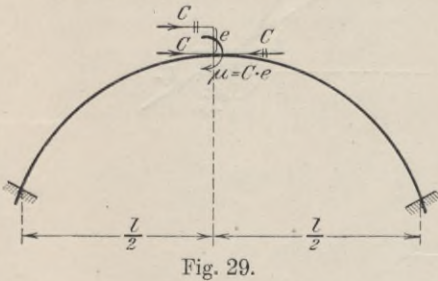


Fig. 29.

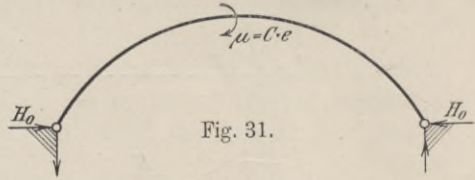


Fig. 31.

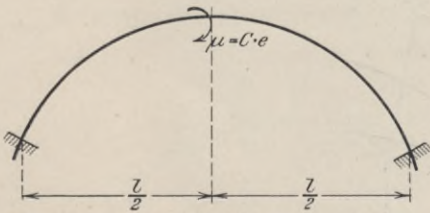


Fig. 30.

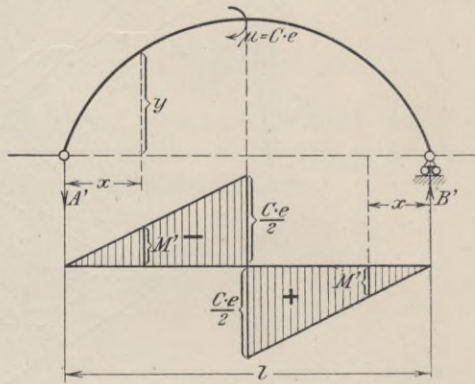


Fig. 32.

Zustand I. Es wirke nur das Moment $\mu = C \cdot e$ (Fig. 30).

Zwischen den statisch unbestimmten Größen bestehen alsdann die Gleichungen

$$E \cdot J' (X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab}) = \int M_0 M_a dx$$

$$E \cdot J' (X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb}) = \int M_0 M_b dx.$$

Da die Werte $E \cdot J' \delta_{aa}$, $E \cdot J' \delta_{bb}$ und $E \cdot J' \delta_{ba}$ bereits berechnet sind, sind nur noch die Integrale zu ermitteln. Die Momente M_0 können aus dem Zustand $X = 0$ berechnet werden (Fig. 31). Es ist $H_0 = \frac{\int M' y dx}{\int y^2 dx}$.

Darin ist M' das Biegemoment für irgend eine Schnittstelle, das durch Belastung eines einfachen Balkens mit dem Moment $\mu = C \cdot e$ entsteht (Fig. 32). Es ist $A' = B' = \frac{C \cdot e}{l}$.

Für irgend einen Querschnitt links vom Scheitel ist $M' = -A' \cdot x$
 $= -\frac{C \cdot e}{l} \cdot x$; für einen Querschnitt rechts vom Scheitel ist $M' = +B' \cdot x$
 $= +\frac{C \cdot e}{l} \cdot x$; deshalb

$$H_0 = \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} -\frac{C \cdot e}{l} \cdot x \cdot y \, dx + \int_0^{\frac{l}{2}} +\frac{C \cdot e}{l} \cdot x \cdot y \, dx}{\int_0^l y^2 \, dx} = 0.$$

Es wirken infolge Belastung des statisch unbestimmten Hauptsystems mit dem Moment $C \cdot e$ allein also nur vertikale Auflagerreaktionen $A_0 = B_0 = \frac{C \cdot e}{l}$.

Das Moment für irgend einen Querschnitt links vom Scheitel ist $= -\frac{C \cdot e}{l} \cdot x$, für den symmetrisch gelegenen Querschnitt rechts vom Scheitel $= +\frac{C \cdot e}{l} \cdot x$.

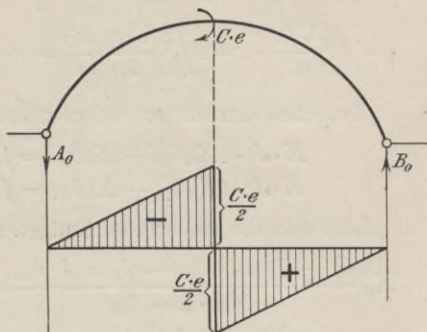


Fig. 33.

Das Moment M_a für irgend einen Querschnitt links vom Scheitel ist

$$= 1 - \frac{1}{l} \cdot x - \frac{5}{8f} \cdot y = 1 - \frac{x}{l} - \frac{5}{8f} \cdot \frac{4f}{l^2} \cdot x(l-x);$$

für einen Querschnitt rechts vom Scheitel wird

$$M_a = \frac{x}{l} - \frac{5}{8f} \cdot y = \frac{x}{l} - \frac{5}{8f} \cdot \frac{4f \cdot x(l-x)}{l^2}.$$

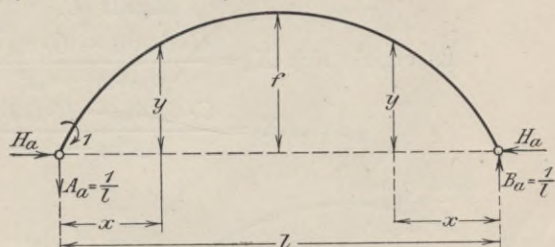


Fig. 34.

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} \int M_0 M_a \, dx &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{C \cdot e}{l} \cdot x \left[1 - \frac{x}{l} - \frac{5}{2l^2} \cdot x(l-x) \right] \, dx + \int_0^{\frac{l}{2}} +\frac{C \cdot e}{l} \cdot x \left[\frac{x}{l} - \frac{5}{2l^2} x(l-x) \right] \, dx \\ &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{C \cdot e}{l} \cdot x \, dx + 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{C \cdot e}{l} \cdot \frac{x^2}{l} = -\frac{C \cdot e}{l} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{l}{2}} + 2 \frac{C \cdot e}{l^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{l}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{C \cdot e}{l} \cdot l = -\frac{1}{2} \mu \cdot l. \end{aligned}$$

Das Moment M_b für irgend einen Querschnitt links vom Scheitel ist

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{l} \cdot x - \frac{5}{8f} \cdot y \\ &= \frac{x}{l} - \frac{5}{2l^2} x(l-x); \end{aligned}$$

für irgend einen Querschnitt rechts vom Scheitel ergibt sich

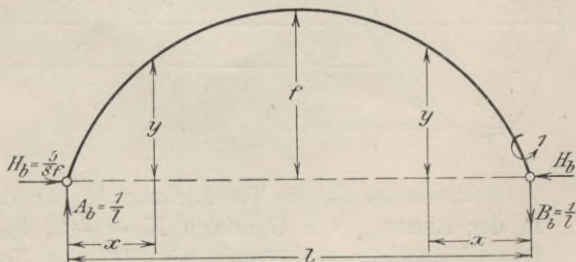


Fig. 35.

$$M_b = 1 - \frac{1}{l} \cdot x - \frac{5}{8f} \cdot y = 1 - \frac{x}{l} - \frac{5}{2l^2} \cdot x(l-x);$$

daher wird

$$\begin{aligned} \int M_0 M_b dx &= \int_0^l \frac{C \cdot e}{l} \cdot x \left[\frac{x}{l} - \frac{5}{2l^2} x(l-x) \right] dx + \int_0^l \frac{1}{2} + \frac{C \cdot e}{l} \cdot x \left[1 - \frac{x}{l} - \frac{5}{2l^2} x(l-x) \right] dx \\ &= \int_0^l \frac{C \cdot e}{l} \cdot x - 2 \int_0^l \frac{C \cdot e}{l} \cdot \frac{x^2}{l} = + \frac{C \cdot e \cdot l}{8} - \frac{C \cdot e \cdot l}{12} = + \frac{1}{24} \mu \cdot l. \end{aligned}$$

Zwischen den statisch unbestimmten Größen bestehen die Gleichungen

$$E \cdot J' \cdot (X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab}) = \int M_0 M_a dx = - \frac{1}{24} \mu \cdot l$$

$$E \cdot J' \cdot (X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb}) = \int M_0 M_b dx = + \frac{1}{24} \mu \cdot l.$$

Löst man die beiden Gleichungen nach X_a und X_b auf, so ergibt sich

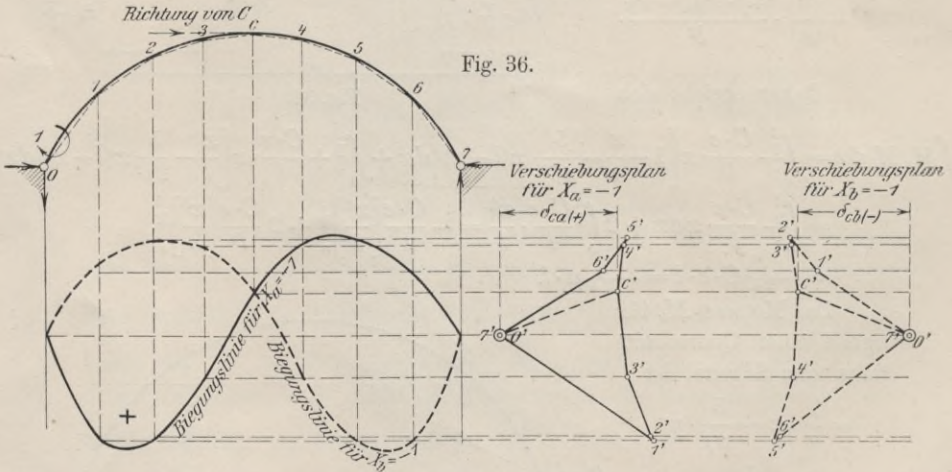
$$\begin{aligned} X_a &= \frac{- \frac{1}{24} \mu \cdot l \cdot \delta_{bb} - \frac{1}{24} \mu \cdot l \cdot \delta_{ba}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2} = \frac{- \frac{1}{24} \mu \cdot l \cdot \frac{1}{8} l + \frac{1}{24} \mu \cdot l \cdot \frac{1}{24} l}{\frac{7}{12} l^2} \\ &= - \frac{1}{4} \mu = - \frac{1}{4} C \cdot e. \end{aligned}$$

$$X_b = \frac{+ \frac{1}{24} \mu \cdot l \cdot \delta_{aa} - (- \frac{1}{24} \mu \cdot l) \delta_{ab}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2} = + \frac{1}{4} \mu = + \frac{1}{4} C \cdot e.$$

Zustand II. Es wirke nur die im Bogenscheitel angreifende Kraft C .

$$\text{Es ergibt sich } X_a = \frac{C \cdot \delta_{ca} \delta_{bb} - C \cdot \delta_{cb} \delta_{ba}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}.$$

$$X_b = \frac{C \cdot \delta_{cb} \delta_{aa} - C \cdot \delta_{ca} \delta_{ab}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}.$$



Hierin ist δ_{ca} die Verschiebung des Angriffspunktes c der Kraft C in der Richtung von C infolge $X_a = -1$, δ_{cb} infolge von $X_b = -1$. Diese Verschiebungen können mit Hilfe von Normalenzügen für die Zustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ gefunden werden (Fig. 36).

Es wird wegen der Symmetrie $\delta_{ca} = \delta_{cb}$, und zwar wird δ_{ca} positiv und δ_{cb} negativ, da die Kraft C der Verschiebung δ_{ca} gleich, der Verschiebung δ_{cb} aber entgegengesetzt gerichtet ist. Es ergibt sich somit

$$X_a = \frac{+C \cdot \delta_{ca} \frac{1}{8} l - (-C \cdot \delta_{cb}) (-\frac{1}{24} l)}{\frac{1}{2} l^2} = \frac{9C \delta_{ca} - 3C \delta_{cb}}{l} = \frac{6C \cdot \delta_{ca}}{l}$$

$$X_b = -X_a.$$

Die Gesamtwerte X_a und X_b ergeben sich durch Addierung der Werte für die Einzelzustände. Daher wird

$$X_a = -\frac{1}{4} C \cdot e + \frac{6C \cdot \delta_{ca}}{l} \text{ (negativ)}$$

$$X_b = +\frac{1}{4} C \cdot e - \frac{6C \cdot \delta_{ca}}{l} \text{ (positiv).}$$

Damit sind sämtliche übrigen statischen Größen bestimmt. Durch eine Momentengleichung in bezug auf die rechte Einspannung ergibt sich

$$A = \frac{C(e+f)}{l} + \frac{X_a + X_b}{l} = B.$$

Für X_a und X_b sind hierin die absoluten Werte einzusetzen.

$$H = H_0 - H_a X_a - H_b X_b$$

$$= H_0 - \frac{5}{8f} \left(-\frac{1}{4} C \cdot e + \frac{6C \cdot \delta_{ca}}{l} \right)$$

$$- \frac{5}{8f} \left(\frac{1}{4} C \cdot e - \frac{6C \cdot \delta_{ca}}{l} \right) = H_0.$$

H_0 ist die Horizontalkomponente des linken Kämpferdrucks des statisch unbestimmten Hauptsystems und werde berechnet aus 2 Einzelzuständen. Es wirke zunächst nur das Kräftepaar vom Moment μ . Für diesen Zustand ergibt sich der Horizontalschub = 0 (s. Seite 25). Dann wirke nur die im Bogen Scheitel angreifende Kraft C , wodurch

$$H_C = -\frac{C}{2} \text{ und } H_{C'} = +\frac{C}{2}$$

entsteht, wie aus der Symmetrie folgt. Daher ist der gesamte Horizontalschub

$$H = 0 + H_C = -\frac{C}{2}; \quad H' = 0 + H_{C'} = +\frac{C}{2}.$$

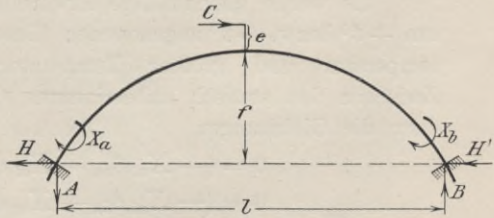


Fig. 37.

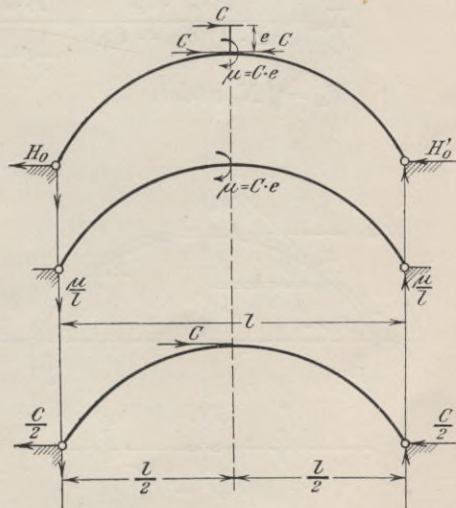


Fig. 38.

Nunmehr können Biegungs- bzw. Kernpunktmente und Querkräfte für jeden Querschnitt berechnet werden. Z. B. $M_0 = X_a + H \cdot y_0 - A \cdot x$, wobei für X_a , H und A die absoluten Werte einzusetzen sind.

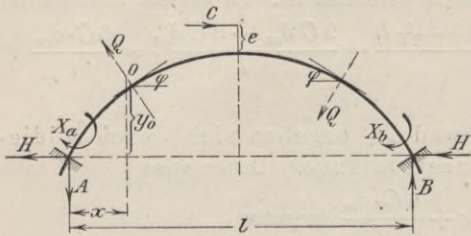


Fig. 39.

$$Q = H \sin \varphi - A \cos \varphi$$

(für einen Querschnitt links vom Scheitel)

$$Q = H' \sin \varphi - B \cos \varphi$$

(für einen Querschnitt rechts vom Scheitel).

Einfluß der Temperaturänderung.

Es werde gleichmäßige Erwärmung bzw. Abkühlung des Bogens um $+t^0$ bzw. $-t^0$ angenommen (Unterschied zwischen der Aufstellungstemperatur und größter Temperaturerhöhung bzw. -Erniedrigung). Zwischen den statisch unbestimmten Größen X_{at} und X_{bt} bestehen sodann die Gleichungen

$$0 = (-X_{at} \delta_{aa} - X_{bt} \delta_{ab} + \delta_{at}) E \cdot J'$$

$$0 = (-X_{at} \delta_{ba} - X_{bt} \delta_{bb} + \delta_{bt}) E \cdot J'$$

Aus Symmetriegründen folgt, daß $X_{at} = X_{bt}$ und $\delta_{at} = \delta_{bt}$, daher $(X_{at} \delta_{aa} + X_{at} \delta_{ab}) E \cdot J' = \delta_{at} \cdot E \cdot J'$

$$X_{at} = \frac{E \cdot J' \cdot \delta_{at}}{E \cdot J' (\delta_{aa} + \delta_{ab})} = \frac{E \cdot J' \cdot \delta_{at}}{\frac{1}{8}l - \frac{1}{24}l} = \frac{E \cdot J' \cdot \delta_{at}}{\frac{l}{12}}$$

$$\delta_{at} = \int N_a \varepsilon t ds.$$

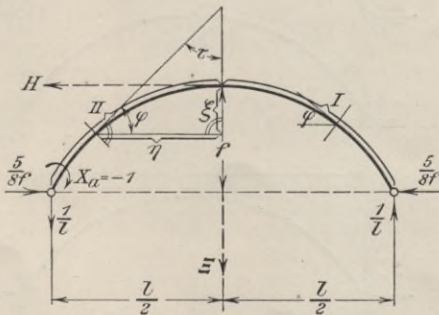


Fig. 40.

Vom rechts abgetrennten Teil aus berechnet ergibt sich für Teil I

$$N_a = -\frac{1}{l} \sin \varphi - \frac{5}{8f} \cos \varphi;$$

für Teil II wird (von links aus berechnet)

$$N_a = +\frac{1}{l} \cdot \sin \varphi - \frac{5}{8f} \cos \varphi.$$

$ds = \varrho \cdot d\varphi$; ϱ = Krümmungsradius an der Schnittstelle.

$$\varrho = \frac{p}{\sin^3 \tau} \text{ (s. Hütte I, 20. Aufl. S. 105)}$$

$$\tau = 90 - \varphi, \text{ daher } \varrho = \frac{p}{\sin^3 (90 - \varphi)} = \frac{p}{\cos^3 \varphi}.$$

Die Scheitgleichung der Parabel lautet $\eta^2 = 2p \cdot \xi$; für $\eta = \frac{l}{2}$ wird $\xi = f$.

Daher $\frac{l^2}{4} = 2p \cdot f$; $p = \frac{l^2}{8f}$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung

für q ein, so ergibt sich $q = \frac{l^2}{8f \cdot \cos^3 \varphi}$.

$$E \cdot J' \cdot \delta_{at} = E \cdot J' \int_0^\alpha \left(-\frac{1}{l} \sin \varphi - \frac{5}{8f} \cos \varphi \right) \frac{\varepsilon t l^2}{8f \cos^3 \varphi} d\varphi \\ + E J' \int_0^\alpha \left(\frac{1}{l} \sin \varphi - \frac{5}{8f} \cos \varphi \right) \frac{\varepsilon t l^2}{8f \cos^3 \varphi} d\varphi.$$

Nach Hütte I, 20. Aufl. S. 78 ist

$$\int_0^\alpha \frac{\sin^1 \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi = \int_0^\alpha \sin^1 \varphi \cos^{-3} \varphi d\varphi = \frac{\sin^{1+1} \varphi \cos^{-3+1} \varphi}{3-1} \\ + \frac{3-1-2}{3-1} \int \sin^1 \varphi \cos^{-3+2} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right]_0^\alpha = \frac{1}{2} \left[\operatorname{tg}^2 \varphi \right]_0^\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Ferner ist

$$\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \left[\operatorname{tg} \varphi \right]_0^\alpha = \operatorname{tg} \alpha. \text{ Somit ergibt sich}$$

$$E \cdot J' \cdot \delta_{at} = -\frac{\varepsilon t l^2 E J'}{8f \cdot l} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{5}{8f} \frac{\varepsilon t l^2 E \cdot J'}{8f} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\varepsilon t l^2 E J'}{8f \cdot l} \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha \\ - \frac{5}{8f} \frac{\varepsilon t l^2 E J'}{8f} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{32} \frac{\varepsilon t l^2 E J' \operatorname{tg} \alpha}{f^2}$$

$$X_{at} = \frac{E \cdot J' \cdot \delta_{at}}{l} = -\frac{15 \varepsilon t l E J'}{8 f^2} \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2f}{l} = \frac{4f}{l}; \text{ daher wird}$$

$$X_{at} = -\frac{15 \varepsilon t E J'}{2 f} = X_{bt} \text{ (bei Temperaturerhöhung).}$$

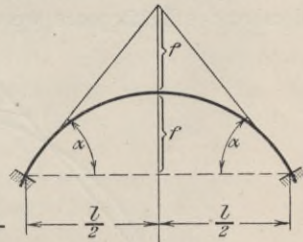


Fig. 41.

Bei Temperaturerniedrigung wird

$$X_{at} = X_{bt} = +\frac{15 \varepsilon t E J'}{2 f}.$$

Bei Temperaturerhöhung wird ferner

$$H_{ot} = \frac{15 \varepsilon E t J'}{8 f^2} \text{ (s. Seite 3, 3), daher}$$

$$H_t = H_{ot} - H_a \cdot X_{at} - H_b \cdot X_{bt} \\ = \frac{15 \varepsilon E t J'}{8 f^2} + 2 \cdot \frac{5}{8f} \frac{15 \varepsilon E t J'}{2 f} = \frac{45 \varepsilon E t J'}{4 f^2}.$$

Bei Temperaturerniedrigung wird

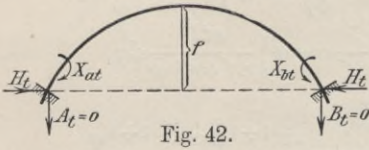
$$H_t = -\frac{45 \varepsilon E t J'}{4 f^2}.$$

A_t und B_t werden $= 0$, wie leicht durch Momentengleichungen in bezug auf die Einspannungen erkannt werden kann.

Das größte Zusatzmoment für den Scheitelquerschnitt ist daher

$$M_t = -H_t \cdot f + X_{at} = -\frac{45}{4} \frac{\varepsilon E t J'}{f^2} \cdot f + \frac{15}{2} \frac{\varepsilon t E J'}{f}$$

$$= -\frac{15}{4} \frac{\varepsilon E t J'}{f} \quad (\text{bei Temperaturerhöhung}).$$



Bei Temperaturniedrigung wird

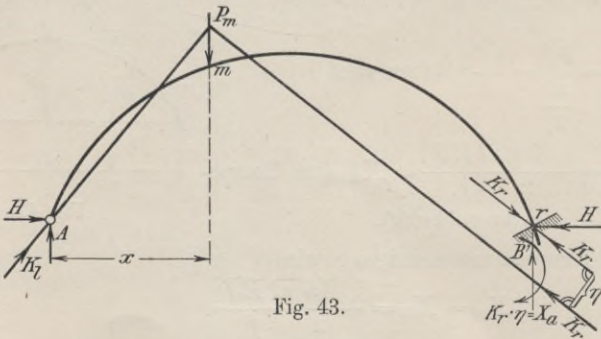
$$M_t = +\frac{15}{4} \frac{\varepsilon E t J'}{f}$$

Die Querkraft für irgend eine Schnittstelle ist

$$= \pm H_t \sin \varphi.$$

B. Der einerseits eingespannte, andererseits gelenkig gelagerte vollwandige zweifach statisch unbestimmte Bogen.

Der durch irgend eine Kraft P_m hervorgerufene Kämpferdruck K_r werde im Punkte r noch zweimal in entgegengesetzter Richtung angebracht. Es entsteht dann ein Kräftepaar vom Moment $K_r \cdot \eta$ und eine in r angreifende Einzellast K_r , die nach H und B zerlegt werde. Das Moment des Kräftepaars werde als statisch unbestimmte Größe angebracht.



Das statisch unbestimmte Hauptsystem ist alsdann ein Zweigelenkbogen. Die durch Belastung des Hauptsystems entstehenden statischen Größen mögen wieder durch den Index o gekennzeichnet werden. Es läßt sich dann irgend eine statische Größe Y durch die Gleichung $Y = Y_0 - Y_a \cdot X_a$ ausdrücken. Hierin ist Y_a der Wert, den Y annimmt, wenn das statisch unbestimmte Hauptsystem mit $X_a = -1$ belastet wird. Die Werte Y_0 und Y_a dürfen als bekannt vorausgesetzt werden. Unter Annahme starrer Widerlager lautet dann die Elastizitätsgleichung

$$0 = P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa}$$

$$X_a = \frac{P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}}.$$

I. $J \cos \varphi$ sei veränderlich, die Bogenform beliebig.

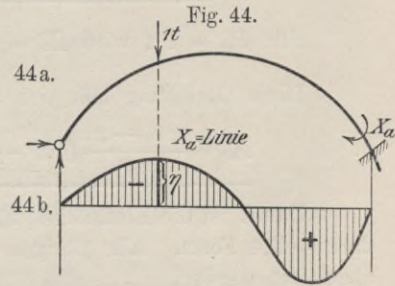
Bei Anwendung des Schönhöferschen Verfahrens mit konstanten Bogengrößen ergibt sich

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}^M + \delta_{ma}^N}{\Sigma \eta_a^2 + H_a^2 \cdot \frac{S}{F_0}} \cdot E \cdot k \quad (\text{S. 7, 8 und 9}).$$

Setzt man $P_m = 1 \text{ t}$, so erhält man für die Berechnung der X_a -Linie die Formel

$$X_a = \frac{E \cdot k}{\Sigma \eta_a^2 + H_a^2 \cdot \frac{S}{F_0}} (\delta_{ma}^M + \delta_{ma}^N) = C \cdot \delta_{ma}.$$

Die X_a -Linie ist daher gleich der $C \cdot \delta_{ma}$ -Linie. Bei Vernachlässigung der Längskräfte ergibt sich für C der einfache Wert $\frac{E \cdot k}{\Sigma \eta_a^2}$ und δ_{ma} wird $= \delta_{ma}^M$.



II. Vereinfachungen.

Es empfiehlt sich, im ersten Rechnungsgang die vereinfachende Annahme $J \cos \varphi = \text{Const.}$ zu machen. Ferner möge der Einfluß der Längskräfte auf die Formänderungen vernachlässigt werden, eine bei hohem Bogenpfeil stets zulässige Annahme. Der Bogen sei eine Parabel.

Die Verschiebungen $E \cdot J' \cdot \delta_{ma}$ ergeben sich alsdann als die Momente M_{xa} des mit der M_a -Fläche belasteten Balkens von der Spannweite l .

Unter Benutzung der ω -Werte erhält man

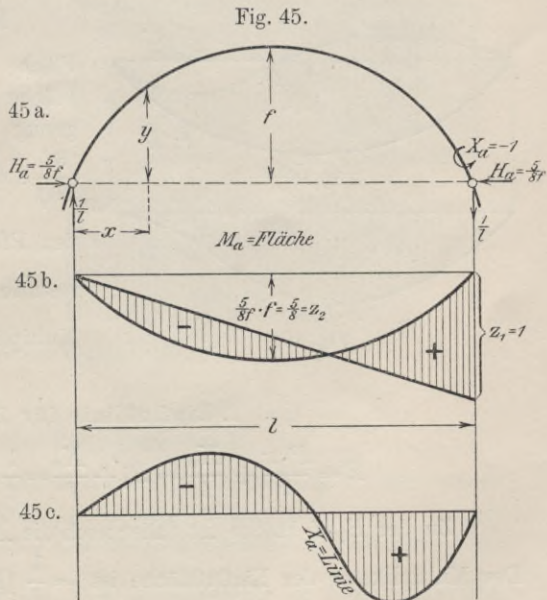
$$M_{xa} = E \cdot J' \cdot \delta_{ma} = \omega_D \cdot \frac{\alpha_1 \cdot l^2}{2 \cdot 3} - \omega_P \cdot \alpha_2 \cdot \frac{l^2}{3}$$

$$\omega_D = \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3};$$

$$\omega_P = 2 \omega_D - \omega_P;$$

$$\omega_P = \frac{x}{l} - \frac{x^4}{l^4}$$

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = \frac{5}{8}$$



$$M_{xa} = E \cdot J' \delta_{ma} = \frac{l^2}{6} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) - \frac{5}{24} l^2 \left[2 \left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right) - \frac{x}{l} + \frac{x^4}{l^4} \right]$$

$$= -\frac{1}{24} l \cdot x + \frac{1}{4} \frac{x^3}{l} - \frac{5}{24} \frac{x^4}{l^2}.$$

Ferner ist $E \cdot J' \delta_{aa} = \frac{1}{8} l$ (s. S. 10). Daher wird

$$X_a = P_m \cdot \frac{E \cdot J' \delta_{ma}}{E \cdot J' \delta_{aa}} = 8 \left(\frac{x^3}{4l^2} - \frac{5}{24} \frac{x^4}{l^3} - \frac{x}{24} \right) \cdot P_m.$$

$$= \frac{P_m}{3} \left(\frac{6x^3}{l^2} - 5 \frac{x^4}{l^3} - x \right).$$

Für $P_m = 1 \text{ t}$ wird $X_a = \frac{1}{3} \left(6 \frac{x^3}{l^2} - 5 \frac{x^4}{l^3} - x \right)$.

Diese Gleichung läßt sich auf die Form bringen

$$X_a = \frac{x(l-x)}{3l^3} (5x^2 - l \cdot x - l^2).$$

Damit ist die Einflußlinie für X_a bestimmt. Sie hat die in Fig. 45c dargestellte Form. Alle übrigen Einflußlinien können von der X_a -Linie abgeleitet werden.

Einflußlinien für H , B und A .

1. Einflußlinie für H .

Es ist $H = H_0 - H_a \cdot X_a = H_0 - \frac{5}{8f} \cdot X_a = \frac{5}{8f} \left(H_0 \cdot \frac{8f}{5} - X_a \right)$.

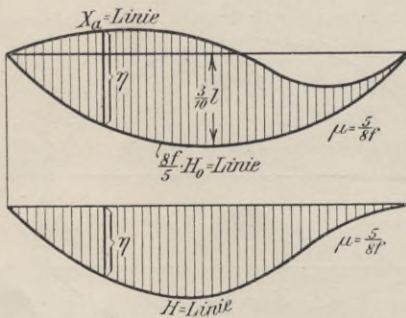


Fig. 46.

Man zeichne die $H_0 \cdot \frac{8f}{5}$ -

Fläche und ziehe davon die X_a -Fläche ab. Die H_0 -Linie ist genau genug eine Parabel vom Pfeil $\frac{3l}{16f}$; die $H_0 \cdot \frac{8f}{5}$ -Linie hat daher den Pfeil $\frac{3l}{16f} \cdot \frac{8f}{5} = \frac{3}{10} l$. Die resultierende Einflußfläche hat den

Multiplikator $\mu = \frac{5}{8f}$.

2. Einflußlinie für B .

$$B = \frac{P \cdot x}{l} + \frac{X_a}{l} = B_0 + \frac{X_a}{l} = \frac{1}{l} (B_0 \cdot l + X_a).$$

Zu der $B_0 \cdot l$ -Fläche ist daher noch die X_a -Fläche hinzuzuaddieren.

Der Multiplikator der Einflußfläche ist $= \frac{1}{l}$ (Fig. 47b).

3. Einflußlinie für A .

$$A = \frac{P(l-x)}{l} - \frac{X_a}{l} = A_0 - \frac{X_a}{l} = \frac{1}{l}(A_0 \cdot l - X_a).$$

Von der $A_0 \cdot l$ -Fläche ist daher die X_a -Fläche abzuziehen. Der Multiplikator der Einflußfläche ist $= \frac{1}{l}$ (Fig. 47c).

Die genaue Formel für H ergibt sich aus der Gleichung

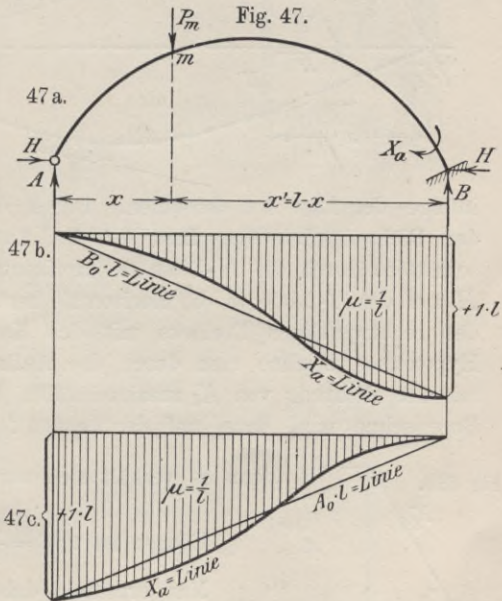
$$H = H_0 - H_a \cdot X_a, \text{ worin } H_0 = \frac{5}{8f} \left(x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3} \right) \text{ (Seite 3, 1)}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{5}{8f} \left(x - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{x^4}{l^3} \right) - \frac{5}{8f} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{6x^3}{l^2} - \frac{5x^4}{l^3} - x \right) \\ &= \frac{5}{8f} \left(\frac{4}{3}x - \frac{4x^3}{l^2} + \frac{8x^4}{3l^3} \right) = \frac{5}{6f} \left(x - \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^3}{l^2} + \frac{2x^4}{l^3} \right) \\ &= \frac{5}{6f} \left[x \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) - \frac{2x^3}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right] = \frac{5}{6f} \frac{x(l-x)}{l^2} \left[l + x - \frac{2x^2}{l} \right] \\ &= \frac{5}{6f} \frac{x \cdot x'^2}{l^3} (l + 2x). \end{aligned}$$

Desgleichen ergibt sich

$$\begin{aligned} B &= \frac{1 \cdot x}{l} + \frac{X_a}{l} \\ &= \frac{x}{l} + \frac{1}{3l} \left(\frac{6x^3}{l^2} - \frac{5x^4}{l^3} - x \right) \\ &= \frac{2x}{3l} + \frac{2x^3}{l^3} - \frac{5x^4}{3l^4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1(l-x)}{l} - \frac{X_a}{l} \\ &= \frac{1(l-x)}{l} \\ &\quad - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{5x^4}{3l^4} + \frac{1x}{3l} \\ &= 1 - \frac{2x}{3l} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{5x^4}{3l^4}. \end{aligned}$$



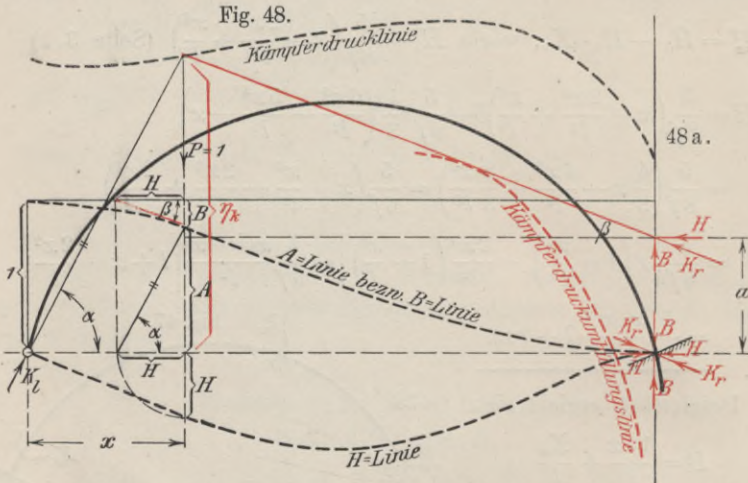
Festlegung der Kämpferkräfte.

Bringt man in der Einspannung den Kämpferdruck K_r noch zweimal in entgegengesetzter Richtung an und zerlegt K_r in zwei Seitenkomponenten H und B , so muß das Moment des Kräftepaares $H \cdot a = X_a$ sein, d. h. $a = \frac{X_a}{H}$. Ferner ist $\eta_k = x \cdot \text{tg } \alpha$ und da nach Zerlegung

von K_e in A und H sich $\operatorname{tg} \alpha = \frac{A}{H}$ ergibt, wird $\eta_k = x \cdot \frac{A}{H}$. Es muß also sein

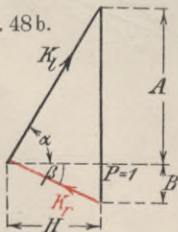
$$\frac{\eta_k}{x} = \frac{A}{H}.$$

Daraus läßt sich folgende einfache Konstruktion von η_k herleiten: Man zeichne die A -Linie und H -Linie in die Figur ein. Die A -Linie kann gleichzeitig als B -Linie aufgefaßt werden, indem die Ordinaten unterhalb der A -Linie die Werte A , oberhalb der A -Linie die Werte B



infolge der Last $1 t$ darstellen. Durch die A -Linie werden dann auf der Richtungslinie der Last $1 t$ die Auflagerdrücke A und B abge-schnitten, durch die H -Linie der Horizontalschub H . Dann schlage man H aus der H -Linie in die Horizontale herum und zeichne die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten A und H . Zu dieser Hypotenuse zeichne man durch das Auflagergelenk eine Parallele, die mit der Richtung von K_l zusammenfällt. Durch diese Parallele und die Bogensehne wird dann auf der Last $1 t$ die Strecke η_k abgeschnitten;

Fig. 48b.



denn es verhält sich nunmehr $\frac{\eta_k}{x} = \frac{A}{H}$.

$$\text{Ebenso ist } \operatorname{tg} \beta = \frac{\eta_k - a}{l - x} = \frac{B}{A}.$$

Man ermittle daher die Hypotenuse des recht-winkligen Dreiecks mit den Katheten B und H und zeichne vom Schnittpunkt des linken Kämpferdrucks mit der Last $1 t$ eine Parallele zu der Hypotenuse, die dann die Richtung des rechten Kämpferdrucks angibt.

Wiederholt man diese Konstruktion für eine Reihe von Lasten-stellungen und verbindet die Schnittpunkte der Kämpferdrücke miteinander, so erhält man die Kämpferdruckumhüllungslinie. Die rechten Kämpferdrücke um-hüllen eine Kurve, die Kämpferdruckumhüllungslinie. Durch diese und

die Kämpferdrucklinie sind die Richtungen der Kämpferdrücke gegeben. Der linke Kämpferdruck geht durch das Auflagergelenk, der rechte Kämpferdruck muß die Kämpferdruckumhüllungslinie tangieren. Die Last und die Kämpferdrücke müssen sich auf der Kämpferdrucklinie schneiden.

Mit Hilfe dieser Konstruktion lassen sich leicht die

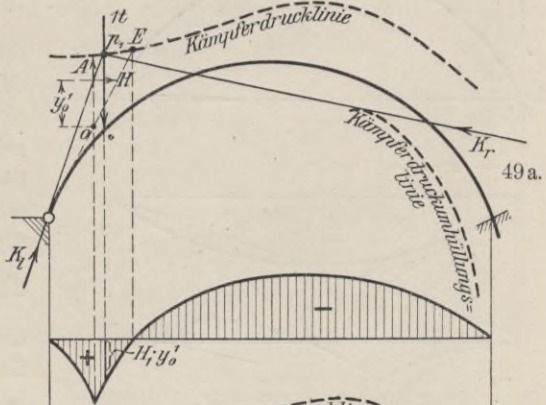
Einflußlinien für Momente bezw. Kernpunktmomente

ermitteln.

1. Die Last $1t$ stehe rechts vom Drehpunkt.

Man konstruiere die Richtung von K_l durch Verbindung des Punktes p_1 mit dem Auflagergelenk, zerlege K_l senkrecht über dem Momentendrehpunkt in A und H und bestimme $M_0^1 = H_1 \cdot y_0^1$, wobei H_1 senkrecht unter der Last $1t$ aus der H -Linie abgegriffen werden kann, die Zerlegung von K_l also gar nicht erst durchgeführt zu werden braucht. Diesen Wert $H_1 \cdot y_0^1$ trage man senkrecht unter der Last $1t$ als Ordinate auf (Fig. 49a).

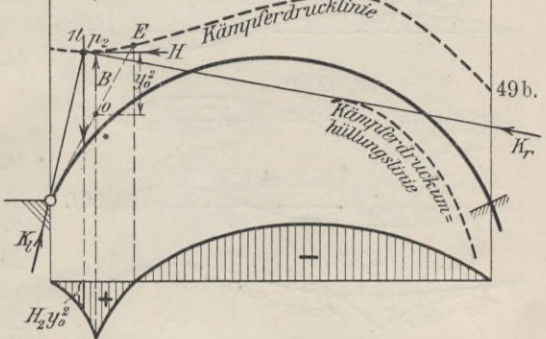
Fig. 49.



2. Die Last $1t$ stehe links vom Drehpunkt.

(Fig. 49b.)

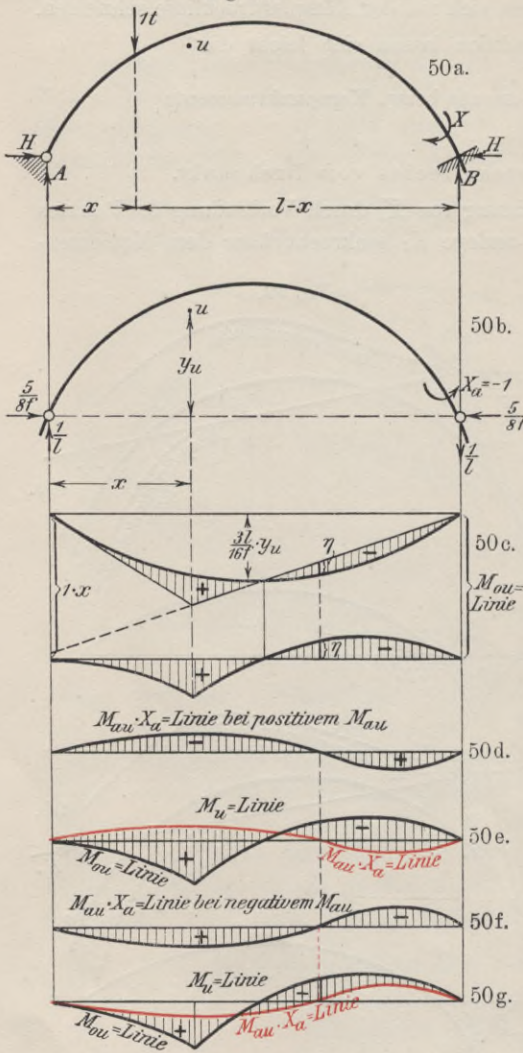
Man bestimme die Richtung von K_r durch Zeichnung einer Tangente an die Kämpferdruckumhüllungslinie vom Punkte p_2 aus, zerlege K_r senkrecht über dem Drehpunkt in H_2 und B und bestimme $M_0^2 = H_2 \cdot y_0^2$, wobei H_2 senkrecht unter der Last aus der H -Linie ermittelt wird. Diesen Wert trage man unter der Last $1t$ als Ordinate auf. Wiederholt man diese Konstruktion für eine Reihe von Lastenstellungen und verbindet die Endpunkte der Ordinaten, so entsteht die Einflußlinie für M_0 .



Die oben um den Drehpunkt herumdrehenden Momente zählen dabei als positiv, die unten herumdrehenden als negativ. Der Nullpunkt der Einflußlinie liegt unter dem Punkte E , dem Schnittpunkt der Kämpferdrucklinie mit dem durch den Drehpunkt gezeichneten Kämpferdruck K_l .

Steht nämlich die Last im Punkte E , so geht der durch die Last hervorgerufene Kämpferdruck K_l durch den Drehpunkt, erzeugt also $M_0 = 0$.

Fig. 50.



Eine andere Herleitung der Momenteneinflusslinien ermöglicht die Benutzung der Formel

$$M = M_0 - M_a \cdot X_a.$$

So ist z. B.

$$M_u = M_{ou} - M_{au} \cdot X_a.$$

Man zeichne die M_{ou} -Fläche und ziehe davon ab die $M_{au} \cdot X_a$ -Fläche (siehe Fig. 50c bis 50g).

Die M_{ou} -Fläche (Einflußfläche für das Moment M_u des statisch unbestimmten Hauptsystems) ist gegeben durch die Einflußfläche für das Moment M_u eines einfachen Balkens und die parabelförmige Einflußfläche mit dem Pfeil $\frac{3l}{16f} \cdot y_u$, die von der Balkeneinflußfläche in Abzug zu bringen ist

$$(M_{ou} = M_u' - H_0 \cdot y_u)$$

(s. Fig. 50c).

$$M_{au} = \frac{1}{l} \cdot x - \frac{5}{8f} \cdot y_u$$

(s. Fig. 50b).

Die M_u -Linie, deren Form davon abhängt, ob M_{au} positiv oder negativ wird, ist in Fig. 50e bezw. 50g dargestellt.

Einflusslinien für Querkräfte.

Der Gedankengang für die Ableitung der Einflusslinien für Querkräfte ist derselbe wie der auf Seite 18 bei Herleitung der Querkrafteinflusslinien für den beiderseits eingespannten Bogen besprochene.

Es ergibt sich für Lasten rechts vom Schnitt

$$Q = \sin \varphi (A \operatorname{ctg} \varphi - H).$$

Für Lasten links vom Schnitt wird

$$Q = \sin \varphi (-B \operatorname{ctg} \varphi - H).$$

Dadurch ist die Einflußfläche für Q bestimmt (Fig. 51).

Einfluß des Eigengewichts.

Infolge $P_m = 1 t$ ergibt sich

$$X_a = \frac{1}{3} \left(\frac{6x^3}{l^2} - \frac{5x^4}{l^3} - x \right) = \eta \quad (\text{S. 32}).$$

Beträgt das Eigengewicht g pro Längeneinheit, so ist $X_a^g = g \cdot F$, wenn F der Flächeninhalt der Einflußfläche für X_a ist. Daher wird

$$X_{ag} = g \int \eta dx = g \int_0^l \left(\frac{6x^3}{l^2} - \frac{5x^4}{l^3} - x \right) dx = \frac{g}{3} \left(\frac{6}{l^2} \cdot \frac{l^4}{4} - \frac{5}{l^3} \cdot \frac{l^5}{5} - \frac{l^2}{2} \right) = 0.$$

$$A_y = A_{og} - A_a \cdot X_{ag} = A_{og} = g \frac{l}{2} = Bg.$$

$$H_g = H_{og} - H_a \cdot X_{ag} = H_{og} = \frac{gl^2}{8f} \quad (\text{s. S. 19}).$$

Bezüglich der Momente M_y gilt daher das auf Seite 19 für den beiderseits eingespannten Bogen Gesagte: Das Biegemoment für irgend einen Punkt der Bogenachse ist $= 0$, da die Stützlinie mit der Bogenachse zusammenfällt. Infolgedessen hat auch das Eigengewicht keinen Einfluß auf die Querkräfte.

Einfluß gleichmäßig verteilter partieller Verkehrsbelastung p pro Längeneinheit.

Handelt es sich um die Berechnung von Straßenbrücken, so wird in der Regel für die Hauptträger gleichmäßig verteilte Verkehrsbelastung (Menschengedränge) die ungünstigste Belastung sein. In diesem Falle kann man sich die Zeichnung der Einflußlinien für Momente und Querkräfte ersparen, da die Benutzung der Kämpferdruck- und Kämpferdruckumhüllungsline eine sehr schnelle Feststellung der ungünstigsten Lastenstellung gestattet. Als dann können, vorausgesetzt, daß

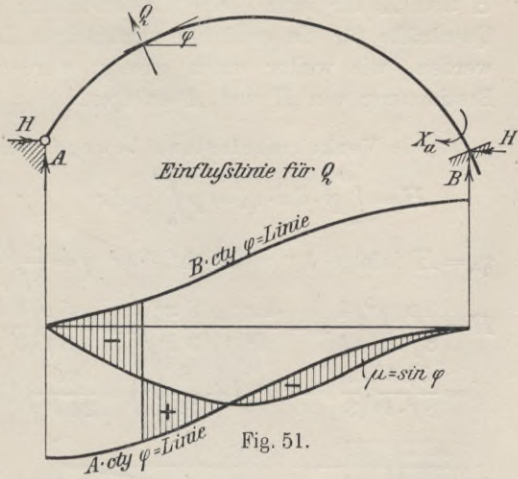


Fig. 51.

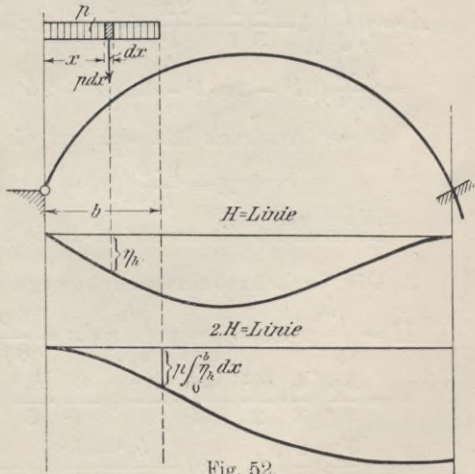


Fig. 52.

Dadurch ist die zweite *H*-Linie bestimmt (Fig. 54c).

$$\begin{aligned}
 A &= \int_b^{b_1} p \cdot dx \cdot \eta_A = p \int_b^{b_1} \left(1 - \frac{2x}{3l} - \frac{2x^3}{l^3} + \frac{5x^4}{3l^4} \right) dx \\
 &= p \left(b_1 - \frac{b_1^2}{3l} - \frac{b_1^4}{2l^3} + \frac{b_1^5}{3l^4} - b + \frac{b^2}{3l} + \frac{b^4}{2l^3} - \frac{b^5}{3l^4} \right) \\
 &= \frac{p}{6l^4} [6l^4(b_1 - b) - 2l^3(b_1^2 - b^2) - 3l(b_1^4 - b^4) + 2(b_1^5 - b^5)] \\
 &= \frac{p}{6l^4} [6l^4(b_1 - b) - 2l^3(b_1 + b)(b_1 - b) - 3l(b_1^4 - b^4) + 2(b_1^5 - b^5)];
 \end{aligned}$$

da $b_1 + b = l$, ergibt sich

$$A = \frac{p}{6l^4} [4l^4(b_1 - b) - 3l(b_1^4 - b^4) + 2(b_1^5 - b^5)].$$

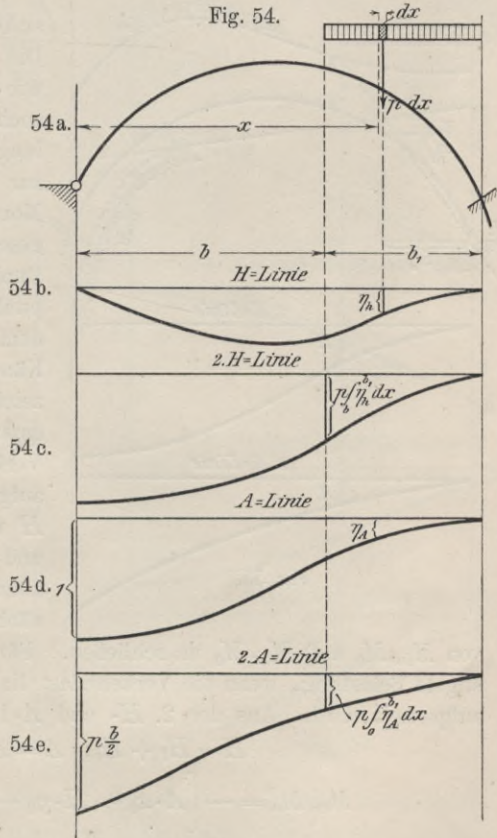
Dadurch ist die zweite *A*-Linie bestimmt (Fig. 54e).

In den folgenden Beispielen möge gezeigt werden, wie die Kämpferdruck- und Kämpferdruckumhüllungsline sowie die 2. *H*- und *A*-Linie mit Vorteil für die Berechnung der größten Momente und Querkräfte verwandt werden können.

I. Gesucht sei $M_{ax} M_0$. Die Verkehrsbelastung betrage p , das Eigengewicht g pro Längeneinheit.

$$g + p = q.$$

1. Es sei nur eine Lastenscheide vorhanden (Fig. 55 s. S. 40). Man konstruiere zunächst die Lastenscheide, stelle also diejenige Last auf, die einen Kämpferdruck K_l hervorbringt, der durch den Momentendrehpunkt geht. Dieses geschieht, wenn die Last durch den Punkt *E* der Kämpferdrucklinie geht. Es entsteht nun $M_{ax} M_0$ bei Linksbelastung; die Verkehrsbelastung ist daher links von *E* aufzustellen. Aus der 2. *H*- und *A*-Linie entnehme man *H* und *A* für Linksbelastung senkrecht unter dem Kopf der Verkehrslast. Es wird alsdann



$$M_{ax} M_o^p = A \cdot x_0 - H \cdot \eta_0 - \frac{p \cdot x_0^2}{2}.$$

Infolge des Eigengewichts ergibt sich

$$M_o^g = H_g \cdot \eta_0 = \frac{g l^2}{8f} \cdot \eta_0 \quad (\text{s. S. 19}).$$

$$\begin{aligned} \text{Daher ist } M_{ax} M_o^{(p+g)} &= A \cdot x_0 - H \cdot \eta_0 - \frac{p \cdot x_0^2}{2} + \frac{g l^2}{8f} \cdot \eta_0 \\ &= A \cdot x_0 - H \cdot \eta_0 - p \cdot \frac{x_0^2}{2} + C' \cdot g, \quad \text{worin } C' = \frac{l^2 \cdot \eta_0}{8f}. \end{aligned}$$

Dadurch ist auch $M_{in} M_o$ bestimmt.

$$\begin{aligned} M_{in}^{(p+g)} M_o &= - \left(A \cdot x_0 - H \cdot \eta_0 - \frac{p x_0^2}{2} \right) + C' \cdot q \\ &= - \left(A \cdot x_0 - H \cdot \eta_0 - \frac{p x_0^2}{2} \right) + \frac{g l^2}{8f} \cdot \eta_0, \quad \text{worin } q = g + p. \end{aligned}$$

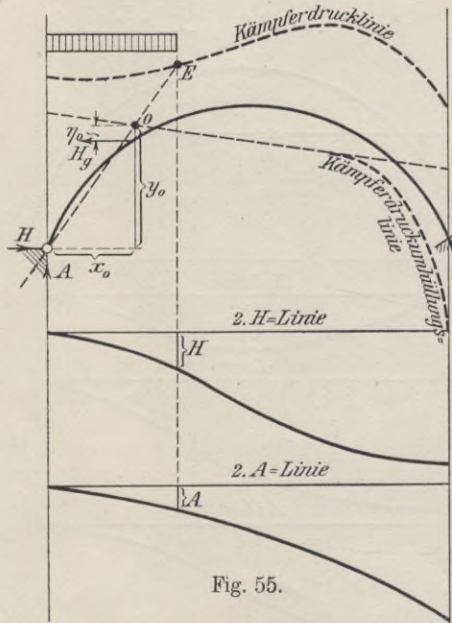


Fig. 55.

2. Es seien zwei Lastenscheiden vorhanden (Fig. 56). Die Lastenscheide E_1 ergibt sich wie unter 1. Zur Ermittlung von E_2 suche man diejenige Lastenstellung, die einen Kämpferdruck K_r zur Folge hat, der durch den Momentendrehpunkt geht. Dieses geschieht, wenn die Last 1 t im Punkte E_2 steht, dem Schnittpunkt der Kämpferdrucklinie mit dem durch 0 tangential an die Kämpferdruckhüllungsline gezeichneten Kämpferdruck K_r . Es entsteht nun $M_{ax} M_o$, wenn die Verkehrslast zwischen E_1 und E_2 aufgestellt wird. Da aber dann H und A nicht aus der 2. H - und A -Linie gefunden werden können, ist es zweckmäßig, zunächst $M_{in} M_o$ zu bestimmen und

von $M_{in} M_o$ auf $M_{ax} M_o$ zu schließen. Für $M_{in} M_o$ entsteht die ungünstigste Belastung, wenn die Verkehrslast links von E_2 und rechts von E_1 aufgestellt wird. Aus der 2. H - und A -Linie ergibt sich

$$H = H_l + H_r; \quad A = A_l + A_r.$$

$$M_{in} M_o^p = - \left[A \cdot x_0 - H \cdot \eta_0 - p \cdot b \left(x_0 - \frac{b}{2} \right) \right].$$

$$\text{Infolge des Eigengewichts wird } M_{og} = H_g \cdot \eta_0 = \frac{g l^2}{8f} \cdot \eta_0 = C' \cdot g,$$

$$\text{worin } C' = \frac{\eta_0 \cdot l^2}{8f}.$$

$$M_{in}^{(p+g)} M_0 = - \left[A \cdot x_0 - H \cdot y_0 - p \cdot b \left(x_0 - \frac{b}{2} \right) \right] + C' \cdot g.$$

Demnach wird

$$\begin{aligned} M_{ax}^{(p+g)} M_0 &= + \left[A \cdot x_0 - H \cdot y_0 - p \cdot b \left(x_0 - \frac{b}{2} \right) \right] + C' \cdot q \\ &= + \left[A \cdot x_0 - H \cdot y_0 - p \cdot b \left(x_0 - \frac{b}{2} \right) \right] + \frac{\eta_0 \cdot l^2}{8f} \cdot q. \end{aligned}$$

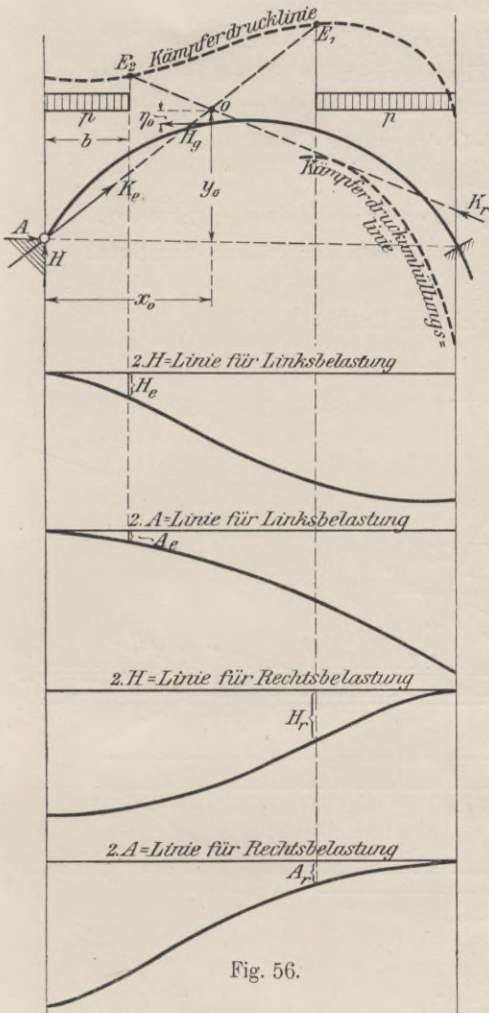


Fig. 56.

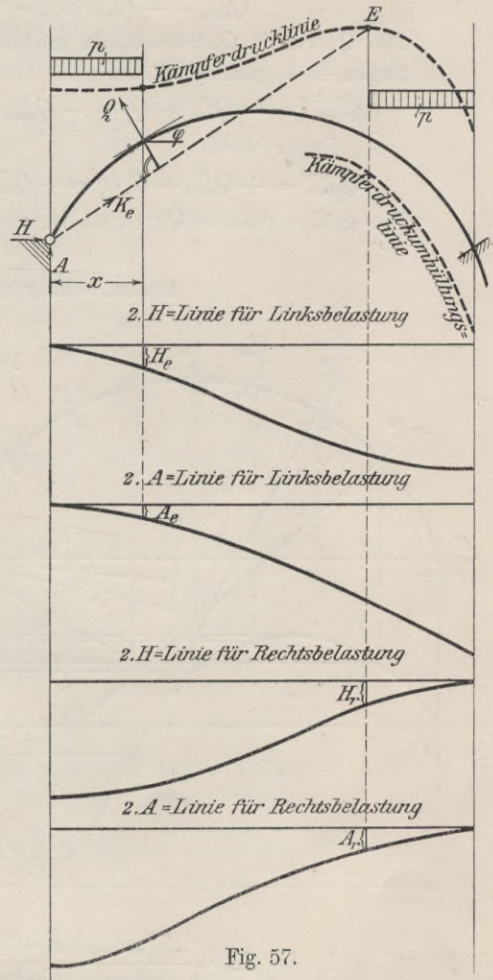


Fig. 57.

II. Gesucht sei Q_{min} (Fig. 57). Zur Bestimmung der Lastenscheide suche man eine Lastenstellung, die einen linken Kämpferdruck zur Folge hat, der senkrecht zum Krümmungsradius, d. h. parallel zur Tangente an die Schnittstelle verläuft. Ein solcher Kämpferdruck entsteht, wenn die Last $1 t$ durch E geht und hat zur Folge, daß $Q = 0$ wird, da die einzige Last am links abgetrennten Teil senkrecht zur Querkraftrichtung steht.

Rechts von E liegt also die negative Beitragsstrecke der Einflußlinie für Q . Da in dem zu untersuchenden Querschnitt die Querkraft ihr Vorzeichen wechselt, muß auch links vom Querschnitt eine negative Beitragsstrecke der Einflußfläche liegen. Damit ist die ungünstigste Belastung für Q_{min} bestimmt. Man stelle die Verkehrslast rechts von der Lastenscheide und links vom Querschnitt auf. Aus der 2. H - und A -Linie ergibt sich sodann $H = H_l + H_r$; $A = A_l + A_r$.

Vom links abgetrennten Teil aus berechnet wird dann

$$Q_{min}^p = -(A \cdot \cos \varphi - H \sin \varphi - p \cdot x \cdot \cos \varphi).$$

Die Querkraft Q_g ist $= 0$, da infolge Eigengewicht die Stützlinie mit der Bogenachse zusammenfällt. Die Gesamtquerkraft ist daher

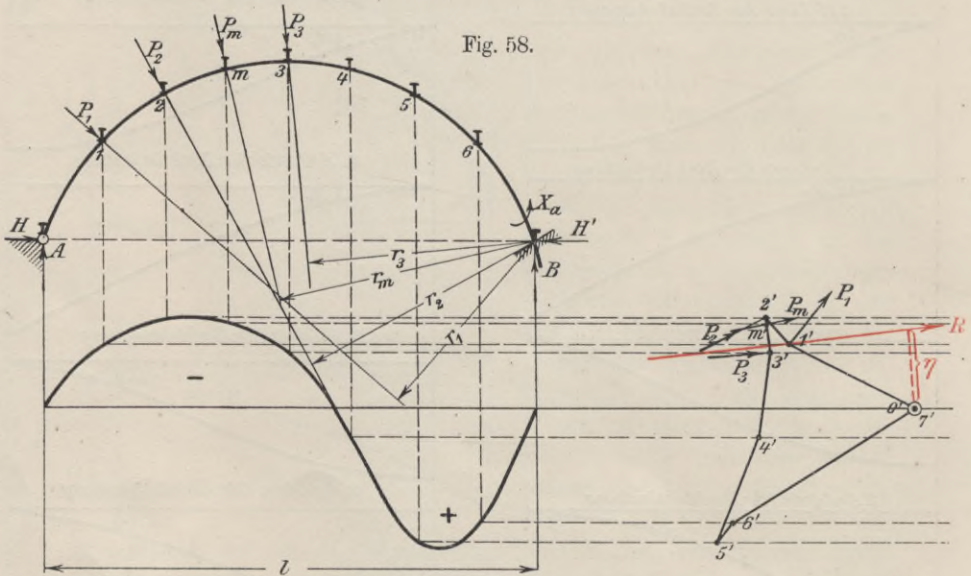
$$Q_{min}^{p+g} = -Q_{min}^p + Q_g = -Q_{min}^p + C' \cdot g, \text{ worin } C' = 0 \text{ ist.}$$

Daher wird

$$Q_{max}^{p+g} = +Q_{min}^p + C' \cdot g = +Q_{min}^p = A \cdot \cos \varphi - H \sin \varphi - p x \cos \varphi.$$

Die größte positive Querkraft ist also stets gleich der größten negativen.

Einfluß schräg gerichteter Kräfte.



$$\text{Es ist } X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma}}{\delta_{aa}} \cdot \frac{E \cdot J'}{E \cdot J'}.$$

Hierin haben die Werte $E \cdot J' \cdot \delta_{ma}$ die auf S. 19 beschriebene Bedeutung und $\sum P_m \delta_{ma}$ kann wieder als statisches Moment der im Verschiebungsplan um 90° gedrehten Kräfte P_m in bezug auf den Pol 0 gedeutet werden $= -R \cdot \eta$. Das statische Moment wird negativ, da die Verschiebungen δ_{ma} negative Verschiebungen, d. h. den Krafrichtungen entgegen gerichtete Verschiebungen sind. $EJ' \cdot \delta_{aa} = \frac{1}{8} l$.

Daher
$$X_a = -\frac{R \cdot \eta}{\frac{1}{3} l} = -\frac{8 R \cdot \eta}{l}.$$

Nunmehr können sämtliche übrigen Reaktionen bestimmt werden. Es ergibt sich A durch eine Momentengleichung in bezug auf die rechte Einspannung.

$$A = \frac{P_1 \cdot r_1 + P_2 \cdot r_2 + P_m \cdot r_m + P_3 \cdot r_3 + X_a}{l};$$

für X_a ist der absolute Wert einzusetzen, da das negative Zeichen bereits durch den Pfeilsinn berücksichtigt ist.

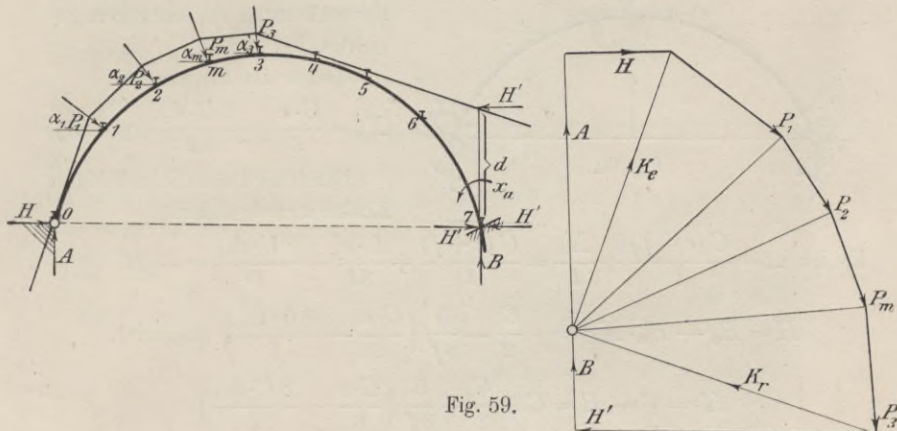


Fig. 59.

Dann kann B aus der Bedingung „ $\Sigma V = 0$ “ ermittelt werden.

$$H = H_0 - H_a \cdot X_a, \text{ worin } H_0 = \frac{\Sigma P_m \delta_{mh}}{\delta_{hh}} \text{ (s. S. 21 u. 22)} = -\frac{R_h \cdot \eta_h}{\delta_{hh}}.$$

$$\text{Daher wird } H = -\frac{R_h \cdot \eta_h}{\delta_{hh}} - \frac{5}{8f} \left(-\frac{8 R \cdot \eta}{l} \right) = -\frac{R_h \cdot \eta_h}{\delta_{hh}} + \frac{5}{f} \cdot \frac{R \cdot \eta}{l}.$$

$$H' = P_1 \cdot \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_m \cos \alpha_m + P_3 \cos \alpha_3 + H.$$

Nunmehr kann die Stützlinie gezeichnet werden, wodurch Momente und Querkräfte bestimmt sind (Fig. 59). Der rechte Kämpferdruck muß im Abstand $d = -\frac{X_a}{H'}$ von der Einspannung die Einspannungsvertikale schneiden.

Einfluß von Bremskräften.

Die Übertragung der Bremskräfte erfolge wie beim beiderseits eingespannten Bogen im Bogenscheitel, exzentrisch zur Bogenachse. Infolgedessen wirkt auf den Bogenscheitel ein Kräftepaar vom Moment $\mu = C \cdot e$ und eine Einzelkraft C . Der Einfluß der beiden Kraftwirkungen werde wieder getrennt berechnet. Zunächst wirke nur das Moment μ . Es ist

$$\text{alsdann } X_a = \frac{\int M_0 M_a dx}{E \cdot J \cdot \delta_{aa}} = \frac{+\frac{1}{24} \mu \cdot l}{\frac{1}{3} l} = \frac{\mu}{3} = \frac{C \cdot e}{3}.$$

$\int M_0 M_a dx$ ist nach Seite 26 = $+\frac{1}{24} \mu \cdot l$ gesetzt (= dem dort berechneten Wert $\int M_0 M_b dx$, da hier X_a am rechten Kämpfer, dort X_b am rechten Kämpfer wirkt).

Nunmehr wirke nur die im Scheitel angreifende Kraft C allein. Infolgedessen wird

$$X_a = -\frac{C \cdot \delta_{ca}}{\delta_{aa}} = -\frac{C \cdot \delta_{ca}}{\frac{1}{8} l} = -\frac{8 C \cdot \delta_{ca}}{l}.$$

δ_{ca} wird negativ, da die Krafrichtung C der Verschiebungsrichtung δ_{ca} entgegen gerichtet ist.

Daher ist insgesamt

$$X_a = \frac{C \cdot e}{3} - \frac{8 C \cdot \delta_{ca}}{l} \quad (\text{positiv}).$$

Damit sind sämtliche übrigen Reaktionen bestimmt.

Es ist $A = \frac{C(e+f)}{l} + \frac{X_a}{l} = \frac{C(e+f)}{l} + \frac{C \cdot e}{3l} - \frac{8 C \cdot \delta_{ca}}{l^2} = -B.$

$$H = H_0 - H_a \cdot X_a = -\frac{C}{2} - \frac{5}{8f} \left(\frac{C \cdot e}{3} - \frac{8 C \cdot \delta_{ca}}{l} \right) \quad (\text{negativ}).$$

$$H' = C - H = C + \frac{C}{2} + \frac{5}{8f} \left(\frac{C \cdot e}{3} - \frac{8 C \cdot \delta_{ca}}{l} \right) \\ = \frac{3}{2} C + \frac{5}{8f} \left(\frac{C \cdot e}{3} - \frac{8 C \cdot \delta_{ca}}{l} \right) \quad (\text{positiv}).$$

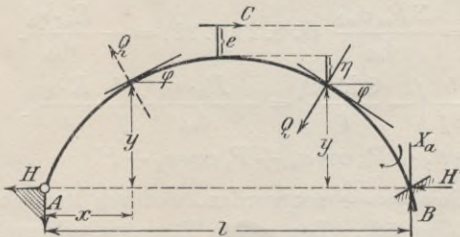


Fig. 61.

Das Biegemoment für irgend einen Querschnitt links vom Scheitel ist somit = $H \cdot y - A \cdot x$, rechts vom Scheitel = $H \cdot y - A \cdot x + C(e + \eta)$.

Die Querkraft Q ergibt sich für irgend einen Querschnitt links vom Scheitel = $H \sin \varphi - A \cos \varphi$, rechts

vom Scheitel = $H' \sin \varphi - B \cos \varphi$. Hierin sind für H, H', A und B die absoluten Werte einzusetzen.

Einfluß der Temperaturänderung.

Setzt man den Einfluß der äußeren Lasten = 0 und berücksichtigt nur den Einfluß der Temperaturänderung, so wird

$$X_{at} = \frac{E \cdot J' \cdot \delta_{at}}{E \cdot J' \cdot \delta_{aa}} = \frac{E \cdot J' \cdot \delta_{at}}{\frac{1}{8} l}.$$

Hierin ist nach Seite 29 $E \cdot J' \cdot \delta_{at} = -\frac{5 \epsilon t l^2 \cdot E J' \operatorname{tg} \alpha}{32 f^2}$.

Da $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4f}{l}$, so wird

$$X_{at} = -\frac{5 \varepsilon t E J'}{f} \quad (\text{bei Temperaturerhöhung}).$$

$$H_t = H_{ot} - H_a \cdot X_{at} = \frac{15 \varepsilon E t J'}{8 f^2} + \frac{5}{8 f} \cdot \frac{5 \varepsilon t E J'}{f} = \frac{5 \varepsilon E t J'}{f^2}.$$

Bei Temperaturerniedrigung wird $H_t = -\frac{5 \varepsilon E t J'}{f^2}$.

A_t ergibt sich aus einer Momentengleichung für die rechte

$$\text{Einspannung} = \frac{X_{at}}{l} = \frac{5 \varepsilon E J' \cdot t}{f \cdot l};$$

B_t ist gleich groß, nur entgegengesetzt gerichtet. Damit sind Momente und Querkräfte für alle Querschnitte bestimmt. Für den Scheitelquerschnitt ist

z. B.

$$M_S = A_t \cdot \frac{l}{2} - H_t \cdot f = \frac{5 \varepsilon E J' t}{f \cdot l} \cdot \frac{l}{2} - \frac{5 \varepsilon E t J'}{f^2} \cdot f = -\frac{5 \varepsilon t E J'}{2 f}.$$

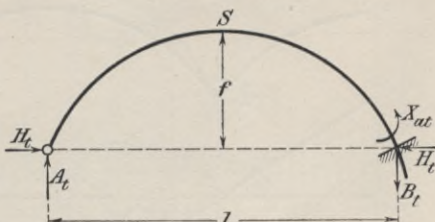


Fig. 62.

C. Die dreifach statisch unbestimmte vollwandige Bogenbrücke mit drei Öffnungen.

Führt man als statisch unbestimmte Größen die Gegendrückte X_a und X_b an den beweglichen Auflagern ein, so ist das statisch unbestimmte Hauptsystem ein Zweigelenkbogen mit überkragenden Enden. Zwischen den statisch unbestimmten Größen bestehen die Gleichungen

$$L_a + 1 \cdot \delta_a = \sum P_m \delta_{ma} - X_a \cdot \delta_{aa} - X_b \cdot \delta_{ab} + \delta_{at}$$

$$L_b + 1 \cdot \delta_b = \sum P_m \delta_{mb} - X_a \cdot \delta_{ba} - X_b \cdot \delta_{bb} + \delta_{bt}$$

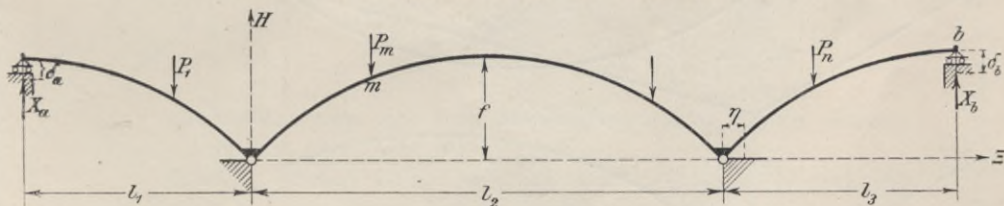


Fig. 63.

Darin sind L_a bzw. L_b die virtuellen Arbeiten der infolge $X_a = -1$ bzw. $X_b = -1$ entstehenden Auflagerreaktionen des statisch unbestimmten Hauptsystems. Die wirklichen Verschiebungen der Angriffspunkte der äußeren Kräfte sind dabei bezogen auf das Achsensystem $\Xi-H$. Die

Momentenflächen für die Zustände $X_a = -1$ und $X_b = -1$ sind in den Figuren 65 und 67 dargestellt. Der zur Berechnung der M_a -Fläche erforderliche Horizontalschub H_a ergibt sich aus der Einflußlinie für den Horizontalschub H eines Zweigelenkbogens mit überkragenden Enden, die nach dem Schönhöferschen Verfahren gefunden werden kann (s. S. 17 bis 19 der bereits erwähnten Schönhöferschen Schrift), wobei nur zu

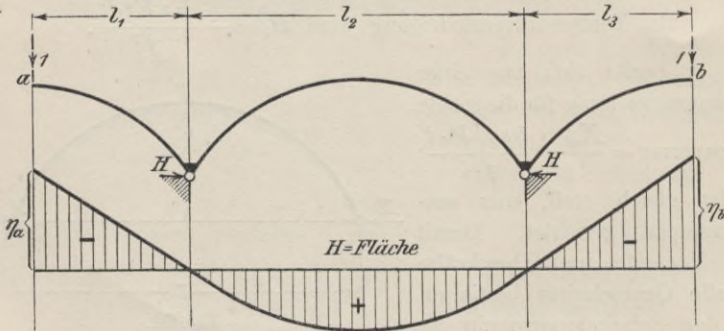


Fig. 64.

beachten ist, daß die Einflußlinie unter den Kragarmen geradlinig verläuft und zwar so, daß die Geraden Tangenten an die für den Zweigelenkbogen ermittelte H -Linie sind (Fig. 64). Es ist alsdann $H_a = -1 \cdot \eta_a$. Bei Belastung des statisch unbestimmten Hauptsystems mit $X_b = -1$ ergibt sich $H_b = -1 \cdot \eta_b$.

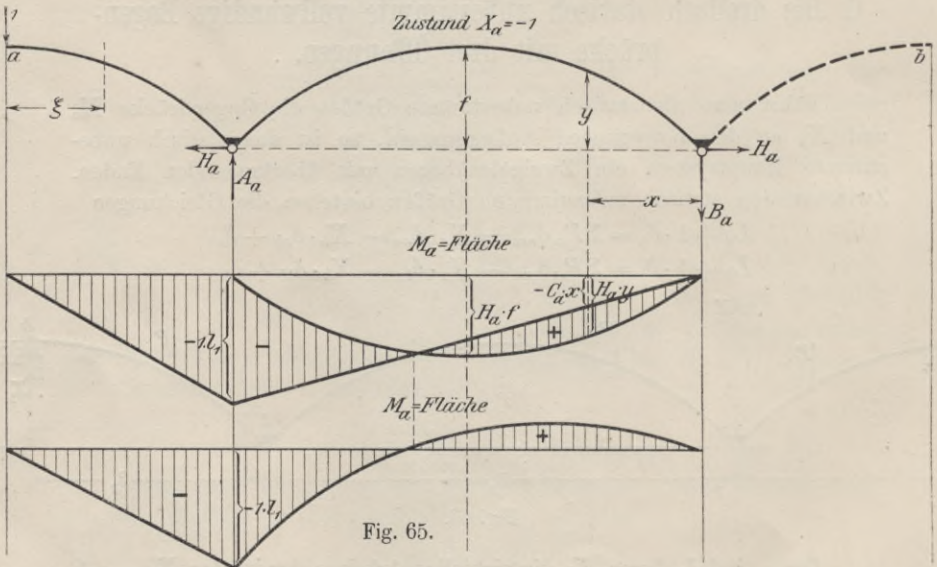


Fig. 65.

Für die Ermittlung der M_a -Fläche beachte man, daß für irgend einen Querschnitt der Mittelöffnung $M_a = H_a \cdot y - B_a \cdot x$ ist. Der zugehörige Teil der Momentenfläche setzt sich daher zusammen aus einer

positiven Bogenfläche vom Pfeil $H_a \cdot f$ und einer negativen Dreiecksfläche mit der größten Ordinate $-B_a \cdot l_2 = -\frac{1 \cdot l_1}{l_2} \cdot l_2 = -1 \cdot l_1$ unter dem linken Kämpfer. Für irgend einen Querschnitt des Kragarmes ist $M_a = -1 \cdot \xi$, der zugehörige Teil der Momentenfläche also eine Gerade (s. Fig. 65).

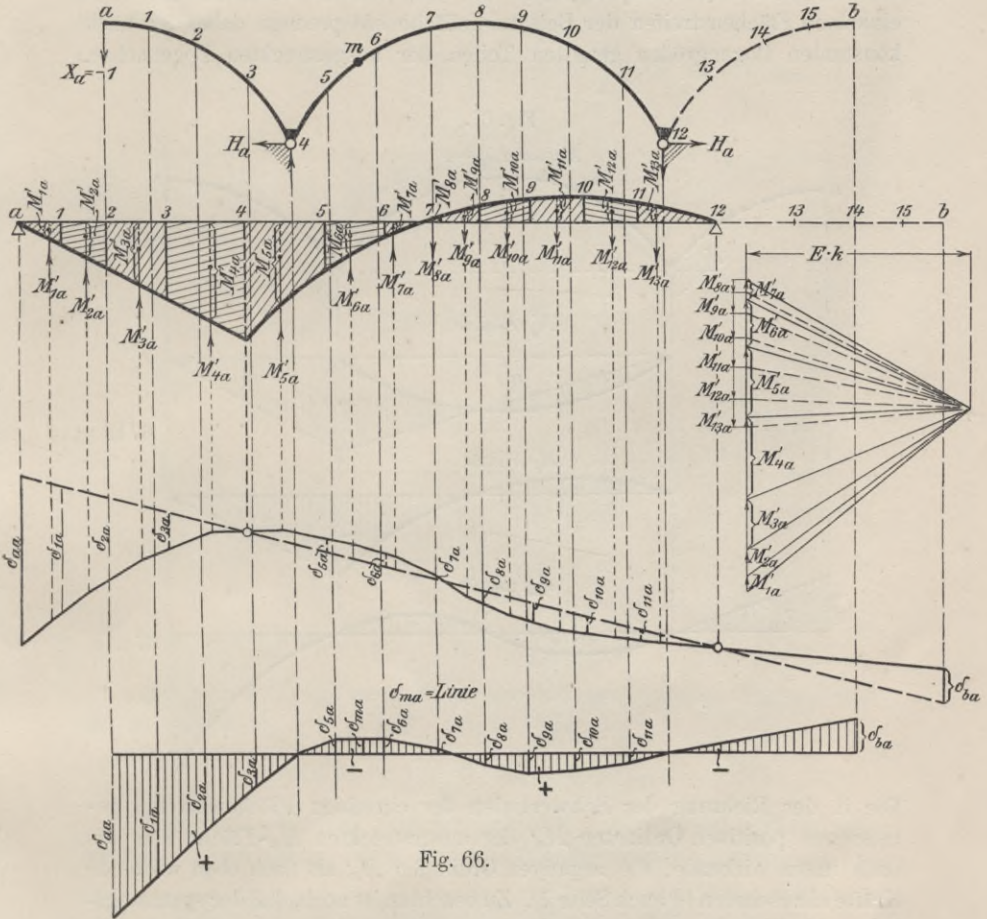


Fig. 66.

Sinngemäß ergibt sich auch die Momentenfläche für den Zustand $X_b = -1$ (s. Fig. 67b).

Nunmehr können leicht sämtliche in den Elastizitätsgleichungen enthaltenen Verschiebungen ermittelt werden.

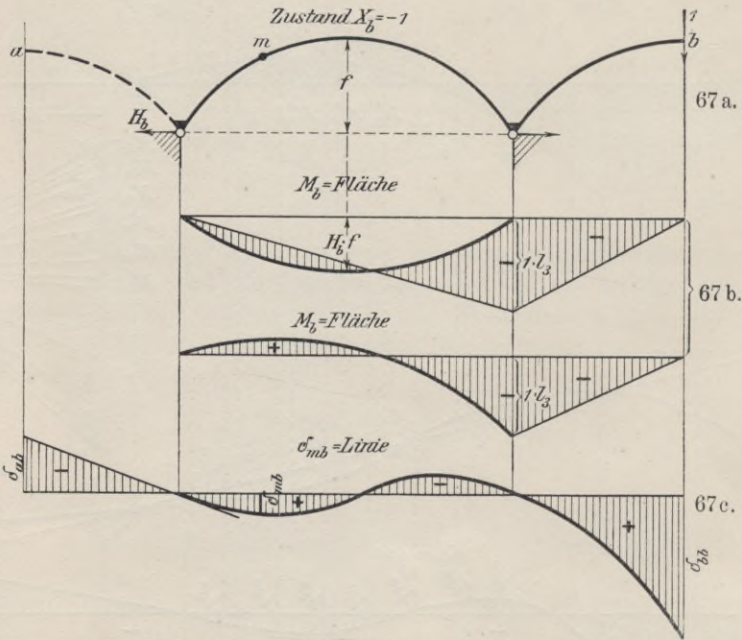
I. $J \cos \varphi$ sei veränderlich, die Bogenform beliebig.

1. Einfluß der Momente auf die Durchbiegungen δ_{ma} und δ_{mb} .

Die δ_{ma} -Linie möge mit Hilfe des Schönhöferschen Verfahrens der konstanten Bogengrößen berechnet werden (Fig. 66) (s. auch S. 5 bis 7). Es

werde zunächst die Bogenachse der Mittelöffnung und der anschließenden Kragarme in n Teile so eingeteilt, daß für jeden dieser Teile der Wert $\frac{s}{J}$ zu einer konstanten Größe $= \frac{1}{k}$ wird. Alsdann zeichne man mit der konstanten Polweite $E \cdot k$ für den mit der ausgestreckten M_a -Fläche belasteten ausgestreckten Bogen ein Seilpolygon, dessen Schlußlinie durch Herunterloten der Kämpferpunkte auf die Seillinie bestimmt ist. Die einzelnen Flächenstreifen der Belastungsfläche entsprechen dabei den nach konstanten Bogengrößen geteilten Teilen der ausgestreckten Bogenachse.

Fig. 67.



Die in der Richtung der Schwerlinien der einzelnen Flächenstreifen gemessenen positiven Ordinaten M_a' der ausgestreckten M_a -Fläche sind als nach unten wirkende, die negativen Ordinaten M_a' als nach oben wirkende Kräfte anzunehmen (s. auch Seite 7). Zu beachten ist noch, daß der spannungslose rechte Kragarm sich geradlinig mitverschiebt und zwar so, daß die Gerade tangential an die elastische Linie verläuft. Die so ermittelte Biegungslinie trage man nunmehr unter dem gekrümmten Stabzug auf, d. h. man trage die Durchbiegungen der Punkte des ausgestreckten Stabzuges senkrecht unter den entsprechenden Punkten des gekrümmten Stabzuges als Ordinaten auf. Dadurch ergeben sich die Werte δ_{ma} , δ_{aa} und δ_{ba} .

Die Bestimmung der δ_{mb} -Linie erfolgt in derselben Weise wie die Bestimmung der δ_{ma} -Linie. Nur tritt an Stelle der M_a -Fläche als Belastungsfläche die M_b -Fläche, die in Fig. 67 b dargestellt ist. Dadurch erhält man die Werte δ_{mb} , δ_{ab} und δ_{bb} .

2. Einfluß der Längskräfte auf die Durchbiegungen δ_{ma} und δ_{mb} .

Da die Längskräfte nur bei flachen Bögen eine Rolle spielen, dann aber die vertikalen Kräfte nur sehr geringen Einfluß auf die Längskräfte haben, begeht man keinen nennenswerten Fehler, wenn man nur den Einfluß der Horizontalkräfte auf die Längskräfte berücksichtigt. Genau genug darf dann gesetzt werden $N_{ma} = N_{(m+1)a} = \dots = + H_a$. Daher ist nach S. 7

$$w_{ma} = \frac{\sigma_{(m+1)a}}{E} \operatorname{tg} \varphi_{m+1} - \frac{\sigma_{ma}}{E} \operatorname{tg} \varphi_m = - \frac{H_a}{EF} (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1}).$$

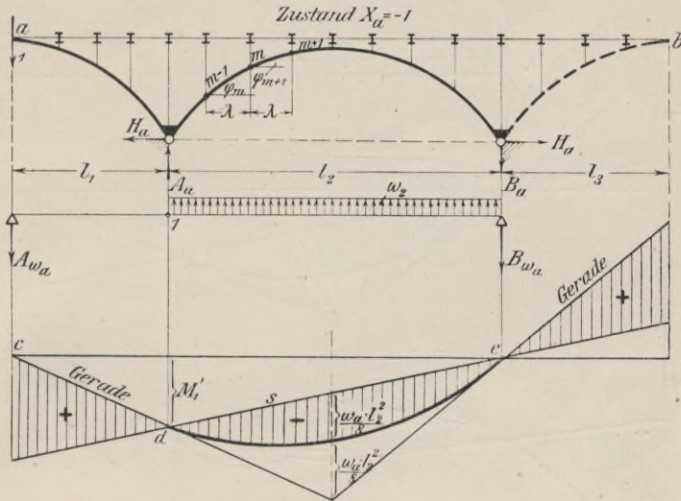


Fig. 68.

Setzt man für F einen Mittelwert der verschiedenen Werte $F = F_0$ ein, so wird

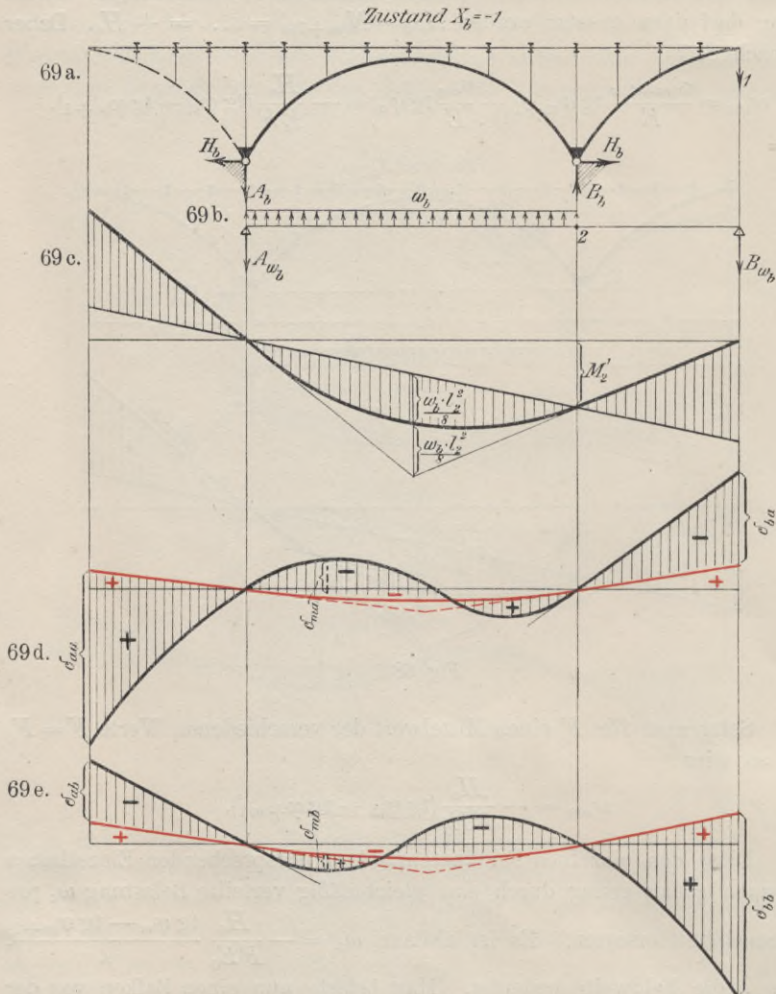
$$w_{ma} = - \frac{H_a}{F E_0} (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1}).$$

Diese den einzelnen Feldknotenpunkten entsprechenden Einzellasten darf man genau genug durch eine gleichmäßig verteilte Belastung ω_a pro Längeneinheit ersetzen. Es ist alsdann $\omega_a = - \frac{H_a \operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1}}{F E_0 \lambda}$, wenn λ die Feldweite bedeutet. Man belaste nun einen Balken von der Spannweite $l_1 + l_2$ über der Strecke l_2 mit der negativen Belastung ω_a pro Längeneinheit, berechne zunächst das Moment $M'_1 = A_{\omega_a} = \frac{\omega_a \cdot l_2^2}{2(l_1 + l_2)} \cdot l_1$, trage M'_1 unter 1 in irgend einem Maßstabe als Ordinate auf, ziehe den Linienzug $c-d-e$ und zeichne unter de eine Parabel vom Pfeil $\frac{\omega_a \cdot l_2^2}{8}$. An die Endpunkte der Parabel lege man nunmehr Tangenten und trage die Schlußlinie s in die Momentenkurve ein, die der Spann-

weite l_2 entspricht. Die durch die Momentenlinie und die Schlußlinie abgeschnittenen Ordinaten sind dann die Durchbiegungen δ_{ma} infolge der Längskräfte allein.

Ebenso wird der Einfluß der Längskräfte auf die Durchbiegungen δ_{mb} ermittelt (s. Fig. 69a — 69c).

Fig. 69.



Die aus 1 und 2 resultierenden Biegelinien sind in Fig. 69d und 69e dargestellt. Die den Zuständen I. und II. entsprechenden Biegungsflächen sind unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen so aufeinander gelegt, daß die positiven Flächen sich addieren, während die negativen von den positiven in Abzug gebracht sind.

Nunmehr können die Einflußlinien für X_a und X_b berechnet werden. Es ergibt sich durch Auflösung der auf Seite 45 aufgestellten Gleichungen für $\Sigma P_m = 1 t$ und $\delta_{at} = 0$:

$$X_a = \frac{(1 \cdot \delta_{ma} - L_a - \delta_a) \cdot \delta_{bb} - (1 \cdot \delta_{mb} - L_b - \delta_b) \delta_{ba}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2},$$

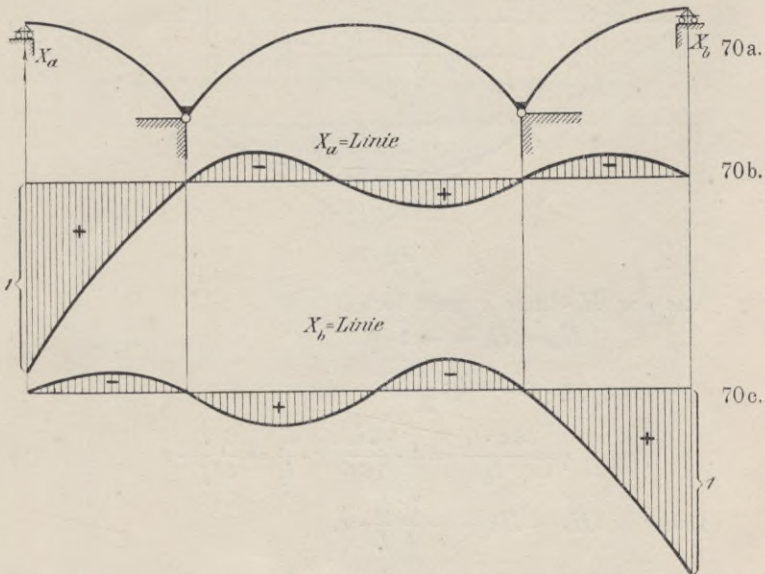
$$X_b = \frac{(1 \cdot \delta_{mb} - L_b - \delta_b) \cdot \delta_{aa} - (1 \cdot \delta_{ma} - L_a - \delta_a) \delta_{ab}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}.$$

Bei starren Widerlagern wird

$$X_a = \frac{\delta_{ma} \delta_{bb} - \delta_{mb} \cdot \delta_{ba}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}.$$

$$X_b = \frac{\delta_{mb} \delta_{aa} - \delta_{ma} \delta_{ab}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}.$$

Fig. 70.



Man berechne X_a und X_b für eine Reihe von Lastenstellungen und trage diese Werte von einer Horizontalen senkrecht unter der jedesmaligen Lastenstellung als Ordinaten ab. Durch Verbindung der Endpunkte der Ordinaten entstehen sodann die Einflußlinien für X_a und X_b (s. Fig. 70b und 70c).

Von diesen Einflußlinien können wieder die Einflußlinien für sämtliche übrigen statischen Größen mit Hilfe der Formel $Y = Y_0 - Y_a X_a - Y_b X_b$ abgeleitet werden. Das Verfahren ist ganz allgemein und gilt für jede Bogenform.

II. Vereinfachungen.

In nachfolgenden Untersuchungen sei $J \cdot \cos \varphi = \text{Const.}$ sowie parabolische Bogenform des Mittelbogens und Symmetrie vorausgesetzt. Auch mögen der Einfachheit halber starre Widerlager angenommen sein. Da die Längskräfte infolge des wohl meistens zur Anwendung gelangenden flachen Bogenstichs erheblichen Einfluß auf die Formänderungen haben werden, so sollen sie berücksichtigt werden.

1. Einfluß der Momente auf die Durchbiegungen δ_{ma} .

Die H_0 -Linie ist eine Parabel vom Pfeil $\varkappa = \frac{3 l_2}{16 f} \cdot r$ (S. 3, 2), an welche sich unter den Kragarmen tangential an die Endpunkte der Parabel Gerade anschließen.

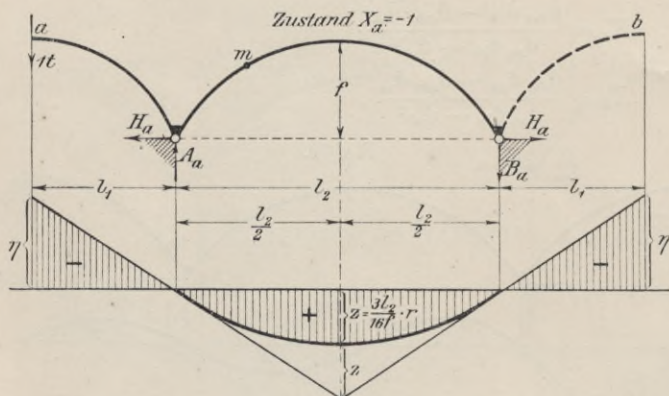


Fig. 71.

Aus der H_0 -Linie ergibt sich

$$H_a = H_b = -1 \cdot \eta$$

$$\eta : 2\varkappa = l_1 : \frac{l_2}{2}$$

$$\eta = \frac{4\varkappa \cdot l_1}{l_2} = 4 \cdot \frac{3 l_2}{16 f} \cdot r \cdot \frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r.$$

Daher $H_a = H_b = -\frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r.$

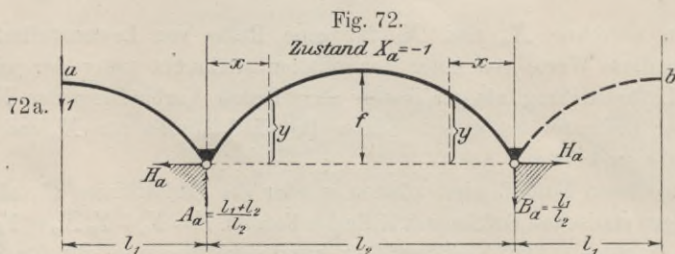
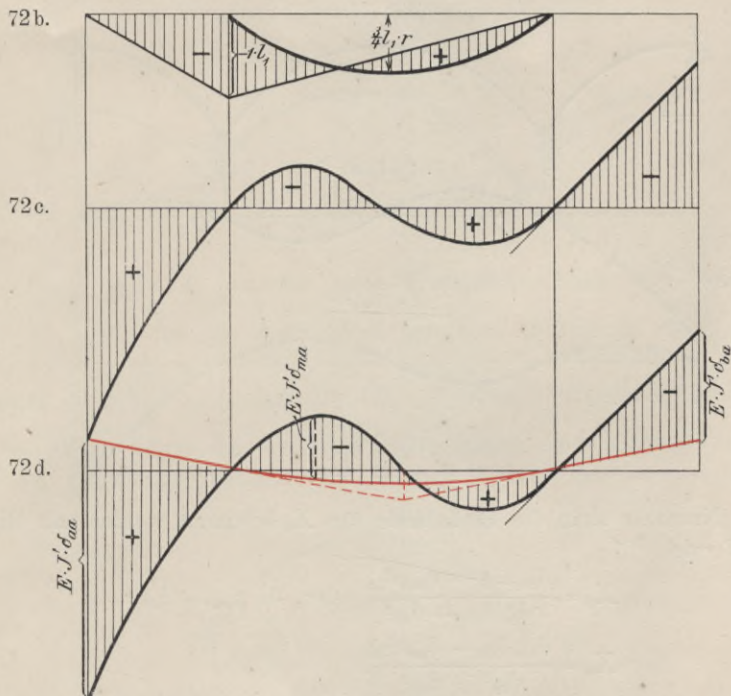


Fig. 72.

Damit ist die in Fig. 72b dargestellte Momentenfläche für den Zustand $X_a = -1$ bestimmt. Der Einfluß der Momente auf die $E \cdot J \cdot \cos \varphi$ -fachen Durchbiegungen δ_{ma} wird am zweckmäßigsten zeichnerisch ermittelt. Man belaste einen Balken von der Spannweite $l_1 + l_2$ mit der M_a -Fläche, teile sich die Fläche in verschiedene nicht zu große Flächenstreifen ein, deren Flächeninhalte als Kräfte in ihren Schwerpunkten angreifen, wobei die positiven Flächen nach unten, die negativen nach oben wirken und zeichne mit der Polweite 1 ein Seilpolygon. Alsdann

trage man die den Auflagergelenken der Mittelöffnung entsprechende Schlußlinie ein. Diese begrenzt mit dem Seilpolygon die $E \cdot J \cdot \cos \varphi \cdot \delta_{ma}$ -Fläche. Der spannungslose rechte Kragarm bewegt sich geradlinig mit und zwar tangential an die elastische Linie. Die Biegelinie ist in Fig. 72c dargestellt, wo die Ordinaten bereits von einer Horizontalen abgetragen sind (s. auch S. 47).



2. Einfluß der Längskräfte auf die Durchbiegungen δ_{ma} .

Zu der den Einfluß der Momente berücksichtigenden $E \cdot J \cdot \cos \varphi$ -fachen Biegelinie muß noch die auf Seite 49 dargestellte infolge der Längskräfte entstehende $\frac{E \cdot J \cdot \cos \varphi}{\lambda}$ -fache Biegelinie hinzuaddiert werden. Sie ist für die Mittelöffnung eine Parabel und verläuft für die Seitenöffnungen geradlinig und zwar tangential an die Parabelendpunkte. Der Stich der Parabel ist

$$\frac{\omega_a \cdot l_2^2}{8}, \text{ worin } \omega_a = - \frac{H_a \operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1}}{E F_0 \lambda} \cdot E \cdot J \cdot \cos \varphi.$$

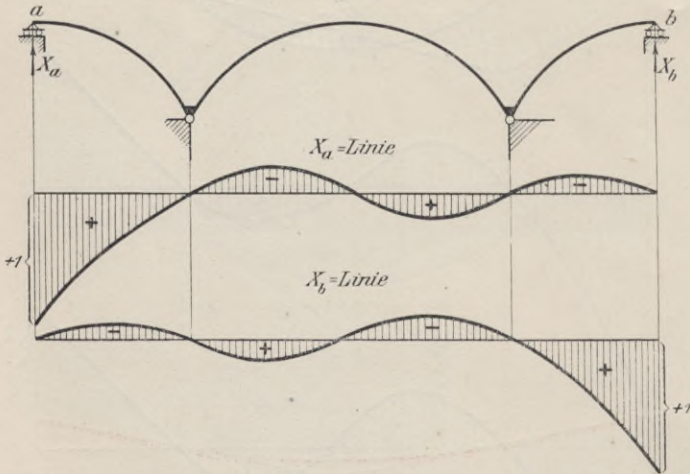
Für $J \cos \varphi$ setze man den Mittelwert J' aller Werte $J \cdot \cos \varphi$. Ferner wird für einen Parabelbogen $\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1} = \frac{8 f \cdot \lambda}{l_2^2}$. Daher ist

$$\omega_a = - \frac{3 l_1}{4 f} \cdot r \cdot \frac{E \cdot J'}{E \cdot F_0} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{8 f \cdot \lambda}{l_2^2} = - 6 \frac{l_1}{l_2^2} \cdot \frac{J'}{F_0} \cdot r.$$

Die Parabelfläche ist negativ, die seitlich anschließenden Dreiecksflächen sind positiv. In Fig. 72d ist die resultierende Biegelinie

dargestellt. Senkrecht unter den Punkten m , a , b ergeben sich die Durchbiegungen $E \cdot J' \delta_{ma}$, $E \cdot J' \delta_{aa}$, $F \cdot J' \delta_{ba}$. Die Biegelinie für den Zustand $X_b = -1$ ist wegen der vorausgesetzten Symmetrie das Spiegelbild der $E \cdot J' \delta_{ma}$ -Linie. Sie braucht also nicht besonders ermittelt zu werden. Senkrecht unter den Punkten m , a , b können die Durchbiegungen $E \cdot J' \delta_{mb}$, $E \cdot J' \delta_{ab}$, $E \cdot J' \delta_{bb}$ abgegriffen werden.

Fig. 73.



Nunmehr kann die Einflußlinie für X_a bestimmt werden mit Hilfe der Formel

$$X_a = \frac{\delta_{ma} \delta_{bb} - \delta_{mb} \delta_{ba}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2} \quad \text{oder, da } \delta_{aa} = \delta_{bb}$$

$$X_a = \frac{\delta_{ma} \delta_{bb} - \delta_{mb} \delta_{bb}}{\delta_{aa}^2 - \delta_{ab}^2}.$$

Die X_b -Linie ist sodann das Spiegelbild der X_a -Linie. Von diesen Einflußlinien können wieder die Einflußlinien für sämtliche übrigen statischen Größen mit Hilfe der allgemeinen Formel $Y = Y_0 - Y_a \cdot X_a - Y_b \cdot X_b$ abgeleitet werden, worauf hier nicht näher eingegangen werden möge.

Einfluß von Bremskräften.

Die Bremskraft möge im Bogenscheitel der Mittelöffnung übertragen werden und zwar exzentrisch zur Bogenachse (Fig. 75). Diese Belastung

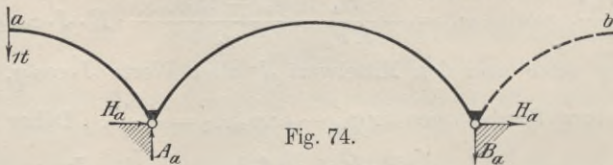


Fig. 74.

kann wieder ersetzt werden durch ein Kräftepaar vom Moment $\mu = C \cdot e$ und eine im Scheitelachspunkt e angreifende Einzellast C . Der Einfluß der beiden Kraftwirkungen möge getrennt berechnet werden.

I. Es wirke nur das Moment $\mu = C \cdot e$.

Zwischen den statisch unbestimmten Größen bestehen alsdann die Gleichungen

$$E \cdot J \cos \varphi (X_a \delta_{aa} + X_b \delta_{ab}) = \int M_0 M_a dx + \int \frac{N_0 N_a dx}{E \cdot F \cdot \cos \varphi} \cdot E \cdot J \cdot \cos \varphi$$

$$E \cdot J \cos \varphi (X_a \delta_{ba} + X_b \delta_{bb}) = \int M_0 M_b dx + \int \frac{N_0 N_b dx}{E \cdot F \cdot \cos \varphi} \cdot E \cdot J \cdot \cos \varphi.$$

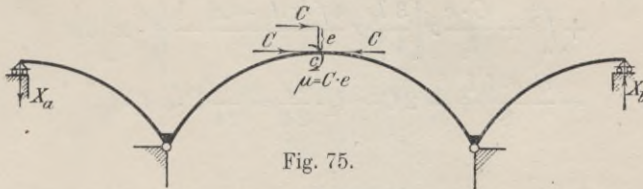


Fig. 75.

Nach Seite 25 ist für einen Querschnitt links vom Scheitel $M_0 = -\frac{C \cdot e}{l_2} \cdot x$ für den symmetrisch gelegenen Querschnitt rechts vom Scheitel $= +\frac{C \cdot e}{l_2} \cdot x$ (s. auch Fig. 76). N_0 kann vernachlässigt werden, da bei flachen Bögen die vertikalen Kräfte keinen nennenswerten Einfluß auf die Längskräfte haben, beim Zustand $X = 0$ aber nur vertikale

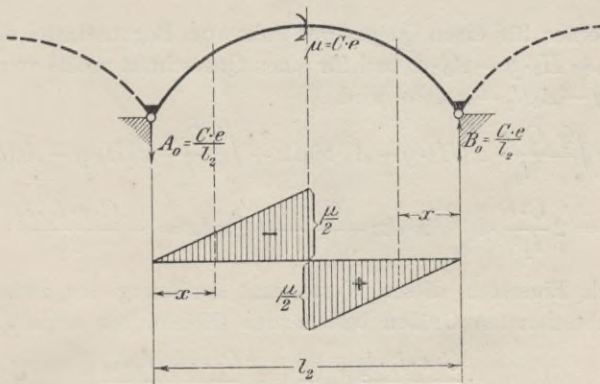


Fig. 76.

Reaktionen am statisch unbestimmten Hauptsystem angreifen. Bei steilen Bögen aber kann der Einfluß der Längskräfte überhaupt vernachlässigt werden. Damit fallen die den Einfluß der Längskräfte berücksichtigenden Integrale aus den Elastizitätsgleichungen heraus.

Das Moment M_a für irgend einen Querschnitt links vom Bogenscheitel der Mittelöffnung ist

$$= H_a \cdot y - B_a (l_2 - x) = \frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r \cdot \frac{4f \cdot x (l_2 - x)}{l_2^2} - \frac{l_1}{l_2} (l_2 - x) \text{ (s. Fig. 72 u. 74);}$$

rechts vom Scheitel wird

$$M_a = H_a \cdot y - B_a \cdot x = \frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r \frac{4f \cdot x(l_2 - x)}{l_2^2} - \frac{l_1}{l_2} \cdot x.$$

Da die Momente M_0 für die Kragarme = 0 sind, so erstrecken sich die Integrale nur über die Mittelöffnung. Es wird daher

$$\begin{aligned} \int M_0 M_a dx &= \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{C \cdot e}{l_2} \cdot x \left[\frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r \frac{4f \cdot x(l_2 - x)}{l_2^2} - \frac{l_1}{l_2} (l_2 - x) \right] dx \\ &+ \int_0^{\frac{l_2}{2}} + \frac{C \cdot e}{l_2} x \left[\frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r \frac{4f \cdot x(l_2 - x)}{l_2^2} - \frac{l_1}{l_2} \cdot x \right] dx \\ &= \frac{C \cdot e \cdot l_1 \cdot l_2}{8} - 2 C \cdot e \cdot l_1 \cdot \frac{l_2}{24} = \frac{1}{24} C \cdot e \cdot l_1 \cdot l_2. \end{aligned}$$

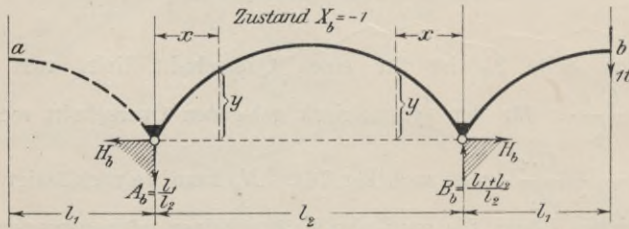


Fig. 77.

Da ferner für einen Querschnitt links vom Bogenscheitel der Mittelöffnung $M_b = H_b \cdot y - A_b \cdot x$ und für einen Querschnitt rechts vom Scheitel $M_b = H_b \cdot y - A_b(l_2 - x)$, so wird

$$\begin{aligned} \int M_0 M_b dx &= \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{C \cdot e}{l_2} \cdot x (H_b \cdot y - A_b \cdot x) dx + \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{C \cdot e}{l_2} \cdot x [H_b \cdot y - A_b(l_2 - x)] dx \\ &= 2 \frac{C \cdot e}{l_2^2} \cdot l_1 \int_0^{\frac{l_2}{2}} x^2 dx - \frac{C \cdot e \cdot l_1}{l_2} \int_0^{\frac{l_2}{2}} x dx = - \frac{C \cdot e \cdot l_1 \cdot l_2}{24}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte und Auflösung der zwischen den statisch unbestimmten Größen bestehenden Gleichungen ergibt sich

$$X_a = \frac{\frac{C \cdot e \cdot l_1 \cdot l_2}{24} \delta_{bb} - \left(- \frac{C \cdot e \cdot l_1 \cdot l_2 \delta_{ba}}{24} \right)}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}$$

$$X_a = \frac{C \cdot e \cdot l_1 \cdot l_2 (\delta_{bb} + \delta_{ba})}{24(\delta_{aa} + \delta_{ba})(\delta_{aa} - \delta_{ba})};$$

da $\delta_{bb} = \delta_{aa}$ und δ_{ba} negativ ist, ergibt sich

$$X_a = \frac{C \cdot e \cdot l_1 \cdot l_2 (\delta_{aa} - \delta_{ba})}{24(\delta_{aa} + \delta_{ba})(\delta_{aa} - \delta_{ba})} = \frac{C \cdot e \cdot l_1 \cdot l_2}{24(\delta_{aa} + \delta_{ba})}$$

$$X_b = - \frac{C \cdot e \cdot l_1 \cdot l_2}{24(\delta_{aa} + \delta_{ab})}.$$

II. Es wirke nur die im Scheitelachspunkt angreifende Kraft C .
Infolge dieses Belastungszustandes wird

$$X_a = \frac{C \cdot \delta_{ca} \delta_{bb} - C \cdot \delta_{cb} \cdot \delta_{ba}}{\delta_{aa} \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}$$

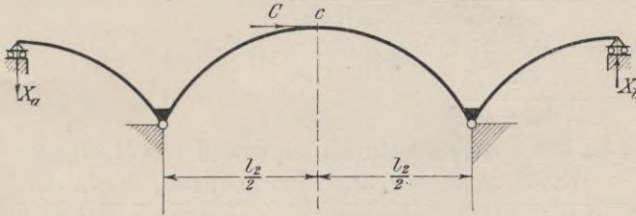


Fig. 78.

Die Werte δ_{ca} und δ_{cb} können mit Hilfe von aus den Biegelinien infolge $X_a = -1$ bzw. $X_b = -1$ abgeleiteten Verschiebungsplänen ermittelt werden, wie aus Fig. 79 ersichtlich ist.

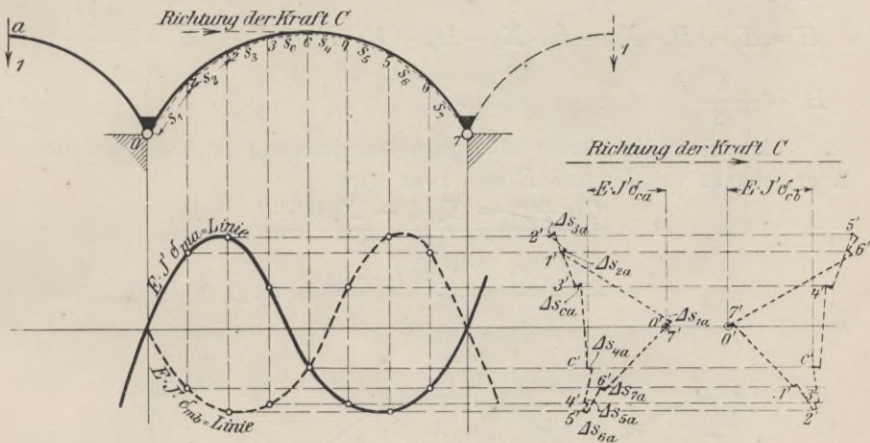


Fig. 79.

Um möglichst genaue Werte für die Verschiebungen zu erhalten, ist es zweckmäßig, die Biegelinien in stark verzerrem Maßstabe aufzutragen. Da in den Biegelinien der Einfluß der Längskräfte berücksichtigt ist, müssen auch im Verschiebungsplan die Längenänderungen Δs_a bzw. Δs_b infolge der Längskräfte berücksichtigt werden. Es ist für irgend einen Stab

$$\Delta s_a = N_a \cdot \frac{s}{E \cdot F_0} = \frac{H_a \cdot s}{E F_0}; \quad \Delta s_b = N_b \cdot \frac{s}{E F_0} = H_b \cdot \frac{s}{E F_0} = H_a \cdot \frac{s}{E F_0},$$

wobei F_0 der Mittelwert der verschiedenen Werte F ist. Der den Kragarmen entsprechende Teil der Verschiebungspläne wurde fortgelassen, da er nicht gebraucht wird. Wegen der Symmetrie wird $\delta_{ca} = \delta_{cb}$, jedoch ist δ_{ca} negativ und δ_{cb} positiv, da die Kraft C der Verschiebung

δ_{ca} entgegen gerichtet ist, jedoch denselben Sinn hat wie die Verschiebung δ_{cb} . Da auch δ_{ba} negativ und $\delta_{aa} = \delta_{bb}$ ist, so wird

$$X_a = \frac{-C \cdot \delta_{ca} \delta_{bb} - C \cdot \delta_{cb} \cdot (-\delta_{ba})}{\delta_{aa}^2 - \delta_{ab}^2} = -\frac{C \cdot \delta_{ca} (\delta_{bb} - \delta_{ba})}{(\delta_{bb} + \delta_{ba}) (\delta_{bb} - \delta_{ba})}$$

$$= -\frac{C \cdot \delta_{ca}}{\delta_{bb} + \delta_{ba}} = -\frac{C \cdot \delta_{ca}}{\delta_{aa} + \delta_{ba}}.$$

Ebenso ergibt sich

$$X_b = +\frac{C \cdot \delta_{ca}}{\delta_{aa} + \delta_{ba}}.$$

Insgesamt ist daher durch Addition der unter I und II erhaltenen Werte

$$X_a = \frac{C \cdot e \cdot l_1 \cdot l_2}{24(\delta_{aa} + \delta_{ba})} - \frac{C \cdot \delta_{ca}}{\delta_{aa} + \delta_{ba}} = -\frac{C(24 \delta_{ca} - e \cdot l_1 \cdot l_2)}{24(\delta_{aa} + \delta_{ba})}$$

$$X_b = +\frac{C(24 \delta_{ca} - e \cdot l_1 \cdot l_2)}{24(\delta_{aa} + \delta_{ba})}.$$

Sämtliche Werte sind hierin absolut einzusetzen, da die Vorzeichen bereits berücksichtigt sind. Nunmehr sind auch die übrigen statischen Größen bestimmt. Es ist

$$H = H_0 - H_a \cdot X_a - H_b \cdot X_b = H_0 - H_a (X_a + X_b) = H_0 = -\frac{C}{2}.$$

$$H' = +\frac{C}{2}.$$

A ergibt sich durch eine Momentengleichung in bezug auf den Angriffspunkt von H' und B und zwar wird

$$A = \frac{C(e+f) - X_b \cdot l_1 - X_a(l_1 + l_2)}{l_2}$$

$$= \frac{C(e+f) - X_a(2l_1 + l_2)}{l_2} = -B \text{ (Fig. 80).}$$

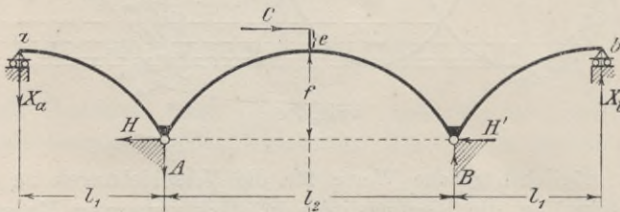


Fig. 80.

Für X_a ist der absolute Wert einzusetzen, da das negative Zeichen von X_a bereits durch den Drehungssinn berücksichtigt ist.

Damit ist der Spannungszustand bestimmt.

Einfluß der Temperaturänderung.

Zwischen den statisch unbestimmten Größen bestehen die Gleichungen

$$0 = -X_{at} \cdot \delta_{aa} - X_{bt} \delta_{ab} + \delta_{at} \cdot E \cdot J'$$

$$0 = -X_{at} \cdot \delta_{ba} - X_{bt} \delta_{bb} + \delta_{bt} \cdot E \cdot J'.$$

Wegen der Symmetrie wird $X_{at} = X_{bt}$, ebenso $\delta_{at} = \delta_{bt}$, so daß

$$X_{at} = \frac{E \cdot J' \delta_{at}}{\delta_{aa} + \delta_{ab}} = \frac{E \cdot J' \int N_a \varepsilon t ds}{\delta_{aa} - \delta_{ab}}, \text{ da } \delta_{ab} \text{ negativ ist.}$$

Für irgend einen Querschnitt der linken Öffnung wird $N_a = -1 \sin \varphi$.
Für einen Querschnitt der Mittelöffnung ergibt sich rechts vom Scheitel

$$N_a = B_a \sin \varphi + H_a \cos \varphi = \frac{1 \cdot l_1}{l_2} \sin \varphi + \frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r \cdot \cos \varphi.$$

Links vom Scheitel wird

$$N_a = H_a \cos \varphi - B_a \sin \varphi = \frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r \cos \varphi - \frac{1 \cdot l_1}{l_2} \sin \varphi.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \int N_a \varepsilon t ds &= \int_0^\beta -\sin \varphi \varepsilon t ds + \int_0^\alpha \left(\frac{l_1}{l_2} \sin \varphi + \frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r \cos \varphi \right) \varepsilon t ds \\ &+ \int_0^\alpha \left(\frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r \cos \varphi - \frac{l_1}{l_2} \sin \varphi \right) \varepsilon t ds. \end{aligned}$$

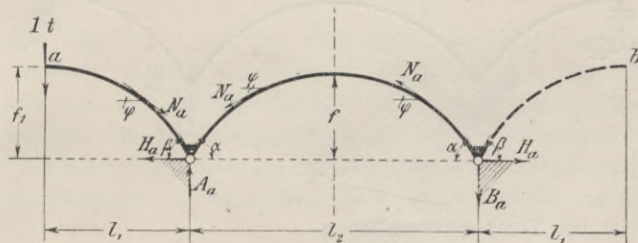


Fig. 81.

Die Seitenbögen seien ebenfalls Parabelbögen vom Pfeil f_1 . Es ist dann $ds = \varrho \cdot d\varphi$, und zwar wird für die Mittelöffnung $\varrho = \frac{l_2^2}{8f \cos^3 \varphi}$,

für die Seitenöffnung $\varrho = \frac{(2l_1)^2}{8f_1 \cos^3 \varphi}$ (s. S. 29).

Setzt man diese Werte in die Integrale ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int N_a \varepsilon t ds &= \int_0^\beta -\sin \varphi \frac{\varepsilon t l_1^2}{2f_1 \cos^3 \varphi} d\varphi \\ &+ \int_0^\alpha \left(\frac{l_1}{l_2} \sin \varphi + \frac{3}{4} \frac{l_1}{f} r \cos \varphi \right) \frac{\varepsilon t l_2^2}{8f \cos^3 \varphi} d\varphi \\ &+ \int_0^\alpha \left(\frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r \cos \varphi - \frac{l_1}{l_2} \sin \varphi \right) \frac{\varepsilon t l_2^2}{8f \cos^3 \varphi} d\varphi \\ &= -\frac{\varepsilon t l_1^2}{2f_1} \int_0^\beta \sin^1 \varphi \cos^{-3} \varphi d\varphi + 2 \cdot \frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r \frac{\varepsilon t l_2^2}{8f} \int_0^\alpha \cos^{-2} \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Nach Seite 29 ist $\int_0^\beta \sin^1 \varphi \cos^{-3} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \beta$ und $\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg} \alpha$.

Daher wird

$$\int N_a \varepsilon t ds = -\frac{1}{4} \frac{\varepsilon t l_1^2}{f_1} \operatorname{tg}^2 \beta + \frac{3}{16} \frac{l_1 \cdot l_2^2}{f^2} \varepsilon t r \operatorname{tg} \alpha.$$

Setzt man $\operatorname{tg} \beta = \frac{2f_1}{l_1}$ und $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4f}{l_2}$, so wird

$$\int N_a \varepsilon t ds = -\varepsilon t f_1 + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon t}{f} l_1 \cdot l_2 \cdot r.$$

$$\begin{aligned} \text{Daher } X_{at} = X_{bt} &= \pm \frac{E \cdot J' \int N_a \varepsilon t ds}{\delta_{aa} - \delta_{ab}} = \pm \frac{\varepsilon t E J' \left(\frac{3}{4} \frac{l_1 \cdot l_2 \cdot r}{f} - f_1 \right)}{\delta_{aa} - \delta_{ab}} \\ &= \pm \frac{\varepsilon t E J' (3 l_1 l_2 \cdot r - 4 f \cdot f_1)}{4 f (\delta_{aa} - \delta_{ab})}. \end{aligned}$$

Bei Temperaturerhöhung werden X_{at} und X_{bt} positiv, bei Temperaturerniedrigung negativ.

Damit ist der gesamte Spannungszustand bestimmt.

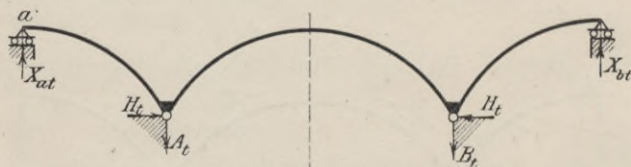


Fig. 82.

Es ist bei Temperaturerhöhung

$$H_t = + H_{ot} - H_a \cdot X_{at} - H_b \cdot X_{bt};$$

da $H_a = H_b = -\frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r$ ist, so wird

$$\begin{aligned} H_t &= \frac{15}{8} \frac{\varepsilon E t J'}{f^2} + 2 \cdot \frac{3}{4} \frac{l_1}{f} \cdot r \frac{\varepsilon t E J' (3 l_1 l_2 \cdot r - 4 f \cdot f_1)}{4 f (\delta_{aa} - \delta_{ab})} \\ &= + \frac{3}{8} \frac{\varepsilon E t J'}{f^2 (\delta_{aa} - \delta_{ab})} \cdot [5 (\delta_{aa} - \delta_{ab}) + l_1 \cdot r (3 l_1 l_2 \cdot r - 4 f \cdot f_1)]. \end{aligned}$$

Bei Temperaturerniedrigung ergibt sich H_t negativ. Ferner wird $A_t = B_t = X_{at}$ und zwar bei Temperaturerhöhung negativ, bei Temperaturerniedrigung positiv. Nunmehr können die Momente und Querkräfte infolge der Temperaturänderung für jeden Querschnitt bestimmt werden.

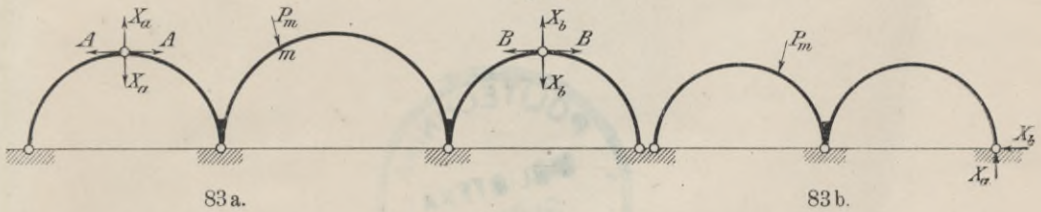
Schlußbetrachtungen.

Aus vorstehenden Untersuchungen ist zu erkennen, eine welche wichtige Rolle der Zweigelenbogen als Hauptssystem bei der Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme zu spielen vermag. Sämtliche Entwicklungen werden außerordentlich einfach und übersichtlich und

sind ganz allgemein. Die für die Parabelbögen abgeleiteten Beziehungen dürfen auch auf flache Kreisbögen angewandt werden, ohne daß dabei ein nennenswerter Fehler begangen wird. Nur empfiehlt es sich dann stets, den Einfluß der Längskräfte auf die Formänderungen zu berücksichtigen.

Mit den hier behandelten Fällen ist die Zahl der Systeme, welche sich für die Berechnung mit Hilfe des Zweigelenkbogens als Hauptssystem eignen, noch nicht erschöpft. Ich weise nur noch auf mehrere im Hallenbau gebräuchliche Systeme hin. Es sind dies der dreifach statisch

Fig. 83.



unbestimmte Blechbogen mit drei Öffnungen und zwei Scheitelgelenken, und der dreifach statisch unbestimmte Blechbogen mit zwei Öffnungen (s. Fig. 83 a und b). Im ersteren Falle entsteht durch Anbringung der Vertikalkomponenten der Scheiteldrücke als statisch unbestimmte Größen X_a und X_b ein Zweigelenkbogen mit überkragenden Enden und Schleppträgern als Hauptsystem, im zweiten Falle durch Anbringung der Reak-

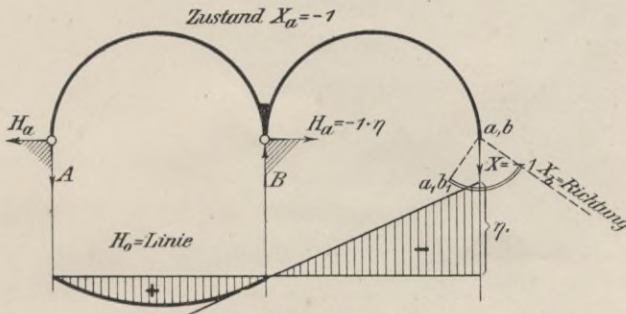


Fig. 84.

tionen am rechten oder linken Kämpfer ein Zweigelenkbogen mit überkragendem Ende. In diesem Falle kann man sogar die Richtung der statisch unbestimmten Größen leicht so bestimmen, daß $\delta_{ba} = \delta_{ab} = 0$ wird (s. Mehrtens, Statik der Baukonstruktionen, 3. Band, S. 245 u. 246). Man wähle die Richtung von X_a beliebig, z. B. vertikal, zeichne für den Zustand $X_a = -1$ eine Biegelinie, ermittle aus dieser mit Hilfe eines Normalenzuges den zugehörigen Verschiebungsplan, aus welchem sich die Verschiebung des Punktes a bzw. $b = aa_1$, bzw. bb_1 ergibt

und wähle dann die Richtung von X_b senkrecht zu bb_1 . Dadurch wird $\delta_{ba} = 0$. Die Elastizitätsgleichungen lauten alsdann

$$L_a + \delta_a = P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} \quad X_a = \frac{P_m \delta_{ma} - \delta_a - L_a}{\delta_{aa}}$$

$$L_b + \delta_b = P_m \delta_{mb} - X_b \delta_{bb} \quad X_b = \frac{P_m \delta_{mb} - \delta_b - L_b}{\delta_{bb}}$$

Damit sind auch die Einflußlinien für X_a und X_b gegeben, von welchen wiederum die Einflußlinien für sämtliche übrigen statischen Größen abgeleitet werden können.



Verlag von **WILHELM ERNST & SOHN**, Berlin W66

Wilhelmstraße 90.

Die Belastung der Baukonstruktionen durch Schnee.

Versuche und Studien über das spezifische Gewicht von Schnee und über Schneelasten. Von Dr.-Ing. **L. Schaller**. 1909. geh. 2,40 M.

Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken. Von **G. Tolkmitt**, Königl. Baurat.

Zweite Auflage, durchgearbeitet und erweitert von **A. Laskus**, Reg.-Baumeister. Mit **37** Abbildungen. 1902. geh. 5,— M., in Leinen geb. 6,— M.

Biegung, Schub und Scherung in Stäben von zusammengesetzten und mehrteiligen Querschnittsformen mit gleichen und wechselnden Trägheitsmomenten auf Grund der Zerlegung in ihre Einzelteile mit rechnerischen Untersuchungen an Beispielen und zeichnerischen Darstellungen. Von **R. Sonntag**, Reg.-Baumeister.

Mit **173** Abbildungen und **11** Tafeln. 1909. geh. 8,— M., geb. 9,— M.

Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken.

Von Dr. **H. Zimmermann**, Wirkl. Geh. Oberbaurat, Mitglied der Akademie der Wissenschaften.

Mit **8** Textabbildungen und **1** Tafel. 1910. geh. 3,— M.

Empfohlen durch Runderlaß

des Herrn Ministers der öffentl. Arbeiten.

Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. Von

Dr.-Ing. Dr. **H. Zimmermann**, Wirkl. Geh. Oberbaurat.

Sechste Auflage. 15. bis 17. Tausend. 1910.

Ausgabe A ohne besondere Quadrattafel. geh. 5,— M.

Ausgabe B mit Anhang: Quadrattafel. geb. 6,— M.

Statische Tabellen. Belastungsangaben und Formeln zur Aufstellung von Berechnungen für Baukonstruktionen. Nebst Anhang, enthaltend: Vorschriften und Formeln für die Berechnung von Massivkonstruktionen. Gesammelt und berechnet von **F. Boerner**, Ingenieur.

Dritte neubearbeitete Auflage. 1910. geh. 4,20 M.

Verlag von **WILHELM ERNST &**
Wilhelmstraße 90

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA



34206

L. inw.

Kdn. Zem. 480/55 20.000

Empfohlen durch Kunderlaß

des Herrn Ministers der öffentl. Arbeiten.

Eiserne Brücken. Ein Lehr- und Nachschlagebuch für Studierende und Konstrukteure. Von **G. Schaper**, Reg.-Baumeister.

Zweite vollständig neubearbeitete Auflage.

Mit 1455 Textabbildungen. 1911. geh. 20,— M., geb. 21,50.

Haupt-, Neben- und Hilfsgerüste im Brückenbau.

Ein Lehr- und Nachschlagebuch über die auf dem Gebiete des Brückenbaues vorkommenden Gerüste. Von **Dr. R. Schönhöfer**, k. k. Obergeringieur und Privatdozent. Mit 190 Textabbildungen. 1911.

geh. 6,— M., geb. 6,80 M.

Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger ohne Scheitelgelenk, insbesondere der Brückengewölbe und der im Eisenbetonbau üblichen biegungsfesten Rahmen. Von **Dr.-Ing. Max Ritter**.

Mit 36 Textabbildungen. 1909. geh. 3,— M.

Der Zweigelenkbogen. Von **Brabandt**, Eisenbahn-Bau- und Betriebsinspektor. Entwurf, bauliche Ausbildung und Berechnung des Zweigelenkbogens und seiner Widerlager unter besonderer Berücksichtigung tiefer Straßenunterführungen.

Mit 83 Textabbildungen. 1910. geh. 4,— M., geb. 4,80 M.

Hilfswerte für das Entwerfen und die Berechnung von Brücken mit eisernem Überbau. Als Ergänzung zu den Preuß. Vorschriften für das Entwerfen der Brücken mit eisernem Überbau. Von **F. Direksen**, Königl. Eisenbahn-Bauinspektor. Mit 36 Textabbildungen und 1 Tafel.

Dritte durchgesehene Auflage. 1908. geh. 4,— M.

Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken und das praktische Rechnungsverfahren nach Mohr. Von **Reg.-Baumeister W. Gehler**, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Karlsruhe.

Hierzu: **Anhang** über die Berechnung der Nebenspannungen in eisernen Fachwerkbrücken. Von **J. Karig**, Bau-Obersekretär an der Technischen Hochschule in Karlsruhe.

Mit 151 Textabbildungen. 1908. geh. 6,— M., geb. 6,80.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000302688