

Die  
**Berechnung mehrstieliger Rahmen**  
unter Anwendung  
statisch unbestimmter Hauptsysteme

Von

Dr.-Ing. **Walter Nakonz**  
Regierungsbaumeister

Mit 92 Textabbildungen



BERLIN 1915  
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

*Ch 152*

✓

---

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.

---

Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.

---

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000301189

Die  
**Berechnung mehrstieliger Rahmen**  
unter Anwendung  
statisch unbestimmter Hauptssysteme

Von

Dr.-Ing. **Walter Nakonz**  
Regierungsbaumeister

Mit 92 Textabbildungen



*Handwritten signature and number 152*

BERLIN 1915  
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn.



Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.



III 36.958

Akc. Nr. D 3830 / 58

# Inhalt.

---

	Seite
Einleitung . . . . .	I
Abschnitt I: Allgemeine Erläuterung des Verfahrens . . . . .	3
A. Die Wahl der Unbekannten $X_a$ , $X_b$ und $X_c$ mit Rücksicht auf Be-	
seitigung der Beiwerte $\delta_{ab}$ , $\delta_{ac}$ und $\delta_{bc}$ . . . . .	3
B. Die Bedeutung der Werte $\delta_{ma}$ , $\delta_{mb}$ , $\delta_{mc}$ , $\delta_{aa}$ , $\delta_{bb}$ , $\delta_{cc}$ , $\delta_{at}$ , $\delta_{bt}$ und $\delta_{ct}$	9
C. Die Entwicklung der Grundgleichungen für die Biegelinien des	
Balkens und der Stützen . . . . .	10
Abschnitt II: Anwendungen des Verfahrens unter besonderer Berück-	
sichtigung der symmetrischen Rahmenträger mit gleich hohen	
Stützen . . . . .	24
A. Rahmen mit Fußgelenken . . . . .	24
1. Der zweistielige Rahmen . . . . .	24
2. Der dreistielige Rahmen . . . . .	27
3. Der vierstielige Rahmen . . . . .	39
4. Der sechsstielige Rahmen . . . . .	56
5. Der zweistielige Rahmen mit gestützten Kragarmen . . . . .	66
B. Rahmen mit eingespannten Füßen . . . . .	68
1. Der zweistielige Rahmen . . . . .	68
2. Der dreistielige Rahmen . . . . .	74
3. Der vierstielige Rahmen . . . . .	81
4. Der zweistielige Rahmen mit gestützten Kragarmen . . . . .	85



## Einleitung.

Die Berechnung mehrstieliger Rahmen, bei denen sich eine Reihe von Stützen in starrer Verbindung mit einem aufgelagerten Balken befindet, ist entsprechend ihrer Bedeutung für die Praxis verschiedentlich behandelt worden. In dem zweiten Bande der „graphischen Statik der Baukonstruktionen“<sup>1)</sup> entwickelt Müller-Breslau hierfür Clapeyronsche Gleichungen, die je drei aufeinanderfolgende Drehungswinkel  $\gamma$  der Stützenköpfe als Unbekannte enthalten, unter der Voraussetzung, daß die wagerechten Verschiebungen der Stützenköpfe bekannt sind. Ist die Zahl der Stützen sehr groß und ist nur senkrechte Belastung vorhanden, so wird man genügend zuverlässige Ergebnisse erhalten, wenn diese wagerechten Verschiebungen vernachlässigt werden. Glaubt man sie jedoch in anderen Fällen, z. B. bei nur wenigen, aber nachgiebigen Stützen oder bei starken Bremskräften nicht außer acht lassen zu dürfen, so ist folgender Weg gangbar:

Der Rahmen mit Fußgelenken wird nach Abb. 1 in eine Reihe einhüftiger statisch bestimmter Rahmen aufgelöst; die statisch Unbestimmten  $M$  und  $H$  werden in Höhe der Widerlagerangebracht. Unter Anwendung der bekannten Sätze über die

Formänderungsarbeit lassen sich so viel Gleichungen aufstellen, wie Unbestimmte vorhanden sind; für jede Zwischenöffnung er-

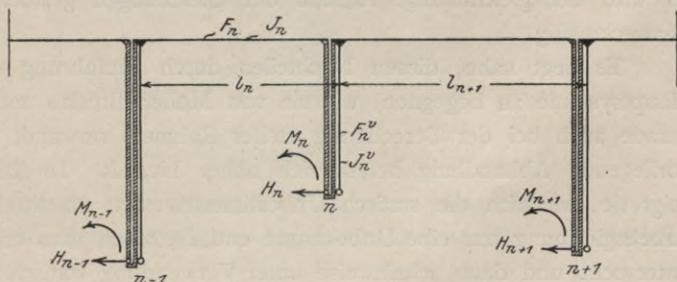


Abb 1.

hält man zwei derartige Gleichungen. In diesen können unter Hinzuziehung der entsprechenden Gleichungen aus den Nachbarfeldern entweder die Schübe  $H$  oder die Momente  $M$  ausgesondert werden, so daß man schließlich eine Reihe von homogenen Gleichungen erhält, die nur aufeinanderfolgende Momente  $M$  oder Schübe  $H$  enthalten. Und zwar kommen in jeder Gleichung fünf Unbekannte vor, wenn man den Einfluß der Normalkräfte auf die Formänderungsarbeit vernachlässigt, dagegen sieben, wenn man ihn berücksichtigt.

1) Müller-Breslau: Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Band II, 2. Abt., S. 163 u. folg.

Sind die Stützen am Fuße eingespannt, so führt man nach Abb. 2 in jeder Öffnung die statisch Unbestimmten  $M'$ ,  $M''$  und  $H$  ein. Für jedes Feld werden drei Gleichungen aufgestellt, in denen sich, wieder mit Zuhilfenahme der entsprechenden Gleichungen aus den Nachbaröffnungen, die Unbekannten  $M'$  und

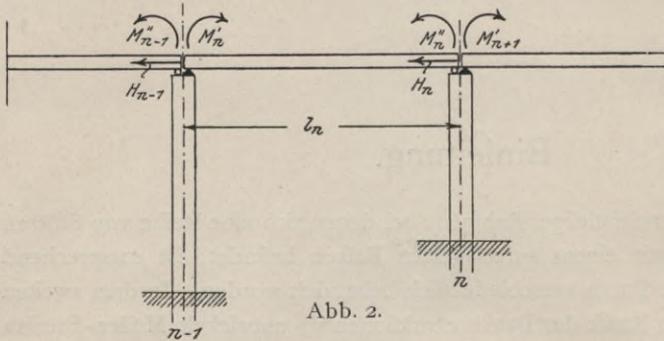


Abb. 2.

$M''$  aussondern lassen, so daß in den Schlußgleichungen nur noch fünf aufeinanderfolgende Schübe  $H$  vorkommen. Ihre Zahl erhöht sich auf sieben, wenn man den Einfluß der Normalkräfte auf die Formänderungsarbeit berücksichtigt,

was übrigens hier wie bei den Rahmen mit Fußgelenken nur bei gleich hohen Stützen praktisch durchführbar ist.<sup>1)</sup>

Auf die soeben geschilderte Art erhält man übersichtlich und gleichmäßig aufgebaute Gleichungen. Ihre Auflösung ist aber selbst in einfachen Fällen wegen der großen Zahl von Unbekannten unbequem; die Zahlenrechnungen müssen außerordentlich genau durchgeführt werden, um zuverlässige Endergebnisse zu erhalten. Ist der Balken in einer Öffnung durch ein Gelenk unterbrochen, oder sind die Zwischenstützen verschieden ausgebildet, indem sie in das Widerlager oder in den Balken teils eingespannt, teils an diese gelenkig angeschlossen sind, so wird der gleichmäßige Aufbau der Gleichungen gestört und das Verfahren unzweckmäßig.

Es liegt nahe, diesen Nachteilen durch Einführung statisch unbestimmter Hauptsysteme zu begegnen, wie sie von Müller-Breslau mehrfach angeregt und gerade auch bei der Berechnung steifer Rahmen verwandt worden sind.<sup>2)</sup> Die vorliegende Abhandlung befaßt sich näher hiermit. In ihrem ersten Abschnitt zeigt sie, wie sich die statisch Unbestimmten stets so wählen lassen, daß jede Arbeitsgleichung nur eine Unbekannte enthält, wenn man erst die einfachen Fälle untersucht und dann schrittweise unter Verwendung statisch unbestimmter Hauptsysteme zu den in höherem Grade statisch unbestimmten Rahmenträgern übergeht. Außerdem werden allgemeine Beziehungen abgeleitet, um ein schnelles Aufstellen der Gleichungen zu ermöglichen. In dem zweiten Abschnitt wird das Verfahren auf verschiedene Rahmen angewandt, wobei namentlich die in der Praxis eine besonders große Rolle spielenden symmetrischen Rahmen mit gleich hohen Stützen berücksichtigt werden. Das Hauptgewicht wird hier auf die Ableitung kurzer und bequemer Formeln zur Bestimmung der Unbekannten gelegt.

1) Einen ähnlichen Weg hat Marcus in seiner Dissertation „Studien über mehrfach gestützte Rahmen- und Bogenträger“ eingeschlagen.

2) Müller-Breslau: Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Band II, 2. Abt., S. 140 u. folg.

## Abschnitt I.

### Allgemeine Erläuterung des Verfahrens.

#### A. Die Wahl der Unbekannten $X_a$ , $X_b$ und $X_c$ mit Rücksicht auf Beseitigung der Beiwerte $\delta_{ab}$ , $\delta_{ac}$ und $\delta_{bc}$ .

Die Verwendung statisch unbestimmter Hauptssysteme bei der Berechnung mehrstieliger Rahmen gestattet, die Zahl der Unbekannten und der zu ihrer Bestimmung aufzustellenden Arbeitsgleichungen nach Bedarf herabzusetzen und die bei der Auflösung der Determinanten höherer Ordnung sich häufenden Fehlerquellen zu vermeiden. Es werden nicht mehr als drei Unbekannte eingeführt, und zwar werden sie so gewählt, daß in den bekannten Gleichungen<sup>1)</sup>

$$1) \quad \dots \quad \begin{cases} 0 = P \cdot \delta_{ma} + X_a \cdot \delta_{aa} + X_b \cdot \delta_{ab} + X_c \cdot \delta_{ac} + \delta_{at} \\ 0 = P \cdot \delta_{mb} + X_a \cdot \delta_{ab} + X_b \cdot \delta_{bb} + X_c \cdot \delta_{bc} + \delta_{bt} \\ 0 = P \cdot \delta_{mc} + X_a \cdot \delta_{ac} + X_b \cdot \delta_{bc} + X_c \cdot \delta_{cc} + \delta_{ct} \end{cases}$$

die Beiwerte  $\delta_{ab}$ ,  $\delta_{ac}$  und  $\delta_{bc}$  verschwinden und man erhält:

$$\begin{aligned} X_a &= -P \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} - \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}} \\ X_b &= -P \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}} - \frac{\delta_{bt}}{\delta_{bb}} \\ X_c &= -P \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} - \frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}} \end{aligned}$$

Hierbei sind zunächst starre unverschiebliche Widerlager angenommen, weil sie die Voraussetzung für die Anwendbarkeit mehrfach äußerlich statisch unbestimmter Träger bilden.

Die Unbekannten sucht man derart aus, daß das entstehende und ihrer Ermittlung zugrunde zu legende Hauptssystem bereits untersucht ist oder sich doch in einfacher Weise schnell berechnen läßt. Ist Symmetrie vorhanden, so ist es fast immer zweckmäßig, den Angriffspunkt der Unbekannten in die Symmetrieachse zu legen.

Bei der Berechnung der Rahmen mit Fußgelenken geht man von dem Zweigelenkrahmen aus (Abb. 3). Sobald seine Kräfte für jede äußere Belastung bekannt sind, führt man ihn als Hauptssystem in der Untersuchung des dreistieligen und des vierstieligen Rahmens ein. Bei jenem

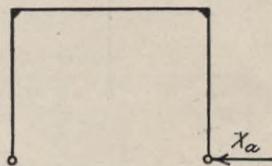


Abb. 3.

1) Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, S. 209, § 20.

werden am Fuße der Mittelstütze die senkrechte Kraft  $X_a$  und die unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Wagerechte geneigte Kraft  $X_b$  angebracht (Abb. 4). Der Winkel  $\varphi$

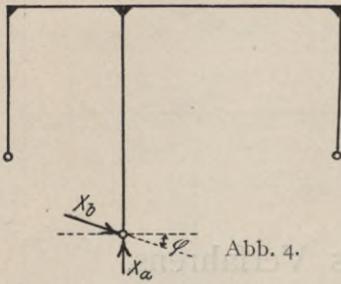


Abb. 4.

ist so zu bestimmen, daß  $\delta_{ab} = 0$  wird. Man kann auch  $X_b$  wagerecht und  $X_a$  schräg oder  $X_a$  und  $X_b$  schräg, aber aufeinander senkrecht stehend annehmen; jedoch soll hier wie in der Folge stets  $X_a$  senkrecht und  $X_b$  unter einem Winkel  $\varphi$  gegen die Wagerechte geneigt eingeführt werden. Ist Symmetrie vorhanden, so wird  $\varphi = 0$  und  $X_b$  wagerecht. Den vierstieligen Rahmen schneidet man nach Abb. 5 in der Mittelöffnung im Abstände  $c_1$

von der Stütze  $B$  durch; um das Maß  $f$  von der Balkenachse entfernt werden unter der Schnittstelle die senkrechte Kraft  $X_a$ , die unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Wagerechte geneigte Kraft  $X_b$  und das Moment  $X_c$  eingeführt. Das Hauptsystem besteht

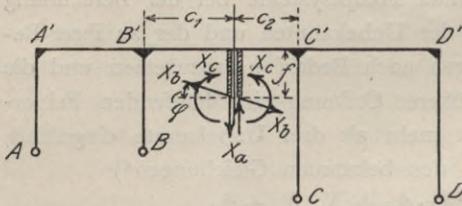


Abb. 5.

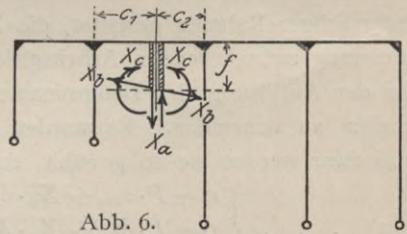


Abb. 6.

aus den beiden Zweigelenrahmen  $AA' B' B$  und  $CC' D' D$ ;  $c_1$ ,  $f$  und  $\varphi$  sind so festzulegen, daß  $\delta_{ac}$ ,  $\delta_{bc}$  und  $\delta_{ab} = 0$  werden. Bei symmetrischer Ausbildung des Trägers rückt der Angriffspunkt der Unbekannten in die Symmetrieachse und  $\varphi$

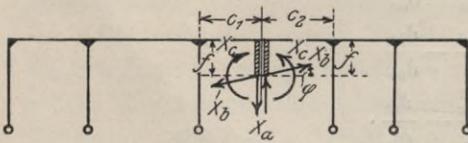


Abb. 7.

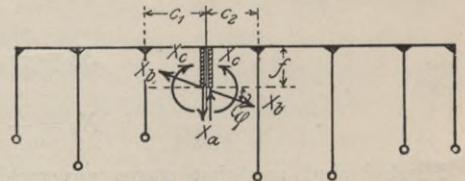


Abb. 8.

wird gleich Null. In entsprechender Weise wie der vierstielige Rahmen werden die Rahmen mit höherer Stützenszahl berechnet. Den fünfstieligen Rahmen zerlegt man unter Einführung der Kräfte  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  in einen zwei- und einen

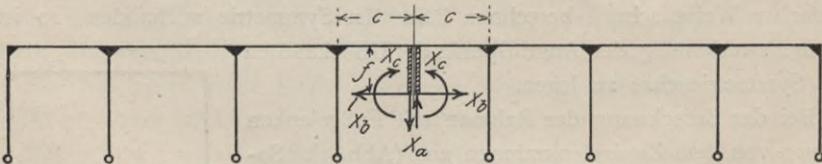


Abb. 9.

dreistieligen Rahmen (Abb. 6), den sechsstieligen ebenso in zwei dreistielige (Abb. 7), den siebenstieligen in einen drei- und einen vierstieligen (Abb. 8), den achtstieligen in zwei vierstielige Rahmen (Abb. 9) usw. Besonders einfach gestaltet sich auf

diese Art die Durchführung der Rechnung bei den Trägern mit gerader Stützenzahl, wenn sie wie in Abb. 9 symmetrisch angeordnet sind. Bei den Rahmen mit ungerader Stützenanzahl kann es vielfach zweckmäßig sein, die Unbekannten  $X_a$  und  $X_b$  wie bei dem dreistieligen Rahmen am Fußgelenk der Mittelstütze einzuführen. Dies empfiehlt sich namentlich bei symmetrischer Anordnung, weil in dem Falle  $X_a$  senkrecht und  $X_b$  wagerecht angreifen (Abb. 10).

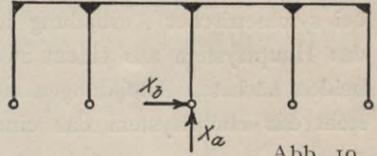


Abb. 10.

Ebenso schrittweise berechnet man die Rahmen mit eingespannten Füßen. Der zweistielige dreifach statisch unbestimmte Rahmen ist Hauptsystem bei der Berechnung des dreistieligen Rahmens, wenn man wie in Abb. 11 die Einspannung

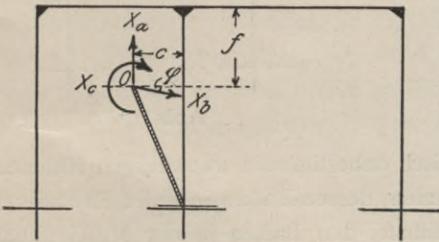


Abb. 11.

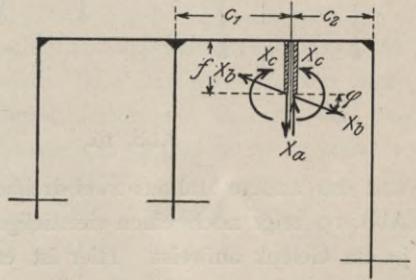


Abb. 12.

der Mittelstütze durch die Kräfte  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  ersetzt. Die Bedingungen  $\delta_{ac} = \delta_{bc} = \delta_{ab} = 0$  ergeben wieder den Angriffspunkt O der Unbekannten und die Neigung von  $X_b$ . Man kann aber auch ein aus einem zweistieligen Rahmen und einem statisch bestimmten Kragträger bestehendes Hauptsystem verwenden (Abb. 12).

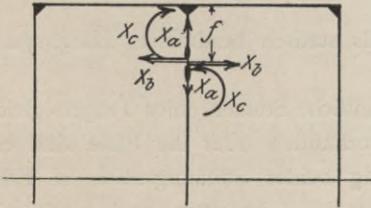


Abb. 13.

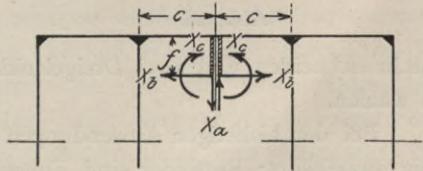


Abb. 14.

Ist Symmetrie vorhanden, so kommt man am schnellsten nach Abb. 13 zum Ziel, wenn man die Mittelstütze in dem Abstände  $f$  von der Balkenachse durchschneidet und dort die drei Unbekannten einführt;  $f$  bestimmt sich aus der Bedingung  $\delta_{bc} = 0$ . Bei den Rahmen mit höherer Stützenanzahl schneidet man wie früher den Balken in einer Öffnung durch und nimmt unter der Schnittstelle die Kräfte  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  an. Abb. 14 zeigt dies für einen symmetrischen vierstieligen und Abb. 15 für einen fünfstieligen Rahmen.

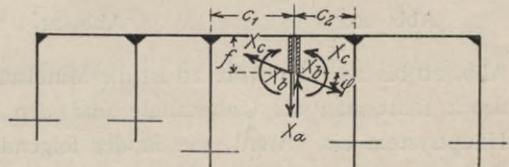


Abb. 15.

Ist der Balken an einer Stelle durch ein Gelenk unterbrochen, so wird es durch die Kräfte  $X_a$  und  $X_b$  ersetzt; von diesen ist  $X_a$  senkrecht und  $X_b$  derart geneigt anzunehmen, daß  $\delta_{ab} = 0$  wird.  $X_b$  wird wagerecht, wenn das Gelenk bei symmetrischer Ausbildung in der Symmetrieachse liegt. In Abb. 16 besteht das Hauptsystem aus einem zwei-stieligen und einem drei-stieligen Rahmen. Die beiden nächsten Abbildungen stellen zwei symmetrische Fälle dar; und zwar besteht das Hauptsystem das eine Mal aus zwei statisch bestimmten Kragträgern

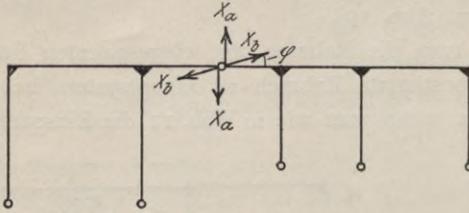


Abb. 16.

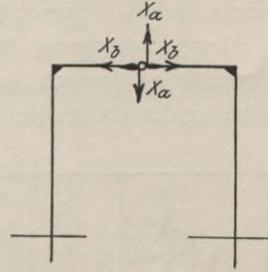


Abb. 17.

und das andere Mal aus zwei dreifach statisch unbestimmten zwei-stieligen Rahmen. Abb. 19 zeigt noch einen vier-stieligen Rahmen, dessen Balken in jeder Endöffnung je ein Gelenk aufweist. Hier ist es vorteilhaft, den Balken in der Mittelöffnung

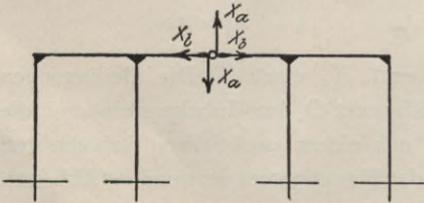


Abb. 18.

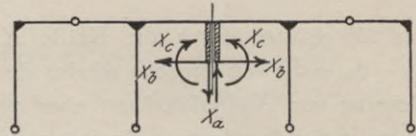


Abb. 19.

durchzuschneiden und zwei Dreigelenkbögen als statisch bestimmtes Hauptsystem zu wählen.

Bei den bisherigen Anwendungen sind sämtliche Stützen eines Trägers gleichartig ausgebildet: Entweder sind Fußgelenke vorhanden oder die Füße sind eingespannt. Es kann aber auch die Vereinigung beider Stützungsarten in Frage

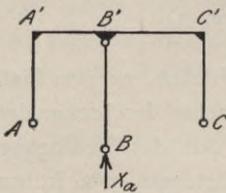


Abb. 20.

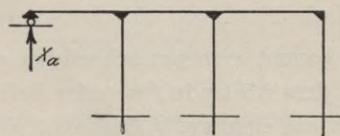


Abb. 21.

kommen und noch eine Unterstüzung des Balkens durch Pendelstützen oder wagerechte Gleitlager hinzutreten. Einige Beispiele hierfür unter Angabe der zweckmäßig zu wählenden Unbekannten zeigen die

Abb. 20 bis 28. In Abb. 20 ist die Mittelstütze eine Pendelstütze; ihren Auflagerdruck führt man als Unbekannte und den zwei-stieligen Rahmen  $AA' C' C$  als Hauptsystem ein. Wird, wie in der folgenden Abbildung, der Balken über eine Endstütze hinaus verlängert und noch einmal durch ein wagerechtes Gleitlager

unterstützt, so kann dessen Druck als einzige Unbekannte gewählt werden.<sup>1)</sup> In dem nächsten Beispiel treten zwei Unbekannte auf, wenn man den Rahmen  $AA'CC'$  als Hauptsystem ansieht (Abb. 22). Der Berechnung des in Abb. 23 dargestellten Trägers wird das statisch bestimmte Hauptsystem nach Abb. 24 zugrunde gelegt.

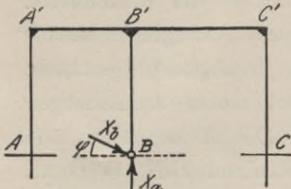


Abb. 22.

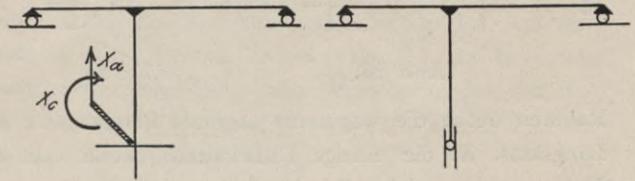


Abb. 23.

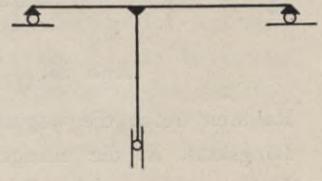


Abb. 24.

Ist keine Symmetrie vorhanden, so sind die statisch Unbestimmten  $X_a$  und  $X_b$  außerhalb der Stütze anzubringen, damit  $\delta_{av} = 0$  wird. Das Hauptsystem des vierstieligen Rahmens in Abb. 25 ist statisch bestimmt, wenn man  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  in der Mittelöffnung annimmt. Bei dem dreistieligen Rahmen mit gestützten

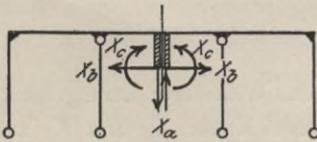


Abb. 25.

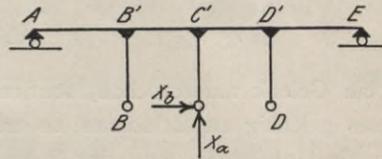


Abb. 26.

Kragarmen wählt man die an dem Gelenk der Mittelstütze auftretenden Kämpferkräfte  $X_a$  und  $X_b$  zu Unbekannten (Abb. 26). Das aus dem Balken  $AE$  und den Stützen  $B$  und  $D$  bestehende Hauptsystem ist dreifach statisch unbestimmt; um es zu berechnen, schneidet man in der üblichen Weise den Balken in der Mittelöffnung auf und führt unter der Schnittstelle die drei Unbekannten ein.

Abb. 27 zeigt ebenso wie die vorige Abbildung einen symmetrischen Träger; das Hauptsystem wird aus zwei entsprechenden Teilen gebildet und untersucht, indem man den Auflagerdruck

des Gleitlagers als Unbekannte und den zweistieligen dreifach statisch unbestimmten Rahmen als Untersystem verwendet. Das Hauptsystem des in Abb. 28 dargestellten symmetrischen vierstieligen Rahmens mit Scheitelgelenk berechnet man nach Abb. 29, in welcher ein Zweigelenkrahn als Untersystem und das Einspannungsmoment der einen Stütze als Unbekannte auftreten.

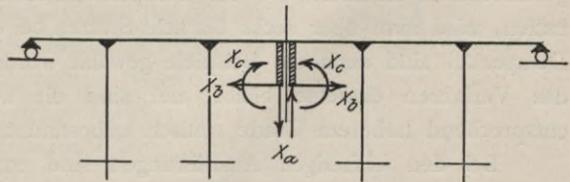


Abb. 27.

1) In dem Kragarm treten neben der Endstütze sehr große Biegemomente auf, die es für die Praxis zweckmäßiger erscheinen lassen, dort ein Gelenk anzuordnen und die Verbindung zwischen Rahmen und Widerlager durch einen Schleppträger herzustellen.

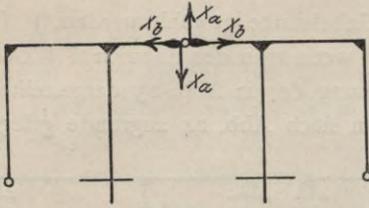


Abb. 28.

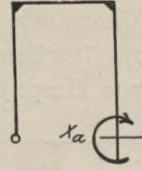


Abb. 29.

Sind starke wagerechte Kräfte (Bremskräfte) zu übertragen, so kann es vorteilhaft sein, zur Entlastung der Stützen in Höhe der Balkenachse ein festes Auflager heranzuziehen. In Abb. 30 geschieht dies bei einem sechsstielligen

Rahmen durch die wagerecht liegende Pendelstütze  $AB'$ . Die in ihr auftretende Längskraft ist die einzige Unbekannte, wenn man den Rahmen  $BB'G'G$  als Hauptssystem ansieht. Ist der Balken, wie in Abb. 31, neben der Endstütze nicht

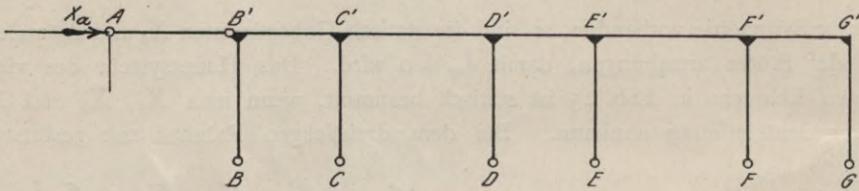


Abb. 30.

durch ein Gelenk unterbrochen, sondern bis an das Widerlager herangeführt und an dieses gelenkig angeschlossen, so treten dort zwei Kräfte  $X_a$  und  $X_b$  auf; sie werden als Unbekannte und der Rahmen als Hauptssystem eingeführt. Wenn  $X_a$

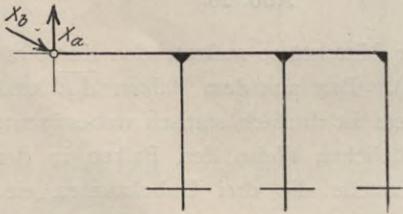


Abb. 31.

senkrecht angenommen wird, kann die Neigung von  $X_b$  wieder derart ermittelt werden, daß  $\delta_{ab} = 0$ .

Die Verwendung mehrstielliger Rahmen ist dadurch beschränkt, daß bei einer größeren Anzahl von Stützen die durch Wärmeschwankungen hervorgerufenen Beanspruchungen zu groß werden. Selbst in

geschlossenen Räumen, wo die Temperaturänderungen sich in geringen Grenzen halten, wird man über sechs bis acht Stützen bei einem Träger selten hinausgehen. Demgemäß sind auch die Beispiele gewählt worden, da bei größerer Stützenszahl das Verfahren dasselbe bleibt; nur sind die zu wählenden Hauptsysteme in entsprechend höherem Grade statisch unbestimmt.

Bei den bisherigen Ausführungen sind starre unverschiebliche Widerlager angenommen worden. Es wird auch im allgemeinen nicht nötig sein, bei den Berechnungen darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Fußpunkte der Stützen nachgeben; denn wie bereits auf Seite 3 hervorgehoben ist, kommen mehrstiellige Rahmen nicht in Frage, wenn ein Nachgeben der Widerlager zu befürchten ist. Es kann sich nur darum handeln, daß sich wider Erwarten nach vollendeter Ausführung der eine oder der andere Kämpfer stark setzt und man die hierdurch hervorgerufenen Zusatzbeanspruchungen feststellen will. Zu dem Zwecke beseitigt man das Widerlager, das sich verschoben hat, führt seine Stützkräfte als Unbekannte

ein und legt ihrer Berechnung das so entstandene Hauptssystem zugrunde. Bestimmt man Richtung und Angriffspunkt von  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  derart, daß wie früher die Beiwerte  $\delta_{ab}$ ,  $\delta_{ac}$  und  $\delta_{bc}$  verschwinden (Abb. 4 und 11), so wird

$$X_a = \frac{L_a}{\delta_{aa}}, \quad X_b = \frac{L_b}{\delta_{bb}} \quad \text{und} \quad X_c = \frac{L_c}{\delta_{cc}}.$$

Hierin stellen bekanntlich  $L_a$ ,  $L_b$  und  $L_c$  die virtuellen Arbeiten der Auflagerkräfte bei Eintreten der Zustände  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c = 1$  dar.<sup>1)</sup> Da indes die Stützpunkte, welche dem Hauptssystem angehören, keine Verschiebungen erleiden, sind die Werte  $L_a$ ,  $L_b$  und  $L_c$  mit den Wegen gleichbedeutend, welche die Unbekannten infolge des Nachgebens des Widerlagers zurücklegen.

### B. Die Bedeutung der Werte $\delta_{ma}$ , $\delta_{mb}$ , $\delta_{mc}$ , $\delta_{aa}$ , $\delta_{bb}$ , $\delta_{cc}$ , $\delta_{at}$ , $\delta_{bt}$ und $\delta_{ct}$ .

In den Gleichungen

$$X_a = -P \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} - \frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = -P \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}} - \frac{\delta_{bt}}{\delta_{bb}}, \quad X_c = -P \frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} - \frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}}$$

bedeuten  $\delta_{ma}$ ,  $\delta_{mb}$ ,  $\delta_{mc}$  die Wege der äußeren Last, gleichgültig, ob sie eine Längskraft oder ein Moment ist, und  $\delta_{aa}$ ,  $\delta_{bb}$ ,  $\delta_{cc}$  die Wege der Unbekannten  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$  bei den Kraftzuständen  $X_a = 1$ ,  $X_b = 1$  und  $X_c = 1$ . Sie werden bekannt, sobald die Verbiegungen des Hauptsystems unter dem Einflusse der Unbekannten  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  ermittelt sind.

Bezeichnet man mit  $\delta$  die nach unten positiv zu zählende Ordinate der Biegelinie des Balkens, mit  $\tau$  den Winkel der Biegelinie gegen die Wage-rechte, mit  $e$  die wagerechte Verschiebung eines Punktes der Balkenachse und deutet man den zugehörigen Kraftzustand durch die Zeiger  $a$ ,  $b$  und  $c$  an, dann wird nach Abb. 32 bei einer Belastung des Balkens durch eine senkrechte Last  $P$

$$2) \quad \delta_{ma} = \delta_a, \quad \delta_{mb} = \delta_b, \quad \delta_{mc} = \delta_c,$$

durch eine wagerechte Last  $Q$  in der Höhe  $k$  über der Balkenachse

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ma} = -e_a - k \cdot \tau_a, \\ \delta_{mb} = -e_b - k \cdot \tau_b, \\ \delta_{mc} = -e_c - k \cdot \tau_c, \end{array} \right.$$

wenn man annimmt, daß  $Q$  nach links gerichtet ist und eine von links nach rechts erfolgende wagerechte Verschiebung  $e$  positiv gezählt wird, und durch ein rechtsdrehendes Moment  $M$

$$4) \quad \delta_{ma} = \tau_a, \quad \delta_{mb} = \tau_b, \quad \delta_{mc} = \tau_c.$$

Die Einflußlinie für Momente erhält man demnach durch einmalige Differentiation der Gleichung der Einflußlinie für senkrechte Lasten. Dieser Satz gilt übrigens nicht nur für die eingeführten Unbekannten, sondern auch ganz allgemein für jede an dem Träger auftretende Kraft  $X_r$ , sie sei ein Biegemoment oder ein Auflagerdruck. Denkt man sich nämlich der Berechnung von  $X_r$  das Haupt-

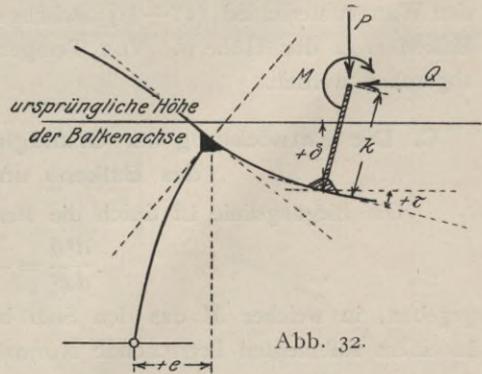


Abb. 32.

1) Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, S. 210.

system zugrunde gelegt, das durch die Beseitigung der Stützung  $X_r$  entsteht, so wird für senkrechte Belastung

$$X_r = -\frac{\delta_r}{\delta_{rr}} \cdot P,$$

da  $X_r$  die einzige Unbekannte ist. Wenn jetzt rechtsdrehende Momente  $M$  an den Balken angreifen, erhält man

$$X_r = -\frac{\tau_r}{\delta_{rr}} M \text{ oder } X_r = \frac{d\left(-\frac{\delta_r}{\delta_{rr}}\right)}{dx} M, \text{ weil } \tau_r = \frac{d\delta_r}{dx} \text{ ist.}$$

Da nun  $\left(-\frac{\delta_r}{\delta_{rr}}\right)$  die Gleichung der Einflußlinie für senkrechte Belastung bedeutet, ist  $X_r = \gamma \cdot M$ , wenn  $\gamma$  den Neigungswinkel dieser Einflußlinie gegen die Waagrechte bezeichnet.

Greifen äußere Lasten an den Stützen an, so können ihre Wege  $\delta_{ma}$ ,  $\delta_{mb}$ ,  $\delta_{mc}$  deren Biegelinie entnommen werden; jedoch sollen die nachstehenden Untersuchungen auf den am Balken erfolgenden Lastangriff beschränkt bleiben.

Die Ausdrücke  $\delta_{at}$ ,  $\delta_{bt}$  und  $\delta_{ct}$  geben die bei einer Wärmeänderung geleisteten Arbeiten bzw. zurückgelegten Wege der Kräfte  $X_a = 1$ ,  $X_b = 1$  und  $X_c = 1$  an. Ihre Berechnung erfolgt am schnellsten mittels der Beziehung

$$5) \dots \dots \dots \begin{cases} \delta_{at} = \int \varepsilon \cdot t_o \frac{\partial N}{\partial X_a} \cdot ds + \int \varepsilon \cdot \frac{\Delta t}{d} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_a} \cdot ds, \\ \delta_{bt} = \int \varepsilon \cdot t_o \frac{\partial N}{\partial X_b} \cdot ds + \int \varepsilon \cdot \frac{\Delta t}{d} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_b} \cdot ds, \\ \delta_{ct} = \int \varepsilon \cdot t_o \frac{\partial N}{\partial X_c} \cdot ds + \int \varepsilon \cdot \frac{\Delta t}{d} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_c} \cdot ds. \end{cases} \quad 1)$$

Hierin bedeutet  $t_o$  die gleichmäßige Wärmezunahme eines Rahmenteils und  $\Delta t$  den Wärmeunterschied ( $t^u - t^o$ ) zwischen der untersten und obersten Faser des Balkens von der Höhe  $d$ . Von Temperaturdifferenzen  $\Delta t$  in den Stützen soll abgesehen werden.

### C. Die Entwicklung der Grundgleichungen für die Biegelinien des Balkens und der Stützen.

Die Biegelinie ist durch die Beziehung

$$\frac{d^2 \delta}{dx^2} = -\frac{M}{J \cdot E}$$

gegeben, in welcher  $M$  das den Stab beanspruchende Moment bedeutet. Die in einem Rahmenteil herrschende Normalspannung  $N$  übt auf dessen Biegelinie keinen Einfluß aus, weil es sich hier um gerade Stäbe handelt; der Einfluß der Querkräfte ist unbedeutend und kann vernachlässigt werden.  $J$  ist das Trägheitsmoment.

In den Öffnungen des Hauptsystems, in denen die Unbekannten  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  nicht angreifen<sup>1)</sup>, läßt sich das durch sie in dem Balken hervorgerufene Moment auf die Form

1) Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, S. 95.

$$M = a + b \cdot x$$

bringen. Momentenfläche und Biegelinie sind in den Abb. 33 und 34 dargestellt. Bei der Integration der Gleichung

$$\frac{d^2 \delta}{dx^2} = - \frac{a + b \cdot x}{E \cdot J}$$

sind die beiden Integrationskonstanten dadurch bestimmt, daß für  $x=0$  und für  $x=l$  die Senkungen  $\delta = \delta_L$  bzw.  $\delta_R$  werden.  $\delta_L$  und  $\delta_R$  können

die durch Normalspannungen verursachte Zusammendrückung der Stützen  $L$  und  $R$  als Grund haben. Die Integration ergibt:

$$6) \quad \delta = \delta_L \frac{l-x}{l} + \delta_R \frac{x}{l} + \frac{x(l-x)}{6 E \cdot J} (3a + b \cdot l + b \cdot x)$$

$$7) \quad \frac{d\delta}{dx} = \frac{\delta_R - \delta_L}{l} + \frac{l(3a + b \cdot l)}{6 E \cdot J} - \frac{x(2a + b \cdot x)}{2 E \cdot J}$$

$$8) \quad \tau_L = \frac{\delta_R - \delta_L}{l} + \frac{l(3a + b \cdot l)}{6 E \cdot J}$$

$$9) \quad \tau_R = \frac{\delta_R - \delta_L}{l} - \frac{l(3a + 2b \cdot l)}{6 E \cdot J}$$

$\tau_L$  und  $\tau_R$  sind die Neigungen der Biegelinie am Kopfe der linken und rechten Stütze.

Führt man an dem Fußgelenk der Zwischenstütze  $M$  eines Rahmens den senkrechten und den wagerechten Auflagerdruck  $X_a$  und  $X_b$  als Unbekannte ein, dann entstehen die in den Abb. 35 bis 38 dargestellten Momentenflächen und Biegelinien des Balkens in den Nachbaröffnungen  $\overline{LM}$  und  $\overline{MR}$ . Der Balkenteil  $\overline{LM}$  habe die Spannweite  $l_1$ , das Trägheitsmoment  $J_1$  und den Querschnitt  $F_1$ ; die entsprechenden Maße des Balkens  $\overline{MR}$  seien  $l_2, J_2$  und  $F_2$ . Bei dem Zustande  $X_a = 1$  ist das Moment

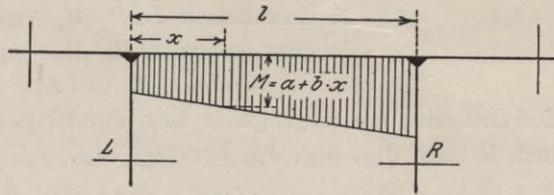


Abb. 33.

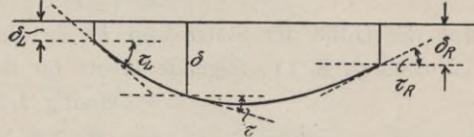


Abb. 34.

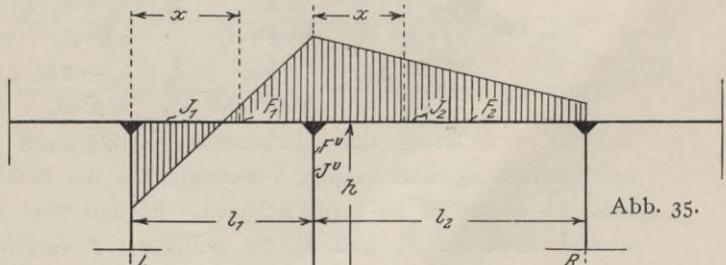


Abb. 35.

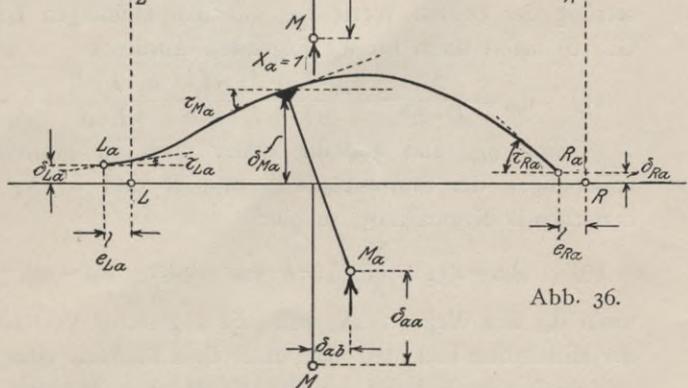


Abb. 36.

in dem Balken  $\overline{LM}$ :  $M_1 = a_1 + b_1 \cdot x$  und  
 in dem Balken  $\overline{MR}$ :  $M_2 = a_2 + b_2 \cdot x$ , wobei  
 $a_2 = a_1 + b_1 \cdot l_1$  und  $b_2 = b_1 + 1$  ist.

Die Ordinaten der Biegelinie bzw. ihre Neigungswinkel über den Stützen  $L$ ,  $M$  und  $R$  seien  $\delta_{La}$ ,  $\delta_{Ma}$ ,  $\delta_{Ra}$  bzw.  $\tau_{La}$ ,  $\tau_{Ma}$ ,  $\tau_{Ra}$  (Abb. 36). Da

$$\delta_{Ma} = - \left( \delta_{aa} - \frac{h}{E \cdot F^v} \right),$$

wenn  $h$  die Höhe der Stütze und  $F^v$  ihr Querschnitt ist, ergibt die Anwendung der Gl. 6 bis 9, S. 11, folgende Werte für die Biegelinie des Balkens:

Öffnung  $\overline{LM}$ :

$$10) \quad \delta_a = \delta_{La} \frac{l_1 - x}{l_1} - \left( \delta_{aa} - \frac{h}{E \cdot F^v} \right) \frac{x}{l_1} + \frac{x(l_1 - x)}{6 E \cdot J_1} (3a_1 + b_1 \cdot l_1 + b_1 \cdot x)$$

$$11) \quad \tau_a = - \frac{\delta_{aa} + \delta_{La}}{l_1} + \frac{h}{E \cdot F^v \cdot l_1} + \frac{l_1 (3a_1 + b_1 \cdot l_1)}{6 E \cdot J_1} - \frac{x(2a_1 + b_1 \cdot x)}{2 E \cdot J_1}$$

$$12) \quad \tau_{La} = - \frac{\delta_{aa} + \delta_{La}}{l_1} + \frac{h}{E \cdot F^v \cdot l_1} + \frac{l_1 (3a_1 + b_1 \cdot l_1)}{6 E \cdot J_1}$$

$$13) \quad \tau_{Ma} = - \frac{\delta_{aa} + \delta_{La}}{l_1} + \frac{h}{E \cdot F^v \cdot l_1} - \frac{l_1 (3a_1 + 2b_1 \cdot l_1)}{6 E \cdot J_1} \quad \text{und}$$

Öffnung  $\overline{MR}$ :

$$14) \quad \delta_a = - \left( \delta_{aa} - \frac{h}{E \cdot F^v} \right) \frac{l_2 - x}{l_2} + \delta_{Ra} \frac{x}{l_2} + \frac{x(l_2 - x)}{6 E \cdot J_2} (3a_2 + b_2 \cdot l_2 + b_2 \cdot x)$$

$$15) \quad \tau_a = \frac{\delta_{aa} + \delta_{Ra}}{l_2} - \frac{h}{E \cdot F^v \cdot l_2} + \frac{l_2 (3a_2 + b_2 \cdot l_2)}{6 E \cdot J_2} - \frac{x(2a_2 + b_2 \cdot x)}{2 E \cdot J_2}$$

$$16) \quad \tau_{Ma} = \frac{\delta_{aa} + \delta_{Ra}}{l_2} - \frac{h}{E \cdot F^v \cdot l_2} + \frac{l_2 (3a_2 + b_2 \cdot l_2)}{6 E \cdot J_2}$$

$$17) \quad \tau_{Ra} = \frac{\delta_{aa} + \delta_{Ra}}{l_2} - \frac{h}{E \cdot F^v \cdot l_2} - \frac{l_2 (3a_2 + 2b_2 \cdot l_2)}{6 E \cdot J_2}$$

Bei der Berechnung der eintretenden Verbiegungen des Hauptsystems ist es nicht notwendig, eine etwaige Verschiedenheit des Balkenquerschnittes rechts und links der Stütze  $M$  zu berücksichtigen. Es darf stets für  $J_1$  und  $J_2$  ein Mittelwert  $J$ , sowie für  $F_1$  und  $F_2$  ein Mittelwert  $F$  eingeführt werden. Die Gleichsetzung der beiden Werte  $\tau_{Ma}$  aus den Öffnungen  $\overline{LM}$  und  $\overline{MR}$  (Gl. 13 und Gl. 16) liefert dann für  $\delta_{aa}$  folgenden Ausdruck

$$18) \quad \delta_{aa} = \frac{h}{E \cdot F^v} - \frac{\delta_{Ra} \cdot l_1 + \delta_{La} \cdot l_2}{l_1 + l_2} - \frac{a_2 \cdot l_1 \cdot l_2}{2 E \cdot J} + l_1 \cdot l_2 \frac{b_1 \cdot l_1^2 - b_2 \cdot l_2^2}{6 E \cdot J (l_1 + l_2)}$$

Sind  $e_{La}$  und  $e_{Ra}$  die später noch zu bestimmenden wagerechten Verschiebungen der Stützenköpfe  $L$  und  $R$  und ist  $N_a$  die in dem Balken  $\overline{LR}$  herrschende Normalkraft, so gilt:

$$19) \quad \delta_{ab} = e_{La} + \frac{N_a \cdot l_1}{E \cdot F} - h \cdot \tau_{Ma} \quad \text{oder} \quad \delta_{ab} = e_{Ra} - \frac{N_a \cdot l_2}{E \cdot F} - h \cdot \tau_{Ma},$$

wenn  $\delta_{ab}$  den Weg von  $X_b$  bzw. die wagerechte Verschiebung des Fußgelenkes  $M$  der Mittelstütze bedeutet. Die unter dem Einflusse einer senkrechten Kraft  $X_a = 1$  erfolgende Verschiebung des Punktes  $M$  nach  $M_a$  setzt sich also aus einer senkrechten Strecke  $\delta_{aa}$  und einer wagerechten  $\delta_{ab}$  zusammen (Abb. 36).

Ist Symmetrie vorhanden und greifen die Unbekannten  $X_a$  und  $X_b$  an dem Fußgelenk der Mittelstütze eines Rahmens mit ungerader Stützzahl an (Abb. 10), so wird

$$\delta_{La} = \delta_{Ra}, \quad \tau_{La} = -\tau_{Ra}, \quad \tau_{Ma} = 0, \quad \delta_{ab} = -0, \quad e_{La} = -e_{Ra} = -\frac{N_a \cdot l}{E \cdot F},$$

wenn  $l_1 = l_2 = l$  gesetzt wird, und weiter  $b_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $b_2 = +\frac{1}{2}$ . Daher erhält man

$$20) \quad \dots \quad \delta_{aa} = \frac{h}{E \cdot F^v} - \delta_{La} - \frac{l^2(3a_1 - l)}{6E \cdot J} \quad \text{bzw.}$$

$$\delta_{aa} = \frac{h}{E \cdot F^v} - \delta_{Ra} - \frac{l^2(3a_2 + \frac{1}{2}l)}{6E \cdot J}.$$

Bei dem Zustande  $X_b = 1$  mögen die Balkenmomente wieder durch

$$M_1 = a_1 + b \cdot x \quad \text{und}$$

$$M_2 = a_2 + b \cdot x \quad \text{ausgedrückt werden (Abb. 37).}$$

Hierbei ist  $a_2 = a_1 + b \cdot l_1 - h$ , während  $b$  für beide Öffnungen denselben Wert besitzt. Bei der Biegungslinie sind dieselben Bezeichnungen wie vorhin beibehalten worden; nur wird der Zeiger  $a$  durch den Zeiger  $b$  ersetzt. Da in der Stütze  $M$  keine Normalspannung herrscht, wird  $\delta_{Mb} = -\delta_{ab}$ .

Unter Benutzung der Gl. 6 bis 9 erhält man nachstehende Werte für die Biegungslinie des Balkens:

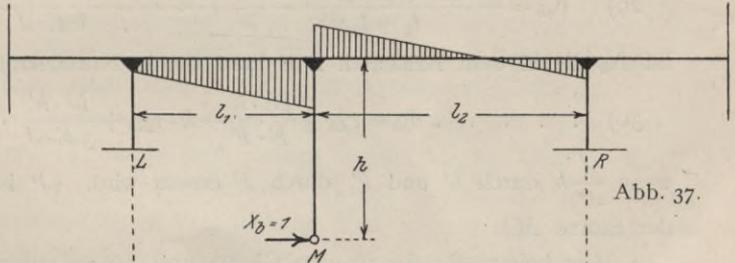


Abb. 37.

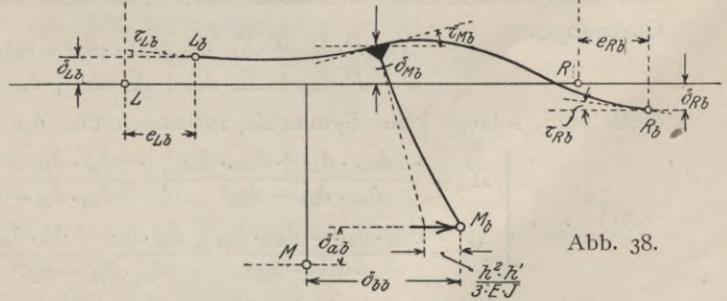


Abb. 38.

Öffnung  $\overline{LM}$ :

$$21) \quad \delta_b = \delta_{Lb} \frac{l_1 - x}{l_1} - \delta_{ab} \frac{x}{l_1} + \frac{x(l_1 - x)}{6E \cdot J_1} (3a_1 + b \cdot l_1 + b \cdot x)$$

$$22) \quad \tau_b = -\frac{\delta_{ab} + \delta_{Lb}}{l_1} + \frac{l_1(3a_1 + b \cdot l_1)}{6E \cdot J_1} - \frac{x(2a_1 + b \cdot x)}{2E \cdot J_1}$$

$$23) \quad \tau_{Lb} = -\frac{\delta_{ab} + \delta_{Lb}}{l_1} + \frac{l_1(3a_1 + b \cdot l_1)}{6E \cdot J_1}$$

$$24) \quad \tau_{Mb} = -\frac{\delta_{ab} + \delta_{Lb}}{l_1} - \frac{l_1(3a_1 + 2b \cdot l_1)}{6E \cdot J_1}$$

Öffnung  $\overline{MR}$ :

$$25) \quad \delta_b = -\delta_{ab} \frac{l_2 - x}{l_2} + \delta_{Rb} \frac{x}{l_2} + \frac{x(l_2 - x)}{6E \cdot J_2} (3a_2 + b \cdot l_2 + b \cdot x)$$

$$26) \quad \tau_b = \frac{\delta_{ab} + \delta_{Rb}}{l_2} + \frac{l_2(3a_2 + b \cdot l_2)}{6E \cdot J_2} - \frac{x(2a_2 + b \cdot x)}{2E \cdot J_2}$$

$$27) \quad \tau_{Mb} = \frac{\delta_{ab} + \delta_{Rb}}{l_2} + \frac{l_2(3a_2 + b \cdot l_2)}{6E \cdot J_2}$$

$$28) \quad \tau_{Rb} = \frac{\delta_{ab} + \delta_{Rb}}{l_2} - \frac{l_2(3a_2 + 2b \cdot l_2)}{6E \cdot J_2}$$

Setzt man die beiden Werte für  $\tau_{Mb}$  einander gleich, so findet man, wenn wieder  $J_1 = J_2 = J$  angenommen wird:

$$\delta_{ab} \frac{l_1 + l_2}{l_1 \cdot l_2} + \frac{\delta_{Rb} \cdot l_1 + \delta_{Lb} \cdot l_2}{l_1 \cdot l_2} = - \frac{l_1(3a_1 + 2b \cdot l_1) + l_2(3a_2 + b \cdot l_2)}{6E \cdot J}$$

Da hierin  $a_2$  durch  $(a_1 + b \cdot l_1 - h)$  ersetzt werden kann, wird

$$29) \quad \delta_{ab} = - \frac{\delta_{Rb} \cdot l_1 + \delta_{Lb} \cdot l_2}{l_1 + l_2} - \frac{l_1 \cdot l_2 [3a_1 + b(2l_1 + l_2) - 3 \frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot h]}{6E \cdot J}$$

Ist  $N_b$  die in dem Balkenteil  $\overline{LM}$  herrschende Normalkraft, so gilt:

$$30) \quad \delta_{bb} = e_{Lb} + \frac{N_b \cdot l_1}{E \cdot F} - h \cdot \tau_{Mb} + \frac{h^2 \cdot h'}{3E \cdot J}$$

wenn  $\frac{J}{J^v} h$  durch  $h'$  und  $F_1$  durch  $F$  ersetzt wird. ( $J^v$  ist das Trägheitsmoment der Stütze  $M$ .)

Die beiden für  $\delta_{ab}$  in den Gl. 19 und 29 gefundenen Werte haben nach dem Maxwell'schen Satze denselben Wert. Aus den schon eingangs erwähnten Gleichungen

$$0 = P \cdot \delta_{ma} + X_a \cdot \delta_{aa} + X_b \cdot \delta_{ab} + \delta_{at}$$

$$0 = P \cdot \delta_{mb} + X_a \cdot \delta_{ab} + X_b \cdot \delta_{bb} + \delta_{bt}$$

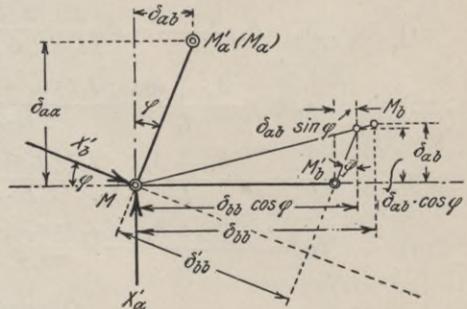
erhält man, solange keine Symmetrie vorhanden und  $\delta_{ab}$  nicht = 0 ist,

$$31) \quad \begin{cases} X_a = \frac{-\delta_{ma} \cdot \delta_{bb} + \delta_{mb} \cdot \delta_{ab}}{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2} + \frac{\delta_{at} \cdot \delta_{bb} + \delta_{bt} \cdot \delta_{ab}}{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}, \\ X_b = \frac{\delta_{ma} \cdot \delta_{ab} - \delta_{mb} \cdot \delta_{aa}}{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2} + \frac{\delta_{at} \cdot \delta_{ab} - \delta_{bt} \cdot \delta_{aa}}{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}. \end{cases}$$

Führt man dagegen die beiden Unbekannten  $X_a'$  und  $X_b'$  ein, von denen  $X_a'$  gleichgerichtet mit  $X_a$  und  $X_b'$  senkrecht zu der durch  $X_a = 1$  hervorgerufenen Verschiebung von  $M$  nach  $M_a$  angebracht wird (Abb. 39), so wird  $\delta_{ab}' = 0$ ; man hat

$$32) \quad \begin{cases} X_a' = - \frac{\delta_{ma}'}{\delta_{aa}'} - \frac{\delta_{at}'}{\delta_{aa}'}, \\ X_b' = - \frac{\delta_{mb}'}{\delta_{bb}'} - \frac{\delta_{bt}'}{\delta_{bb}'}. \end{cases}$$

$\delta_{ma}'$ ,  $\delta_{at}'$  und  $\delta_{aa}'$  decken sich hierbei mit  $\delta_{ma}$ ,  $\delta_{at}$  und  $\delta_{aa}$ , weil die Zustände  $X_a'$  und  $X_a$  gleich sind. Der Zustand  $X_b' = 1$  läßt sich durch eine



Verschiebungen des Punktes  $M$  nach  $M_a'$  und  $M_b'$  infolge  $X_a' = 1$  und  $X_b' = 1$ .

Abb. 39.

wagerechte Kraft  $1 \cdot \cos \varphi$  und durch eine senkrechte,  $X_a$  entgegengesetzt gerichtete Kraft  $1 \cdot \sin \varphi$  darstellen, wobei  $\varphi = \arctan \frac{\delta_{ab}}{\delta_{aa}}$  ist; daher wird

$$33) \quad \begin{cases} \delta_{mb}' = -\delta_{ma} \cdot \sin \varphi + \delta_{mb} \cdot \cos \varphi = \cos \varphi \frac{-\delta_{ma} \cdot \delta_{ab} + \delta_{mb} \cdot \delta_{aa}}{\delta_{aa}} \\ \delta_{bt}' = -\delta_{at} \cdot \sin \varphi + \delta_{bt} \cdot \cos \varphi = \cos \varphi \frac{-\delta_{at} \cdot \delta_{ab} + \delta_{bt} \cdot \delta_{aa}}{\delta_{aa}} \\ \delta_{bb}' = \cos \varphi (-\delta_{ab} \cdot \sin \varphi + \delta_{bb} \cdot \cos \varphi) = \cos^2 \varphi \frac{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}{\delta_{aa}} \end{cases}$$

(Vgl. hierzu Abb. 39.)

Mit diesen Werten gilt:

$$X_b' = \frac{\delta_{ma} \cdot \delta_{ab} - \delta_{mb} \cdot \delta_{aa}}{\cos \varphi (\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2)} + \frac{\delta_{at} \cdot \delta_{ab} - \delta_{bt} \cdot \delta_{aa}}{\cos \varphi (\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2)}$$

Berücksichtigt man nun noch, daß

$$X_a = X_a' - X_b' \cdot \sin \varphi \quad \text{und}$$

$$X_b = X_b' \cdot \cos \varphi \quad \text{ist, und setzt für } X_a' \text{ und } X_b' \text{ die}$$

Werte der Gl. 32 ein, dann erhält man für  $X_a$  und  $X_b$  wieder die Gl. 31.

Wenn man von der Bedingung ausgeht, daß  $\delta_{ab}' = 0$  sein soll, kann man die Unbekannten  $X_a'$  und  $X_b'$  auch noch anders wählen als in Abb. 39 angegeben ist. Nimmt man  $X_b'$  gleichgerichtet mit  $X_b$  an, so muß  $X_a'$  senkrecht zu der durch  $X_b = 1$  hervorgerufenen Verschiebung  $\overline{MM}_b$  stehen; oder es werden  $X_a'$  und  $X_b'$  schräg gerichtet, jedoch aufeinander senkrecht stehend eingeführt.

Wie aus der Betrachtung am Eingange dieses Abschnittes hervorgeht, wird in der großen Mehrzahl der Fälle der Balken in einer Öffnung durchschnitten, so daß der Grad der statischen Unbestimmtheit bei dem Hauptsystem wesentlich herabgemindert wird. Die senkrechte Kraft  $X_a$ , die zunächst wagerecht angenommene Kraft  $X_b$  und das Moment  $X_c$  stellen den ursprünglichen Zustand wieder her; der Angriffspunkt der drei Unbekannten ist um das Maß  $f$  unter die Balkenachse nach O verschoben (Abb. 40). Die Abstände  $e_1$  und  $e_2$  des Punktes O von den beiden Nachbarstützen  $L$  und  $R$  sowie die Länge  $f$  lassen sich stets so bestimmen, daß zwei von den Beiwerten  $\delta_{ab}$ ,  $\delta_{ac}$  und  $\delta_{bc}$  zum Verschwinden gebracht werden. Soll auch der dritte gleich Null werden, so kann dies später dadurch geschehen, daß  $X_b$  nicht mehr wagerecht, sondern schräg gerichtet angenommen wird. Hier sollen  $e_1$  und  $e_2$  aus der Bedingung  $\delta_{ac} = 0$  und  $f$  aus der Bedingung  $\delta_{bc} = 0$  ermittelt werden.

Die Abb. 41 bis 43 zeigen die Verbiegungen des durchschnittenen Balkenteils unter dem Einfluß der drei Unbekannten. Die Verschiebungen der Stützköpfe  $L$  und  $R$  seien durch  $\delta_L$ ,  $\delta_R$ ,  $e_L$ ,  $e_R$  und  $\tau_L$ ,  $\tau_R$  unter Zusetzen der Zeiger  $a$ ,  $b$  und  $c$  gegeben und aus den Biegelinien der Nachbaröffnungen bekannt. Bei dem

$$\text{Zustande } X_a = 1 \quad (\text{Abb. 41})$$

wird das den Balken beanspruchende Moment  $M_a = -(e_1 - x)$ .

Die Integration von

$$-E \cdot J \frac{d^2 \delta_a}{dx^2} = -(e_1 - x)$$

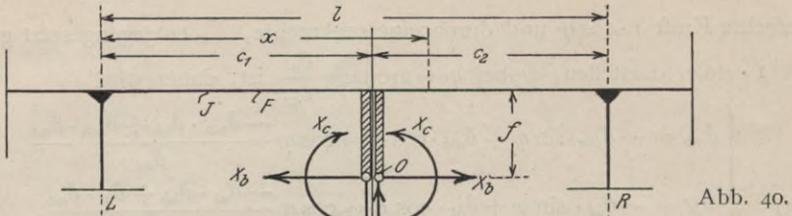


Abb. 40.

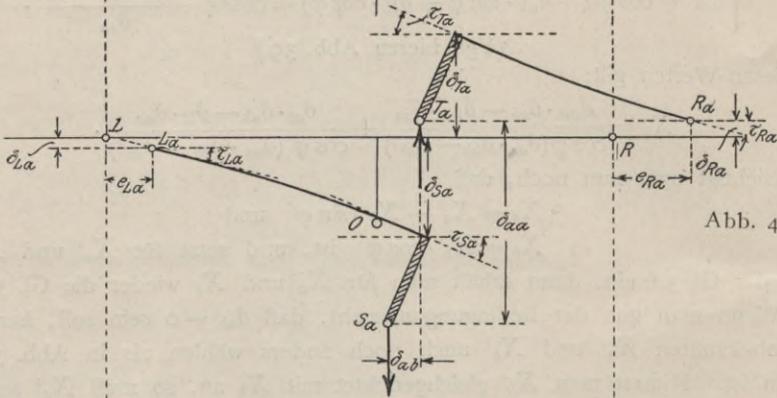


Abb. 41.

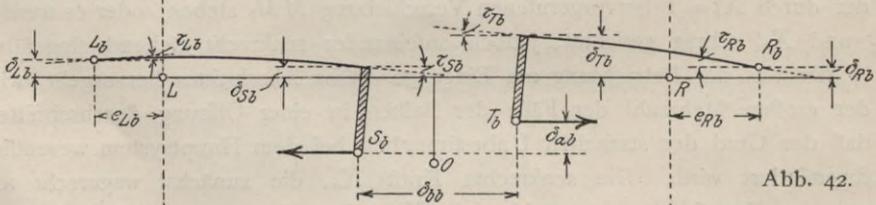


Abb. 42.

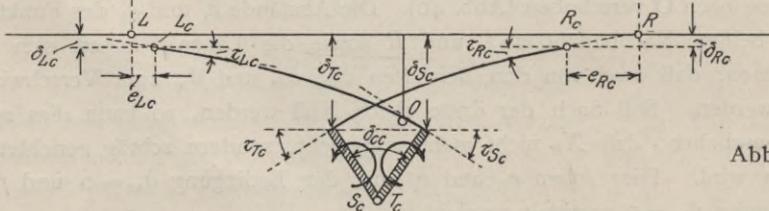


Abb. 43.

ergibt für den linken Ast von  $x=0$  bis  $x=c_1$ :

$$34) \dots \dots \dots \tau_a = \frac{d\delta_a}{dx} = \tau_{La} + \frac{x(2c_1 - x)}{2E \cdot J} \quad \text{und}$$

$$35) \dots \dots \dots \delta_a = \delta_{La} + \tau_{La} \cdot x + \frac{c_1 \cdot x^2}{2E \cdot J} - \frac{x^3}{6E \cdot J},$$

da die beiden Integrationskonstanten dadurch festgelegt sind, daß für  $x=0$  der Winkel der Biegungslinie  $\tau_a = \tau_{La}$  und die lotrechte Verschiebung  $\delta_a = \delta_{La}$  ist. Für  $x=c_1$  wird

$$\tau_a = \tau_{Sa} = \tau_{La} + \frac{c_1^2}{2E \cdot J} \quad \text{und} \quad \delta_a = \delta_{Sa} = \delta_{La} + \tau_{La} \cdot c_1 + \frac{c_1^3}{3E \cdot J}.$$

Entsprechend erhält man für den rechten Ast von  $x = c_1$  bis  $x = l$ :

$$36) \quad \tau_a = \frac{d\delta_a}{dx} = \tau_{Ra} + \frac{(l-x)(2c_2 - l + x)}{2E \cdot J} \quad \text{und}$$

$$37) \quad \delta_a = \delta_{Ra} - \tau_{Ra}(l-x) - \frac{c_2(l-x)^2}{2E \cdot J} + \frac{(l-x)^3}{6E \cdot J}.$$

Für  $x = c_1$  wird

$$\tau_a = \tau_{Ta} = \tau_{Ra} + \frac{c_2^2}{2E \cdot J} \quad \text{und} \quad \delta_a = \delta_{Ta} = \delta_{Ra} - \tau_{Ra} \cdot c_2 - \frac{c_2^3}{3E \cdot J}.$$

Soll nun  $\delta_{a0} = 0$  werden, so muß  $\tau_{Sa} = \tau_{Ta}$  sein, daher

$$\tau_{La} + \frac{c_1^2}{2E \cdot J} = \tau_{Ra} + \frac{c_2^2}{2E \cdot J}.$$

Hieraus erhält man folgende Gleichung zur Bestimmung von  $c_1$  und  $c_2$ :

$$38) \quad l(l - 2c_1) = 2E \cdot J(\tau_{La} - \tau_{Ra}).$$

( $\tau_{La}$  und  $\tau_{Ra}$  sind aus den Biegelinien der beiden Nachbaröffnungen bekannt und enthalten  $c_1$  bzw.  $c_2$  in erster Potenz.) Man findet weiter:

$$39) \quad \delta_{aa} = \delta_{Sa} - \delta_{Ta} = \delta_{La} - \delta_{Ra} + \tau_{La} \cdot c_1 + \tau_{Ra} \cdot c_2 + \frac{c_1^3 + c_2^3}{3E \cdot J} \quad \text{und}$$

$$\delta_{ab} = -e_{La} + \tau_{Sa} \cdot f + e_{Ra} - \tau_{Ta} \cdot f \quad \text{oder}$$

$$40) \quad \delta_{ab} = e_{Ra} - e_{La}, \quad \text{da} \quad \tau_{Sa} = \tau_{Ta} \quad \text{ist.}$$

Bei dem

Zustande  $X_b = 1$  (Abb. 42)

wird das Biegemoment des Balkens  $M_b = -f$ . Durch Integration von

$$-E \cdot J \frac{d^2 \delta_b}{dx^2} = -f$$

findet man für den linken Teil von  $x = 0$  bis  $x = c_1$

$$41) \quad \tau_b = \frac{d\delta_b}{dx} = \tau_{Lb} + \frac{f \cdot x}{E \cdot J}, \quad \text{sowie}$$

$$42) \quad \delta_b = \delta_{Lb} + \tau_{Lb} \cdot x + \frac{f \cdot x^2}{2E \cdot J}$$

und entsprechend für den rechten Teil von  $x = c_1$  bis  $x = l$

$$43) \quad \tau_b = \frac{d\delta_b}{dx} = \tau_{Rb} - \frac{f(l-x)}{E \cdot J}, \quad \text{sowie}$$

$$44) \quad \delta_b = \delta_{Rb} - \tau_{Rb} \cdot (l-x) + \frac{f \cdot (l-x)^2}{2E \cdot J}.$$

Für  $x = c_1$  wird

$$\text{links: } \tau_{Sb} = \tau_{Lb} + \frac{f \cdot c_1}{E \cdot J}, \quad \delta_{Sb} = \delta_{Lb} + \tau_{Lb} \cdot c_1 + \frac{f \cdot c_1^2}{2E \cdot J} \quad \text{und}$$

$$\text{rechts: } \tau_{Tb} = \tau_{Rb} - \frac{f \cdot c_2}{E \cdot J}, \quad \delta_{Tb} = \delta_{Rb} - \tau_{Rb} \cdot c_2 + \frac{f \cdot c_2^2}{2E \cdot J}.$$

Soll nun  $\delta_{b0} = 0$  werden, so muß  $\tau_{Sb} = \tau_{Tb}$  sein, daher

$$45) \quad f = \frac{E \cdot J(\tau_{Rb} - \tau_{Lb})}{l}.$$

Ferner ergibt Abb. 42:

$$\delta_{bb} = -e_{Lb} + \tau_{Sb} \cdot f + e_{Rb} - \tau_{Tb} \cdot f + \frac{l}{E \cdot F},$$

da  $\frac{l}{E \cdot F}$  die durch  $X_b = 1$  bewirkte Zusammendrückung des Balkens ist; mithin

$$46) \quad \delta_{bb} = e_{Rb} - e_{Lb} + \frac{l}{E \cdot F}.$$

Für  $\delta_{ab}$  findet man:

$$\delta_{ab} = \delta_{Sb} - \delta_{Tb} = \delta_{Lb} - \delta_{Rb} + \tau_{Lb} \cdot c_1 + \tau_{Rb} \cdot c_2 + f \frac{c_1^2 - c_2^2}{2 E \cdot J}.$$

Setzt man hierin für  $f$  den Wert aus Gl. 45 ein, dann wird:

$$47) \quad \delta_{ab} = \delta_{Lb} - \delta_{Rb} + l \frac{\tau_{Lb} + \tau_{Rb}}{2}.$$

Der Zustand  $X_c = 1$  (Abb. 43)

ergibt das Balkenmoment  $M_c = -1$ . Durch Integration von

$$-E \cdot J \frac{d^2 \delta_c}{dx^2} = -1$$

erhält man für den linken Teil von  $x = 0$  bis  $x = c_1$

$$48) \quad \tau_c = \frac{d \delta_c}{dx} = \tau_{Lc} + \frac{x}{E \cdot J}$$

$$49) \quad \delta_c = \delta_{Lc} + \tau_{Lc} \cdot x + \frac{x^2}{2 E \cdot J}$$

und für den rechten Teil von  $x = c_1$  bis  $x = l$

$$50) \quad \tau_c = \frac{d \delta_c}{dx} = \tau_{Rc} - \frac{l-x}{E \cdot J}$$

$$51) \quad \delta_c = \delta_{Rc} - \tau_{Rc} \cdot (l-x) + \frac{(l-x)^2}{2 E \cdot J}.$$

Für  $x = c_1$  wird

$$\text{links: } \tau_{Sc} = \tau_{Lc} + \frac{c_1}{E \cdot J}, \quad \delta_{Sc} = \delta_{Lc} + \tau_{Lc} \cdot c_1 + \frac{c_1^2}{2 E \cdot J} \quad \text{und}$$

$$\text{rechts: } \tau_{Tc} = \tau_{Rc} - \frac{c_2}{E \cdot J}, \quad \delta_{Tc} = \delta_{Rc} - \tau_{Rc} \cdot c_2 + \frac{c_2^2}{2 E \cdot J}.$$

Soll nun  $\delta_{ac} = 0$  werden, so muß  $\delta_{Sc} = \delta_{Tc}$  oder

$$52) \quad \delta_{Lc} - \delta_{Rc} + \tau_{Lc} \cdot c_1 + \tau_{Rc} \cdot c_2 = \frac{l(l-2c_1)}{2 E \cdot J} \quad \text{sein.}$$

Hieraus erhält man für  $c_1$  bzw.  $c_2$  denselben Wert wie aus Gl. 38.

Die Bedingung  $\delta_{bc} = 0$  erfordert

$$0 = -e_{Lc} + \tau_{Sc} \cdot f + e_{Rc} - \tau_{Tc} \cdot f \quad \text{und ergibt } f = \frac{e_{Lc} - e_{Rc}}{\tau_{Sc} - \tau_{Tc}}.$$

Da nun

$$53) \quad \delta_{cc} = \tau_{Sc} - \tau_{Tc} = \tau_{Lc} - \tau_{Rc} + \frac{l}{E \cdot J}, \quad \text{wird}$$

$$54) \quad f = \frac{e_{Lc} - e_{Rc}}{\delta_{cc}}.$$

Dieser Ausdruck liefert dieselbe Länge für  $f$  wie Gl. 45.

Es sind jetzt sämtliche Beiwerte der Grundgleichungen 1 auf Seite 3 zur Bestimmung von  $X_a, X_b, X_c$  bekannt. Da  $\delta_{ac} = \delta_{bc} = 0$  ist, hat man

$$55) \quad \left\{ \begin{aligned} X_a &= \frac{-\delta_{ma} \cdot \delta_{bb} + \delta_{mb} \cdot \delta_{ab}}{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2} + \frac{-\delta_{at} \cdot \delta_{bb} + \delta_{bt} \cdot \delta_{ab}}{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}, \\ X_b &= \frac{\delta_{ma} \cdot \delta_{ab} - \delta_{mb} \cdot \delta_{aa}}{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2} + \frac{\delta_{at} \cdot \delta_{ab} - \delta_{bt} \cdot \delta_{aa}}{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}, \\ X_c &= -\frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} - \frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}}. \end{aligned} \right.$$

Benutzt man statt  $X_a$  und  $X_b$  die beiden Unbekannten  $X_{a'}$  und  $X_{b'}$ , von denen wie in Abb. 44  $X_{a'}$  gleichgerichtet mit  $X_a$  und  $X_{b'}$  unter dem Winkel  $\varphi = \arctan \frac{\delta_{ab}}{\delta_{aa}}$  gegen die Wagerechte geneigt ist, so wird  $\delta_{ab}' = 0$ , und man erhält:

$$56) \quad \dots \quad X_{a'} = -\frac{\delta_{ma'}}{\delta_{aa'}} \frac{\delta_{at'}}{\delta_{aa'}} \quad \text{und} \quad X_{b'} = -\frac{\delta_{mb'}}{\delta_{bb'}} \frac{\delta_{bt'}}{\delta_{bb'}}.$$

Wie auf Seite 14 ist auch hier  $\delta_{ma'} = \delta_{ma}$ ,  $\delta_{aa'} = \delta_{aa}$ ,  $\delta_{at'} = \delta_{at}$ , ferner

$$\delta_{mb}' = -\delta_{ma} \cdot \sin \varphi + \delta_{mb} \cdot \cos \varphi,$$

$$\delta_{bt}' = -\delta_{at} \cdot \sin \varphi + \delta_{bt} \cdot \cos \varphi \quad \text{und}$$

$$\delta_{bb}' = \cos \varphi (-\delta_{ab} \cdot \sin \varphi + \delta_{bb} \cdot \cos \varphi) = \cos^2 \varphi \frac{\delta_{aa} \cdot \delta_{bb} - \delta_{ab}^2}{\delta_{aa}}.$$

In Abb. 44 sind die Verschiebungen der beiden Kraftangriffspunkte  $O$  unter dem Einflusse der Kräfte  $X_{a'} = 1$  und  $X_{b'} = 1$  dargestellt. Der Zustand  $X_{a'} = 1$  deckt sich mit dem Zustande  $X_a = 1$ ; es werden die Bewegungen  $\overline{OS_{a'}}$  und  $\overline{OT_{a'}}$

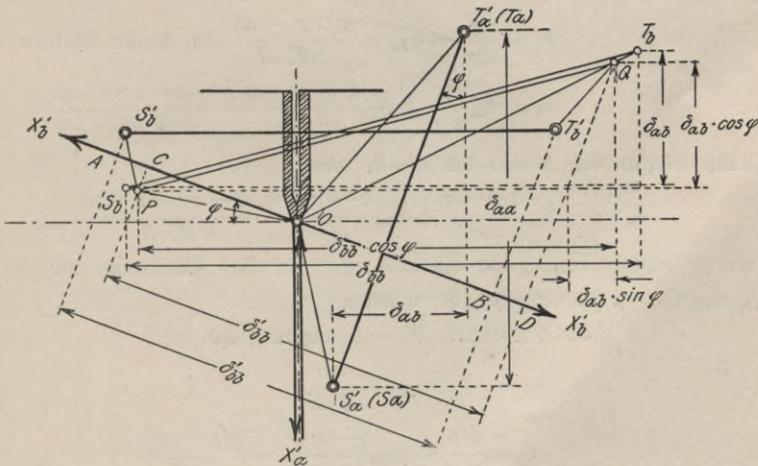


Abb 44.

hervorgerufen. Der Zustand  $X_{b'} = 1$  entsteht durch eine wagerechte Kraft  $1 \cdot \cos \varphi$  und durch eine senkrechte  $1 \cdot \sin \varphi$ . Werden infolge des Einflusses von  $X_{b'} = 1$  die Strecken  $\overline{OS_b}$  und  $\overline{OT_b}$  zurückgelegt, so verschiebt die wagerechte Komponente  $1 \cdot \cos \varphi$  die Punkte  $O$  auf diesen nur bis  $P$  und  $Q$  und die senkrechte Komponente von dort, parallel  $\overline{OS_a}$  und  $\overline{OT_a}$ , nach  $S_b'$  und  $T_b'$ , die in einer Wagerechten liegen. Die Projektion  $\overline{AB}$  von  $\overline{S_b'T_b'}$  auf die Richtung von  $X_{b'}$  ist  $\delta_{bb}'$  und, wie sich leicht nachweisen läßt, gleich der Projektion  $\overline{CD}$  von  $\overline{PQ}$  auf  $X_{b'}$ .

Durch  $X_a = X_a' - X_b' \cdot \sin \varphi$  und  $X_b = X_b' \cdot \cos \varphi$  sind die Beziehungen zwischen  $X_a$  und  $X_b$  einerseits und  $X_a'$  und  $X_b'$  andererseits geregelt. Für  $X_c$  bleibt die Gleichung

$$X_c = -\frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}} - \frac{\delta_{ct}}{\delta_{cc}}$$

bestehen, wie auch  $X_a'$  und  $X_b'$  gewählt werden mögen.

Wesentliche Vereinfachungen der vorstehenden Gleichungen ergeben sich, wenn Symmetrie vorhanden ist und die Unbekannten in der Symmetrieachse angreifen (Abb. 45 bis 48), da dann

$$\begin{aligned} e_{La} &= e_{Ra}, & \tau_{La} &= \tau_{Ra}, & \delta_{La} &= -\delta_{Ra}, \\ e_{Lb} &= -e_{Rb}, & \tau_{Lb} &= -\tau_{Rb}, & \delta_{Lb} &= \delta_{Rb} \quad \text{und} \\ e_{Lc} &= -e_{Rc}, & \tau_{Lc} &= -\tau_{Rc}, & \delta_{Lc} &= \delta_{Rc} \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Es wird  $e_1 = e_2 = c$  und  $\delta_{ab} = 0$ , so daß  $X_a'$  und  $X_b'$  mit  $X_a$  und  $X_b$  zusammenfallen. Nach Gl. 45 wird

$$57) \quad \dots \quad f = -\frac{E \cdot J \cdot \tau_{Lb}}{c} \quad \text{und nach Gl. 54}$$

$$58) \quad \dots \quad f = \frac{2 e_{Lc}}{\delta_{cc}}. \quad \text{Ferner findet man für den}$$

Zustand  $X_a = 1$  (Abb. 46)

$$59) \quad \dots \quad \delta_{aa} = 2 \cdot \delta_{La} + 2 \cdot \tau_{La} \cdot c + \frac{2 c^3}{3 E \cdot J}$$

$$60) \quad \dots \quad \tau_a = \frac{d \delta_a}{dx} = \tau_{La} + \frac{x(2c-x)}{2 E \cdot J} \quad \text{für beide Hälften und}$$

$$61) \quad \dots \quad \delta_a = \delta_{aa} \frac{x}{2c} + \delta_{La} \frac{c-x}{c} - \frac{x(c-x)(2c-x)}{6 E \cdot J}$$

für die linke Hälfte von  $x = 0$  bis  $x = c$ , bzw.

$$62) \quad \dots \quad \delta_a = -\delta_{aa} \frac{2c-x}{2c} + \delta_{La} \frac{c-x}{c} - \frac{x(c-x)(2c-x)}{6 E \cdot J}$$

für die rechte Hälfte von  $x = c$  bis  $x = 2c$ . In die Ausdrücke für  $\delta_a$  ist der Wert  $\delta_{aa}$  aus Gl. 59 hereingebracht worden.

Der Zustand  $X_b = 1$  ergibt (Abb. 47):

$$63) \quad \dots \quad \delta_{bb} = -2 e_{Lb} + \frac{2c}{E \cdot J}$$

$$64) \quad \dots \quad \tau_b = \frac{d \delta_b}{dx} = \tau_{Lb} \frac{c-x}{c} = -\frac{f(c-x)}{E \cdot J}$$

$$65) \quad \dots \quad \delta_b = \delta_{Lb} - \frac{f \cdot x(2c-x)}{2 E \cdot J} \quad (\text{Parabel}).$$

Gl. 64 und 65 gelten für die ganze Öffnung von  $x = 0$  bis  $x = 2c$ .

Der Zustand  $X_c = 1$  liefert (Abb. 48):

$$66) \quad \dots \quad \delta_{cc} = 2 \tau_{Lc} + \frac{2c}{E \cdot J},$$

ferner bei dem linken Teil von  $x = 0$  bis  $x = c$

$$67) \quad \dots \quad \tau_c = \frac{d \delta_c}{dx} = \tau_{Lc} + \frac{x}{E \cdot J}$$

$$68) \dots \dots \delta_c = \delta_{Lc} + \tau_{Lc} \cdot x + \frac{x^2}{2 E \cdot J}$$

und bei dem rechten Teil von  $x=c$  bis  $x=2c$

$$69) \dots \dots \tau_c = \frac{d\delta_c}{dx} = -\tau_{Lc} - \frac{2c-x}{E \cdot J}$$

$$70) \dots \dots \delta_c = \delta_{Lc} + \tau_{Lc}(2c-x) + \frac{(2c-x)^2}{2 E \cdot J}$$

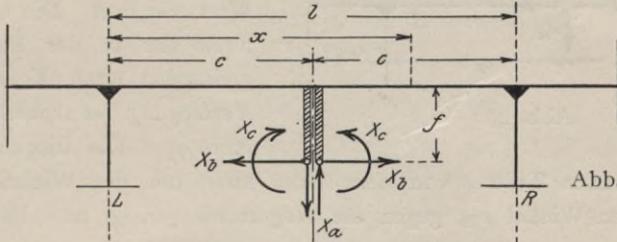


Abb. 45.

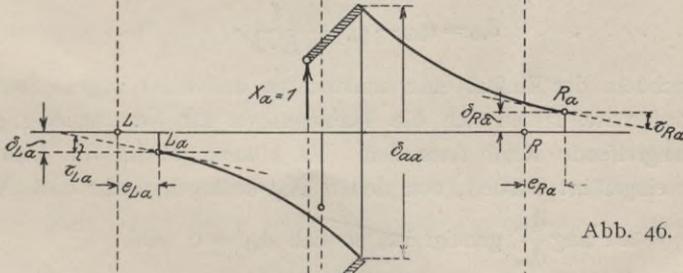


Abb. 46.

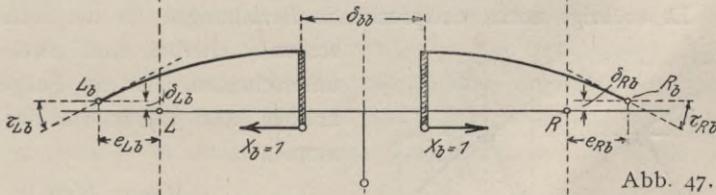


Abb. 47.

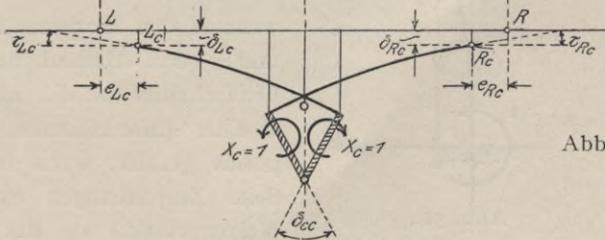


Abb. 48.

Ist der Balken in einer Öffnung  $\overline{LR}$  durch ein Gelenk unterbrochen, das von den Stützen  $L$  und  $R$  die Abstände  $c_1$  und  $c_2$  hat, so wird dieses durch die beiden Unbekannten  $X_a$  und  $X_b$  ersetzt.  $X_a$  wird senkrecht und  $X_b$  zunächst wagerecht angenommen, so daß es mit der Balkenachse zusammenfällt

(Abb. 49). Der Zustand  $X_a = 1$  unterscheidet sich nicht von dem soeben behandelten Zustande  $X_a = 1$ ; die dort für  $\tau_a$ ,  $\delta_a$  und  $\delta_{aa}$  abgeleiteten Gleichungen

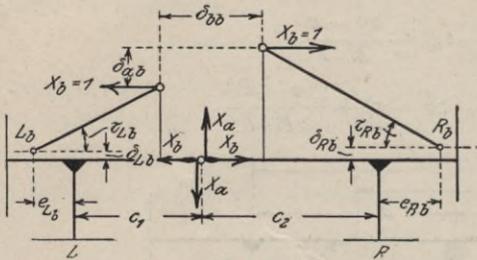


Abb. 49.

aus zwei geraden Teilen, von denen der linke um den Winkel  $\tau_{Lb}$  und der rechte um den Winkel  $\tau_{Rb}$  gegen die Wagerechte geneigt ist. Es wird

$$71) \dots \dots \delta_{ab} = \delta_{Lb} - \delta_{Rb} + \tau_{Lb} \cdot c_1 + \tau_{Rb} \cdot c_2 \quad \text{und}$$

$$72) \dots \dots \delta_{bb} = e_{Rb} - e_{Lb} + \frac{l}{E \cdot F}$$

Nachdem der Einfluß einer senkrechten und einer wagerechten Kraft untersucht worden ist, lassen sich die Verbiegungen für jede beliebig gerichtete, im Gelenk angreifende Kraft feststellen. Es können wieder die Unbekannten  $X_a'$  und  $X_b'$  eingeführt werden, von denen  $X_a'$  senkrecht steht und  $X_b'$  unter dem Winkel  $\varphi = \arctan \frac{\delta_{ab}}{\delta_{aa}}$  geneigt ist, so daß  $\delta_{ab}' = 0$  wird.

Die vorstehend abgeleiteten Gleichungen gestatten eine schnelle Bestimmung der Biegelinien des Balkens bei den Zuständen  $X_a = 1$ ,  $X_b = 1$  und  $X_c = 1$ , die am häufigsten bei der Berechnung der mehrstieligen Rahmen zur Verwendung gelangen. Es erübrigt noch, entsprechende Beziehungen für die Stützen aufzustellen. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist ein Fußgelenk vorhanden (Abb. 50), so wird das Biegemoment

$$M = -H \cdot y,$$

wenn  $H$  den Horizontalschub am Fuße und  $y$  den Abstand des betreffenden Querschnittes von diesem bedeutet (Das in einer Stütze auftretende Moment wird positiv gezählt, wenn in ihrer rechten Seite Zuspännungen entstehen). Der Neigungswinkel  $\tau_S$  des Stützenkopfes

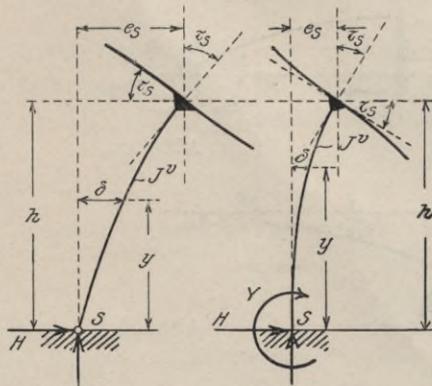


Abb. 50.

Abb. 51.

ist aus der Biegelinie des Balkens bekannt. Die Integration der Differentialgleichung der Biegelinie ergibt

$$73) \dots \dots \frac{d\delta}{dy} = \tau_S - H \frac{h^2 - y^2}{2 E \cdot J^v} \quad \text{und}$$

$$74) \dots \delta = \tau_S \cdot y - H \frac{h^2 \cdot y}{2 E \cdot J^v} + H \frac{y^3}{6 E \cdot J^v};$$

der Stützenkopf verschiebt sich um das Maß

$$e_S = \tau_S \cdot h - H \frac{h^3}{3 E \cdot J^v}$$

von links nach rechts.

Ist die Stütze am Fuße eingespannt und bezeichnet  $Y$  das Einspannungsmoment (Abb. 51), so wird in der Höhe  $y$  das Biegemoment

$$M = Y - H \cdot y.$$

Da für  $y = 0$  sowohl  $\frac{d\delta}{dy} = 0$  als auch  $\delta = 0$ , gilt:

$$75) \dots \frac{d\delta}{dy} = -Y \frac{y}{E \cdot J^v} + H \frac{y^2}{2 E \cdot J^v} \quad \text{und}$$

$$76) \dots \delta = -Y \frac{y^2}{2 E \cdot J^v} + H \frac{y^3}{6 E \cdot J^v}.$$

Für  $y = h$  wird  $\tau_S = -Y \frac{h}{E \cdot J^v} + H \frac{h^2}{2 E \cdot J^v}$  und

$$e_S = -Y \frac{h^2}{2 E \cdot J^v} + H \frac{h^3}{6 E \cdot J^v}.$$

Als Probe bei der Anwendung kann gelten, daß der hier errechnete Wert für  $\tau_S$  gleich dem Winkel der Biegungslinie des Balkens an dem Stützenkopfe sein muß.

Die wagerechte Verschiebung eines beliebigen Punktes der Balkenachse ist

$$77) \dots e = e_S + \frac{N \cdot x}{E \cdot F},$$

wenn  $e_S$  die wagerechte Verschiebung des links von dem Querschnitt liegenden Stützenkopfes und  $N$  die Normalkraft in dem betreffenden Balkenteile bezeichnet.

Auf Grund der vorstehend abgeleiteten Beziehungen liegen die Gleichungen für die Biegungslinien und damit die Einflußlinien der Unbekannten  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  fest, sobald die in dem statisch bestimmten oder unbestimmten Hauptsystem wirkenden Kräfte und Momente bekannt sind. Der Ermittlung der Unbekannten folgt die Berechnung der übrigen an dem Träger auftretenden Kräfte nach dem bekannten Gesetze

$$78) \dots S = S_o + S_a \cdot X_a + S_b \cdot X_b + S_c \cdot X_c,$$

indem die in dem Hauptsystem durch die äußeren Lasten und durch die Unbekannten hervorgerufenen Anteile zusammengezählt werden.

## Abschnitt II.

# Anwendungen des Verfahrens unter besonderer Berücksichtigung der symmetrischen Rahmenträger mit gleich hohen Stützen.

Die Ausführungen des I. Abschnittes sind im folgenden durch einige Beispiele ergänzt. Da sie in etwas größerer Zahl gebracht werden, als vielleicht die Erläuterung des Verfahrens bedingt, werden gleichzeitig geeignete Unterlagen für die schnelle Berechnung von solchen Rahmen geschaffen, die in diesem Abschnitt nicht näher behandelt sind; denn verwendet man die hier untersuchten Träger dort als Hauptssysteme, so sind die in diesen auftretenden Kräfte von vornherein bekannt.

Der Mehrzahl der Beispiele liegt symmetrische Anordnung zugrunde, weil sie für die Praxis fast ausschließlich in Frage kommt. Zur Vereinfachung der Endergebnisse werden bei sämtlichen Stützen eines Trägers gleiche Höhe  $h$  und gleicher Querschnitt ( $F^v, J^v$ ) vorausgesetzt; auch werden häufig gleiche Feldweiten  $l$  und ein gleicher Querschnitt ( $F, J$ ) für den Balken in seiner ganzen Länge angenommen.

Die Bezeichnungen des I. Abschnittes werden beibehalten. Von den an den Kämpfern auftretenden Kräften werden die senkrechten Auflagerdrücke mit  $A, B, C, D \dots$ , die wagerechten Auflagerdrücke mit  $H_a, H_b, H_c, H_d \dots$  und die Einspannungsmomente mit  $Y_a, Y_b, Y_c, Y_d \dots$  bezeichnet; die Schübe  $H$  bzw. die Einspannungsmomente  $Y$  werden positiv gezählt, wenn sie von links nach rechts gerichtet bzw. rechtsdrehend sind (Abb. 50 und 51). Die Zugehörigkeit zu einem der Zustände  $X_a = 1, X_b = 1$  oder  $X_c = 1$  wird durch die Zeiger  $a, b$  oder  $c$  gekennzeichnet, z. B.  $B_b, D_a, H_{ac}, H_{da}, Y_{cb} \dots$ . Die Stützkräfte des Hauptsystems infolge äußerer Lasten erhalten den Zeiger 0, z. B.  $A_0, H_{b0} \dots$

### A. Rahmen mit Fußgelenken.

#### 1. Der zweistielige Rahmen.

Der in Abb. 52 dargestellte Zweigelenkrahmen ist einfach statisch unbestimmt. Ersetzt man das feste Gelenk  $B$  durch ein längsbewegliches Lager und führt an diesem den statisch unbestimmten Horizontalschub  $X_a$  ein, so verbiegt

dieser das Hauptsystem nach Abb. 53. Dem Zustande  $X_a = 1$  entsprechen die

Auflagerdrücke  $A_a = B_a = 0, H_{aa} = 1, H_{ba} = -1,$

die Momente  $M_a = -y$  in der linken Stütze,

$M_a = +y$  in der rechten Stütze,

$M_a = -h$  in dem Balken und

die Normalkraft  $N_a = -1$  in dem Balken.

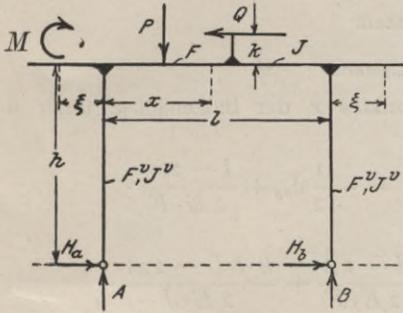


Abb. 52.

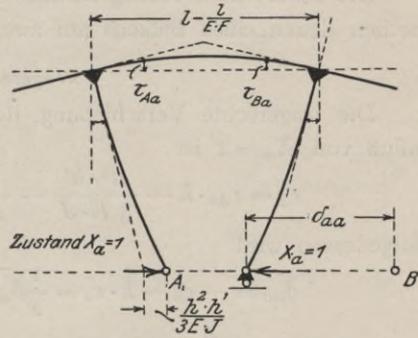


Abb. 53.

Die Gl. 6 bis 9 S. 11 liefern die Biegelinie des Balkens. Da  $\delta_{Aa} = \delta_{Ba} = 0,$   
 $a = -h$  und  $b = 0$  ist, wird

$$1) \dots \delta_a = -\frac{h \cdot x (l - x)}{2 E \cdot J},$$

$$2) \dots \tau_a = -\frac{h \cdot l}{2 E \cdot J} + \frac{h \cdot x}{E \cdot J} = -\frac{h (l - 2x)}{2 E \cdot J},$$

$$\tau_{Aa} = -\tau_{Ba} = -\frac{h \cdot l}{2 E \cdot J}.$$

Die Abb. 53 ergibt

$$\delta_{aa} = h (-\tau_{Aa} + \tau_{Ba}) + \frac{2 h^2 \cdot h'}{3 E \cdot J} + \frac{l}{E \cdot F},$$

wenn  $\frac{J}{J_v} \cdot h = h'$  gesetzt wird, oder

$$3) \dots \delta_{aa} = \frac{h^2 (3 l'' + 2 h')}{3 E \cdot J} \quad \text{wo} \quad l'' = l \left( 1 + \frac{J}{F \cdot h^2} \right).$$

#### Senkrechte Lasten.

Greift  $P$  innerhalb der beiden Stützen an, so ist  $\delta_{ma} = \delta_a$ ; daher liefert

$$X_a = -\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} P:$$

$$4) \dots X_a = \frac{3 x (l - x)}{2 h (3 l'' + 2 h')} \cdot P = H_a = -H_b.$$

Die Einflußlinie für  $X_a$  ist demnach eine Parabel mit der Pfeilhöhe

$$\frac{3 l^2}{8 h (3 l'' + 2 h')}.$$

Werden die Kragarme belastet, so ist

$$\delta_{ma} = \frac{h \cdot l \cdot \xi}{2 E \cdot J},$$

wenn  $\xi$  die Entfernung zwischen  $P$  und der nächsten Stütze bedeutet. Mithin wird

$$5) \quad \dots \quad X_a = - \frac{3 l \cdot \xi}{2 h (3 l'' + 2 h')} \cdot P = H_a = - H_b.$$

Die senkrechten Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  sind statisch bestimmt und entsprechen denen eines Balkens auf zwei Stützen.

**Wagerechte Lasten.**

Die wagerechte Verschiebung des Punktes  $x$  der Balkenachse unter dem Einfluß von  $X_a = 1$  ist

$$e_a = \tau_{Aa} \cdot h - \frac{h^2 \cdot h'}{3 E \cdot J} - \frac{x}{E \cdot F} = - \frac{1}{2} \delta_{aa} + \frac{l - 2x}{2 E \cdot F}.$$

Infolgedessen wird

$$\delta_{ma} = - e_a - k \cdot \tau_a = \frac{1}{2} \delta_{aa} - \frac{l - 2x}{2 E \cdot F} + \frac{k \cdot h (l - 2x)}{2 E \cdot J}.$$

Mit  $X_a = - \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} Q$  erhält man:

$$X_a = \left[ - \frac{1}{2} - \frac{3 k (l - 2x)}{2 h (3 l'' + 2 h')} + \frac{J}{F \cdot h^2} \cdot \frac{3 (l - 2x)}{2 (3 l'' + 2 h')} \right] \cdot Q.$$

Bei dem statisch bestimmten Hauptsystem wird  $H_{a0} = Q$  und  $H_{b0} = 0$ ; daher

$$6) \quad \begin{cases} H_a = Q + X_a = \left[ \frac{1}{2} - \frac{3 k (l - 2x)}{2 h (3 l'' + 2 h')} + \frac{J}{F \cdot h^2} \cdot \frac{3 (l - 2x)}{2 (3 l'' + 2 h')} \right] \cdot Q \\ H_b = - X_a = \left[ \frac{1}{2} + \frac{3 k (l - 2x)}{2 h (3 l'' + 2 h')} - \frac{J}{F \cdot h^2} \cdot \frac{3 (l - 2x)}{2 (3 l'' + 2 h')} \right] \cdot Q. \end{cases}$$

Greift  $Q$  links von den Stützen an, so ist in diesen Gleichungen  $x = 0$  zu setzen; man erhält

$$7) \quad \begin{cases} H_a = \left[ \frac{1}{2} - \frac{3 k \cdot l}{2 h (3 l'' + 2 h')} + \frac{J}{F \cdot h^2} \cdot \frac{3 l}{2 (3 l'' + 2 h')} \right] \cdot Q \quad \text{und} \\ H_b = \left[ \frac{1}{2} + \frac{3 k \cdot l}{2 h (3 l'' + 2 h')} - \frac{J}{F \cdot h^2} \cdot \frac{3 l}{2 (3 l'' + 2 h')} \right] \cdot Q. \end{cases}$$

Wirkt  $Q$  an den rechten Kragarm, dann setzt man in Gl. 6  $x = l$  und findet

$$8) \quad \begin{cases} H_a = \left[ \frac{1}{2} + \frac{3 k \cdot l}{2 h (3 l'' + 2 h')} - \frac{J}{F \cdot h^2} \cdot \frac{3 l}{2 (3 l'' + 2 h')} \right] \cdot Q \\ H_b = \left[ \frac{1}{2} - \frac{3 k \cdot l}{2 h (3 l'' + 2 h')} + \frac{J}{F \cdot h^2} \cdot \frac{3 l}{2 (3 l'' + 2 h')} \right] \cdot Q. \end{cases}$$

Da die senkrechten Auflagerdrücke von der statisch Unbestimmten unbeeinflusst sind, ist

$$A = - B = Q \frac{h + k}{l}.$$

**Am Balken angreifende Momente.**

Mit  $\delta_{ma} = \tau_a$  wird

$$9) \quad \dots \quad X_a = \frac{3 (l - 2x)}{2 h (3 l'' + 2 h')} \cdot M = H_a = - H_b.$$

In dieser Gleichung ist  $x=0$  bzw.  $x=l$  zu setzen, wenn das Moment  $M$  die Kragarme belastet; mithin

$$10) \quad \dots \quad X_a = \pm \frac{3l}{2h(3l'' + 2h')} \cdot M = H_a = -H_b.$$

Das obere + Vorzeichen gilt, wenn  $M$  links von den Stützen, das untere —, wenn  $M$  rechts von ihnen angreift. Ferner wird

$$A = -B = -\frac{M}{l}.$$

**Am Stützenfuß angreifendes Moment.**

Greift, wie in Abb. 54, am Fuße der linken Stütze ein Moment  $Y$  an, so wird dessen bei dem Zustande  $X_a = 1$  zurückgelegter Weg:

$$\delta_{ma} = \nu_{\Delta a} \frac{h \cdot h'}{2 E \cdot J} = -\frac{h(l+h')}{2 E \cdot J}.$$

Dies ergibt

$$11) \quad \dots \quad X_a = \frac{3(l+h')}{2h(3l'' + 2h')} \cdot Y = H_a = -H_b.$$

$A$  und  $B$  sind wieder statisch bestimmt, und zwar

$$A = -B = -\frac{1}{l} \cdot Y.$$

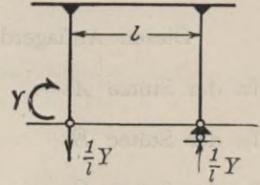


Abb. 54.

Gl. 11 ist von Bedeutung für den Fall, daß bei einem zweistieligen Rahmen die eine Stütze eingespannt ist und die andere gelenkig auflagert (Abb. 29). Man führt in dem Falle zweckmäßig das Einspannungsmoment  $Y$  am Fuße der Stütze als Unbekannte und den Zweigelenrahmen als statisch unbestimmtes Hauptsystem ein. Sehr übersichtlich und einfach wird auch, wie sich später erweist, die Berechnung des dreifach statisch unbestimmten zweistieligen Rahmens mit eingespannten Füßen, wenn man von dem Zweigelenrahmen als Hauptsystem ausgeht.

**Wärmeänderung.**

Durch Anwendung der Gl. 5 (S. 10) findet man:

$$\delta_{at} = -\varepsilon \cdot t_0 \cdot l - \varepsilon \cdot \frac{\Delta t}{d} \cdot h \cdot l; \text{ daher}$$

$$12) \quad X_{at} = H_{at} = -H_{bt} = \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l}{h^2(3l'' + 2h')} + \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot \Delta t \cdot l}{d \cdot h(3l'' + 2h')}.$$

Senkrechte Auflagerdrücke treten nicht auf.

**2. Der dreistielige Rahmen.**

Die beiden Öffnungen haben die Spannweiten  $l_1$  und  $l_2$  (Abb. 55). Hauptsystem ist der einfach statisch unbestimmte Zweigelenrahmen  $A A' C' C$ ; unbekannt sind der senkrechte Auflagerdruck  $X_a$  und

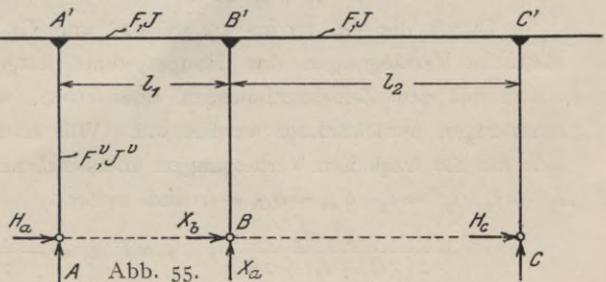


Abb. 55.

der wagerechte Schub  $X_b$  der Mittelstütze  $B$ . Da Symmetrie fehlt, wird  $\delta_{ab}$  nicht gleich Null. Sobald  $\delta_{ab}$  berechnet ist, können entsprechend den Ausführungen auf Seite 14 die beiden Unbekannten  $X_a'$  und  $X_b'$  derart eingeführt werden, daß sie sich unabhängig voneinander ergeben, indem  $\delta'_{ab} = 0$  wird.

Zustand  $X_a = 1$ .

Es werden die Stützkkräfte des Hauptsystems:

$$A_a = -\frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad C_a = -\frac{l_1}{l_1 + l_2}$$

und nach Gl. 4 (S. 25)

$$H_{aa} = -H_{ca} = -\frac{3 l_1 \cdot l_2}{2 h (3 l_1'' + 3 l_2'' + 2 h')}$$

Diesen Auflagerdrücken entsprechen folgende Momente:

In der Stütze  $A$ :  $M_a = -H_{aa} \cdot y = +\frac{3 l_1 \cdot l_2}{2 h (3 l_1'' + 3 l_2'' + 2 h')} \cdot y$ ,

In der Stütze  $B$ :  $M_a = 0$ ,

In der Stütze  $C$ :  $M_a = -H_{ca} \cdot y = -\frac{3 l_1 \cdot l_2}{2 h (3 l_1'' + 3 l_2'' + 2 h')} \cdot y$ ,

In dem Balken  $\overline{A'B}$ :  $M_a = -H_{aa} \cdot h + A_a \cdot x = a_1 + b_1 \cdot x$ ,

wo  $a_1 = +\frac{3 l_1 \cdot l_2}{2 (3 l_1'' + 3 l_2'' + 2 h')}$  und  $b_1 = -\frac{l_2}{l_1 + l_2}$  ist.

In dem Balken  $\overline{B'C}$ :  $M_a = -H_{aa} \cdot h + A_a \cdot l_1 + (A_a + 1) \cdot x = a_2 + b_2 \cdot x$ ,

wo  $a_2 = +\frac{3 l_1 \cdot l_2}{2 (3 l_1'' + 3 l_2'' + 2 h')} - \frac{l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2}$  und  $b_2 = +\frac{l_1}{l_1 + l_2}$  ist.

Ferner treten die Normalkräfte

$$N_a = +\frac{l_2}{l_1 + l_2} \quad \text{in der Stütze } A,$$

$$N_a = -1 \quad \text{in der Stütze } B,$$

$$N_a = +\frac{l_1}{l_1 + l_2} \quad \text{in der Stütze } C \text{ und}$$

$$N_a = -H_{aa} = +H_{ca} = +\frac{3 l_1 \cdot l_2}{2 h (3 l_1'' + 3 l_2'' + 2 h')}$$

in dem Balken  $A'C$  auf. Infolge dieser Normalkräfte werden die Ordinaten der Biegelinie über  $A$  und  $C$ :

$$\delta_{Aa} = -\frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{h}{E \cdot F^v} \quad \text{und} \quad \delta_{Ca} = -\frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot \frac{h}{E \cdot F^v}.$$

Durch die Gl. 10 bis 19 (S. 12) und Gl. 74 und 77 (S. 23) sind jetzt sämtliche Verbiegungen des Hauptsystems festgelegt. Es empfiehlt sich, hier schon mit den Zahlenrechnungen einzusetzen, wenn der Einfluß der Normalspannungen berücksichtigt werden soll. Will man ihn vernachlässigen, so lassen sich für die fraglichen Verbiegungen übersichtliche Beziehungen ableiten. Es wird  $l_1'' = l_1$ ,  $l_2'' = l_2$ ,  $\delta_{Aa} = \delta_{Ca} = 0$  und weiter

$$a_1 = +\frac{3 l_1 \cdot l_2}{2 [3 (l_1 + l_2) + 2 h]}, \quad \text{sowie} \quad a_2 = -\frac{l_1 \cdot l_2 [3 (l_1 + l_2) + 4 h']}{2 (l_1 + l_2) [3 (l_1 + l_2) + 2 h]}.$$

Gl. 18 (S. 12) liefert:

$$\delta_{aa} = \frac{l_1^2 \cdot l_2^2 [3(l_1 + l_2) + 4h']}{4E \cdot J(l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']} - \frac{l_1^2 \cdot l_2^2}{6E \cdot J(l_1 + l_2)} \quad \text{oder}$$

$$1) \quad \delta_{aa} = \frac{l_1^2 \cdot l_2^2 [3(l_1 + l_2) + 8h]}{12E \cdot J(l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']}. \quad .$$

Die Gl. 10 bis 13 (S. 12) ergeben für die erste Öffnung  $\overline{AB}$ , wenn man beachtet, daß

$$3a_1 + b_1 \cdot l_1 = \frac{l_1 \cdot l_2 [3(l_1 + l_2) - 4h']}{2(l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']} \quad \text{und}$$

$$3a_1 + 2b_1 \cdot l_1 = - \frac{l_1 \cdot l_2 [3(l_1 + l_2) + 8h']}{2(l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']} \quad \text{ist:}$$

$$2) \quad \delta_a = -\delta_{aa} \frac{x}{l_1} + \frac{l_2 \cdot x(l_1 - x)}{6E \cdot J(l_1 + l_2)} \left[ \frac{l_1 [3(l_1 + l_2) - 4h']}{2[3(l_1 + l_2) + 2h']} - x \right],$$

$$3) \quad \tau_a = \frac{l_1 \cdot l_2 [3(l_1 + l_2)(l_1 - l_2) - 4h'(l_1 + 2l_2)]}{12E \cdot J(l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']} - \frac{3l_1 \cdot l_2 \cdot x}{2E \cdot J[3(l_1 + l_2) + 2h']} + \frac{l_2 \cdot x^2}{2E \cdot J(l_1 + l_2)},$$

$$\tau_{Aa} = \frac{l_1 \cdot l_2 [3(l_1 + l_2)(l_1 - l_2) - 4h'(l_1 + 2l_2)]}{12E \cdot J(l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']},$$

$$\tau_{Ba} = \frac{l_1 \cdot l_2 (l_1 - l_2) [3(l_1 + l_2) + 8h']}{12E \cdot J(l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']}.$$

Unter Benutzung der Gl. 14 bis 17 (S. 12) erhält man für die zweite Öffnung  $\overline{BC}$ , bei der

$$3a_2 + b_2 \cdot l_2 = - \frac{l_1 \cdot l_2 [3(l_1 + l_2) + 8h']}{2(l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']} \quad \text{und}$$

$$3a_2 + 2b_2 \cdot l_2 = + \frac{l_1 \cdot l_2 [3(l_1 + l_2) - 4h']}{2(l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']} \quad \text{ist:}$$

$$4) \quad \delta_a = -\delta_{aa} \frac{l_2 - x}{l_2} - \frac{l_1 \cdot x(l_2 - x)}{6E \cdot J(l_1 + l_2)} \left[ \frac{l_2 [3(l_1 + l_2) + 8h']}{2[3(l_1 + l_2) + 2h']} - x \right],$$

$$5) \quad \tau_a = \frac{l_1 \cdot l_2 (l_1 - l_2) [3(l_1 + l_2) + 8h']}{12E \cdot J(l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']} + \frac{l_1 \cdot l_2 [3(l_1 + l_2) + 4h'] \cdot x}{2E \cdot J(l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']} - \frac{l_1 \cdot x^2}{2E \cdot J(l_1 + l_2)},$$

$$\tau_{Ba} \text{ siehe oben und } \tau_{Ca} = \frac{l_1 \cdot l_2 [3(l_1 + l_2)(l_1 - l_2) + 4h'(2l_1 + l_2)]}{12E \cdot J(l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']}.$$

Gl. 74 (S. 23) ergibt die wagerechte Verschiebung  $e_a$  des Balkens, die bei Vernachlässigung der Normalkräfte gleich der wagerechten Verschiebung der Stützenköpfe wird:

$$e_a = e_{Aa} = \tau_{Aa} \cdot h - H_{aa} \frac{h^2 \cdot h'}{3E \cdot J} = e_{Ca} = \tau_{Ca} \cdot h - H_{Ca} \frac{h^2 \cdot h'}{3E \cdot J}.$$

Setzt man die gefundenen Werte für  $\tau_{Aa}$  und  $H_{aa}$  bzw.  $\tau_{Ca}$  und  $H_{Ca}$  ein, so erhält man in beiden Fällen:

$$6) \quad . . . . . e_a = \frac{h \cdot l_1 \cdot l_2 (l_1 - l_2)}{12E \cdot J(l_1 + l_2)}.$$

Nach Gl. 19 (S. 12) wird  $\delta_{ab} = e_a - h \cdot \tau_{Ba}$  und nach Einsetzen der Werte für  $e_a$  und  $\tau_{Ba}$

$$7) \quad \delta_{ab} = -\frac{h \cdot h' \cdot l_1 \cdot l_2 (l_1 - l_2)}{2 E \cdot J (l_1 + l_2) [3 (l_1 + l_2) + 2 h']}$$

Zustand  $X_b = 1$ .

Es werden die Stützkkräfte  $A_b = C_b = 0$  und nach Gl. 6 (S. 26):

$$H_{ab} = -\frac{1}{2} + \frac{3(l_1 - l_2)}{2(3l_1'' + 3l_2'' + 2h')} \left( 1 + \frac{J}{F \cdot h^2} \right),$$

$$H_{cb} = -\frac{1}{2} - \frac{3(l_1 - l_2)}{2(3l_1'' + 3l_2'' + 2h')} \left( 1 + \frac{J}{F \cdot h^2} \right).$$

(In der Gl. 6 (S. 26) ist das Vorzeichen des gesamten Ausdrucks zu wenden, da  $X_b$  nach rechts weist, und für  $k$  ist  $(-h)$  einzusetzen.)

Die Biegemomente werden:

In der Stütze A:  $M_b = -H_{ab} \cdot y$

In der Stütze B:  $M_b = -y$

In der Stütze C:  $M_b = -H_{cb} \cdot y$

In dem Balken  $A'B'$ :  $M_b = -H_{ab} \cdot h = a_1$ , wo

$$a_1 = \left[ \frac{1}{2} - \frac{3(l_1 - l_2)}{2(3l_1'' + 3l_2'' + 2h')} \left( 1 + \frac{J}{F \cdot h^2} \right) \right] \cdot h$$

ist, und in dem Balken  $B'C'$ :  $M_b = +H_{cb} \cdot h = a_2$ , wo

$$a_2 = - \left[ \frac{1}{2} + \frac{3(l_1 - l_2)}{2(3l_1'' + 3l_2'' + 2h')} \left( 1 + \frac{J}{F \cdot h^2} \right) \right] \cdot h \text{ ist.}$$

Normalkräfte treten nur in dem Balken auf; sie werden

in dem Balken  $A'B'$ :  $N_b = -H_{ab}$  und

in dem Balken  $B'C'$ :  $N_b = +H_{cb}$ .

Die Ordinaten der Biegungslinie über den beiden Endstützen sind = 0, da  $A_b$  und  $C_b = 0$  sind.

Die Gl. 21 bis 30 (S. 13, 14) und die Gl. 74 und 77 (S. 23) liefern jetzt sämtliche Verbiegungen des Hauptsystems unter Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte. Vernachlässigt man diesen, dann wird

$$H_{ab} = -\frac{3l_2 + h'}{3(l_1 + l_2) + 2h'} \quad \text{und} \quad H_{cb} = -\frac{3l_1 + h'}{3(l_1 + l_2) + 2h'}, \quad \text{ferner}$$

$$a_1 = +\frac{h(3l_2 + h')}{3(l_1 + l_2) + 2h'} \quad \text{und} \quad a_2 = -\frac{h(3l_1 + h')}{3(l_1 + l_2) + 2h'}.$$

Gl. 29 (S. 14) ergibt für  $\delta_{ab}$  denselben Wert wie oben, nämlich

$$\delta_{ab} = -\frac{h \cdot h' \cdot l_1 \cdot l_2 (l_1 - l_2)}{2 E \cdot J (l_1 + l_2) [3 (l_1 + l_2) + 2 h']}$$

Mit den Gl. 21 bis 24 (S. 13) findet man für die erste Öffnung  $AB$ :

$$8) \quad \delta_b = -\delta_{ab} \frac{x}{l_1} + \frac{h(3l_2 + h') \cdot x (l_1 - x)}{2 E \cdot J [3 (l_1 + l_2) + 2 h']},$$

$$9) \quad \tau_b = -\frac{\delta_{ab}}{l_1} + \frac{h(3l_2 + h')(l_1 - 2x)}{2 E \cdot J [3 (l_1 + l_2) + 2 h']},$$

$$\tau_{Ab} = -\frac{\delta_{ab}}{l_1} + \frac{h \cdot l_1 (3l_2 + h')}{2E \cdot J [3(l_1 + l_2) + 2h']} \quad \text{und}$$

$$\tau_{Bb} = -\frac{\delta_{ab}}{l_1} - \frac{h \cdot l_1 (3l_2 + h')}{2E \cdot J [3(l_1 + l_2) + 2h']} = -h \frac{3l_1 \cdot l_2 (l_1 + l_2) + h'(l_1^2 + l_2^2)}{2E \cdot J (l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']}.$$

Entsprechend liefern die Gl. 25 bis 28 (S. 13, 14) für die

zweite Öffnung  $\overline{BC}$ :

$$10) \quad \delta_b = -\delta_{ab} \frac{l_2 - x}{l_2} - \frac{h(3l_1 + h')x(l_2 - x)}{2E \cdot J [3(l_1 + l_2) + 2h']},$$

$$11) \quad \tau_b = \frac{\delta_{ab}}{l_2} - \frac{h(3l_1 + h')(l_2 - 2x)}{2E \cdot J [3(l_1 + l_2) + 2h']},$$

$$\tau_{Bb} = \frac{\delta_{ab}}{l_2} - \frac{h \cdot l_2 (3l_1 + h')}{2E \cdot J [3(l_1 + l_2) + 2h']} = -h \frac{3l_1 \cdot l_2 (l_1 + l_2) + h'(l_1^2 + l_2^2)}{2E \cdot J (l_1 + l_2) [3(l_1 + l_2) + 2h']}$$

$$\text{und } \tau_{Cb} = \frac{\delta_{ab}}{l_2} + \frac{h \cdot l_2 (3l_1 + h')}{2E \cdot J [3(l_1 + l_2) + 2h']}.$$

Die Stützenköpfe und der Balken verschieben sich um das gleiche Maß  $e_b$ . Gl. 74 (S. 23) ergibt nach einigen Zwischenrechnungen:

$$12) \quad \dots \dots \dots e_b = \frac{h^2 [3l_1 \cdot l_2 + h'(l_1 + l_2)]}{6E \cdot J (l_1 + l_2)}.$$

Jetzt kann auch  $\delta_{bb}$  mittels Gl. 30 (S. 14) errechnet werden; man findet:

$$13) \quad \dots \dots \dots \delta_{bb} = h^2 \frac{3l_1 \cdot l_2 + 2h'(l_1 + l_2) + h'^2}{E \cdot J [3(l_1 + l_2) + 2h']}.$$

Nachdem so sämtliche Verschiebungen des Hauptsystems infolge der Kräfte  $X_a = 1$  und  $X_b = 1$  bestimmt sind, können diese mittels der Gl. 31 (S. 14) für jede am Balken angreifende Last ermittelt werden. Man kann aber auch, da jetzt der Einfluß jeder beliebig gerichteten, an dem Fußgelenk der Mittelstütze angreifenden Kraft auf das Hauptsystem bekannt ist, zunächst die Unbekannten  $X_a'$  und  $X_b'$  derart einführen, daß  $\delta_{ab}' = 0$  wird. Nimmt man  $X_a'$  senkrecht an, so ist der Winkel  $\varphi$ , um den die Richtung von  $X_b'$  von der Wagerechten abweicht, durch die Bedingung

$$14) \quad \dots \quad \text{tang } \varphi = \frac{\delta_{ab}}{\delta_{aa}} = -\frac{6h \cdot h' (l_1 - l_2)}{l_1 \cdot l_2 [3(l_1 + l_2) + 8h']} \quad \text{gegeben.}$$

Die Ausführungen auf Seite 15 erläutern den Zusammenhang zwischen  $X_a'$  und  $X_b'$  einerseits und zwischen  $X_a$  und  $X_b$  andererseits, so daß darauf verwiesen werden kann.

Ganz wesentliche Vereinfachungen der vorstehend abgeleiteten Beziehungen ergeben sich bei gleichen Spannweiten, wenn also  $l_1 = l_2 = l$  ist.<sup>1)</sup>  $\delta_{ab}$  wird = 0;  $X_a'$  und  $X_b'$  fallen mit  $X_a$  und  $X_b$  zusammen. Bei dem Zustande  $X_a = 1$  sind die Stützkkräfte

$$A_a = C_a = -\frac{1}{2}, \quad H_{aa} = -H_{ca} = -\frac{3l^2}{4h(3l + h')};$$

1) In der graphischen Statik der Baukonstruktionen von Müller-Breslau ist im Band II, 2. Abt., S. 152 u. folg. der dreistielige Rahmen mit gleichen Spannweiten ebenfalls unter Zugrundelegung des Zweigelenkrahmens als Hauptsystem behandelt.

und es werden die Biegungslinien:

In der linken Öffnung

$$15) \quad \delta_a = -\delta_{aa} \frac{x}{l} + \frac{x(l-x)}{24 E \cdot J (3l+h')} [l(3l-2h') - 2x(3l+h')],$$

$$16) \quad \tau_a = -\frac{(l-x)[l \cdot h' + x(3l+h')]}{4 E \cdot J (3l+h')},$$

$$\tau_{Aa} = -\frac{l^2 \cdot h'}{4 E \cdot J (3l+h')}, \quad \tau_{Ea} = 0.$$

In der rechten Öffnung

$$17) \quad \delta_a = -\delta_{aa} \frac{l-x}{l} - \frac{x(l-x)}{24 E \cdot J (3l+h')} [l(3l+4h') - 2x(3l+h')],$$

$$18) \quad \tau_a = \frac{x[l(3l+2h') - x(3l+h')]}{4 E \cdot J (3l+h')},$$

$$\tau_{Ba} = 0, \quad \tau_{Ca} = \frac{l^2 \cdot h'}{4 E \cdot J (3l+h')} = -\tau_{Aa}.$$

Ferner wird  $e_a = 0$  und

$$19) \quad \delta_{aa} = \frac{l^3(3l+4h')}{24 E \cdot J (3l+h')}.$$

Bei dem Zustande  $X_b = 1$  wird  $H_{ab} = H_{cb} = -\frac{1}{2}$ , während  $A_b = C_b = 0$ . Die Biegungslinien des Balkens sind

in der linken Öffnung durch

$$20) \quad \delta_b = \frac{h \cdot x(l-x)}{4 E \cdot J},$$

$$21) \quad \tau_b = \frac{h(l-2x)}{4 E \cdot J}, \quad \tau_{Ab} = -\tau_{Bb} = \frac{h \cdot l}{4 E \cdot J}$$

und in der rechten Öffnung durch

$$22) \quad \delta_b = -\frac{h \cdot x(l-x)}{4 E \cdot J},$$

$$23) \quad \tau_b = -\frac{h(l-2x)}{4 E \cdot J}, \quad \tau_{Bb} = -\tau_{Cb} = -\frac{h \cdot l}{4 E \cdot J} \quad \text{gegeben.}$$

Der Balken verschiebt sich um das Maß

$$24) \quad e_b = \frac{h^2(3l+2h')}{12 E \cdot J}; \quad \text{und es wird}$$

$$25) \quad \delta_{bb} = \frac{h^2(l+h')}{2 E \cdot J}.$$

Es werden anschließend hieran noch die Gleichungen für die Einflußlinien der Stützkkräfte in dem Falle gleicher Spannweiten  $l$  und bei Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte bestimmt.

#### Senkrechte Lasten.

Da  $\delta_{ma} = \delta_a$ , gleich der Ordinate der Biegungslinie ist, erhält man mit

$$X_a = -\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} P:$$

$$26) \quad X_a = B = \left\{ \frac{x}{l} - \frac{x(l-x)}{l^3(3l+4h')} [l(3l-2h') - 2x(3l+h')] \right\} \cdot P$$

in der linken Öffnung,

$$27) \quad X_a = B = \left\{ \frac{l-x}{l} + \frac{x(l-x)}{l^3(3l+4h')} [l(3l+4h') - 2x(3l+h')] \right\} \cdot P$$

in der rechten Öffnung.

Wird der Balken außerhalb der Stützen belastet, so ist

$$\delta_{ma} = -\xi \cdot \tau_{Aa} \text{ unter dem linken Kragarm und}$$

$\delta_{ma} = +\xi \cdot \tau_{Ca}$  unter dem rechten Kragarm, wenn  $\xi$  wieder den Abstand der Last von der Endstütze bedeutet. Hiermit findet man

$$28) \quad X_a = B = -\frac{6h' \cdot \xi}{l(3l+4h')} \cdot P \text{ unter beiden Kragarmen.}$$

$$X_b = -\frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}} P \text{ liefert:}$$

$$29) \quad X_b = H_b = -\frac{x(l-x)}{2h(l+h')} \cdot P \text{ in der linken Öffnung und}$$

$$30) \quad X_b = H_b = \frac{x(l-x)}{2h(l+h')} \cdot P \text{ in der rechten Öffnung.}$$

Wird der linke bzw. rechte Kragarm belastet, dann gilt:

$$31) \quad X_b = H_b = +\frac{l \cdot \xi}{2h(l+h')} P \text{ bzw. } -\frac{l \cdot \xi}{2h(l+h')} \cdot P.$$

Die übrigen Stützkräfte sind durch die Beziehungen

$$A = A_o + A_a \cdot X_a + A_b \cdot X_b,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$H_a = H_{ao} + H_{aa} \cdot X_a + H_{ab} \cdot X_b,$$

$$\dots \dots \dots$$

gegeben.

$A_o \dots \dots$ ,  $H_{ao} \dots \dots$ , sind hierbei die in dem Hauptssystem, d. i. dem einfach statisch unbestimmten Rahmen  $AA'CC$  infolge der äußeren Lasten auftretenden Widerstände. Sie sind durch die vorangehenden Untersuchungen bekannt. So ist z. B.:

$$A_o = \left( 1,0 - \frac{x}{2l} \right) \cdot P \text{ in der linken Öffnung,}$$

$$A_o = \frac{l-x}{2l} \cdot P \text{ in der rechten Öffnung,}$$

$$A_o = \left( 1,0 + \frac{\xi}{2l} \right) \cdot P \text{ unter dem linken Kragarm und}$$

$$A_o = -\frac{\xi}{2l} \cdot P \text{ unter dem rechten Kragarm.}$$

Ferner ist  $A_a = -\frac{1}{2}$  und  $A_b = 0$ , so daß die Zusammensetzung für den linken Kragarm

$$A = \left\{ 1,0 + \frac{\xi}{2l} + \frac{6h' \cdot \xi}{2l(3l+4h')} \right\} \cdot P \text{ oder}$$

$$32) \quad \dots \dots \quad A = \left\{ 1,0 + \frac{(3l+10h')\xi}{2l(3l+4h')} \right\} \cdot P$$

und für die linke Öffnung

$$A = \left\{ 1,0 - \frac{x}{2l} - \frac{x}{2l} + \frac{x(l-x)}{2l^3(3l+4h')} [l(3l-2h') - 2x(3l+h')] \right\} \cdot P$$

oder

$$33) A = \left\{ \frac{l-x}{l} + \frac{x(l-x)}{2l^3(3l+4h')} [l(3l-2h') - 2x(3l+h')] \right\} \cdot P \text{ liefert.}$$

Da der Gang der Zwischenrechnungen überall derselbe ist, bieten sie weiter kein Interesse und können daher unaufgeführt bleiben. Man findet

für die rechte Öffnung

$$34) A = - \frac{x(l-x)}{2l^3(3l+4h')} [l(3l+4h') - 2x(3l+h')] \cdot P$$

und für den rechten Kragarm

$$35) A = - \frac{(3l-2h') \cdot \xi}{2l(3l+4h')} \cdot P.$$

Die  $C$ -Linie ist das Spiegelbild der  $A$ -Linie; ihre Gleichungen nehmen folgende Formen an:

Unter dem linken Kragarm

$$36) C = - \frac{(3l-2h') \cdot \xi}{2l(3l+4h')} \cdot P,$$

in der linken Öffnung

$$37) C = \frac{x(l-x)}{2l^3(3l+4h')} [l(3l-2h') - 2x(3l+h')] \cdot P,$$

in der rechten Öffnung

$$38) C = \left\{ \frac{x}{l} - \frac{x(l-x)}{2l^3(3l+4h')} [l(3l+4h') - 2x(3l+h')] \right\} \cdot P \text{ und}$$

unter dem rechten Kragarm

$$39) C = \left\{ 1,0 + \frac{(3l+10h') \xi}{2l(3l+4h')} \right\} \cdot P.$$

Die Werte  $H_{ao}$  und  $H_{co}$  sind durch die Gl. 4 und 5 (S. 25, 26) gegeben. Bei der Anwendung dieser Gleichungen ist zu beachten, daß im vorliegenden Falle die Spannweite des Hauptsystems  $2 \cdot l$  ist und daß bei der zweiten Öffnung  $x$  durch  $(l+x)$  zu ersetzen ist. Es wird daher

$$\text{unter beiden Kragarmen } H_{ao} = -H_{co} = - \frac{3l \cdot \xi}{2h(3l+h')} \cdot P,$$

$$\text{in der linken Öffnung } H_{ao} = -H_{co} = \frac{3x(2l-x)}{4h(3l+h')} \cdot P \text{ und}$$

$$\text{in der rechten Öffnung } H_{ao} = -H_{co} = \frac{3(l+x)(l-x)}{4h(3l+h')} \cdot P.$$

Die bei der Betrachtung der Zustände  $X_a$  und  $X_b$  bereits aufgeführten Werte für  $H_{aa}$ ,  $H_{ca}$ ,  $H_{ab}$  und  $H_{cb}$  sind

$$H_{aa} = -H_{ca} = - \frac{3l^2}{4h(3l+h')} \text{ und } H_{ab} = H_{cb} = - \frac{1}{2}.$$

Die Zusammensetzung liefert für  $H_a$ :

Linker Kragarm:

$$H_a = \left\{ - \frac{3l \cdot \xi}{2h(3l+h')} + \frac{3l^2}{4h(3l+h')} \cdot \frac{6h' \cdot \xi}{l(3l+4h')} - \frac{l \cdot \xi}{4h(l+h')} \right\} \cdot P \text{ oder}$$

$$H_a = \frac{l \cdot \xi}{4h(l+h)(3l+h')(3l+4h')} [-18l^2 - 42l \cdot h' - 24h'^2 + 18l \cdot h' + 18h'^2 - 9l^2 - 15l \cdot h' - 4h'^2] \cdot P$$

Die [ ] Klammer läßt sich zusammenziehen auf

$$-27l^2 - 39l \cdot h' - 10h'^2 = -(3l + h')(9l + 10h').$$

Mithin

$$40) H_a = -\frac{l(9l + 10h') \cdot \xi}{4h(l+h')(3l+4h')} \cdot P.$$

Linke Öffnung:

$$H_a = \left\{ \frac{3x(2l-x)}{4h(3l+h')} - \frac{3l \cdot x}{4h(3l+h')} + \frac{3x(l-x)[l(3l-2h')-2x(3l+h')]}{4h \cdot l(3l+h')(3l+4h')} + \frac{x(l-x)}{4h(l+h')} \right\} \cdot P \text{ oder}$$

$$H_a = \frac{x(l-x)}{4h \cdot l(l+h')(3l+h')(3l+4h')} [3l(l+h')(3l+4h') + 3l(3l-2h')(l+h') + l(3l+h')(3l+4h') - 6x(3l+h')(l+h')] \cdot P.$$

Die [ ] Klammer rechts wird =  $l(3l+h')(9l+10h')$

$-6x(l+h')(3l+h')$ ; daher

$$41) H_a = \frac{x(l-x)}{4h \cdot l(l+h')(3l+4h')} [l(9l+10h') - 6x(l+h')] \cdot P.$$

Mittels ähnlicher Zwischenrechnungen erhält man:

Rechte Öffnung:

$$42) H_a = -\frac{x(l-x)}{4h \cdot l(l+h')(3l+4h')} [l(3l+4h') - 6x(l+h')] \cdot P.$$

Rechter Kragarm:

$$43) H_a = -\frac{l(3l+2h') \cdot \xi}{4h(l+h')(3l+4h')} \cdot P.$$

Die  $H_c$ -Linie kann als Spiegelbild der  $H_a$ -Linie gefunden werden, wenn man gleichzeitig das Vorzeichen wendet:

Linker Kragarm:

$$44) H_c = \frac{l(3l+2h') \cdot \xi}{4h(l+h')(3l+4h')} \cdot P.$$

Linke Öffnung:

$$45) H_c = -\frac{x(l-x)}{4h \cdot l(l+h')(3l+4h')} [l(3l+2h') - 6x(l+h')] \cdot P.$$

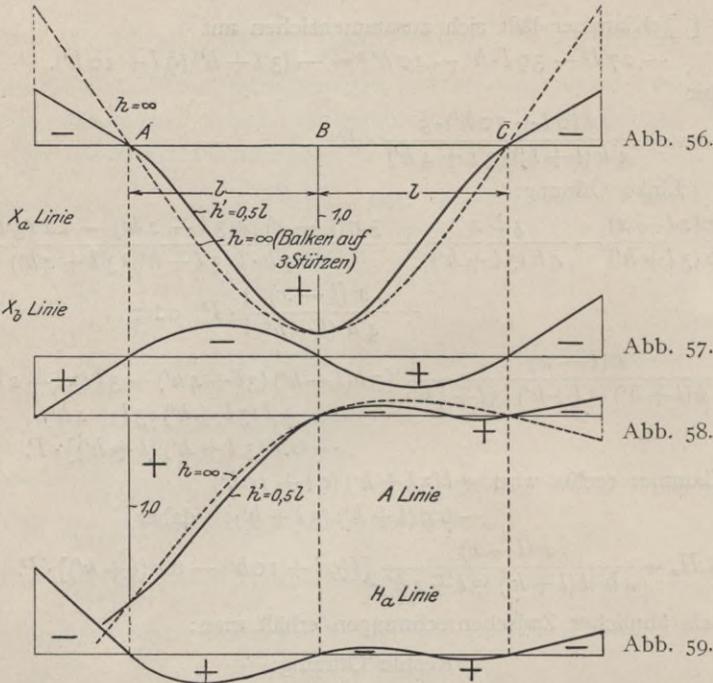
Rechte Öffnung:

$$46) H_c = -\frac{x(l-x)}{4h \cdot l(l+h')(3l+4h')} [l(3l+4h') + 6x(l+h')] \cdot P.$$

Rechter Kragarm:

$$47) H_c = \frac{l(9l+10h') \cdot \xi}{4h(l+h')(3l+4h')} \cdot P.$$

In den Abb. 56 bis 59 sind Einflußlinien von  $X_a = B$ ,  $X_b = H_b$ ,  $A$  und  $H_a$  dargestellt. Ihre Form wird durch das Verhältnis  $(l:h)$  und in geringerem Maße auch durch das Verhältnis  $(J:J^0)$  beeinflusst; namentlich äußert sich dieses bei den  $H$ -Linien. Für  $h = h' = \infty$  werden  $H_a$ ,  $H_b$  und  $H_c = 0$ , während  $A$ ,  $B$  und  $C$  den Auflagerkräften eines auf drei Stützen frei aufliegenden Balkens ent-



sprechen. Bei den Abbildungen ist  $(l:h) = 2$  und  $(J:J^0) = 1$  angenommen. Die Auflagerdrücke des Balkens auf drei Stützen sind zum Vergleich in den Abb. 56 und 58 eingetragen.

**Wagerechte Lasten.**

Nach Gl. 3 (S. 9) gilt:

$$\delta_{ma} = -e_a - k \cdot \tau_a \quad \text{und} \quad \delta_{mb} = -e_b - k \cdot \tau_b.$$

Hier ist  $e_a = 0$  und nach Gl. 24 (S. 32)  $e_b = \frac{h^2(3l + 2h')}{12 E \cdot J}$ ;  $\tau_a$  und  $\tau_b$  sind durch die Gleichungen 16, 18, 21 und 23 (S. 32) gegeben. Mit

$$X_a = k \frac{\tau_a}{\delta_{aa}} Q \quad \text{und} \quad X_b = \frac{e_b + k \cdot \tau_b}{\delta_{bb}} Q$$

nehmen die Gleichungen der  $X_a$ - und  $X_b$ -Linie folgende Form an:

Linker Kragarm:

$$48) \quad \dots \quad \begin{cases} X_a = B = -\frac{6 \cdot h' \cdot k}{l(3l + 4h')} \cdot Q \\ X_b = H_b = \frac{h(3l + 2h') + 3k \cdot l}{6h(l + h')} \cdot Q \end{cases}$$

Linke Öffnung:

$$49) \quad \dots \quad \begin{cases} X_a = B = -\frac{6k(l-x)}{l^3(3l + 4h')} [l \cdot h' + x(3l + h')] \cdot Q \\ X_b = H_b = \left[ \frac{3l + 2h'}{6(l + h')} + \frac{k(l-2x)}{2h(l + h')} \right] \cdot Q \end{cases}$$

Rechte Öffnung:

$$50) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_a = B = \frac{6k \cdot x}{l^3(3l+4h')} [l(3l+2h') - x(3l+h')] \cdot Q \\ X_b = H_b = \left[ \frac{3l+2h'}{6(l+h')} - \frac{k(l-2x)}{2h(l+h')} \right] \cdot Q \end{array} \right.$$

Rechter Kragarm:

$$51) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_a = B = \frac{6h' \cdot k}{l(3l+4h')} \cdot Q \\ X_b = H_b = \frac{h(3l+2h') + 3k \cdot l}{6h(l+h')} \cdot Q \end{array} \right.$$

Die Formeln für die übrigen Stützkräfte sind nur für den Fall errechnet, daß die Lasten  $Q$  an den Kragarmen angreifen, da dies für die Berechnung des sechsstielligen Rahmens von Bedeutung ist.  $H_{ao}$  und  $H_{co}$  sind durch die Gl. 6 bis 8 (S. 26) gegeben, bei deren Anwendung man wieder beachte, daß die Spannweite  $2 \cdot l$  ist. Im übrigen bieten die Zwischenrechnungen nichts Neues; daher kann ihre Aufführung unterbleiben. Wird der linke Kragarm belastet, so gilt:

$$52) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{h(3l+4h') + k(3l+10h')}{2l(3l+4h')} \cdot Q \\ C = -\frac{h(3l+4h') + k(3l-2h')}{2l(3l+4h')} \cdot Q \\ H_a = \left[ \frac{3l+4h'}{12(l+h')} - \frac{k \cdot l(9l+10h')}{4h(l+h')(3l+4h')} \right] \cdot Q \\ H_c = \left[ \frac{3l+4h'}{12(l+h')} + \frac{k \cdot l(3l+2h')}{4h(l+h')(3l+4h')} \right] \cdot Q \end{array} \right.$$

Bei Belastung des rechten Kragarmes erhält man:

$$53) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{h(3l+4h') + k(3l-2h')}{2l(3l+4h')} \cdot Q \\ C = -\frac{h(3l+4h') + k(3l+10h')}{2l(3l+4h')} \cdot Q \\ H_a = \left[ \frac{3l+4h'}{12(l+h')} + \frac{k \cdot l(3l+2h')}{4h(l+h')(3l+4h')} \right] \cdot Q \\ H_c = \left[ \frac{3l+4h'}{12(l+h')} - \frac{k \cdot l(9l+10h')}{4h(l+h')(3l+4h')} \right] \cdot Q \end{array} \right.$$

#### Am Balken angreifende Momente.

Greifen am Balken rechtsdrehende Momente an, so ist deren bei den Kraftzuständen  $X_a = 1$  und  $X_b = 1$  geleistete Arbeit  $\delta_{ma} = \tau_a$  bzw.  $\delta_{mb} = \tau_b$ .

Die Größe der auftretenden Stützkräfte kann man auch leicht aus den Gl. 48 bis 53 (S. 36, 37) erhalten, wenn man sich die oberhalb des Balkens angreifende Last  $Q$  nach der Balkenachse hin verlegt denkt und das linksdrehende Moment  $Q \cdot k$  hinzunimmt. Man sieht dann, daß in diesen Gleichungen der Beiwert von  $k$  den Anteil des linksdrehenden Momentes  $Q \cdot k$  an der Stützkraft

bedeutet, während durch die in der Balkenachse angreifende Last  $Q$  das andere,  $k$  nicht enthaltende Glied entsteht. Setzt man dieses = 0 und ersetzt  $k \cdot Q$  durch  $(-M)$ , dann erhält man die Größe der Stützkkräfte infolge des rechtsdrehenden Momentes  $M$ .

Wird der linke Kragarm belastet, so wird demnach

$$54) \left\{ \begin{array}{ll} A = -\frac{3l + 10h'}{2l(3l + 4h')} \cdot M, & B = X_a = \frac{6h'}{l(3l + 4h')} \cdot M, \\ C = \frac{3l - 2h'}{2l(3l + 4h')} \cdot M, & H_a = \frac{l(9l + 10h')}{4h(l+h')(3l + 4h')} \cdot M, \\ H_b = X_b = -\frac{l}{2h(l+h')} \cdot M, & H_c = -\frac{l(3l + 2h')}{4h(l+h')(3l + 4h')} \cdot M, \end{array} \right.$$

während die Belastung des rechten Kragarmes ergibt:

$$55) \left\{ \begin{array}{ll} A = -\frac{3l - 2h'}{2l(3l + 4h')} \cdot M, & B = X_a = -\frac{6h'}{l(3l + 4h')} \cdot M, \\ C = \frac{3l + 10h'}{2l(3l + 4h')} \cdot M, & H_a = -\frac{l(3l + 2h')}{4h(l+h')(3l + 4h')} \cdot M, \\ H_b = X_b = -\frac{l}{2h(l+h')} \cdot M, & H_c = \frac{l(9l + 10h')}{4h(l+h')(3l + 4h')} \cdot M. \end{array} \right.$$

In der linken Öffnung wird

$$56) \left\{ \begin{array}{l} X_a = \frac{6(l-x)[l \cdot h' + x(3l + h')]}{l^3(3l + 4h')} \cdot M, \\ X_b = -\frac{l - 2x}{2h(l+h')} \cdot M \end{array} \right.$$

und in der rechten Öffnung

$$57) \left\{ \begin{array}{l} X_a = -\frac{6 \cdot x[l(3l + 2h') - x(3l + h')]}{l^3(3l + 4h')} \cdot M, \\ X_b = \frac{l - 2x}{2h(l+h')} \cdot M. \end{array} \right.$$

Dieselben Werte erhält man nach den Ausführungen auf S. 9, 10 durch einmalige Differentiation der Gleichungen der Einflußlinien für senkrechte Belastung. Bei dem linken Kragarm ist hierbei das Vorzeichen von  $\xi$  zu wenden, damit  $\xi$  mit  $x$  gleich gerichtet ist.

#### Wärmeänderung.

Gl. 5 (S. 10) liefert:

$$\delta_{at} = \varepsilon \cdot t_0 [(-A_a - 1 - C_a) \cdot h - H_{aa}(l_1 + l_2)] + \varepsilon \frac{\Delta t}{d} \left[ \int_0^{l_1} (-H_{aa} \cdot h + A_a \cdot x) dx + \int_0^{l_2} \{H_{ca} \cdot h + C_a(l_2 - x)\} dx \right].$$

Beachtet man, daß die Summe der senkrechten Kräfte = 0 und daß  $H_{aa} = -H_{ca}$  ist, so findet man, wenn man noch für  $A_a$  und  $C_a$  die der Seite 28 zu entnehmenden Werte einsetzt:

$$58) \quad \delta_{at} = -\varepsilon \cdot t_0 \cdot H_{aa}(l_1 + l_2) - \varepsilon \frac{\Delta t}{d} [H_{aa} \cdot h(l_1 + l_2) + \frac{1}{2} l_1 \cdot l_2].$$

Da bei dem Zustande  $X_b = 1$  in den Stützen keine Normalkräfte auftreten, wird

$$\delta_{bt} = \varepsilon \cdot t_0 (-H_{ab} \cdot l_1 + H_{cb} \cdot l_2) + \varepsilon \frac{\Delta t}{d} \left[ -\int_0^{l_1} H_{ab} \cdot h \cdot dx + \int_0^{l_2} H_{cb} \cdot h \cdot dx \right] \text{ oder}$$

$$59) \quad \delta_{bt} = -(H_{ab} \cdot l_1 - H_{cb} \cdot l_2) (\varepsilon \cdot t_0 + \varepsilon \frac{\Delta t}{d} \cdot h).$$

Bei gleichen Spannweiten und Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte auf die Größe von  $H_{aa}$  und  $\delta_{aa}$  wird

$$60) \quad \delta_{at} = \frac{3\varepsilon \cdot t_0 \cdot l^3}{2h(3l+h')} - \frac{\varepsilon \cdot \Delta t \cdot l^2 \cdot h'}{2d(3l+h')} \text{ und } \delta_{bt} = 0.$$

Es ist also

$$61) \quad X_{at} = B_t = -\frac{36\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0}{h(3l+4h')} + \frac{12\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot \Delta t \cdot h'}{d \cdot l(3l+4h')} \text{ und } X_{bt} = 0.$$

Mit  $A_{ot} = C_{ot} = 0$  und  $A_a = C_a = -\frac{1}{2}$  erhält man aus  $A_t = A_{ot} + A_a \cdot X_{at}$  bzw.  $C_t = C_{ot} + C_a \cdot X_{at}$ :

$$62) \quad A_t = C_t = \frac{18\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0}{h(3l+4h')} - \frac{6\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot \Delta t \cdot h'}{d \cdot l(3l+4h')}.$$

Nach Gl. 12 (S. 27) ist

$$H_{aot} = -H_{cot} = \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l}{h^2(3l+h')} + \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot \Delta t \cdot l}{d \cdot h(3l+h')}.$$

Weiter ist  $H_{aa} = -H_{ca} = -\frac{3l^2}{4h(3l+h')}$ ,

so daß  $H_{at} = H_{aot} + H_{aa} \cdot X_{at}$  liefert:

$$63) \quad H_{at} = -H_{ct} = \frac{12\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l}{h^2(3l+4h')} + \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot \Delta t \cdot l}{d \cdot h(3l+4h')}.$$

### 3. Der vierstielige Rahmen.

Es wird zunächst Symmetrie angenommen. Wie aus Abb. 60 zu ersehen ist, bezeichnen  $l$  die Spannweite,  $F$  die Querschnittsfläche,  $J$  das Trägheitsmoment der beiden Endöffnungen und  $2c$ ,  $F'$ ,  $J'$  die entsprechenden Werte bei der Mittelöffnung. Von den in der Mittelachse in dem Abstände  $f$  unter der Balkenachse angebrachten Unbekannten ist  $X_a$  senkrecht und  $X_b$  wagerechtrichtet, während  $X_c$  ein Moment darstellt. Das Hauptsystem bilden die beiden Rahmen  $AA'B'B$  und  $CC'D'D$ .  $\delta_{ab}$  und  $\delta_{ac}$  werden wegen der Symmetrie gleich Null.<sup>1)</sup>

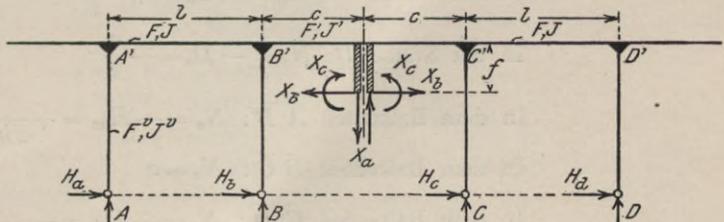


Abb. 60.

1) In der graphischen Statik der Baukonstruktionen von Müller-Breslau, werden im Band II, 2. Abt. S. 158 dasselbe Hauptsystem und dieselben Unbekannten für den vierstieligen Rahmen vorgeschlagen.

Zustand  $X_a = 1$ .

Die durch  $X_a = 1$  hervorgerufenen Stützkräfte sind:

$$A_a = -\frac{c}{l}, \quad B_a = +\frac{l+c}{l}, \quad C_a = -\frac{l+c}{l}, \quad D_a = +\frac{c}{l}$$

und nach Gl. 5 (S. 26)

$$H_{aa} = -H_{ba} = -H_{ca} = H_{da} = -\frac{3c \cdot l}{2h(3l'' + 2h')}$$

Diesen Auflagerkräften entsprechen folgende Momente in dem Balken (Abb. 61):

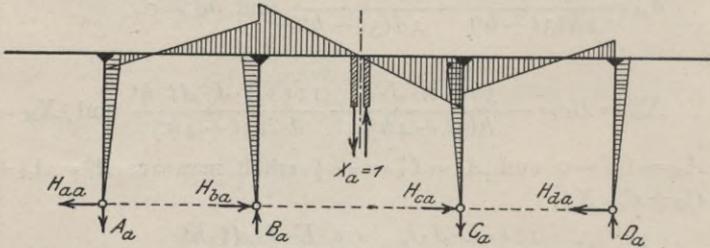


Abb. 61.

1. Öffnung:  $M_a = a + b \cdot x$ , wo  $a = -H_{aa} \cdot h = +\frac{3c \cdot l}{2(3l'' + 2h')}$

und  $b = A_a = -\frac{c}{l}$  ist.

2. Öffnung:  $M_a = -(c - x)$ .

3. Öffnung:  $M_a = a + b \cdot x$ , wo  $a = H_{da} \cdot h + D_a \cdot l = -\frac{3c \cdot l}{2(3l'' + 2h')} + c$

und  $b = -D_a = -\frac{c}{l}$  ist.

Die in den Trägerteilen auftretenden Normalkräfte sind:

In der Stütze A:  $N_a = -A_a = +\frac{c}{l}$

In der Stütze B:  $N_a = -B_a = -\frac{c+l}{l}$

In der Stütze C:  $N_a = -C_a = +\frac{c+l}{l}$

In der Stütze D:  $N_a = -D_a = -\frac{c}{l}$

In dem Balkenteil  $\overline{A'B'}$ :  $N_a = -H_{aa} = +\frac{3c \cdot l}{2h(3l'' + 2h')}$

In dem Balkenteil  $\overline{B'C'}$ :  $N_a = 0$

In dem Balkenteil  $\overline{C'D'}$ :  $N_a = -H_{ca} = -\frac{3c \cdot l}{2h(3l'' + 2h')}$

Die Ordinaten der Biegungslinie des Balkens über den Stützen werden infolge deren durch die Normalkräfte hervorgerufenen Verkürzung:

$$\delta_{Aa} = -\frac{c}{l} \cdot \frac{h}{E \cdot F^v}, \quad \delta_{Ba} = \frac{c+l}{l} \cdot \frac{h}{E \cdot F^v},$$

$$\delta_{Ca} = -\frac{c+l}{l} \cdot \frac{h}{E \cdot F^v} \quad \text{und} \quad \delta_{Da} = \frac{c}{l} \cdot \frac{h}{E \cdot F^v}.$$

Setzt man die vorstehend angegebenen Werte für die Größen  $a$  und  $b$  der Momentengleichungen der beiden Endöffnungen und für die Ordinaten der Biegungslinie des Balkens über den Stützen in die Gl. 6 bis 9 (S. 11) ein, dann erhält man die Biegungslinie der ersten und dritten Öffnung. Die Biegungslinie der Mittelöffnung und  $\delta_{aa}$  sind durch die Gl. 59 bis 62 (S. 20) bestimmt. Eine recht einfache Form nehmen die Gleichungen der Biegungslinie an, wenn man den Einfluß der Normalkräfte vernachlässigt. Es wird dann in der ersten Öffnung:

$$3a + b \cdot l = \frac{c(3l - 4h')}{2(3l + 2h')} \quad \text{und} \quad 3a + 2bl = -\frac{c(3l + 8h')}{2(3l + 2h')},$$

sowie in der dritten Öffnung

$$3a + b \cdot l = \frac{c(3l + 8h')}{2(3l + 2h')} \quad \text{und} \quad 3a + 2b \cdot l = -\frac{c(3l - 4h')}{2(3l + 2h')}.$$

Hiermit liefern die Gl. 6 bis 9 (S. 11):

1. Öffnung:

$$\begin{aligned} 1) \quad \delta_a &= \frac{c \cdot x(l-x)}{12 E \cdot J \cdot l(3l + 2h')} [l(3l - 4h') - 2x(3l + 2h')], \\ 2) \quad \tau_a &= \frac{c}{12 E \cdot J \cdot l(3l + 2h')} [l^2(3l - 4h') - 18l^2 \cdot x + 6x^2(3l + 2h')], \\ \tau_{Aa} &= \frac{c \cdot l(3l - 4h')}{12 E \cdot J(3l + 2h')} \quad \text{und} \quad \tau_{Ba} = \frac{c \cdot l(3l + 8h')}{12 E \cdot J(3l + 2h')}. \end{aligned}$$

3. Öffnung:

$$\begin{aligned} 3) \quad \delta_a &= \frac{c \cdot x(l-x)}{12 E \cdot J \cdot l(3l + 2h')} [l(3l + 8h') - 2x(3l + 2h')], \\ 4) \quad \tau_a &= \frac{c}{12 E \cdot J \cdot l(3l + 2h')} [l^2(3l + 8h') - 6l \cdot x(3l + 4h') + 6x^2(3l + 2h')], \\ \tau_{Ca} &= \frac{c \cdot l(3l + 8h')}{12 E \cdot J(3l + 2h')} \quad \text{und} \quad \tau_{Da} = \frac{c \cdot l(3l - 4h')}{12 E \cdot J(3l + 2h')}. \end{aligned}$$

Setzt man den für  $\tau_{Ba}$  gefundenen Wert in Gl. 59 (S. 20) ein, dann findet man

$$\delta_{aa} = \frac{c^2 \cdot l(3l + 8h')}{6 E \cdot J(3l + 2h')} + \frac{2c^2 \cdot c'}{3 E \cdot J}, \quad \text{wenn} \quad \frac{J}{J'} \cdot c = c', \quad \text{oder}$$

$$5) \quad \delta_{aa} = \frac{c^2 [l(3l + 8h') + 4c'(3l + 2h')]}{6 E \cdot J(3l + 2h')}.$$

Die Gl. 60 bis 62 (S. 20) ergeben für die zweite Öffnung:

$$6) \quad \tau_a = \frac{c \cdot l(3l + 8h')}{12 E \cdot J(3l + 2h')} + \frac{x(2c - x)}{2 E \cdot J'}, \quad \text{ferner}$$

$$7) \quad \delta_a = \delta_{aa} \frac{x}{2c} - \frac{x(c-x)(2c-x)}{6 E \cdot J'}$$

in der linken Hälfte von  $x=0$  bis  $x=c$  und

$$\delta_a = -\delta_{aa} \frac{2c-x}{2c} - \frac{x(c-x)(2c-x)}{6 E \cdot J'}$$

in der rechten Hälfte von  $x=c$  bis  $x=2c$ .

Sämtliche Punkte des Balkens  $\overline{A'D'}$  verschieben sich bei Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte um das gleiche Maß  $e_a$ , das nach Gl. 74 (S. 23) zu berechnen ist. Es wird z. B.

$$e_{Aa} = \tau_{Aa} \cdot h - H_{aa} \frac{h^2 \cdot h'}{3 E \cdot J} = e_a.$$

Setzt man die Werte für  $\tau_{Aa}$  und  $H_{aa}$  ein, dann gilt:

$$8) \dots \dots \dots e_a = \frac{e \cdot h \cdot l}{12 E \cdot J} \quad (\text{von links nach rechts}).$$

Zustand  $X_b = 1$ .

$X_b = 1$  ruft folgende Auflagerdrücke hervor:

$$A_b = -B_b = -C_b = D_b = \frac{h-f}{l}$$

und nach Gl. 7 und 8 (S. 26)

$$H_{ab} = \frac{1}{2} - \frac{3f \cdot l}{2h(3l'' + 2h')} - \frac{J}{F \cdot h^2} \cdot \frac{3l}{2(3l'' + 2h')} = -H_{db},$$

$$H_{bb} = \frac{1}{2} + \frac{3f \cdot l}{2h(3l'' + 2h')} + \frac{J}{F \cdot h^2} \cdot \frac{3l}{2(3l'' + 2h')} = -H_{cb}.$$

Diesen Stützkraften entsprechen die in Abb. 62 dargestellten Momente. Sie nehmen bei dem Balken folgende Werte an:

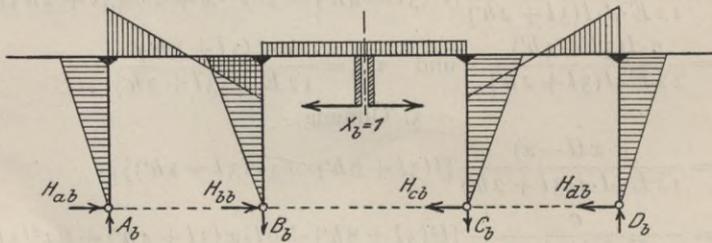


Abb. 62.

1. Öffnung:  $M_b = a + b \cdot x$ , wo  $a = -H_{ab} \cdot h$  und  $b = A_b$  ist.
2. Öffnung:  $M_b = -f$ .
3. Öffnung:  $M_b = a + b \cdot x$ , wo  $a = H_{db} \cdot h + D_b \cdot l$  und  $b = -D_b$  ist.

Die Ordinaten der Biegungslinie über den Stützen sind infolge der in diesen herrschenden Normalkräfte:

$$\delta_{Ab} = -\delta_{Bb} = -\delta_{Cb} = \delta_{Db} = \frac{h-f}{l} \cdot \frac{h}{E \cdot F^v}.$$

Unter Benutzung dieser Werte ergeben die Gl. 6 bis 9 (S. 11) die Biegungslinie des Balkens in der ersten und dritten Öffnung. Ist hierdurch  $\tau_{Bb} = -\tau_{Cb}$  bestimmt, so findet man  $f$  nach Gl. 57 (S. 20),  $e_{Bb} = -e_{Cb}$  nach Gl. 74 (S. 23) und dann weiter  $\delta_{bb}$ , sowie die Biegungslinie der Mittelöffnung nach den Gl. 63 bis 65 (S. 20). Läßt man den Einfluß der Normalspannungen außer acht, dann gilt in der ersten Öffnung

$$a = -\frac{h(3l + 2h') - 3f \cdot l}{2(3l + 2h')}, \quad \text{sowie} \quad b = \frac{h-f}{l}$$

und in der dritten Öffnung

$$a = \frac{h(3l + 2h') - f(3l + 4h')}{2(3l + 2h')}, \quad \text{sowie} \quad b = -\frac{h-f}{l}.$$

Hiermit liefern die Gl. 6 bis 9 (S. 11):

1. Öffnung:

$$9) \quad \delta_b = \frac{x(l-x)}{12 E \cdot J \cdot l(3l+2h')} [-h \cdot l(3l+2h') + f \cdot l(3l-4h') + 2x(h-f)(3l+2h')],$$

$$10) \quad \tau_b = \frac{1}{12 E \cdot J \cdot l(3l+2h')} \{ -l^2 [h(3l+2h') - f(3l-4h')] + 6l \cdot x [h(3l+2h') - 3f \cdot l] - 6x^2(h-f)(3l+2h') \},$$

$$\tau_{Ab} = - \frac{l[h(3l+2h') - f(3l-4h')]}{12 E \cdot J(3l+2h')} \quad \text{und}$$

$$\tau_{Bb} = - \frac{l[h(3l+2h') - f(3l+8h')]}{12 E \cdot J(3l+2h')}.$$

3. Öffnung:

$$11) \quad \delta_b = \frac{x(l-x)}{12 E \cdot J \cdot l(3l+2h')} [h \cdot l(3l+2h') - f \cdot l(3l+8h') - 2x(h-f)(3l+2h')],$$

$$12) \quad \tau_b = \frac{1}{12 E \cdot J \cdot l(3l+2h')} \{ l^2 [h(3l+2h') - f(3l+8h')] - 6l \cdot x [h(3l+2h') - f(3l+4h')] + 6x^2(h-f)(3l+2h') \},$$

$$\tau_{Cb} = \frac{l[h(3l+2h') - f(3l+8h')]}{12 E \cdot J(3l+2h')} \quad \text{und}$$

$$\tau_{Db} = \frac{l[h(3l+2h') - f(3l-4h')]}{12 E \cdot J(3l+2h')}.$$

(Die Biegelinie in der dritten Öffnung ist das Spiegelbild derjenigen in der ersten Öffnung.)

Nach Gl. 57 (S. 20) ist

$$f = - \frac{E \cdot J \cdot \tau_{Bb}}{c} \quad \text{d. h.} = \frac{l[h(3l+2h') - f(3l+8h')]}{12 c' (3l+2h')},$$

wenn wieder  $\frac{J}{J'} c = c'$  gesetzt wird. Hieraus erhält man

$$13) \quad \dots \dots \dots f = \frac{l \cdot h(3l+2h')}{l(3l+8h') + 12 c' (3l+2h')}.$$

Die Gl. 64 und 65 (S. 20) liefern die Biegelinien der zweiten Öffnung:

$$14) \quad \dots \dots \dots \tau_b = - \frac{f(c-x)}{E \cdot J'} \quad \text{und}$$

$$15) \quad \dots \dots \dots \delta_b = - \frac{f \cdot x(2c-x)}{2 E \cdot J'}.$$

Durch Anwendung der Gl. 74 (S. 23) findet man die wagerechte Verschiebung der Stützenköpfe. Es wird

$$16) \quad \dots \dots e_{Ab} = e_{Bb} = - e_{Cb} = - e_{Db} = - h \frac{h(l+2h') - l \cdot f}{12 E \cdot J}$$

und, da  $\delta_{bb} = - 2 e_{Bb}$  ist,

$$17) \quad \dots \dots \delta_{bb} = h \frac{h(l+2h') - l \cdot f}{6 E \cdot J}.$$

Zustand  $X_c = 1$ .

Unter dem Einflusse von  $X_c = 1$  wird

$$A_c = -B_c = -C_c = D_c = -\frac{1}{l}$$

und nach Gl. 10 (S. 27)

$$H_{ac} = -H_{bc} = H_{cc} = -H_{dc} = -\frac{3l}{2h(3l'' + 2h')}.$$

Die entstehenden Momente sind in Abb. 63 aufgetragen; sie nehmen bei dem Balken folgende Werte an:

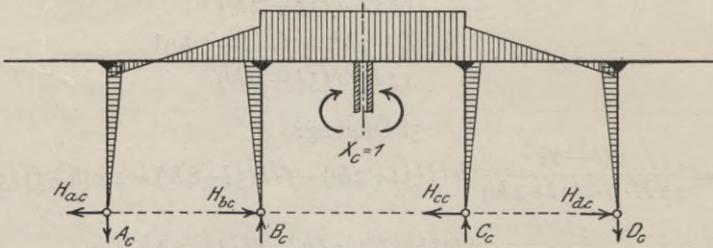


Abb. 63.

1. Öffnung:

$$M_c = a + b \cdot x, \text{ wo } a = -H_{ac} \cdot h = \frac{3l}{2(3l'' + 2h')} \text{ und } b = A_c = -\frac{1}{l}.$$

2. Öffnung:

$$M_c = -1.$$

3. Öffnung:

$$M_c = a + b \cdot x, \text{ wo } a = H_{dc} \cdot h + D_c \cdot l = \frac{3l}{2(3l'' + 2h')} - 1 \text{ und } b = -D_c = \frac{1}{l}.$$

Infolge der in den Stützen auftretenden Normalkräfte drücken sich jene um die Masse

$$\delta_{A_c} = -\delta_{B_c} = -\delta_{C_c} = \delta_{D_c} = -\frac{h}{l \cdot E \cdot F^v} \text{ zusammen.}$$

Genau so wie bei den Zuständen  $X_a$  und  $X_b$  erfolgt jetzt die Berechnung der Biegelinie in den Endöffnungen. Darauf werden durch die Gl. 66 bis 70 (S. 20, 21) der Wert von  $\delta_{cc}$ , sowie die Biegelinie der Mittelöffnung und zum Schluß mittels der Gl. 74 und 77 (S. 23) und Gl. 58 (S. 20) die wagerechten Verschiebungen der Balkenquerschnitte und  $f$  bestimmt. Da der hier errechnete Wert von  $f$  sich mit dem früheren decken muß, ist zugleich eine Probe der Zahlenrechnungen gegeben. Ohne Berücksichtigung des Einflusses der Normalspannungen erhält man wieder sehr einfache Beziehungen. Es lauten die Gleichungen der Biegelinie:

1. Öffnung:

$$18) \quad \delta_c = \frac{x(l-x)}{12 E \cdot J \cdot l(3l + 2h')} [l(3l - 4h') - 2x(3l + 2h')],$$

$$19) \quad \tau_c = \frac{1}{12 E \cdot J \cdot l(3l + 2h')} [l^2(3l - 4h') - 18l^2 \cdot x + 6x^2(3l + 2h')],$$

$$\tau_{A_c} = \frac{l(3l - 4h')}{12 E \cdot J(3l + 2h')} \text{ und } \tau_{B_c} = \frac{l(3l + 8h')}{12 E \cdot J(3l + 2h')}.$$

3. Öffnung:

$$20) \quad \delta_c = -\frac{x(l-x)}{12 E \cdot J \cdot l(3l+2h')} [l(3l+8h') - 2x(3l+2h')],$$

$$21) \quad \tau_c = -\frac{1}{12 E \cdot J \cdot l(3l+2h')} [l^2(3l+8h') - 6lx(3l+4h') + 6x^2(3l+2h')],$$

$$\tau_{Cc} = -\frac{l(3l+8h')}{12 E \cdot J(3l+2h')} \quad \text{und} \quad \tau_{Dc} = -\frac{l(3l-4h')}{12 E \cdot J(3l+2h')}.$$

(Man vergleiche diese Gleichungen mit den entsprechenden des Zustandes  $X_a = 1$ , die sich nur durch den Faktor  $\pm c$  unterscheiden.)

Die Gl. 66 (S. 20):  $\delta_{cc} = 2\tau_{Bc} + \frac{2c}{E \cdot J}$  liefert

$$22) \quad \delta_{cc} = \frac{l(3l+8h') + 12c'(3l+2h')}{6 E \cdot J(3l+2h')}.$$

Mittels der Gl. 67 bis 70 (S. 20, 21) findet man die Biegelinie der Mittelöffnung. Für den linken Teil von  $x=0$  bis  $x=c$  wird

$$23) \quad \tau_c = \tau_{Bc} + \frac{x}{E \cdot J} = \frac{l(3l+8h')}{12 E \cdot J(3l+2h')} + \frac{x}{E \cdot J},$$

$$24) \quad \delta_c = \tau_{Bc} \cdot x + \frac{x^2}{2 E \cdot J} = \frac{l(3l+8h') \cdot x}{12 E \cdot J(3l+2h')} + \frac{x^2}{2 E \cdot J},$$

während für den rechten Teil von  $x=c$  bis  $x=2c$

$$25) \quad \tau_c = -\frac{l(3l+8h')}{12 E \cdot J(3l+2h')} - \frac{2c-x}{E \cdot J} \quad \text{und}$$

$$26) \quad \delta_c = \frac{l(3l+8h')(2c-x)}{12 E \cdot J(3l+2h')} + \frac{(2c-x)^2}{2 E \cdot J} \quad \text{wird.}$$

Gl. 74 (S. 23) ergibt:

$$27) \quad e_{Ae} = e_{Be} = -e_{Ce} = -e_{De} = \frac{h \cdot l}{12 E \cdot J}.$$

Die Beziehung

$$f = \frac{2e_{Be}}{\delta_{cc}}$$

der Gl. 58 (S. 20) liefert für  $f$  wieder den früheren Wert.

Hat die Mittelöffnung die Spannweite der Endöffnungen ( $2c=l$ ) und ist  $J'=J$ , dann wird

$$28) \quad f = \frac{h(3l+2h')}{21l+20h'}, \quad h-f = 18h \frac{l+h'}{21l+20h'},$$

$$29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{aa} = \frac{l^3(3l+4h')}{8 E \cdot J(3l+2h')}, \quad \delta_{bb} = \frac{h^2(9l^2+30l \cdot h'+20h'^2)}{3 E \cdot J(21l+20h')}, \\ \delta_{cc} = \frac{l(21l+20h')}{6 E \cdot J(3l+2h')}. \end{array} \right.$$

Führt man den Wert für  $f$  aus Gl. 28 in die Gl. 9, 15, 11 (S. 43) ein, so vereinfachen sich unter der Voraussetzung gleicher Spannweiten die Ausdrücke für  $\delta_b$  wie folgt:

$$30) \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Öffnung: } \delta_b = -\frac{h \cdot x(l-x)}{2 E \cdot J \cdot l(21l + 20h')} [l(3l + 4h') - 6x(l+h')] \\ 2. \text{ Öffnung: } \delta_b = -\frac{h(3l + 2h') \cdot x(l-x)}{2 E \cdot J(21l + 20h')} \\ 3. \text{ Öffnung: } \delta_b = \frac{h \cdot x(l-x)}{2 E \cdot J \cdot l(21l + 20h')} [l(3l + 2h') - 6x(l+h')] \end{array} \right.$$

Ist in der Mitte der zweiten Öffnung ein Scheitelgelenk vorhanden (Abb. 64), so wird dessen Verbindung durch die beiden Unbekannten  $X_a$  und  $X_b$  ersetzt,

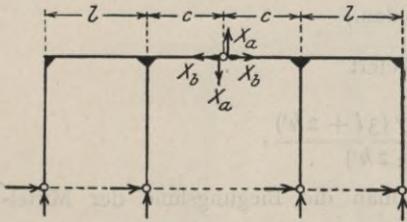


Abb. 64.

während zwei Zweigelenkrahmen wie bisher das Hauptssystem bilden.<sup>1)</sup> Da sich der Zustand  $X_a$  nicht von dem Zustande  $X_a$  bei dem eben behandelten vierstieligen Rahmen ohne Scheitelgelenk unterscheidet, ruft er auch dieselben Stützkkräfte  $A_a, H_{aa} \dots$  und dieselben Verschiebungen  $\delta_a, \tau_a, e_a$  und  $\delta_{aa}$  bei dem Hauptssystem hervor. Die in

der Mitte der Mittelöffnung herrschende Querkraft  $X_a$  wird also dadurch nicht beeinflusst, daß dort ein Gelenk eingeschaltet ist.

Die Unbekannte  $X_b$  greift jetzt in Höhe der Balkenachse an; man erhält daher die durch sie in dem Hauptssystem hervorgerufenen Stützwiderstände, indem man in den für  $A_b, B_b \dots, H_{ab}, H_{bb} \dots$  auf S. 42 aufgestellten Beziehungen  $f=0$  setzt. Ebenso ist in den Gleichungen für die Biegelinie der ersten und dritten Öffnung (Gl. 9 bis 12, S. 43) und in den Ausdrücken für  $e_b$  und  $\delta_{bb}$  (Gl. 16, 17, S. 43)  $f=0$  anzunehmen. Die  $\delta_b$ -Linie der Mittelöffnung besteht aus zwei sich unter dem Gelenk schneidenden Geraden, deren Richtung durch die Winkel

$$\tau_{Bb} = -\frac{h \cdot l}{12 E \cdot J} \text{ und } \tau_{Cb} = +\frac{h \cdot l}{12 E \cdot J}$$

gegeben ist.

Es möge noch die Berechnung des unsymmetrischen vierstieligen Rahmens

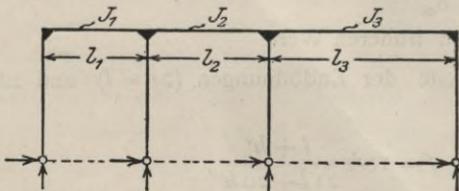


Abb. 65.

gestreift werden (Abb. 65).  $l_1, l_2, l_3$  seien die Spannweiten,  $J_1, J_2, J_3$  die Trägheitsmomente des Balkens;  $h$  sei wieder die Höhe der Stützen und  $J^v$  ihr Trägheitsmoment. In den Abständen  $e_1$  und  $e_2$  von den Stützen  $B$  und  $C$  wird die Mittelöffnung durchgeschnitten; in der Entfernung  $f$  von der

Balkenachse werden unter diesem Schnitt die drei Unbekannten angebracht, von denen  $X_a$  senkrecht,  $X_b$  wagrecht gerichtet ist und  $X_c$  als Moment wirkt.

1) In der graphischen Statik der Baukonstruktionen von Müller-Breslau, Band II, 2. Abt., S. 147 und folg. wird der vierstielige Rahmen mit Scheitelgelenk unter Einführung des gleichen Hauptsystems und derselben Unbekannten untersucht.

Die Verschiebungen der beiden Endöffnungen bei den Zuständen  $X_a$ ,  $X^b$  und  $X_c = 1$  sind durch die, bei dem symmetrischen Rahmen hierfür abgeleiteten Gleichungen gegeben, wenn man in diesen  $l$ ,  $J$  und  $c$  durch  $l_1$ ,  $J_1$  und  $c_1$  bzw.  $l_3$ ,  $J_3$  und  $c_2$  ersetzt. Für die Berechnung der Biegungslinie in der Mittelöffnung benutze man die Gl. 34 bis 54 (S. 16 bis 18).

Bei dem Zustande  $X_a = 1$  wird nach den Gl. 2 und 4 (S. 41)

$$\tau_{Ba} = \frac{c_1 \cdot l_1 (3l_1 + 8h_1')}{12 E \cdot J_1 (3l_1 + 2h_1')}, \quad \tau_{Ca} = \frac{c_2 \cdot l_3 (3l_3 + 8h_3')}{12 E \cdot J_3 (3l_3 + 2h_3')}$$

wenn man  $h_1' = \frac{J_1}{J^v} \cdot h$  und  $h_3' = \frac{J_3}{J^v} \cdot h$  setzt, und nach Gl. 8 (S. 42)

$$e_{Ba} = \frac{c_1 \cdot h \cdot l_1}{12 E \cdot J_1}, \quad e_{Ca} = \frac{c_2 \cdot h \cdot l_3}{12 E \cdot J_3}.$$

Soll nun  $\delta_{aa} = 0$  werden, so ist  $c_1$  durch Gl. 38 (S. 17) bestimmt. Legt man als Beispiel einen Rahmen zugrunde, bei dem  $h = l_1 = l_2 = l$ ,  $l_3 = 2 \cdot l$ ,  $J_1 = J_2 = J_3 = J^v = J$  ist, so wird

$$E \cdot J \cdot \tau_{Ba} = \frac{1}{60} c_1 \cdot l \quad \text{und} \quad E \cdot J \cdot \tau_{Ca} = \frac{7}{24} c_2 \cdot l.$$

Gl. 38 (S. 17) ergibt mit  $l(l - 2c_1) = 2 \cdot E \cdot J (\tau_{Ba} - \tau_{Ca})$ :

$$c_1 = 0,5367 \cdot l \quad \text{und} \quad c_2 = 0,4633 \cdot l.$$

Daher wird

$$E \cdot J \cdot e_{Ba} = 0,0447 \cdot l^3 \quad \text{und} \quad E \cdot J \cdot e_{Ca} = 0,0772 \cdot l^3.$$

Da  $\delta_{ab} = e_{Ca} - e_{Ba}$  ist, findet man

$$E \cdot J \cdot \delta_{ab} = 0,0325 \cdot l^3.$$

Gl. 39 (S. 17) liefert

$$E \cdot J \cdot \delta_{aa} = 0,1999 \cdot l^3.$$

Infolge des Zustandes  $X_b = 1$  wird

$$\tau_{Bb} = - \frac{l_1 [h(3l_1 + 2h_1') - f(3l_1 + 8h_1')]}{12 E \cdot J_1 (3l_1 + 2h_1')},$$

$$\tau_{Cb} = \frac{l_3 [h(3l_3 + 2h_3') - f(3l_3 + 8h_3')]}{12 E \cdot J_3 (3l_3 + 2h_3')},$$

$$e_{Bb} = - h \frac{h(l_1 + 2h_1') - l_1 \cdot f}{12 E \cdot J_1} \quad \text{und}$$

$$e_{Cb} = h \frac{h(l_3 + 2h_3') - l_3 \cdot f}{12 E \cdot J_3}.$$

Diese Beziehungen ergeben für das angenommene Beispiel:

$$E \cdot J \cdot \tau_{Bb} = - l \frac{5l - 11f}{60} \quad \text{und} \quad E \cdot J \cdot \tau_{Cb} = l \frac{4l - 7f}{24}.$$

Da nach Gl. 45 (S. 17)

$$f = \frac{E \cdot J (\tau_{Cb} - \tau_{Bb})}{l}$$

ist, wenn  $\delta_{bc} = 0$  werden soll, erhält man

$$f = \frac{1}{3} l = 0,1695 \cdot l.$$

Hiermit wird weiter

$$E \cdot J \cdot e_{Bb} = - 0,2359 \cdot l^3 \quad \text{und} \quad E \cdot J \cdot e_{Cb} = 0,3051 \cdot l^3,$$

weshalb

$$E \cdot J \cdot \delta_{bb} = 0,5410 \cdot l^3 \quad \text{wird.}$$

Die Anwendung der Gl. 47 (S. 18) liefert wieder

$$E \cdot J \cdot \delta_{ab} = 0,0325 \cdot l^3.$$

Für den Zustand  $X_c = 1$  gilt:

$$\begin{aligned} \tau_{Bc} &= \frac{l_1(3l_1 + 8h_1')}{12E \cdot J_1(3l_1 + 2h_1')}, & \tau_{Cc} &= -\frac{l_3(3l_3 + 8h_3')}{12E \cdot J_3(3l_3 + 2h_3')} \\ e_{Bc} &= \frac{h \cdot l_1}{12E \cdot J_1}, & e_{Cc} &= -\frac{h \cdot l_3}{12E \cdot J_3}. \end{aligned}$$

Bei dem Beispiel werden

$$\begin{aligned} E \cdot J \cdot \tau_{Bc} &= \frac{11}{60} l, & E \cdot J \cdot \tau_{Cc} &= -\frac{7}{24} l, \\ E \cdot J \cdot e_{Bc} &= \frac{1}{12} l^2 & \text{und } E \cdot J \cdot e_{Cc} &= -\frac{1}{8} l^2. \end{aligned}$$

Hiermit ergeben wieder

$$\text{Gl. 52 (S. 18):} \quad e_1 = 0,5367 \cdot l, \text{ bzw. } e_2 = 0,4633 \cdot l \text{ und}$$

$$\text{Gl. 54 (S. 18):} \quad f = 0,1695 \cdot l, \text{ während man mit}$$

$$\text{Gl. 53 (S. 18): } E \cdot J \cdot \delta_{cc} = 1,4750 \cdot l \text{ findet.}$$

Die Ausführungen auf S. 19 erläutern die Berechnung von  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$ , bzw. von den an Stelle von  $X_a$  und  $X_b$  einzuführenden Kräften  $X_a'$  und  $X_b'$ .

Etwas ausführlicher soll dagegen die Bestimmung der Unbekannten und der Stützkkräfte bei einem symmetrischen Rahmen für verschiedene äußere Belastungen behandelt werden.

#### Senkrechte Lasten.

Die Werte  $\delta_{ma}$ ,  $\delta_{mb}$  und  $\delta_{mc}$  sind die Ordinaten der Biegelinie; es gilt daher

$$X_a = -\frac{\delta_a}{\delta_{aa}} \cdot P, \quad X_b = -\frac{\delta_b}{\delta_{bb}} \cdot P \quad \text{und} \quad X_c = -\frac{\delta_c}{\delta_{cc}} \cdot P.$$

Für das schnelle Auftragen der Einflußlinien ist es zweckmäßig, die Lage der Belastungsscheiden, soweit solche in den einzelnen Öffnungen vorhanden sind, und die Neigungswinkel der Einflußlinien gegen die Wagerechte über den Stützen zu bestimmen. Der Abstand der Belastungsscheide von dem Stiel, der die betreffende Öffnung auf der linken Seite begrenzt, wird mit  $s$  und die Neigung der Einflußlinie gegen die Wagerechte mit  $\gamma$ , über den Stützen mit  $\gamma_A$ ,  $\gamma_B$ ,  $\gamma_C$  und  $\gamma_D$  bezeichnet. Der Winkel  $\gamma$  wird durch einmalige Differentiation der Gleichung der Einflußlinie gefunden. Ihre zweimalige Differentiation liefert die Lage der Wendepunkte.

Die Ermittlung der Einflußlinien soll an einem Beispiele gezeigt werden, bei dem gleiche Spannweiten ( $2c = l$ ),  $h = 0,5 \cdot l$  und  $J = J' = J''$  angenommen werden (Abb. 66). Es wird dann

$$\begin{aligned} f &= \frac{2}{3} l, & h - f &= \frac{1}{3} l, \\ E \cdot J \cdot \delta_{aa} &= \frac{5}{32} l^3, & E \cdot J \cdot \delta_{bb} &= \frac{3}{4} l^3 \quad \text{und} \quad E \cdot J \cdot \delta_{cc} = \frac{3}{4} l \cdot l. \end{aligned}$$

Ersetzt man ( $x:l$ ) durch  $n$ , so lauten die Gleichungen der  $X_a$ -Linie:

$$\text{I. Öffnung: } X_a = -\frac{1}{15} n(1-n)(1-8n) = -n(1-n)(0,0667 - 0,5333n);$$

$$\gamma_A = -0,0667; \quad \gamma_B = -0,4667;$$

$$\text{Belastungsscheide: } s = \frac{1}{8} l = 0,1250 \cdot l.$$

2. Öffnung: linker Teil:  $X_a = -\frac{1}{15}(7n + 24n^2 - 16n^3) =$   
 $-0,4667n - 1,6000n^2 + 1,0667n^3;$   
 rechter Teil:  $X_a = \frac{1}{15}(15 - 7n - 24n^2 + 16n^3) =$   
 $1,0 - 0,4667n - 1,6000n^2 + 1,0667n^3.$

3. Öffnung:  $X_a = -\frac{1}{15}n(1-n)(7-8n) = -n(1-n)(0,4667 - 0,5333n);$   
 $\gamma_C = -0,4667; \quad \gamma_D = -0,0667;$

Belastungsscheide:  $s = \frac{2}{3}l = 0,8750l.$

Entsprechend findet man für die  $X_b$ -Linie:

1. Öffnung:  $X_b = \frac{3}{29}n(1-n)(5-9n) = n(1-n)(0,5172 - 0,9310n);$   
 $\gamma_A = +0,5172; \quad \gamma_B = +0,4138;$

Belastungsscheide:  $s = \frac{5}{9} \cdot l = 0,5556l.$

2. Öffnung:  $X_b = \frac{1}{2} \frac{3}{9}n(1-n) = 0,4138n(1-n).$

3. Öffnung:  $X_b = -\frac{3}{29}n(1-n)(4-9n) = -n(1-n)(0,4138 - 0,9310n);$   
 $\gamma_C = -0,4138; \quad \gamma_D = -0,5172;$

Belastungsscheide:  $s = \frac{4}{9}l = 0,4444l.$

Für die  $X_c$ -Linie wird erhalten:

1. Öffnung:  $\frac{1}{l} \cdot X_c = -\frac{1}{6}n(1-n)(1-8n) = -n(1-n)(0,0161 - 0,1290n);$   
 $\gamma_A = -0,0161; \quad \gamma_B = -0,1129;$

Belastungsscheide:  $s = \frac{1}{8} \cdot l = 0,1250l.$

2. Öffnung, linker Teil:  $\frac{1}{l} \cdot X_c = -\frac{1}{6}n(7n + 24n^2) = -0,1129n - 0,3871n^2;$   
 rechter Teil:

$$\frac{1}{l} \cdot X_c = -\frac{1}{6}n(1-n)(31-24n) = -0,5000 + 0,8871n - 0,3871n^2.$$

3. Öffnung:  $\frac{1}{l} \cdot X_c = \frac{1}{6}n(1-n)(7-8n) = n(1-n)(0,1129 - 0,1290n);$   
 $\gamma_C = +0,1129; \quad \gamma_D = +0,0161.$

Belastungsscheide:  $s = \frac{7}{8}l = 0,8750l.$

In den Abb. 67 bis 69 sind die Einflußlinien von  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  dargestellt.

Es können jetzt die Einflußlinien der Stützkkräfte  $A$ ,  $B$ ,  $H_a$  und  $H_b$  errechnet werden (Abb. 70 bis 73). Bei dem Hauptssystem wird

in der ersten Öffnung  $A_0 = 1,0(1-n),$

$$B_0 = n,$$

$$H_{a0} = 0,75n(1-n),$$

$$H_{b0} = -0,75n(1-n),$$

in dem linken Teil der zweiten Öffnung  $A_0 = -n,$

$$B_0 = 1,0 + n,$$

$$H_{a0} = -0,75n,$$

$$H_{b0} = 0,75n.$$

Den Zuständen  $X_a = 1$ ,  $X_b = 1$  und  $X_c = 1$  entsprechen die Auflagerdrücke:

$$A_a = -\frac{1}{2}, \quad B_a = \frac{3}{2}, \quad H_{aa} = -\frac{3}{8}, \quad H_{ba} = \frac{3}{8};$$

$$A_b = \frac{3}{6} \frac{7}{2}, \quad B_b = -\frac{3}{6} \frac{7}{2}, \quad H_{ab} = \frac{1}{3} \frac{1}{1}, \quad H_{bb} = \frac{1}{3} \frac{7}{1};$$

$$l \cdot A_c = -1,0, \quad l \cdot B_c = 1,0, \quad l \cdot H_{ac} = -\frac{3}{4}, \quad l \cdot H_{bc} = \frac{3}{4}.$$

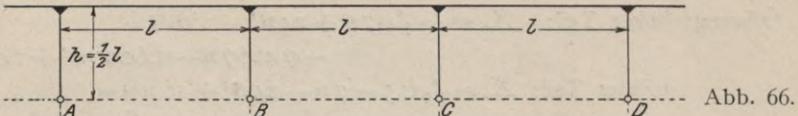


Abb. 66.

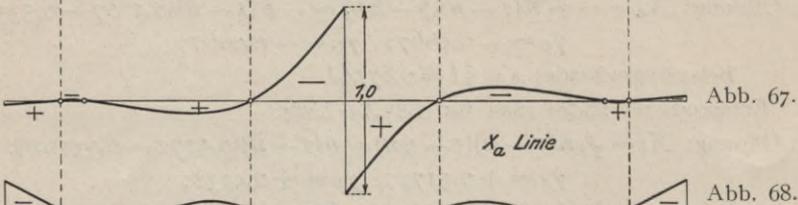


Abb. 67.

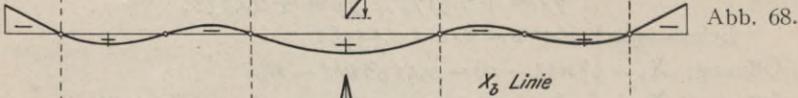


Abb. 68.

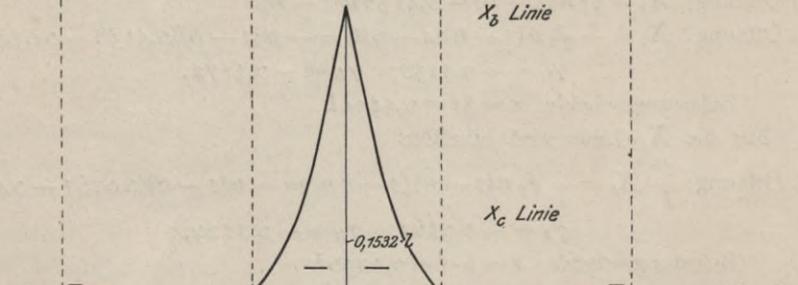


Abb. 69.

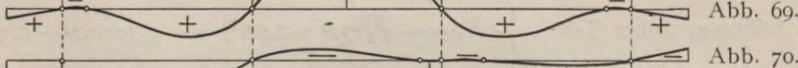


Abb. 70.

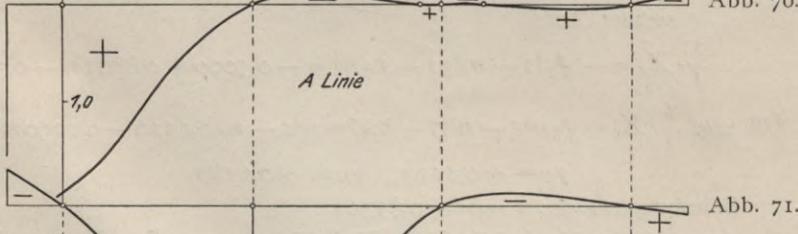


Abb. 71.

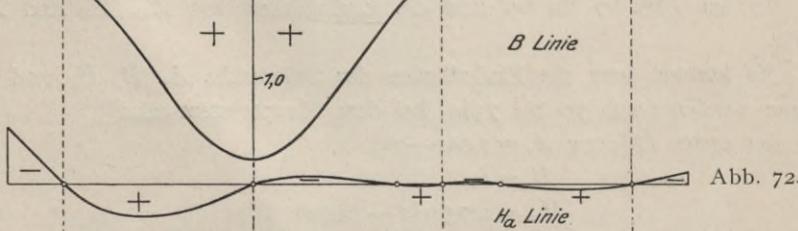


Abb. 72.

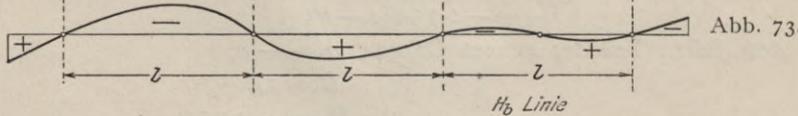


Abb. 73.

Die Zusammenfügung der einzelnen Wirkungen ergibt folgende Einflußgleichungen:

1. Öffnung:  $A = 1,0(1-n) + n(1-n)(0,2746 - 0,8012n)$ ;

$$\gamma_A = -0,7254; \quad \gamma_B = -0,4734.$$

$$B = n - n(1-n)(0,3413 - 1,3345n)$$
;

$$\gamma_A = +0,6587; \quad \gamma_B = +0,0068.$$

$$H_a = n(1-n)(1,0207 - 0,7173n);$$

$$\gamma_A = +1,0207; \quad \gamma_B = -0,3034.$$

$$H_b = -n(1-n)(0,5034 + 0,2137n);$$

$$\gamma_A = -0,5034; \quad \gamma_B = +0,7171.$$

2. Öffnung:  $A = -n(1-n)(0,4736 - 0,5333n);$   
 $s = 0,888l.$

$$B = 1,0(1-n) + n(1-n)(1,0069 - 1,6000n);$$

$$H_a = -n(1-n)(0,3034 - 0,4000n);$$

$$s = 0,758l.$$

$$H_b = n(1-n)(0,7172 - 0,4000n).$$

3. Öffnung:  $A = -n(1-n)(0,0598 - 0,2678n);$   
 $\gamma_C = -0,0598; \quad \gamma_D = -0,2080; \quad s = 0,224l.$

$$B = -n(1-n)(0,4069 - 0,2655n);$$

$$\gamma_C = -0,4069; \quad \gamma_D = +0,1414.$$

$$H_a = -n(1-n)(0,0966 - 0,3173n);$$

$$\gamma_C = -0,0966; \quad \gamma_D = -0,2207; \quad s = 0,305l.$$

$$H_b = -n(1-n)(0,3172 - 0,6138n);$$

$$\gamma_C = -0,3172; \quad \gamma_D = -0,2966; \quad s = 0,517l.$$

Die Abb. 74 bis 78 zeigen noch die Einflußlinien einiger Balkenmomente, und zwar des Momentes, das über der Stütze  $A$ , in der Mitte der ersten Öffnung, unmittelbar links neben der Stütze  $B$ , unmittelbar rechts neben der Stütze  $B$  und in der Mitte der zweiten Öffnung entsteht. Die Größe der Einflußflächen ist auf den Abbildungen vermerkt. Erstreckt sich eine gleichmäßig verteilte Last  $p$  auf die Längeneinheit über die positiven, bzw. die negativen Einflußflächen, so entstehen die Momente  $M_{p\max}$ , bzw.  $M_{p\min}$ . Eine gleichmäßig über alle Öffnungen verteilte Last  $g$  auf die Längeneinheit erzeugt das Moment

$$M_g = \frac{g}{p}(M_{p\max} + M_{p\min}).$$

Diese Grenzwerte werden bei dem

Moment über  $A$ :

$$M_{p\max} = +0,0111 p \cdot l^2,$$

$$M_{p\min} = -0,0629 p \cdot l^2,$$

$$M_g = -0,0518 g \cdot l^2,$$

Moment in der Mitte der ersten Öffnung:  $M_{p\max} = +0,0604 p \cdot l^2,$   
 $M_{p\min} = -0,0087 p \cdot l^2,$   
 $M_g = +0,0517 g \cdot l^2,$

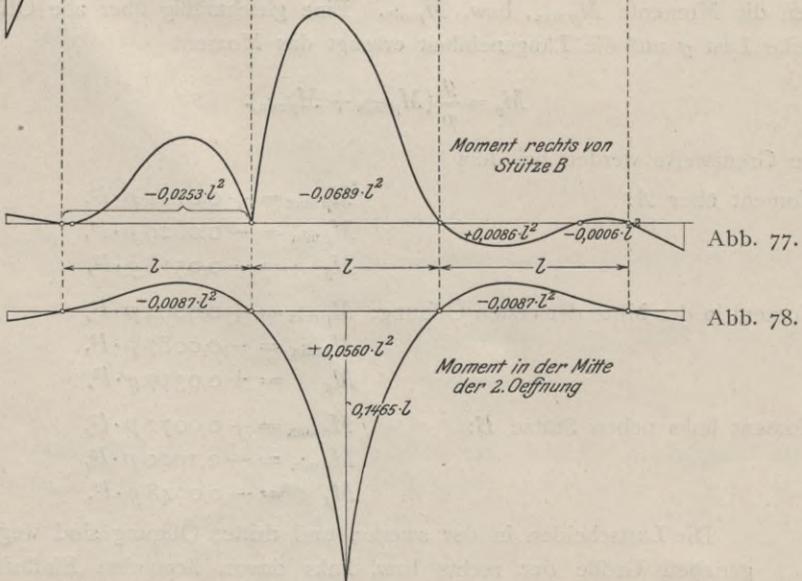
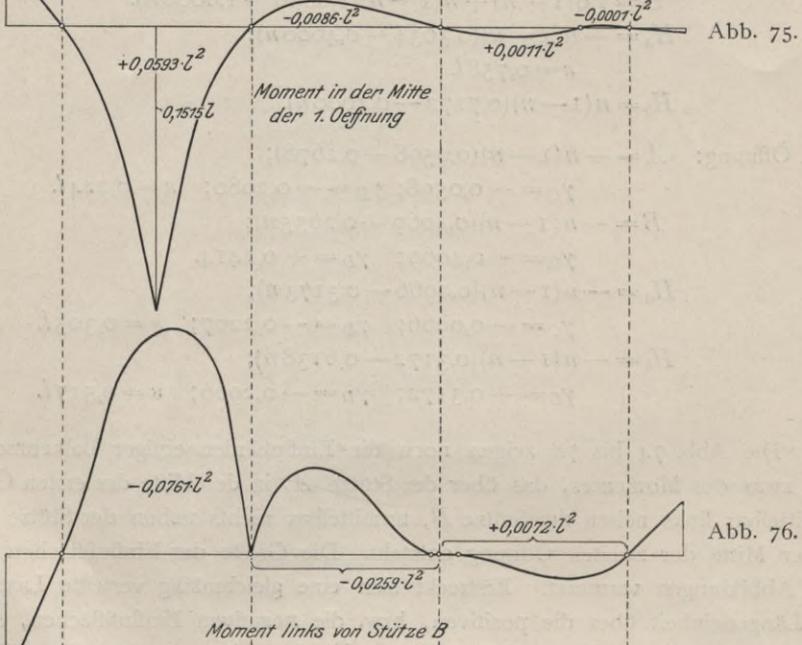
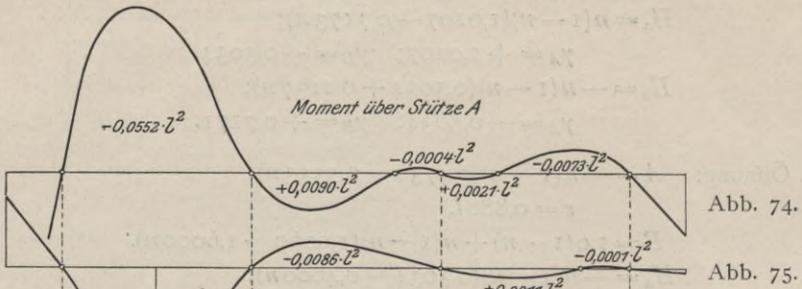
Moment links neben Stütze  $B$ :

$$M_{p\max} = +0,0072 p \cdot l^2,$$

$$M_{p\min} = -0,1020 p \cdot l^2,$$

$$M_g = -0,0948 g \cdot l^2.$$

Die Lastscheiden in der zweiten und dritten Öffnung sind wegen der geringen Größe der rechts bzw. links davon liegenden Einflußflächen bei der Bestimmung von  $M_{p\max}$  und  $M_{p\min}$  nicht berücksichtigt worden.



Moment rechts neben Stütze B:

$$\begin{aligned} M_{p\max} &= +0,0086 p \cdot l^2, \\ M_{p\min} &= -0,0948 p \cdot l^2, \\ M_g &= -0,0862 g \cdot l^2. \end{aligned}$$

Hier ist die Lastscheide in der ersten Öffnung bei der Bestimmung von  $M_{p\max}$  und  $M_{p\min}$  vernachlässigt worden.

Moment in der Mitte der zweiten Öffnung:

$$\begin{aligned} M_{p\max} &= +0,0560 p \cdot l^2, \\ M_{p\min} &= -0,0173 p \cdot l^2, \\ M_g &= +0,0387 g \cdot l^2. \end{aligned}$$

Die nachstehende Zusammenstellung gibt noch für verschiedene Stützhöhen ( $h = 0,5 \cdot l$ ,  $h = 1,0 \cdot l$ ,  $h = \infty$ , d. h. Balken frei auflagernd auf vier Stützen), unter der Annahme  $J = J^v$ , die Größe der Stützkräfte  $A$ ,  $B$ ,  $H_a$  und  $H_b$  an, wenn alle Öffnungen gleichmäßig mit  $g$  auf die Längeneinheit belastet sind:

	$h = 0,5 \cdot l$	$h = 1,0 \cdot l$	$h = \infty$
$A$	$+0,4569 g \cdot l$	$+0,4406 g \cdot l$	$+0,4000 g \cdot l$
$B$	$+1,0431 g \cdot l$	$+1,0594 g \cdot l$	$+1,1000 g \cdot l$
$H_a$	$+0,1036 g \cdot l$	$+0,0381 g \cdot l$	—
$H_b$	$-0,0172 g \cdot l$	$-0,0084 g \cdot l$	—

**Wagerechte Lasten.**

Es sollen für den Fall gleicher Spannweiten die Stützkräfte bestimmt werden, die durch eine am linken Ende, in Höhe der Balkenachse angreifende wagerechte Last  $Q$  entstehen (Abb. 79).

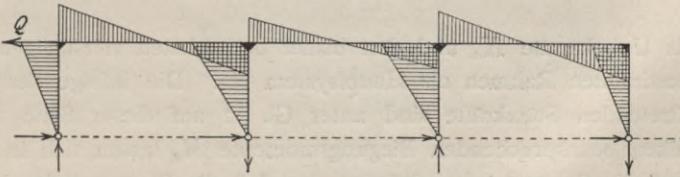


Abb. 79.

Da

$$e_{Aa} = \frac{h \cdot l^2}{24 E \cdot J}, \quad e_{Ab} = -\frac{1}{2} \delta_{bb} \quad \text{und} \quad e_{Ac} = \frac{h \cdot l}{12 E \cdot J}$$

ist, wird

$$31) \quad \dots \quad \left\{ \begin{aligned} X_a &= \frac{e_{Aa}}{\delta_{aa}} \cdot Q = \frac{h(3l + 2h')}{3l(3l + 4h')} \cdot Q, \\ X_b &= \frac{e_{Ab}}{\delta_{bb}} \cdot Q = -\frac{1}{2} Q \quad \text{und} \\ X_c &= \frac{e_{Ac}}{\delta_{cc}} \cdot Q = \frac{h(3l + 2h')}{2(2l + 20h')} \cdot Q. \end{aligned} \right.$$

In dem Hauptsystem sind infolge der äußeren Last  $Q$ :  $A_0 = -B_0 = \frac{h}{l} Q$ ,  $H_{a0} = H_{b0} = \frac{1}{2} Q$  nach Gl. 6, S. 26 und  $C_0 = D_0 = H_{c0} = H_{d0} = 0$ .

Übergeht man die Zwischenrechnungen, so findet man schließlich folgende Stützkräfte:

$$3^2) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} A = -D = \frac{h(3l + 5h')}{3l(3l + 4h')} \cdot Q, \\ B = -C = -\frac{h \cdot h'}{l(3l + 4h')} \cdot Q, \\ H_a = H_d = \frac{l + 2h'}{2(3l + 4h')} \cdot Q \quad \text{und} \\ H_b = H_c = \frac{l + h'}{3l + 4h'} \cdot Q. \end{array} \right.$$

Die diesen Stützkräften entsprechenden Momente sind in Abb. 79 dargestellt.

Greift  $Q$  oberhalb der Balkenachse an, so kann das neu hinzutretende Moment ( $-k \cdot Q$ ) nach der Bemerkung auf S. 9 mittels des Neigungswinkels  $\gamma$  der für senkrechte Lasten gültigen Einflußlinien berücksichtigt werden. Denn differenziert man deren auf S. 50, 51 angegebene Gleichungen, dann erhält man sofort die Einflußlinien der Stützkräfte für rechtsdrehende, am Balken angreifende Momente  $M$ .

Wird der Träger zur Aufnahme starker Bremskräfte in Höhe der Balkenachse nach Abb. 80 wagrecht abgestützt, so führt man die neu hinzutretende

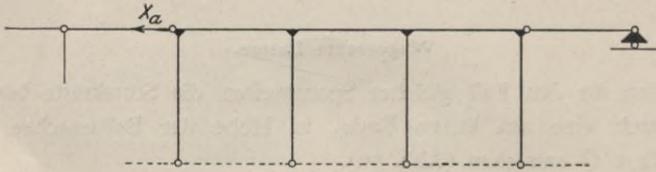


Abb. 80.

Stützkraft als Unbekannte  $X_a$  und den bisher behandelten vierstieligen, fünffach statisch unbestimmten Rahmen als Hauptsystem ein. Die infolge des Zustandes  $X_a = 1$  auftretenden Stützkräfte sind unter Gl. 32 auf dieser Seite angegeben. Die den Balken beanspruchenden Biegemomente  $M_a$  lassen sich in allen drei Öffnungen auf die Form  $a + b \cdot x$  bringen, so daß die Biegelinie des Balkens für den Zustand  $X_a = 1$  durch die Gl. 6 bis 9 (S. 11) bestimmt ist.  $\delta_{aa}$  ist gleich der wagerechten Verschiebung des Balkens:

$$\delta_{aa} = -\tau_{Aa} \cdot h + H_{aa} \frac{h^2 \cdot h'}{3EJ}, \quad \text{wo nach Gl. 32} \quad H_{aa} = \frac{l + 2h'}{2(3l + 4h')}.$$

In der ersten Öffnung ist

$$M_a = -\frac{h(l + 2h')}{2(3l + 4h')} + \frac{h(3l + 5h') \cdot x}{3l(3l + 4h')},$$

mithin nach Gl. 8 (S. 11):

$$\tau_{Aa} = -\frac{h \cdot l(3l + 8h')}{36E \cdot J(3l + 4h')},$$

so daß man weiter

$$\delta_{aa} = \frac{h^2(3l^2 + 14l \cdot h' + 12h'^2)}{36E \cdot J(3l + 4h')} \quad \text{findet.}$$

Wärmeänderung.

Wegen der vorhandenen Symmetrie wird bei dem bisher behandelten vierstieligen Rahmen  $\delta_{at} = 0$ .

Bei den Zuständen  $X_b$  und  $X_c$  sind die Summen der senkrechten Auflagerkräfte = 0. Es wird daher

$$\delta_{bt} = \varepsilon t_0 [-H_{ab} \cdot l - 2c + H_{db} \cdot l] + \varepsilon \frac{\Delta t}{d} \left[ \int_0^l (-H_{ab} \cdot h + A_b \cdot x) dx - 2c \cdot f + \int_0^l (H_{db} \cdot h + D_b \cdot l - D_b \cdot x) dx \right].$$

Da  $H_{ab} = -H_{db}$  und  $A_b = D_b = \frac{h-f}{l}$  ist, wird

$$\delta_{bt} = -2\varepsilon \cdot t_0 [H_{ab} \cdot l + c] - \varepsilon \frac{\Delta t}{d} [2H_{ab} \cdot h \cdot l - (h-f) \cdot l + 2c \cdot f].$$

Vernachlässigt man in dem Ausdrücke für  $H_{ab}$  den Einfluß der Normalspannungen, so wird mit

$$H_{ab} = \frac{1}{2} - \frac{3f \cdot l}{2h(3l + 2h')};$$

$$33) \quad \delta_{bt} = -\varepsilon \cdot t_0 \left[ l + 2c - \frac{3f \cdot l^2}{h(3l + 2h')} \right] - 2\varepsilon \frac{\Delta t}{d} f \left[ \frac{l \cdot h'}{3l + 2h'} + c \right].$$

Entsprechend erhält man

$$\delta_{ct} = -2\varepsilon \cdot t_0 \cdot H_{ac} \cdot l - \varepsilon \frac{\Delta t}{d} (l + 2c + 2H_{ac} \cdot h \cdot l) \quad \text{oder}$$

$$34) \quad \delta_{ct} = \frac{3\varepsilon \cdot t_0 \cdot l^2}{h(3l + 2h')} - 2\varepsilon \frac{\Delta t}{d} \left[ \frac{l \cdot h'}{3l + 2h'} + c \right],$$

wenn man bei  $H_{ac}$  wieder den Einfluß der Normalkräfte außer acht läßt.

Bei gleichen Spannweiten ( $2c = l$ ) wird

$$\delta_{bt} = -\frac{\varepsilon \cdot t_0 \cdot l(39l + 40h')}{21l + 20h'} - \frac{\varepsilon \cdot \Delta t \cdot h \cdot l(3l + 4h')}{d(21l + 20h')}.$$

Wenn nur eine gleichmäßige Temperaturerhöhung  $t_0$  in Frage kommt, erhält man unter der Voraussetzung gleich weiter Öffnungen:

$$35) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{at} = 0, \\ X_{bt} = \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l(39l + 40h')}{h^2(9l^2 + 30l \cdot h' + 20h'^2)}, \\ X_{ct} = -\frac{18\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l}{h(21l + 20h')}. \end{array} \right.$$

Benutzt man diese Werte und berücksichtigt, daß in dem Hauptssystem  $A_{ot} = B_{ot} = C_{ot} = D_{ot} = 0$  und

$$H_{aot} = -H_{bot} = H_{cot} = -H_{dot} = \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l}{h^2(3l + 2h')}$$

ist (Gl. 12, S. 27), so erhält man schließlich folgende Stützkräfte:

$$36) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_t = -B_t = -C_t = D_t = \frac{18\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0(6l + 7h')}{h(9l^2 + 30l \cdot h' + 20h'^2)}, \\ H_{at} = -H_{dt} = \frac{9\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l(7l + 10h')}{h^2(9l^2 + 30l \cdot h' + 20h'^2)}, \\ H_{bt} = -H_{ct} = \frac{6\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l(9l + 5h')}{h^2(9l^2 + 30l \cdot h' + 20h'^2)}. \end{array} \right.$$

Diesen Auflagerdrücken entsprechen die Momente

$$M_{A'} = - \frac{9 \varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l (7l + 10h')}{h (9l^2 + 30l \cdot h' + 20h'^2)} \quad \text{und}$$

$$M_{B'} = \frac{9 \varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l (5l + 4h')}{h (9l^2 + 30l \cdot h' + 20h'^2)} \quad \text{in der ersten Öffnung und}$$

$$M_{B'} = M_{C'} = - \frac{3 \varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l (3l - 2h')}{h (9l^2 + 30l \cdot h' + 20h'^2)}$$

in der zweiten Öffnung.

Die Momentenfläche des Balkens in der dritten Öffnung ist das Spiegelbild zu der Momentenfläche in der ersten Öffnung.

Das größte auftretende Moment ist  $M_{A'}$ . Nimmt man wieder wie bei der Berechnung der Einflußlinien für senkrechte Lasten  $h = 0,5 \cdot l$  und  $J^v = J$  an, so wird

$$M_{A'} = - \frac{216 \varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0}{29 l}$$

Die in dem Balken bei  $A'$  herrschende Spannung ist

$$\sigma = \frac{M_{A'} \cdot d}{2 \cdot J} = \frac{M_{A'} \cdot l}{30 \cdot J},$$

wenn man die Annahme macht, daß die Trägerhöhe  $d = 1/15$  der Spannweite  $l$  ist. Bei Flußeisen ist  $\varepsilon \cdot E = 25 \text{ kg/cm}^2$ ; hiermit erhält man nach Einsetzen des Wertes für  $M_{A'}$ :

$$\sigma_t = 6,2 \cdot t_0 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei einem größten Wärmeunterschied von  $t_0 = 35^\circ$  gegenüber der Aufstellungstemperatur wird demnach  $\sigma_t = 217 \text{ kg/cm}^2$ ; bei größerer Trägerhöhe  $d$  erhöht sich dieser Wert entsprechend.

Es zeigt sich hier die ungünstige Beanspruchung mehrstieliger Rahmen durch Wärmeschwankungen.

#### 4. Der sechsstielige Rahmen.

Recht einfache Ausdrücke ergeben sich für die Unbekannten auch noch bei dem sechsstielligen symmetrischen Rahmen, wenn man den Einfluß der Normalkräfte vernachlässigt. Will man ihn berücksichtigen, so bleibt der Rechnungsgang

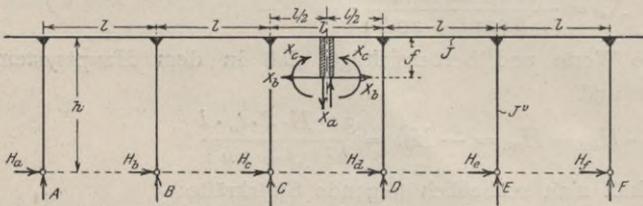


Abb. 81.

derselbe; nur empfiehlt es sich in dem Falle, schon bei der Bestimmung der in dem Hauptsystem durch die Unbekannten hervorgerufenen Stützkräfte mit den Zahlenrechnungen einzusetzen.

Wie Abb. 81 zeigt, bilden zwei dreistiellige, je dreifach statisch unbestimmte Rahmen das Hauptsystem;  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  sind die Unbekannten. Es wird hier vorausgesetzt, daß der Balken in allen Öffnungen die gleiche Spannweite  $l$  und das gleiche Trägheitsmoment  $J$  hat.

Zustand  $X_a = 1$ .

Die infolge des Zustandes  $X_a = 1$  in dem Hauptssystem auftretenden Stützkraftre sind aus der Berechnung des dreistieligen Rahmens bekannt. Es werden:

$$\begin{aligned} A_a &= -F_a = -\frac{3l - 2h'}{4(3l + 4h')}, \\ B_a &= -E_a = -\frac{3h'}{3l + 4h'}, \\ C_a &= -D_a = \frac{15l + 26h'}{4(3l + 4h')}, \\ H_{aa} &= H_{fa} = -\frac{l^2(3l + 2h')}{8h(l+h')(3l + 4h')}, \\ H_{ba} &= H_{ca} = -\frac{l^2}{4h(l+h')}, \\ H_{ca} &= H_{da} = \frac{l^2(9l + 10h')}{8h(l+h')(3l + 4h')}. \end{aligned}$$

Hierdurch entstehen folgende Momente in dem Balken:

1. Öffnung:  $M_a = a + b \cdot x$ , wo  $a = \frac{l^2(3l + 2h')}{8(l+h')(3l + 4h')}$  und  $b = -\frac{3l - 2h'}{4(3l + 4h')}$ ;
2. Öffnung:  $M_a = a + b \cdot x$ , wo  $a = \frac{l(l + 2h')(3l + 2h')}{8(l+h')(3l + 4h')}$  und  $b = -\frac{3l + 10h'}{4(3l + 4h')}$ ;
3. Öffnung:  $M_a = -(\frac{1}{2} \cdot l - x)$ ;
4. Öffnung:  $M_a = a + b \cdot x$ , wo  $a = \frac{l(3l^2 + 18l \cdot h' + 16h'^2)}{8(l+h')(3l + 4h')}$  und  $b = -\frac{3l + 10h'}{4(3l + 4h')}$ ;
5. Öffnung:  $M_a = a + b \cdot x$ , wo  $a = \frac{l(3l^2 - 4h'^2)}{8(l+h')(3l + 4h')}$  und  $b = -\frac{3l - 2h'}{4(3l + 4h')}$ .

Die Anwendung der Gl. 6 bis 9 (S. 11) liefert jetzt die Biegungslinien:

1. Öffnung:

$$\begin{aligned} 1) \quad \delta_a &= \frac{x(l-x)}{48 E \cdot J(l+h')(3l+4h')} [l(3l^2 + 4l \cdot h' + 4h'^2) - 2x(l+h')(3l - 2h')], \\ 2) \quad \tau_a &= \frac{1}{48 E \cdot J(l+h')(3l+4h')} [l^2(3l^2 + 4l \cdot h' + 4h'^2) - 6l^2 \cdot x(3l + 2h') + \\ &\quad + 6x^2(l+h')(3l - 2h')], \\ \tau_{Aa} &= \frac{l^2(3l^2 + 4l \cdot h' + 4h'^2)}{48 E \cdot J(l+h')(3l+4h')}, \quad \tau_{Ba} = \frac{l^2(l - 2h')}{48 E \cdot J(l+h')} \end{aligned}$$

2. Öffnung:

$$\begin{aligned} 3) \quad \delta_a &= \frac{x(l-x)}{48 E \cdot J(l+h')(3l+4h')} [l(3l + 4h')(l - 2h') - 2x(l+h')(3l + 10h')], \\ 4) \quad \tau_a &= \frac{1}{48 E \cdot J(l+h')(3l+4h')} [l^2(3l + 4h')(l - 2h') - 6l \cdot x(l + 2h')(3l + 2h') + \\ &\quad + 6x^2(l+h')(3l + 10h')], \\ \tau_{Ba} &= \frac{l^2(l - 2h')}{48 E \cdot J(l+h')}, \quad \tau_{Ca} = \frac{l^2(3l^2 + 28l \cdot h' + 28h'^2)}{48 E \cdot J(l+h')(3l+4h')} \end{aligned}$$

Vertauscht man in den, für die Biegungslinie der ersten und zweiten Öffnung abgeleiteten Gleichungen  $x$  mit  $(l-x)$  und wendet in den Ausdrücken für  $\delta_a$  außerdem das Vorzeichen, so erhält man die entsprechenden Gleichungen der Biegungslinie in der fünften und vierten Öffnung.

Gl. 59 (S. 20) ergibt

$$5) \quad \delta_{aa} = \frac{l^3 (15l^2 + 56l \cdot h' + 44h'^2)}{48 E \cdot J (l + h') (3l + 4h')},$$

während man mittels der Gl. 60 bis 62 (S. 20) für die dritte Öffnung findet:

$$6) \quad \tau_a = \frac{l^2 (3l^2 + 28l \cdot h' + 28h'^2)}{48 E \cdot J (l + h') (3l + 4h')} + \frac{x(l-x)}{2 E \cdot J}, \text{ ferner}$$

$$7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_a = \delta_{aa} \frac{x}{l} - \frac{x(l-x)(l-2x)}{12 E \cdot J} \text{ in der ersten Hälfte und} \\ \delta_a = -\delta_{aa} \frac{l-x}{l} - \frac{x(l-x)(l-2x)}{12 E \cdot J} \text{ in der zweiten Hälfte.} \end{array} \right.$$

Die Anwendung der Gl. 74 (S. 23) lehrt, daß sämtliche Balkenquerschnitte sich um das Maß

$$8) \quad e_a = \frac{h \cdot l^2 (l + 2h')}{48 E \cdot J (l + h')} \text{ nach rechts verschieben.}$$

Zustand  $X_b = 1$ .

Die Stützkräfte sind dem Abschnitte, welcher die Berechnung des dreistieligen Rahmens behandelt, zu entnehmen. Man findet

$$A_b = F_b = \frac{h(3l + 4h') - f(3l - 2h')}{2l(3l + 4h')},$$

$$B_b = E_b = -\frac{6f \cdot h'}{l(3l + 4h')},$$

$$C_b = D_b = -\frac{h(3l + 4h') - f(3l + 10h')}{2l(3l + 4h')},$$

$$H_{ab} = -H_{fb} = \frac{3l + 4h'}{12(l + h')} - \frac{f \cdot l(3l + 2h')}{4h(l + h')(3l + 4h')},$$

$$H_{bb} = -H_{eb} = \frac{h(3l + 2h') - 3f \cdot l}{6h(l + h')},$$

$$H_{cb} = -H_{db} = \frac{3l + 4h'}{12(l + h')} + \frac{f \cdot l(9l + 10h')}{4h(l + h')(3l + 4h')}.$$

In der Mittelöffnung ist das den Balken beanspruchende Moment  $M_b = -f$ . In den übrigen Öffnungen läßt sich das Moment auf die Form  $M_b = a + b \cdot x$  bringen; die Hilfwerte  $a$  und  $b$  haben hierbei folgenden Wert:

1. Öffnung:

$$a = -\frac{h(3l + 4h')}{12(l + h')} + \frac{f \cdot l(3l + 2h')}{4(l + h')(3l + 4h')}, \quad b = \frac{h(3l + 4h') - f(3l - 2h')}{2l(3l + 4h')};$$

2. Öffnung:

$$a = -\frac{h(3l + 2h')}{12(l + h')} + \frac{f(l + 2h')(3l + 2h')}{4(l + h')(3l + 4h')}, \quad b = \frac{h(3l + 4h') - f(3l + 10h')}{2l(3l + 4h')};$$

4. Öffnung:

$$a = \frac{h(3l+4h')}{12(l+h')} - \frac{f(3l^2+18l \cdot h'+16h'^2)}{4(l+h')(3l+4h')}, \quad b = -\frac{h(3l+4h')-f(3l+10h')}{2l(3l+4h')};$$

5. Öffnung:

$$a = \frac{h(3l+2h')}{12(l+h')} - \frac{f(3l^2-4h'^2)}{4(l+h')(3l+4h')}, \quad b = -\frac{h(3l+4h')-f(3l-2h')}{2l(3l+4h')}.$$

Für die Biegelinie des Balkens erhält man folgende Beziehungen:

1. Öffnung:

$$9) \quad \delta_b = \frac{x(l-x)}{24 E \cdot J \cdot l(l+h')(3l+4h')} [-h \cdot l(l+2h')(3l+4h') + f \cdot l(3l^2+4l \cdot h'+4h'^2) + 2x(l+h')\{h(3l+4h')-f(3l-2h')\}],$$

$$10) \quad \tau_b = \frac{1}{24 E \cdot J \cdot l(l+h')(3l+4h')} [-h \cdot l^2(l+2h')(3l+4h') + f \cdot l^2(3l^2+4l \cdot h'+4h'^2) + 2x \cdot l\{h(3l+4h')^2-3f \cdot l(3l+2h')\} - 6x^2(l+h')\{h(3l+4h')-f(3l-2h')\}],$$

$$\tau_{Ab} = -l \frac{h(l+2h')(3l+4h')-f(3l^2+4l \cdot h'+4h'^2)}{24 E \cdot J(l+h')(3l+4h')},$$

$$\tau_{Bb} = -l \frac{h \cdot l - f(l-2h')}{24 E \cdot J(l+h')}.$$

2. Öffnung:

$$11) \quad \delta_b = \frac{x(l-x)}{24 E \cdot J \cdot l(l+h')(3l+4h')} [-h \cdot l^2(3l+4h')+f \cdot l(l-2h')(3l+4h') + 2x(l+h')\{h(3l+4h')-f(3l+10h')\}],$$

$$12) \quad \tau_b = \frac{1}{24 E \cdot J \cdot l(l+h')(3l+4h')} [-l^2(3l+4h')\{h \cdot l - f(l-2h')\} + 2x \cdot l(3l+2h')\{h(3l+4h')-3f(l+2h')\} - 6x^2(l+h')\{h(3l+4h')-f(3l+10h')\}],$$

$$\tau_{Bb} = -l \frac{h \cdot l - f(l-2h')}{24 E \cdot J(l+h')},$$

$$\tau_{Cb} = -l \frac{h(l+2h')(3l+4h')-f(3l^2+28l \cdot h'+28h'^2)}{24 E \cdot J(l+h')(3l+4h')}.$$

Die Biegelinie der vierten und fünften Öffnung ergibt sich infolge der vorhandenen Symmetrie aus der Biegelinie der zweiten und ersten Öffnung, wenn man  $x$  mit  $(l-x)$  vertauscht und in den Ausdrücken für  $\tau_b$  außerdem das Vorzeichen wechselt.

Da nach Gl. 57 (S. 20)

$$f = -\frac{2 E \cdot J \cdot \tau_{Cb}}{l} \quad \text{ist, erhält man}$$

$$13) \quad \dots \quad f = \frac{h(l+2h')(3l+4h')}{39l^2+112l \cdot h'+76h'^2}.$$

Die Biegelinie der dritten Öffnung ist eine Parabel; und zwar wird

$$14) \quad \delta_b = -\frac{f \cdot x(l-x)}{2E \cdot J} \quad \text{und}$$

$$15) \quad \tau_b = -\frac{f(l-2x)}{2E \cdot J}.$$

Mittels Gl. 74 (S. 23) findet man die wagerechte Verschiebung des Balkens. Es wird

$$16) \quad e_{Ab} = e_{Bb} = e_{Cb} = -e_{Db} = -e_{Eb} = -e_{Fb} = -h \frac{h(3l^2 + 12l \cdot h' + 8h'^2) - 3f \cdot l(l + 2h')}{72E \cdot J(l + h')};$$

mithin

$$17) \quad \delta_{bb} = \frac{h^2(3l^2 + 12l \cdot h' + 8h'^2) - 3f \cdot h \cdot l(l + 2h')}{36E \cdot J(l + h')}.$$

Zustand  $X_c = 1$ .

Der Zustand  $X_c = 1$  ruft folgende Auflagerkräfte hervor:

$$A_c = F_c = -\frac{3l - 2h'}{2l(3l + 4h')},$$

$$B_c = E_c = -\frac{6h'}{l(3l + 4h')},$$

$$C_c = D_c = \frac{3l + 10h'}{2l(3l + 4h')},$$

$$H_{ac} = -H_{fc} = -\frac{l(3l + 2h')}{4h(l + h')(3l + 4h')},$$

$$H_{bc} = -H_{ec} = -\frac{l}{2h(l + h')} \quad \text{und}$$

$$H_{cc} = -H_{dc} = \frac{l(9l + 10h')}{4h(l + h')(3l + 4h')}.$$

In der Mittelöffnung wird der Balken durch das Moment  $M_o = -1$  und in den übrigen Öffnungen durch die Momente  $M_c = a + b \cdot x$  beansprucht. Die Werte der Hilfsgrößen  $a$  und  $b$  sind hierbei:

$$1. \text{ Öffnung: } a = \frac{l(3l + 2h')}{4(l + h')(3l + 4h')} \quad \text{und } b = -\frac{3l - 2h'}{2l(3l + 4h')};$$

$$2. \text{ Öffnung: } a = \frac{(l + 2h')(3l + 2h')}{4(l + h')(3l + 4h')} \quad \text{und } b = -\frac{3l + 10h'}{2l(3l + 4h')};$$

$$4. \text{ Öffnung: } a = -\frac{3l^2 + 18l \cdot h' + 16h'^2}{4(l + h')(3l + 4h')} \quad \text{und } b = \frac{3l + 10h'}{2l(3l + 4h')};$$

$$5. \text{ Öffnung: } a = -\frac{3l^2 - 4h'^2}{4(l + h')(3l + 4h')} \quad \text{und } b = \frac{3l - 2h'}{2l(3l + 4h')}.$$

Die Gl. 6 bis 9 (S. 11) ergeben mit diesen Werten die nachstehenden Biegelinien:

1. Öffnung:

$$18) \quad \delta_c = \frac{x(l-x)}{24E \cdot J \cdot l(l + h')(3l + 4h')} [l(3l^2 + 4l \cdot h' + 4h'^2) - 2x(l + h')(3l - 2h')],$$

$$19) \quad \tau_o = \frac{I}{24 E \cdot J \cdot l(l+h')(3l+4h')} [l^2(3l^2 + 4l \cdot h' + 4h'^2) - 6l^2 \cdot x(3l + 2h') + 6x^2(l+h')(3l-2h')],$$

$$\tau_{Ac} = \frac{l(3l^2 + 4l \cdot h' + 4h'^2)}{24 E \cdot J(l+h')(3l+4h')}, \quad \tau_{Bc} = \frac{l(l-2h')}{24 E \cdot J(l+h')}.$$

2. Öffnung:

$$20) \quad \delta_o = \frac{x(l-x)}{24 E \cdot J \cdot l(l+h')(3l+4h')} [l(l-2h')(3l+4h') - 2x(l+h')(3l+10h')],$$

$$21) \quad \tau_o = \frac{I}{24 E \cdot J \cdot l(l+h')(3l+4h')} [l^2(l-2h')(3l+4h') - 6l \cdot x(l+2h')(3l+2h') + 6x^2(l+h')(3l+10h')],$$

$$\tau_{Bc} = \frac{l(l-2h')}{24 E \cdot J(l+h')}, \quad \tau_{Cc} = \frac{l(3l^2 + 28l \cdot h' + 28h'^2)}{24 E \cdot J(l+h')(3l+4h')}.$$

Die Biegelinie der vierten und fünften Öffnung ist wieder das Spiegelbild derjenigen in der zweiten und ersten Öffnung.

Gl. 66 (S. 20) liefert

$$22) \quad \delta_{cc} = \frac{l(39l^2 + 112l \cdot h' + 76h'^2)}{12 E \cdot J(l+h')(3l+4h')},$$

während durch die Gl. 67 bis 70 (S. 20, 21) die Biegelinie der dritten Öffnung gegeben ist. Es wird für den linken Teil ( $x=0$  bis  $x=\frac{1}{2} \cdot l$ )

$$23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_o = \frac{l(3l^2 + 28l \cdot h' + 28h'^2)}{24 E \cdot J(l+h')(3l+4h')} + \frac{x}{E \cdot J}, \\ \delta_o = \frac{l(3l^2 + 28l \cdot h' + 28h'^2)x}{24 E \cdot J(l+h')(3l+4h')} + \frac{x^2}{2 E \cdot J} \end{array} \right.$$

und für den rechten Teil ( $x=\frac{1}{2} \cdot l$  bis  $x=l$ )

$$24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_o = -\frac{l(3l^2 + 28l \cdot h' + 28h'^2)}{24 E \cdot J(l+h')(3l+4h')} \frac{l-x}{E \cdot J}, \\ \delta_o = \frac{l(3l^2 + 28l \cdot h' + 28h'^2)(l-x)}{24 E \cdot J(l+h')(3l+4h')} + \frac{(l-x)^2}{2 E \cdot J}. \end{array} \right.$$

Für die wagerechte Verschiebung der Stützenköpfe findet man die Beziehung:

$$25) \quad e_{Ac} = e_{Bc} = e_{Cc} = -e_{Dc} = -e_{Ec} = -e_{Fc} = \frac{h \cdot l(l+2h')}{24 E \cdot J(l+h')}.$$

Mit  $f = \frac{2 e_{Cc}}{\delta_{cc}}$  wird wieder  $f = \frac{h(l+2h')(3l+4h')}{39l^2 + 112l \cdot h' + 76h'^2}.$

Die Einflußlinien der Unbekannten und Stützkräfte sind für einen Rahmen ermittelt, bei welchem wie bei dem vierstieligen Rahmen die Stützhöhe  $h$  gleich der halben Spannweite ( $h=0,5 \cdot l$ ) und  $J^v = J$  angenommen worden ist. Hierfür gilt:

$$\delta_{aa} = \frac{3l^3}{20 E \cdot J}, \quad f = \frac{5}{114} l, \quad \delta_{bb} = \frac{199l^3}{4104 E \cdot J}, \quad \delta_{cc} = \frac{19l}{15 E \cdot J}.$$

Bei den Gleichungen der Einflußlinien sind ihre Neigungswinkel  $\gamma$  über den Stützen und die Abstände  $s$  der Belastungsscheiden von den am nächsten links von ihnen liegenden Stützen angegeben; statt  $x:l$  wird  $n$  gesetzt.

$X_a = -\frac{\delta_a}{\delta_{aa}}$  liefert die Gleichungen der  $X_a$ -Linie. Man erhält:

1. Öffnung:  $X_a = -0,1111 n(1-n)^2$ ;  
 $\gamma_A = -0,1111$ ;  $\gamma_B = 0$ .
2. Öffnung:  $X_a = 0,4444 n^2(1-n)$ ;  
 $\gamma_B = 0$ ;  $\gamma_C = -0,4444$ .
3. Öffnung, linke Hälfte:  $X_a = -0,4444 n - 1,6667 n^2 + 1,1111 n^3$ ;  
rechte Hälfte:  $X_a = 1,0 - 0,4444 n - 1,6667 n^2 + 1,1111 n^3$ .
4. Öffnung:  $X_a = -0,4444 n(1-n)^2$ ;  
 $\gamma_D = -0,4444$ ;  $\gamma_E = 0$ .
5. Öffnung:  $X_a = 0,1111 n^2(1-n)$ ;  
 $\gamma_E = 0$ ;  $\gamma_F = -0,1111$ .

Mit  $X_b = -\frac{\delta_b}{\delta_{bb}}$  lauten die Gleichungen der  $X_b$ -Linie:

1. Öffnung:  $X_b = n(1-n)(0,5428 - 0,8292 n)$ ;  
 $\gamma_A = +0,5428$ ;  $\gamma_B = +0,2864$ ;  $s = 0,655 l$ .
2. Öffnung:  $X_b = n(1-n)(0,2864 - 0,7387 n)$ ;  
 $\gamma_B = +0,2864$ ;  $\gamma_C = +0,4523$ ;  $s = 0,388 l$ .
3. Öffnung:  $X_b = 0,4523 n(1-n)$ ;  
 $\gamma_C = +0,4523$ ;  $\gamma_D = -0,4523$ .
4. Öffnung:  $X_b = -n(1-n)(0,4523 - 0,7387 n)$ ;  
 $\gamma_D = -0,4523$ ;  $\gamma_E = -0,2864$ ;  $s = 0,612 l$ .
5. Öffnung:  $X_b = -n(1-n)(0,2864 - 0,8292 n)$ ;  
 $\gamma_E = -0,2864$ ;  $\gamma_F = -0,5428$ ;  $s = 0,345 l$ .

Die  $X_c$ -Linie verläuft in den ersten beiden Öffnungen ähnlich der  $X_a$ -Linie.  $X_c = -\frac{\delta_c}{\delta_{cc}}$  ergibt:

1. Öffnung:  $\frac{1}{l} X_c = -0,0263 n(1-n)^2$ ;  
 $\gamma_A = -0,0263$ ;  $\gamma_B = 0$ .
2. Öffnung:  $\frac{1}{l} X_c = 0,1053 n^2(1-n)$ ;  
 $\gamma_B = 0$ ;  $\gamma_C = -0,1053$ .
3. Öffnung, linke Hälfte:  $\frac{1}{l} X_c = -0,1053 n - 0,3947 n^2$ ;  
rechte Hälfte:  $\frac{1}{l} X_c = -0,5000 + 0,8947 n - 0,3947 n^2$ .
4. Öffnung:  $\frac{1}{l} X_c = 0,1053 n(1-n)^2$ ;  
 $\gamma_D = +0,1053$ ;  $\gamma_E = 0$ .
5. Öffnung:  $\frac{1}{l} X_c = -0,0263 n^2(1-n)$ ;  
 $\gamma_E = 0$ ;  $\gamma_F = +0,0263$ .

Die in dem Hauptsystem durch die äußeren Lasten hervorgerufenen Stützkräfte sind durch die Gl. 26 bis 47 (S. 32 bis 35) gegeben (vgl. auch die Abb. 56 bis 59). Es wird bei einer senkrechten Last 1 in der

ersten Öffnung  $A_o = 1,0(1-n) + \frac{1}{10}n(1-n)(2-7n),$   
 $B_o = n - \frac{1}{5}n(1-n)(2-7n),$   
 $C_o = \frac{1}{10}n(1-n)(2-7n),$   
 $H_{ao} = \frac{1}{15}n(1-n)(14-9n),$   
 $H_{bo} = -\frac{3}{8}n(1-n),$   
 $H_{co} = -\frac{1}{15}n(1-n)(4-9n)$  und in der

zweiten Öffnung  $A_o = -\frac{1}{10}n(1-n)(5-7n),$   
 $B_o = 1,0(1-n) + \frac{1}{5}n(1-n)(5-7n),$   
 $C_o = n - \frac{1}{10}n(1-n)(5-7n),$   
 $H_{ao} = -\frac{1}{15}n(1-n)(5-9n),$   
 $H_{bo} = \frac{3}{8}n(1-n),$   
 $H_{co} = -\frac{1}{15}n(1-n)(5+9n)$

und auf der linken Hälfte der

dritten Öffnung  $A_o = -\frac{1}{5}n,$   
 $B_o = -\frac{3}{8}n,$   
 $C_o = 1,0 + \frac{4}{5}n,$   
 $H_{ao} = -\frac{4}{15}n,$   
 $H_{bo} = -\frac{3}{8}n,$   
 $H_{co} = +\frac{1}{15}n.$

Ferner ist

$$\begin{array}{lll} A_a = -\frac{1}{10}, & B_a = -\frac{3}{10}, & C_a = +\frac{1}{10}, \\ H_{aa} = -\frac{2}{15}, & H_{ba} = -\frac{1}{3}, & H_{ca} = +\frac{7}{15}, \\ A_b = +\frac{5}{228}, & B_b = -\frac{1}{38}, & C_b = -\frac{4}{228}, \\ H_{ab} = +\frac{9}{342}, & H_{bb} = +\frac{7}{171}, & H_{cb} = +\frac{10}{342}, \\ l \cdot A_c = -\frac{1}{5}, & l \cdot B_c = -\frac{3}{5}, & l \cdot C_c = +\frac{4}{5}, \\ l \cdot H_{ac} = -\frac{4}{15}, & l \cdot H_{bc} = -\frac{3}{5}, & l \cdot H_{cc} = +\frac{1}{15}. \end{array}$$

Man erhält schließlich folgende Einflußgleichungen der an den Stielen  $A$ ,  $B$  und  $C$  angreifenden Stützkräfte:

1. Öffnung:  $A = 1,0(1-n) + n(1-n)(0,3473 - 0,9163n);$   
 $\gamma_A = -0,6527; \gamma_B = -0,4310.$   
 $B = 1,0n - n(1-n)(0,3652 - 1,3727n);$   
 $\gamma_A = +0,6348; \gamma_B = -0,0075.$   
 $C = -n(1-n)(0,0933 + 0,3452n);$   
 $\gamma_A = -0,0933; \gamma_B = +0,4385.$   
 $H_a = n(1-n)(1,0995 - 0,8425n);$   
 $\gamma_A = +1,0995; \gamma_B = -0,2570.$   
 $H_b = -n(1-n)(0,3869 + 0,3989n);$   
 $\gamma_A = -0,3869; \gamma_B = +0,7858.$   
 $H_c = -n(1-n)(0,1701 - 0,4122n);$   
 $\gamma_A = -0,1701; \gamma_B = -0,2421; s = 0,412l.$

2. Öffnung:  $A = -n(1-n)(0,4310 - 0,4562n);$   
 $\gamma_B = -0,4310; \gamma_C = -0,0252; s = 0,944l.$   
 $B = 1,0(1-n) + n(1-n)(0,9925 - 1,5770n);$   
 $\gamma_B = -0,0075; \gamma_C = -0,4155.$   
 $C = 1,0n - n(1-n)(0,5615 - 1,5653n);$   
 $\gamma_B = +0,4385; \gamma_C = -0,0038.$   
 $H_a = -n(1-n)(0,2571 - 0,3160n);$   
 $\gamma_B = -0,2571; \gamma_C = -0,0589; s = 0,813l.$   
 $H_b = n(1-n)(0,7857 - 0,5250n);$   
 $\gamma_B = +0,7857; \gamma_C = -0,2607.$   
 $H_c = -n(1-n)(0,2420 + 0,5296n);$   
 $\gamma_B = -0,2420; \gamma_C = +0,7716.$
3. Öffnung:  $A = -n(1-n)(0,0254 - 0,1111n);$   
 $\gamma_C = -0,0254; \gamma_D = -0,0857; s = 0,248l.$   
 $B = -n(1-n)(0,4154 - 0,3333n);$   
 $\gamma_C = -0,4154; \gamma_D = +0,0821.$   
 $C = 1,0(1-n) + n(1-n)(0,9963 - 1,5556n);$   
 $\gamma_C = -0,0037; \gamma_D = -0,4408.$   
 $H_a = -n(1-n)(0,0590 - 0,1481n);$   
 $\gamma_C = -0,0590; \gamma_D = -0,0891; s = 0,398l.$   
 $H_b = -n(1-n)(0,2606 - 0,3704n);$   
 $\gamma_C = -0,2606; \gamma_D = -0,1098; s = 0,704l.$   
 $H_c = n(1-n)(0,7718 - 0,5185n);$   
 $\gamma_C = +0,7718; \gamma_D = -0,2533.$
4. Öffnung:  $A = -n(1-n)(0,0857 - 0,1549n);$   
 $\gamma_D = -0,0857; \gamma_E = -0,0692; s = 0,554l.$   
 $B = n(1-n)(0,0820 - 0,0896n);$   
 $\gamma_D = +0,0820; \gamma_E = +0,0076; s = 0,915l.$   
 $C = -n(1-n)(0,4408 - 0,3792n);$   
 $\gamma_D = -0,4408; \gamma_E = +0,0616.$   
 $H_a = -n(1-n)(0,0891 - 0,1656n);$   
 $\gamma_D = -0,0891; \gamma_E = -0,0765; s = 0,538l.$   
 $H_b = -n(1-n)(0,1099 - 0,2288n);$   
 $\gamma_D = -0,1099; \gamma_E = -0,1189; s = 0,480l.$   
 $H_c = -n(1-n)(0,2532 - 0,3444n);$   
 $\gamma_D = -0,2532; \gamma_E = -0,0912; s = 0,735l.$
5. Öffnung:  $A = -n(1-n)(0,0691 - 0,1942n);$   
 $\gamma_E = -0,0691; \gamma_F = -0,1251; s = 0,356l.$   
 $B = n(1-n)(0,0076 - 0,0393n);$   
 $\gamma_E = +0,0076; \gamma_F = +0,0317; s = 0,193l.$   
 $C = n(1-n)(0,0615 - 0,0437n);$   
 $\gamma_E = +0,0615; \gamma_F = -0,0178.$   
 $H_a = -n(1-n)(0,0762 - 0,2129n);$   
 $\gamma_E = -0,0762; \gamma_F = -0,1367; s = 0,358l.$

$$\begin{aligned}
 H_b &= -n(1-n)(0,1190 - 0,3247n); \\
 \gamma_E &= -0,1190; \quad \gamma_F = -0,2057; \quad s = 0,366l. \\
 H_c &= -n(1-n)(0,0913 - 0,2916n); \\
 \gamma_E &= -0,0913; \quad \gamma_F = -0,2003; \quad s = 0,313l.
 \end{aligned}$$

Die Winkel  $\gamma$  in den vorstehenden Gleichungen lassen erkennen, wie schnell der Einfluß mit wachsender Entfernung der Last abnimmt.

Es ist noch die Beanspruchung des Trägers durch eine gleichmäßige Wärmeänderung um  $t_0$  untersucht worden. Infolge der Symmetrie wird  $\delta_{at} = 0$ . Bei den Zuständen  $X_b$  und  $X_c = 1$  ist die Summe der senkrechten Stützkräfte = 0. Es wird daher

$$\begin{aligned}
 \delta_{bt} &= -\varepsilon \cdot t_0 \cdot l(4H_{ab} + 2H_{bb} + 1) \quad \text{und} \\
 \delta_{ct} &= -2\varepsilon \cdot t_0 \cdot l(2H_{ac} + H_{bc}).
 \end{aligned}$$

Setzt man hierin die Werte für  $H_{ab}$ ,  $H_{bb}$ ,  $H_{ac}$  und  $H_{bc}$  ein, so wird

$$26) \quad \delta_{bt} = -\frac{3\varepsilon \cdot t_0 \cdot l[h(3l + 4h') - 2f \cdot l]}{h(3l + 4h')} \quad \text{und}$$

$$27) \quad \delta_{ct} = \frac{6\varepsilon \cdot t_0 \cdot l^2}{h(3l + 4h')}.$$

Bei dem Beispiel mit  $h = 0,5 \cdot l$  und  $J^v = J$  wird

$$\begin{aligned}
 \delta_{bt} &= -\frac{55\varepsilon \cdot t_0 \cdot l}{19} \quad \text{und} \quad \delta_{ct} = \frac{12\varepsilon \cdot t_0}{5}; \quad \text{daher} \\
 X_{bt} &= 59,7 \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0}{l^2} \quad \text{und} \quad X_{ct} = -1,894 \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0}{l}.
 \end{aligned}$$

Aus der Berechnung des dreistieligen Rahmens sind bekannt:

$$\begin{aligned}
 A_{ot} = C_{ot} = D_{ot} = F_{ot} &= \frac{36\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0}{5l^2}, \\
 B_{ot} = E_{ot} &= -\frac{72\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0}{5l^2}, \\
 H_{aot} = -H_{cot} = H_{dot} = -H_{fot} &= \frac{48\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0}{5l^2} \quad \text{und} \\
 H_{bot} = H_{eot} &= 0.
 \end{aligned}$$

Führt man noch  $\frac{\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0}{l^2} = T$  ein, so erhält man schließlich folgende, durch eine gleichmäßige Temperaturänderung um  $t_0^\circ$  hervorgerufene Stützkräfte:

$$\begin{aligned}
 A_t = F_t &= +21,98 \cdot T, & H_{at} = -H_{ft} &= +26,00 \cdot T, \\
 B_t = E_t &= -14,83 \cdot T, & H_{bt} = -H_{et} &= +26,02 \cdot T, \\
 C_t = D_t &= -7,15 \cdot T, & H_{ct} = -H_{dt} &= +7,68 \cdot T.
 \end{aligned}$$

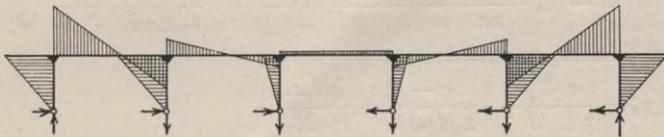


Abb. 82.

Abb. 82 zeigt die diesen Stützkräften entsprechenden Momente. Das größte Moment in dem Balken entsteht über den Endstützen mit

$$M = -13,00 \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0}{l}$$

Setzt man wieder die Trägerhöhe  $d = 1/15 \cdot l$ ,  $\varepsilon \cdot E = 25 \text{ kg/cm}^2$  und  $t_0 = 35^\circ$ , so ruft dieses Moment in dem Balken eine Spannung  $\sigma = 380 \text{ kg/cm}^2$  hervor.

5. Der zweistielige Rahmen mit gestützten Kragarmen.

Das Hauptsystem des zweistieligen Rahmens, bei welchem die überkragenden Teile des Balkens an ihren Enden durch ein längsbewegliches Auflager unterstützt sind (Abb. 83), besteht aus zwei einhüftigen Rahmen. Da diese statisch

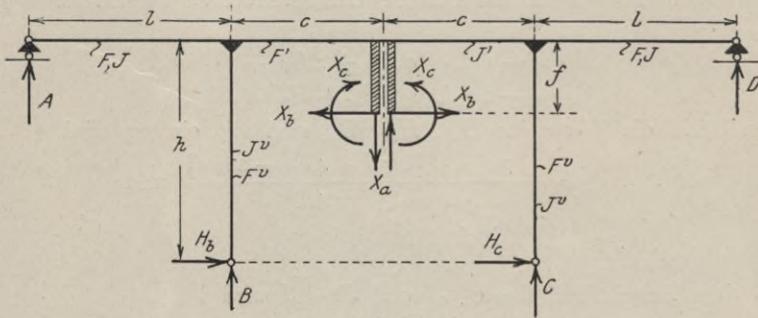


Abb. 83

bestimmt sind, erhält man auch bei Berücksichtigung des Einflusses der Normalspannungen für die Biegelinien noch recht einfache Ausdrücke. Bei dem Zustande  $X_a = 1$  ist  $\delta_{Aa} = \delta_{Da} = 0$ , während infolge der durch die Normalspannungen bewirkten Zusammenpressung der Stützen B und C

$$\delta_{Ba} = -\delta_{Ca} = \frac{l+c}{l} \cdot \frac{h}{E \cdot F^v}$$

ist, da Symmetrie vorausgesetzt wird. Die Anwendung der Gl. 6 bis 9 (S. 11) und der Gl. 59 bis 62 (S. 20) liefert:

1. Öffnung: 1)  $\delta_a = -\frac{c \cdot x(l-x)(l+x)}{6 E \cdot J \cdot l} + \frac{h(l+c)}{l^2 \cdot E \cdot F^v} \cdot x,$

2)  $\tau_a = -\frac{c \cdot l}{6 E \cdot J} + \frac{c \cdot x^2}{2 E \cdot J \cdot l} + \frac{h(l+c)}{l^2 \cdot E \cdot F^v}.$

2. Öffnung: 3)  $\delta_a = \delta_{aa} \frac{x}{2c} - \frac{x(c-x)(2c-x)}{6 E \cdot J'} + \frac{h(l+c)}{l \cdot E \cdot F^v} \cdot \frac{c-x}{c}$

in der linken Hälfte und

$$\delta_a = -\delta_{aa} \frac{2c-x}{2c} - \frac{x(c-x)(2c-x)}{6 E \cdot J'} + \frac{h(l+c)}{l \cdot E \cdot F^v} \cdot \frac{c-x}{c}$$

in der rechten Hälfte, während

4) . . .  $\tau_a = \frac{c \cdot l}{3 E \cdot J} + \frac{x(2c-x)}{2 E \cdot J'} + \frac{h(l+c)}{l^2 \cdot E \cdot F^v}$

für die ganze Öffnung gilt. Die Biegelinie in der dritten Öffnung ist das Spiegelbild der Biegelinie in dem ersten Felde, wenn man bei ihren Ordinaten das Vorzeichen umkehrt. Weiter findet man

$$5) \dots \delta_{aa} = \frac{2c^2(l+c')}{3E \cdot J} + \frac{2h(l+c)^2}{l^2 \cdot E \cdot F^v} \text{ und}$$

$$6) \dots e_a = \frac{c \cdot h \cdot l}{3E \cdot J} + \frac{h^2(l+c)}{l^2 \cdot E \cdot F^v}.$$

Sämtliche Punkte des Balkens verschieben sich um das gleiche Maß  $e_a$  nach rechts, da in ihm keine Normalspannungen herrschen.

Die Kraft  $X_b = 1$  drückt die Stützen  $B$  und  $C$  um das Maß

$$\delta_{Bb} = \delta_{Cb} = -\frac{h-f}{l} \cdot \frac{h}{E \cdot F^v} \text{ zusammen.}$$

Man erhält für die

1. Öffnung: 7)  $\delta_b = \frac{x(l-x)(l+x)(h-f)}{6E \cdot J \cdot l} - \frac{h \cdot (h-f)}{l^2 \cdot E \cdot F^v} \cdot x,$

8)  $r_b = \frac{l(h-f)}{6E \cdot J} - \frac{x^2(h-f)}{2E \cdot J \cdot l} - \frac{h(h-f)}{l^2 \cdot E \cdot F^v}$  und für die

2. Öffnung: 9)  $\delta_b = -\frac{f \cdot x(2c-x)}{2E \cdot J} - \frac{h(h-f)}{l \cdot E \cdot F^v},$

10)  $r_b = -\frac{f(c-x)}{E \cdot J}.$

Die Biegelinie in der dritten Öffnung ist das Spiegelbild derjenigen in der ersten Öffnung. Für  $f$  findet man:

$$11) \dots f = \frac{h \left( l^3 + 3h \frac{J}{F^v} \right)}{3l^2 \cdot c' + l^3 + 3h \frac{J}{F^v}}.$$

Bei gleichen Stützweiten ( $2c = l$ ) und Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte wird

$$f = \frac{2}{5} h.$$

Gl. 74 (S. 23) liefert

12)  $\dots e_{Ab} = e_{Bb} = -e_{Cb} = -e_{Db} = -\frac{c' \cdot f \cdot h}{E \cdot J} - \frac{h^2 \cdot h'}{3E \cdot J},$  weshalb

13)  $\dots \delta_{bb} = \frac{2c' \cdot f \cdot h}{E \cdot J} + \frac{2h^2 \cdot h'}{3E \cdot J} + \frac{2c}{E \cdot F^v}$  ist.

Bei dem Zustande  $X_c = 1$  wird

$$\delta_{Bc} = \delta_{Cc} = \frac{h}{l \cdot E \cdot F^v}.$$

Da die  $\delta_c$ -Linie zu der durch die Mitte der zweiten Öffnung gelegten Senkrechten symmetrisch verläuft, genügt es, ihre Werte nur für die erste Öffnung und die linke Hälfte der zweiten Öffnung anzugeben. Es wird in der

1. Öffnung: 14)  $\delta_c = -\frac{x(l-x)(l+x)}{6E \cdot J \cdot l} + \frac{h \cdot x}{l^2 \cdot E \cdot F^v},$

15)  $r_c = -\frac{l}{6E \cdot J} + \frac{x^2}{2E \cdot J \cdot l} + \frac{h}{l^2 \cdot E \cdot F^v}$

und in der linken Hälfte der

$$2. \text{ Öffnung: } 16) \delta_e = x \left( \frac{l}{3 E \cdot J} + \frac{h}{l^2 \cdot E \cdot F^v} \right) + \frac{x^2}{2 E \cdot J} + \frac{h}{l \cdot E \cdot F^v} \text{ und}$$

$$17) \tau_e = \frac{l}{3 E \cdot J} + \frac{h}{l^2 \cdot E \cdot F^v} + \frac{x}{E \cdot J}.$$

Gl. 66 (S. 20) liefert

$$18) \dots \delta_{ee} = \frac{2l}{3 E \cdot J} + \frac{2h}{l^2 \cdot E \cdot F^v} + \frac{2e'}{E \cdot J}.$$

Da in dem Balken keine Normalkraft vorhanden ist, verschiebt sich der links von der Symmetrieachse gelegene Teil um das Maß

$$19) \dots e_e = \frac{h \cdot l}{3 E \cdot J} + \frac{h^2}{l^2 \cdot E \cdot F^v}$$

nach rechts und der rechts von ihr liegende Teil um den gleichen Wert nach links.

## B. Rahmen mit eingespannten Füßen.

### 1. Der zweistielige Rahmen.

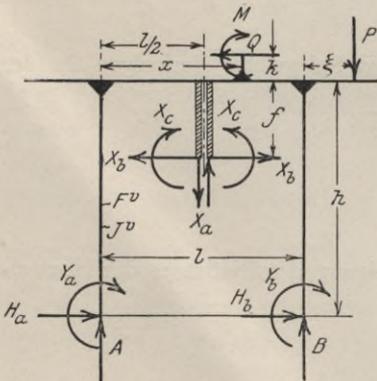


Abb. 84.

Die Untersuchung des zweistieligen, dreifach statisch unbestimmten Rahmens erfolgt auf zwei verschiedenen Wegen. Der erste entspricht der von Müller-Breslau in den „neueren Methoden der Festigkeitslehre“ gegebenen Berechnungsweise, indem hier wie dort dieselben statisch Unbestimmten  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  eingeführt werden (Abb. 84).<sup>1)</sup> Das Hauptsystem ist statisch bestimmt. Die gewählten Bezeichnungen entsprechen den bisher verwendeten und gehen aus der Abbildung hervor.

Zustand  $X_a = 1$ .

Die Stützkkräfte des Zustandes  $X_a = 1$  sind:

$$A_a = -B_a = 1,$$

$$H_{aa} = H_{ba} = 0,$$

$$Y_{aa} = Y_{ba} = -\frac{1}{2}l.$$

Hierdurch entstehen folgende Momente und Normalkräfte:

$$\text{Stütze A: } M_a = -\frac{1}{2} \cdot l, \quad N_a = -1;$$

$$\text{Stütze B: } M_a = -\frac{1}{2} \cdot l, \quad N_a = +1;$$

$$\text{Balken: } M_a = -\left(\frac{1}{2} \cdot l - x\right), \quad N_a = 0.$$

Bei den Rahmen mit eingespannten Füßen können nach Festlegung der Stützkkräfte sofort die wagerechte Verschiebung des Balkens und die Neigungs-

1) Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre S. 127 u. folg.

winkel seiner Biegelinie über den Stützen nach Gl. 76 (S. 23) bestimmt werden. Man findet

$$\tau_{Aa} = \tau_{Ba} = \frac{l \cdot h'}{2 E \cdot J} \text{ und}$$

$$1) \dots \dots \dots e_{Aa} = e_{Ba} = \frac{l \cdot h \cdot h'}{4 E \cdot J} = e_a;$$

sämtliche Punkte des Balkens verschieben sich um das gleiche Maß  $e_a$  nach rechts.

Die durch die Normalkräfte bewirkten Zusammenpressungen der Stützen sind:

$$\delta_{Aa} = -\delta_{Ba} = \frac{h}{E \cdot F^v}.$$

Jetzt liefern die Gl. 59 bis 62 (S. 20):

$$2) \dots \dots \delta_{aa} = \frac{l^2(l + 6h')}{12 E \cdot J} + \frac{2h}{E \cdot F^v},$$

$$3) \dots \dots \tau_a = \frac{l \cdot h'}{2 E \cdot J} + \frac{x(l-x)}{2 E \cdot J} \text{ und}$$

$$4) \dots \dots \delta_a = \delta_{aa} \frac{x}{l} + \frac{h}{E \cdot F^v} \cdot \frac{l-2x}{l} - \frac{x(l-x)(l-2x)}{12 E \cdot J}$$

in der linken Hälfte, sowie

$$\delta_a = -\delta_{aa} \frac{l-x}{l} + \frac{h}{E \cdot F^v} \cdot \frac{l-2x}{l} - \frac{x(l-x)(l-2x)}{12 E \cdot J}$$

in der rechten Hälfte.

Zustand  $X_b = 1$ .

Der Zustand  $X_b = 1$  erzeugt die Stützkkräfte

$$A_b = B_b = 0,$$

$$H_{ab} = -H_{bb} = 1,$$

$$Y_{ab} = -Y_{bb} = h - f,$$

sowie folgende Momente und Normalkräfte:

$$\text{Stütze A: } M_b = h - f - y;$$

$$\text{Stütze B: } M_b = -h + f + y;$$

$$\text{Balken: } M_b = -f, N_b = -1.$$

Gl. 76 (S. 23) liefert

$$\tau_{Ab} = -\frac{h'(h-2f)}{2 E \cdot J}. \text{ Da } f = -\frac{2 E \cdot J \cdot \tau_{Ab}}{l} \text{ ist, erhält man}$$

$$5) \dots \dots f = \frac{h \cdot h'}{l + 2h'}.$$

Unter Benutzung dieses Wertes für  $f$  werden

$$\tau_{Ab} = -\tau_{Bb} = -\frac{l \cdot h \cdot h'}{2 E \cdot J(l + 2h')} \text{ und}$$

$$6) \dots \dots e_{Ab} = -e_{Bb} = -\frac{h^2 \cdot h'(2l + h')}{6 E \cdot J(l + 2h')}.$$

Setzt man die Werte für  $f$  und  $e_{Ab}$  in die Gl. 63 bis 65 (S. 20) ein, dann findet man

$$7) \dots \dots \delta_{bb} = \frac{h^2 \cdot h'(2l + h')}{3 E \cdot J(l + 2h')} + \frac{l}{E \cdot F^v},$$

$$8) \dots \dots \tau_b = -\frac{h \cdot h'(l - 2x)}{2 E \cdot J(l + 2h')} \text{ und}$$

$$9) \dots \dots \delta_b = -\frac{h \cdot h' \cdot x(l-x)}{2 E \cdot J(l + 2h')}, \text{ da } \delta_{Ab} = \delta_{Bb} = 0 \text{ ist.}$$

Zustand  $X_c = 1$ .

Bei dem Zustande  $X_c = 1$  werden die Stützkräfte  $A_c = B_c = H_{ac} = H_{bc} = 0$ ,  $Y_{ac} = -Y_{bc} = -1$  und die Momente

$$\begin{aligned} M_c &= -1 \text{ in der Stütze A,} \\ M_c &= +1 \text{ in der Stütze B und} \\ M_c &= -1 \text{ in dem Balken.} \end{aligned}$$

Normalkräfte treten nicht auf. Nach Gl. 76 (S. 23) gilt:

$$\tau_{Ac} = -\tau_{Bc} = \frac{h'}{E \cdot J} \text{ und}$$

$$10) \dots \dots \dots e_{Ac} = -e_{Bc} = \frac{h \cdot h'}{2 E \cdot J}.$$

Die Gl. 66 bis 70 (S. 20, 21) liefern:

$$11) \dots \dots \dots \delta_{cc} = \frac{l + 2h'}{E \cdot J},$$

$$12) \dots \dots \dots \delta_c = \frac{2h' \cdot x + x^2}{2 E \cdot J} \text{ und } \tau_c = \frac{h' + x}{E \cdot J}$$

bei dem linken Teile, sowie

$$13) \dots \dots \dots \delta_c = \frac{2h'(l-x) + (l-x)^2}{2 E \cdot J} \text{ und } \tau_c = -\frac{h' + l - x}{E \cdot J}$$

bei dem rechten Teile des Balkens. Auf  $f = \frac{2e_{Ac}}{\delta_{cc}}$  erhält man wieder den Wert für  $f$  unter Gl. 5.

Die Verschiebungen des Balkens bei den Zuständen  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c = 1$  sind jetzt bekannt; es können daher die statisch Unbestimmten für jede am Balken angreifende äußere Last mittelst der Gleichungen

$$X_a = -\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}, \quad X_b = -\frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}} \text{ und } X_c = -\frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}}$$

ermittelt werden. Die Berechnung der Stützkräfte erfolgt in bekannter Weise nach Gl. 78 (S. 23). Vernachlässigt man den Einfluß der Normalkräfte, der sich bei den Verbiegungen der Zustände  $X_a$  und  $X_b$  bemerkbar macht, so erhält man i e im folgenden angegebenen Ausdrücke für die Auflagerkräfte.

**Senkrechte Lasten.**

Linker Kragarm:

$$14) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} A &= \left[ 1 + \frac{6h' \cdot \xi}{l(l+6h')} \right] \cdot P, \\ B &= -\frac{6h' \cdot \xi}{l(l+6h')} \cdot P, \\ H_a &= -H_b = -\frac{3l \cdot \xi}{2h(2l+h')} \cdot P, \\ Y_a &= \frac{l(l-5h') \cdot \xi}{2(l+6h')(2l+h')} \cdot P, \\ Y_b &= \frac{l(3l+7h') \cdot \xi}{2(l+6h')(2l+h')} \cdot P. \end{aligned} \right.$$

$\xi$  bedeutet den Abstand der Last  $P$  von der linken Stütze.

$$\text{Zwischen den Stützen: } \left\{ \begin{array}{l} A = \left[ \frac{l-x}{l} + \frac{x(l-x)(l-2x)}{l^2(l+6h')} \right] \cdot P, \\ B = \left[ \frac{x}{l} - \frac{x(l-x)(l-2x)}{l^2(l+6h')} \right] \cdot P, \\ 15) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} H_a = -H_b = \frac{3x(l-x)}{2h(2l+h')} \cdot P, \\ Y_a = \left[ \frac{x(l-x)}{2(2l+h')} - \frac{x(l-x)(l-2x)}{2l(l+6h')} \right] \cdot P, \\ Y_b = - \left[ \frac{x(l-x)}{2(2l+h')} + \frac{x(l-x)(l-2x)}{2l(l+6h')} \right] \cdot P. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{Rechter Kragarm: } \left\{ \begin{array}{l} A = - \frac{6 \cdot h' \cdot \xi}{l(l+6h')} \cdot P, \\ B = \left[ 1 + \frac{6h' \cdot \xi}{l(l+6h')} \right] \cdot P, \\ 16) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} H_a = -H_b = - \frac{3l \cdot \xi}{2h(2l+h')} \cdot P, \\ Y_a = - \frac{l(3l+7h') \xi}{2(l+6h')(2l+h')} \cdot P, \\ Y_b = - \frac{l(l-5h') \xi}{2(l+6h')(2l+h')} \cdot P. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Hier bezeichnet  $\xi$  die Entfernung der Last  $P$  von der rechten Stütze.

**Wagerechte Lasten.**

Greift die von rechts nach links gerichtete Last  $Q$  zwischen den Stützen in der Höhe  $k$  über der Balkenachse an, so findet man:

$$17) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} A = -B = \left\{ \frac{3h \cdot h'}{l(l+6h')} + \frac{6k[h' \cdot l + x(l-x)]}{l^2(l+6h')} \right\} Q, \\ H_a = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3k(l-2x)}{2h(2l+h')} \right\} Q, \\ H_b = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3k(l-2x)}{2h(2l+h')} \right\} Q, \\ Y_a = \left\{ \frac{h(l+3h')}{2(l+6h')} + k \left[ \frac{l^2-6x(l-x)}{2l(l+6h')} - \frac{l-2x}{2(2l+h')} \right] \right\} Q, \\ Y_b = \left\{ \frac{h(l+3h')}{2(l+6h')} + k \left[ \frac{l^2-6x(l-x)}{2l(l+6h')} + \frac{l-2x}{2(2l+h')} \right] \right\} Q. \end{array} \right.$$

In diesen Ausdrücken ist  $x=0$  bzw.  $x=l$  zu setzen, wenn  $Q$  an dem linken bzw. rechten Kragarm angreift.

**Momente.**

Die einmalige Differentiation der Gl. 15 (S. 71) ergibt die Stützkräfte, die durch rechtsdrehende, zwischen den Stützen am Balken angreifende Momente hervorgerufen werden. Man erhält:

$$18) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} A = -B &= -\frac{6[h' \cdot l + x(l-x)]}{l^2(l+6h')} \cdot M, \\ H_a = -H_b &= \frac{3(l-2x)}{2h(2l+h')} \cdot M, \\ Y_a &= -\left[ \frac{l^2-6x(l-x)}{2l(l+6h')} - \frac{l-2x}{2(2l+h')} \right] \cdot M, \\ Y_b &= -\left[ \frac{l^2-6x(l-x)}{2l(l+6h')} + \frac{l-2x}{2(2l+h')} \right] \cdot M. \end{aligned} \right.$$

Wenn  $M$  den linken oder den rechten Kragarm belastet, ist  $x=0$  bzw.  $x=l$  zu setzen.

**Wärmeänderung.**

Es wird

$$19) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} \delta_{at} &= 0, \\ \delta_{bt} &= -\varepsilon \cdot t_0 \cdot l - \varepsilon \frac{\Delta t}{d} \cdot f \cdot l = -\varepsilon \cdot t_0 \cdot l - \frac{\varepsilon \cdot \Delta t \cdot h \cdot h' \cdot l}{d(l+2h')} \quad \text{und} \\ \delta_{ct} &= -\varepsilon \frac{\Delta t}{d} \cdot l. \end{aligned} \right.$$

Mit

$$X_{bt} = \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l(l+2h')}{h^2 \cdot h' (2l+h')} + \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot \Delta t \cdot l}{d \cdot h (2l+h')} \quad \text{und}$$

$$X_{ct} = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot \Delta t \cdot l}{d(l+2h')} \quad \text{findet man:}$$

$$20) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} A_t = B_t &= 0, \\ H_{at} = -H_{bt} &= \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l(l+2h')}{h^2 \cdot h' (2l+h')} + \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot \Delta t \cdot l}{d \cdot h (2l+h')}, \\ Y_{at} = -Y_{bt} &= \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l(l+h')}{h \cdot h' (2l+h')} + \frac{\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot \Delta t \cdot l}{d(2l+h')}. \end{aligned} \right.$$

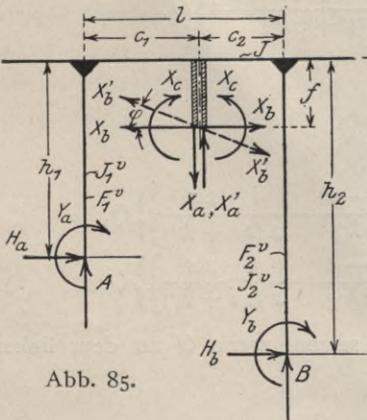


Abb. 85.

Ist der Rahmen unsymmetrisch, mit verschieden hohen Stützen ausgebildet (Abb. 85), so ist der Angriffspunkt der Unbekannten  $X_a'$ ,  $X_b'$  und  $X_c$  durch die Beziehungen

$$c_1 = \frac{l(l+2h_2')}{2(l+h_1'+h_2')}, \quad c_2 = \frac{l(l+2h_1')}{2(l+h_1'+h_2')}$$

$$\text{und } f = \frac{h_1 \cdot h_1' + h_2 \cdot h_2'}{2(l+h_1'+h_2')}$$

gegeben. Er fällt mit dem Schwerpunkte des Rahmens zusammen, sobald man den Stützen die Gewichte

$$\frac{J}{J_1^v} \cdot h_1 = h_1' \quad \text{und} \quad \frac{J}{J_2^v} \cdot h_2 = h_2' \quad \text{verleiht.}^1)$$

1) Müller-Breslau: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre S. 125.

Der Winkel  $\varphi$ , unter dem  $X_b'$  anzunehmen ist, wird durch

$$\delta_{aa} = \frac{h_1}{E \cdot F_1^v} + \frac{h_2}{E \cdot F_2^v} + \frac{l^2 [l^2 + 4l(h_1' + h_2') + 12h_1' \cdot h_2']}{12 E \cdot J (l + h_1' + h_2')} \quad \text{und}$$

$$\delta_{ab} = \frac{l [l(h_2 \cdot h_2' - h_1 \cdot h_1') + 2h_1' \cdot h_2' (h_2 - h_1)]}{4 E \cdot J (l + h_1' + h_2')} \quad \text{bestimmt.}$$

Der zweite Weg zur Berechnung des dreifach statisch unbestimmten zwei-stieligen Rahmens ist bereits auf S. 27 angedeutet. Die Einspannungen werden durch Fußgelenke ersetzt, und ein Zweigelenkrahmen wird als statisch unbestimmtes Hauptsystem verwendet. Sind  $Y_a$  und  $Y_b$  wieder die Einspannungsmomente, so führt man

$$X_a = Y_a + Y_b \quad \text{und}$$

$$X_b = Y_a - Y_b \quad \text{als Unbekannte ein.}$$

Bei gleich hohen Stützen ist  $\delta_{ab} = 0$ . Dem

$$\text{Zustande } X_a = 1$$

entsprechen  $Y_a = Y_b = \frac{1}{2}$  und die Auflagerkräfte

$$A_a = -B_a = -\frac{1}{l}, \quad H_{aa} = H_{ba} = 0.$$

Das Balkenmoment wird hiermit

$$M_a = \frac{1}{2} - \frac{x}{l},$$

so daß die Gl. 6 bis 9 (S. 11)

$$21) \quad \dots \quad \delta_a = \frac{x(l-x)(l-2x)}{12 E \cdot J \cdot l},$$

$$22) \quad \dots \quad \tau_a = \frac{l^2 - 6x(l-x)}{12 E \cdot J \cdot l} \quad \text{und}$$

$$\tau_{Aa} = \tau_{Ba} = \frac{l}{12 E \cdot J}$$

ergeben, wenn man den Einfluß der Normalspannungen auf die Formänderung vernachlässigt. Da sich beide Stützen an ihrem Fuße um den gleichen Betrag drehen, wird

$$23) \quad \dots \quad \delta_{aa} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\tau_{Aa} + \frac{h'}{2 E \cdot J}\right) = \frac{l + 6h'}{12 E \cdot J}.$$

Der Balken verschiebt sich um das Maß

$$24) \quad \dots \quad e_a = \tau_{Aa} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot h'}{2 E \cdot J} = \frac{h(l + 3h')}{12 E \cdot J} \quad \text{nach rechts.}$$

$$\text{Bei dem} \quad \text{Zustande } X_b = 1$$

ist  $Y_a = -Y_b = \frac{1}{2}$ ,  $A_b = B_b = 0$  und nach Gl. 11 (S. 27)

$$H_{ab} = -H_{bb} = \frac{3(l+h')}{2h(3l+2h')}.$$

Daher hat das den Balken beanspruchende Moment die Größe

$$M_b = -\frac{h'}{2(3l+2h')}; \quad \text{es wird}$$

$$25) \quad \delta_b = -\frac{h' \cdot x(l-x)}{4E \cdot J(3l+2h')},$$

$$26) \quad \tau_b = -\frac{h'(l-2x)}{4E \cdot J(3l+2h')} \quad \text{und} \quad \tau_{Ab} = -\tau_{Eb} = -\frac{h' \cdot l}{4E \cdot J(3l+2h')}.$$

Die beiden Stützen drehen sich in den Gelenken wieder um denselben Winkel, wenn auch in entgegengesetzter Richtung; infolgedessen ist

$$\delta_{bb} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\tau_{Ab} + \frac{h'}{2E \cdot J} - H_{ab} \frac{h \cdot h'}{2E \cdot J}\right) \quad \text{oder}$$

$$27) \quad \delta_{bb} = \frac{h'(2l+h')}{4E \cdot J(3l+2h')}.$$

Eine wagerechte Verschiebung des Balkens tritt nicht ein; mithin  $e_b = 0$ .

Greifen äußere Lasten  $P$ ,  $Q$  oder  $M$  an dem Balken an, so ergeben die Beziehungen

$$X_a = -\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}} \quad \text{und} \quad X_b = -\frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}$$

folgende Werte für die Unbekannten:

$$28) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_a = -\frac{x(l-x)(l-2x)}{l(l+6h')} \cdot P, \\ X_b = \frac{x(l-x)}{2l+h'} \cdot P; \end{array} \right.$$

$$29) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_a = \left\{ \frac{h(l+3h')}{l+6h'} + \frac{k[l^2-6x(l-x)]}{l(l+6h')} \right\} Q, \\ X_b = -\frac{k(l-2x)}{2l+h'} \cdot Q; \end{array} \right.$$

$$30) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_a = -\frac{l^2-6x(l-x)}{l(l+6h')} \cdot M, \\ X_b = \frac{l-2x}{2l+h'} \cdot M. \end{array} \right.$$

Die Stützkräfte werden mittels der Gleichungen

$$Y_a = \frac{1}{2}(X_a + X_b), \quad Y_b = \frac{1}{2}(X_a - X_b),$$

$$A = A_0 - \frac{1}{l} \cdot X_a, \quad B = B_0 + \frac{1}{l} \cdot X_a,$$

$$H_a = H_{a0} + \frac{3(l+h')}{2h(3l+2h')} \cdot X_b \quad \text{und}$$

$$H_b = H_{b0} - \frac{3(l+h')}{2h(3l+2h')} \cdot X_b \quad \text{sehr schnell gefunden.}$$

## 2. Der dreistielige Rahmen.

Der dreistielige Rahmen mit eingespannten Füßen ist sechsfach statisch unbestimmt. Sobald gleiche Spannweiten  $l$  vorliegen, ergibt die Ausnutzung der Symmetrie sehr einfache Ausdrücke für die Unbekannten. Die Mittelstütze wird im Abstände  $f$  unter der Balkenachse durchgeschnitten, und es werden dort gemäß Abb. 86 die Unbekannten  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  eingeführt. Der dreifach

statisch unbestimmte Rahmen  $AA'C'C$  von der Spannweite  $2 \cdot l$ , dessen Berechnung bereits bekannt ist, bildet das Hauptsystem. Bei dem in Abb. 87 dargestellten Zustande  $X_a = 1$  sind

$$\delta_{Aa} = \delta_{Ca} = -\frac{h}{2 E \cdot F^v} \quad \text{und} \quad \delta_{Ba} = -\left(\delta_{aa} - \frac{h}{E \cdot F^v}\right)$$

die Ordinaten der  $\delta_a$ -Linie über den Endstützen bzw. über der Mittelstütze. Die in dem Balken auftretenden Momente haben die Form  $M_a = a + b \cdot x$ ; in der

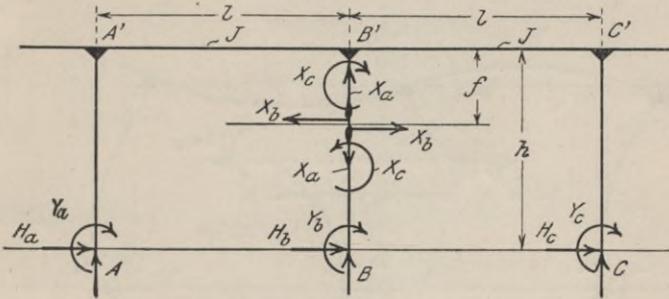


Abb. 86.

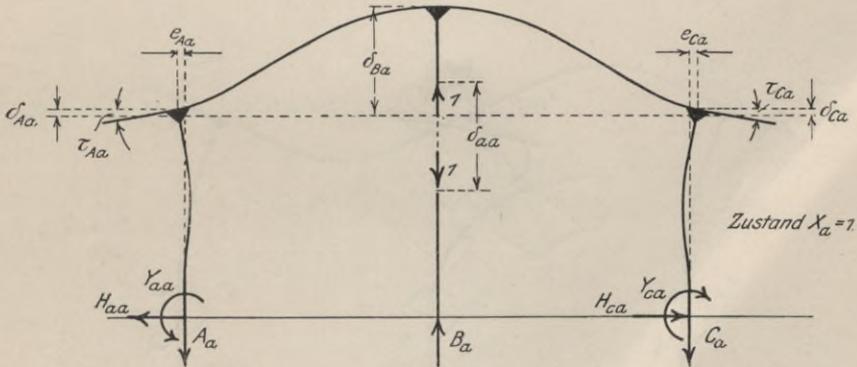


Abb. 87.

ersten Öffnung ist  $a = Y_{aa} - H_{aa} \cdot h$  und  $b = -\frac{1}{2}$ , in der zweiten Öffnung ist  $a = Y_{aa} - H_{aa} \cdot h - \frac{1}{2} \cdot l$  und  $b = \frac{1}{2}$ . Die Gl. 6 bis 9 (S. 11) liefern mit diesen Werten die Biegungslinie des Balkens.  $\delta_{aa}$  erhält man aus der Bedingung, daß der Neigungswinkel der Biegungslinie über der Mittelstütze  $\tau_{Ba} = 0$  sein muß. Infolge der Symmetrie ist  $e_{Ba} = 0$ ; es wird

$$e_{Aa} = H_{aa} \frac{l}{E \cdot F} = -e_{Ca},$$

da  $H_{aa}$  die in dem Balken herrschende Druckkraft ist. Ein beliebiger Punkt der Balkenachse verschiebt sich wagrecht um das Maß

$$e_a = H_{aa} \frac{l-x}{E \cdot F} \quad \text{in der ersten Öffnung, bzw.}$$

$$e_a = -H_{aa} \frac{x}{E \cdot F} \quad \text{in der zweiten Öffnung.}$$

Die Kraft  $X_b = 1$  drückt die Endstützen um

$$\delta_{Ab} = -\delta_{Cb} = A_b \frac{h}{E \cdot J^v}$$

zusammen, während mit  $\delta_{ab} = 0$  auch  $\delta_{Bb} = 0$  ist (Abb. 88). Die Gl. 6 bis 9 (S. 11) liefern die senkrechten und die Gl. 7, 6 (S. 23) die wagerechten Verschiebungen des Balkens. Soll  $\delta_{bc} = 0$  werden, so muß

$$\tau_{Bb} + \frac{f^2}{2 E \cdot J^v} = \frac{(h-f)^2}{2 E \cdot J^v} \text{ oder } \frac{f \cdot h'}{E \cdot J} = \frac{h \cdot h'}{2 E \cdot J} - \tau_{Bb} \text{ sein.}$$

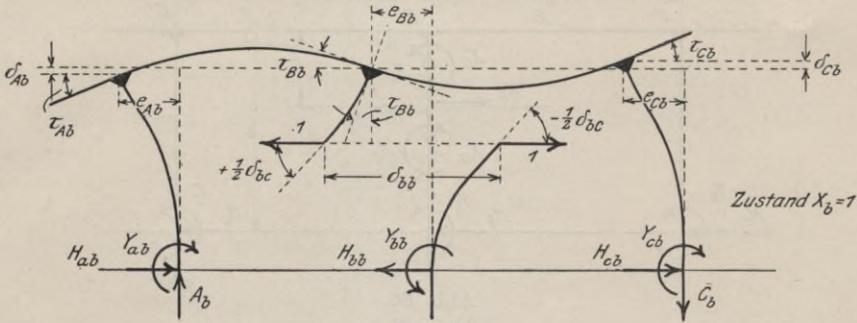


Abb. 88.

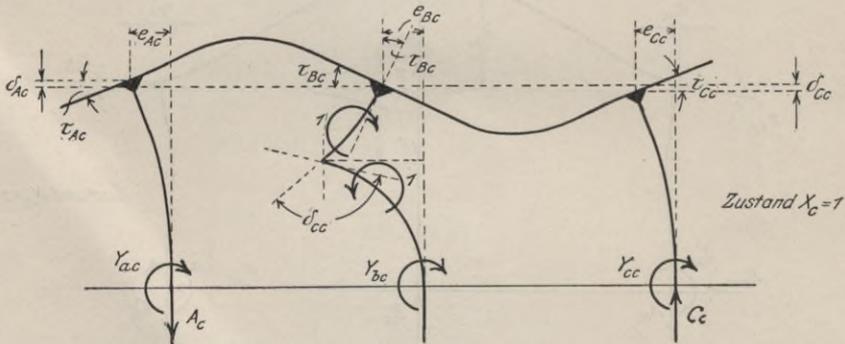


Abb. 89.

Für  $\delta_{bb}$  erhält man:

$$\delta_{bb} = -e_{Bb} + \tau_{Bb} \cdot f + \frac{f^3}{3 E \cdot J^v} + \frac{(h-f)^3}{3 E \cdot J^v};$$

hierbei ist  $e_{Bb} = e_{Ab} - \frac{l}{2 E \cdot F}$ .

Bei dem Zustande  $X_c = 1$  ist  $A_c = -C_c$ , mithin

$$\delta_{Ac} = -\delta_{Cc} = A_c \frac{h}{E \cdot J^v}.$$

$\delta_{Bc}$  wird = 0, weil  $\delta_{ac} = 0$  (Abb. 89). Sind die Verschiebungen des Balkens bestimmt, so findet man

$$\delta_{cc} = \tau_{Bc} + \frac{h'}{E \cdot J} \text{ und } f \text{ aus der Beziehung:}$$

$$-e_{Bc} + f \cdot \tau_{Bc} + \frac{f^2}{2 E \cdot J^v} = \frac{(h-f)^2}{2 E \cdot J^v} \text{ oder } f = \frac{h \cdot h' + 2 E \cdot J \cdot e_{Bc}}{2 h' + 2 E \cdot J \cdot \tau_{Bc}}.$$

Die Rechnung gestaltet sich folgendermaßen, wenn man den Einfluß der Normalspannungen vernachlässigt:

Zustand  $X_a = 1$ .

Es werden nach Gl. 15 (S. 71) die Stützkräfte:

$$A_a = C_a = -\frac{1}{2}, \quad H_{aa} = -H_{ca} = -\frac{3l^2}{2h(4l+h')}, \quad Y_{aa} = -Y_{ca} = -\frac{l^2}{2(4l+h')}.$$

Setzt man die Balkenmomente  $M_a = a + b \cdot x$ , so ist in der ersten Öffnung  $a = \frac{l^2}{4l+h'}$  und  $b = -\frac{1}{2}$ , sowie in der zweiten Öffnung  $a = -\frac{l(2l+h')}{2(4l+h')}$  und  $b = +\frac{1}{2}$ . Hiermit findet man die Biegelinie des Balkens, wenn man noch beachtet, daß  $\delta_{Ba} = -\delta_{aa}$ :

1. Öffnung:

$$\begin{aligned} 1) \quad \delta_a &= -\delta_{aa} \frac{x}{l} + \frac{x(l-x)}{12 E \cdot J(4l+h')} [l(2l-h') - x(4l+h')], \\ 2) \quad \tau_a &= -\frac{\delta_{aa}}{l} + \frac{l^2(2l-h')}{12 E \cdot J(4l+h')} - \frac{x[4l^2 - x(4l+h')]}{4 E \cdot J(4l+h')}, \\ \tau_{Aa} &= -\frac{\delta_{aa}}{l} + \frac{l^2(2l-h')}{12 E \cdot J(4l+h')}, \\ \tau_{Ba} &= -\frac{\delta_{aa}}{l} + \frac{l^2(l+h')}{6 E \cdot J(4l+h')}. \end{aligned}$$

Da nun  $\tau_{Ba} = 0$  ist, erhält man:

$$3) \quad \delta_{aa} = \frac{l^3(l+h')}{6 E \cdot J(4l+h')}.$$

Setzt man den Wert für  $\delta_{aa}$  in  $\tau_{Aa}$  ein, so wird dieses

$$\tau_{Aa} = -\frac{l^2 \cdot h'}{4 E \cdot J(4l+h')}.$$

2. Öffnung.

Die  $\delta_a$ -Linie in der zweiten Öffnung ist das Spiegelbild der  $\delta_a$ -Linie der ersten Öffnung; mithin

$$\begin{aligned} 4) \quad \delta_a &= -\delta_{aa} \frac{l-x}{l} - \frac{x(l-x)}{12 E \cdot J(4l+h')} [2l(l+h') - x(4l+h')] \quad \text{und} \\ 5) \quad \tau_a &= \frac{x[2l(2l+h') - x(4l+h')]}{4 E \cdot J(4l+h')}. \end{aligned}$$

Die wagerechte Verschiebung  $e_a$  ist = 0. Man kann mit Gl. 76 (S. 23) hierauf und auf  $\tau_{Aa}$  die Probe machen.

Zustand  $X_b = 1$ .

Die Kraft  $X_b = 1$  ruft nach Gl. 17 (S. 71) folgende Stützkräfte in dem Hauptssystem hervor:

$$\begin{aligned} A_b &= -C_b = \frac{3 \cdot h \cdot h' - 3f(l+2h')}{4l(l+3h')}, \\ H_{ab} &= H_{cb} = \frac{1}{2}, \\ Y_{ab} &= Y_{cb} = \frac{h(2l+3h') + f \cdot l}{4(l+3h')}. \end{aligned}$$

Die Balkenmomente sind in der ersten Öffnung

$$M_b = -\frac{3h \cdot h' - f \cdot l}{4(l + 3h')} + \frac{3h \cdot h' - 3f(l + 2h')}{4l(l + 3h')} \cdot x$$

und in der zweiten Öffnung

$$M_b = \frac{f}{2} + \frac{3h \cdot h' - 3f(l + 2h')}{4l(l + 3h')} \cdot x,$$

so daß man folgende Biegelinien erhält:

I. Öffnung.

$$\delta_b = -\frac{x(l-x)}{8E \cdot J \cdot l(l+3h')} [2l \cdot h'(h+f) - x\{h \cdot h' - f(l+2h')\}],$$

$$\tau_b = -\frac{1}{8E \cdot J \cdot l(l+3h')} [2l^2 \cdot h'(h+f) - 2l \cdot x(3h \cdot h' - f \cdot l) + 3x^2\{h \cdot h' - f(l+2h')\}],$$

$$\tau_{Ab} = -\frac{l \cdot h'(h+f)}{4E \cdot J(l+3h')} \quad \text{und} \quad \tau_{Bb} = \frac{l[h \cdot h' + f(l+4h')]}{8E \cdot J(l+3h')}.$$

2. Öffnung.

$$\delta_b = \frac{x(l-x)}{8E \cdot J \cdot l(l+3h')} [l\{h \cdot h' + f(l+4h')\} + x\{h \cdot h' - f(l+2h')\}],$$

$$\tau_b = \frac{1}{8E \cdot J \cdot l(l+3h')} [l^2\{h \cdot h' + f(l+4h')\} - 4x \cdot f \cdot l(l+3h') - 3x^2\{h \cdot h' - f(l+2h')\}],$$

$$\tau_{Cb} = \tau_{Ab}.$$

Aus der oben erwähnten Beziehung

$$\frac{f \cdot h'}{E \cdot J} = \frac{h \cdot h'}{2E \cdot J} - \tau_{Bb} \quad \text{findet man}$$

$$6) \quad \dots \quad f = \frac{3h \cdot h'(l+4h')}{l(l+4h') + 8h'(l+3h')}.$$

Die Anwendung von Gl. 76 (S. 23) liefert

$$7) \quad \dots \quad e_b = -\frac{h \cdot h' [h(4l+3h') + 3f \cdot l]}{24E \cdot J(l+3h')},$$

so daß aus

$$\delta_{bb} = -e_b + \tau_{Bb} \cdot f + \frac{f^3}{3E \cdot J^v} + \frac{(h-f)^3}{3E \cdot J^v},$$

wenn man noch den soeben errechneten Wert für  $f$  einsetzt,

$$8) \quad \dots \quad \delta_{bb} = \frac{h^2 \cdot h'(l^2 + 9l \cdot h' + 6 \cdot h'^2)}{2E \cdot J(l^2 + 12l \cdot h' + 24h'^2)} \quad \text{erhalten wird.}$$

Führt man den Ausdruck für  $f$  in die für die Biegelinien abgeleiteten Gleichungen ein, so nehmen sie folgende Form an:

$$I. \text{ Öffnung: } 9) \quad \delta_b = -\frac{h \cdot h' \cdot x(l-x)}{4E \cdot J(l^2 + 12l \cdot h' + 24h'^2)} (l + 12h' + x),$$

$$10) \quad \tau_b = \frac{h \cdot h' [l(l + 12h') + 24h' \cdot x + 3x^2]}{4E \cdot J(l^2 + 12l \cdot h' + 24h'^2)};$$

$$2. \text{ Öffnung: } \begin{aligned} 11) \quad \delta_b &= \frac{h \cdot h' \cdot x(l-x)}{4E \cdot J(l^2 + 12l \cdot h' + 24h'^2)} (2l + 12h' - x), \\ 12) \quad \tau_b &= \frac{h \cdot h' [2l(l + 6h') - 6x(l + 4h') + 3x^2]}{4E \cdot J(l^2 + 12l \cdot h' + 24h'^2)}. \end{aligned}$$

Zustand  $X_c = 1$ .

Unter Benutzung der Gl. 18 (S. 72) erhält man die Stützkkräfte des Zustandes  $X_c = 1$ :

$$\begin{aligned} A_c &= -C_c = -\frac{3(l + 2h')}{4l(l + 3h')}, \\ H_{ac} &= H_{cc} = 0, \\ Y_{ac} &= Y_{cc} = \frac{l}{4(l + 3h')}. \end{aligned}$$

Gl. 76 (S. 23) liefert

$$\begin{aligned} \tau_{Ac} = \tau_{Cc} &= -\frac{l \cdot h'}{4E \cdot J(l + 3h')} \text{ und} \\ 13) \quad \dots \quad e_c &= -\frac{l \cdot h \cdot h'}{8E \cdot J(l + 3h')}. \end{aligned}$$

Für die Biegelinie des Balkens ergeben sich folgende Beziehungen, wenn man beachtet, daß in der

$$\begin{aligned} 1. \text{ Öffnung} \quad M_c &= \frac{l}{4(l + 3h')} - \frac{3(l + 2h') \cdot x}{4l(l + 3h')} \text{ und in der} \\ 2. \text{ Öffnung} \quad M_c &= \frac{1}{2} - \frac{3(l + 2h') \cdot x}{4l(l + 3h')} \text{ ist.} \end{aligned}$$

1. Öffnung.

$$\begin{aligned} 14) \quad \dots \quad \delta_c &= -\frac{x(l-x)}{8E \cdot J \cdot l(l + 3h')} [2l \cdot h' + x(l + 2h')], \\ 15) \quad \dots \quad \tau_c &= -\frac{2l^2 \cdot h' + 2l^2 \cdot x - 3x^2(l + 2h')}{8E \cdot J \cdot l(l + 3h')}. \end{aligned}$$

2. Öffnung.

$$\begin{aligned} 16) \quad \dots \quad \delta_c &= \frac{x(l-x)}{8E \cdot J \cdot l(l + 3h')} [l(l + 4h') - x(l + 2h')], \\ 17) \quad \dots \quad \tau_c &= \frac{l^2(l + 4h') - 4 \cdot l \cdot x(l + 3h') + 3x^2(l + 2h')}{8E \cdot J \cdot l(l + 3h')}. \end{aligned}$$

Da  $\tau_{Bc} = \frac{l(l + 4h')}{8E \cdot J(l + 3h')}$  ist, wird mit  $\delta_{cc} = \tau_{Bc} + \frac{h'}{E \cdot J}$

$$18) \quad \dots \quad \delta_{cc} = \frac{l(l + 4h') + 8h'(l + 3h')}{8E \cdot J(l + 3h')}.$$

Die sich aus  $X_a = -\frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$ ,  $X_b = -\frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}$  und  $X_c = -\frac{\delta_{mc}}{\delta_{cc}}$  ergebenden Gleichungen für die Unbekannten lauten bei senkrechter Belastung des Balkens:

1. Öffnung.

$$X_a = \left\{ \frac{x}{l} - \frac{x(l-x)}{2l^3(l+h')} [l(2l-h') - x(4l+h')] \right\} \cdot P,$$

$$X_b = \frac{x(l-x)(l+12h'+x)}{2h(l^2+9l \cdot h'+6h'^2)} \cdot P,$$

$$X_c = \frac{x(l-x)[2l \cdot h' + x(l+2h')]}{l(l^2+12l \cdot h'+24h'^2)} \cdot P.$$

2. Öffnung.

$$X_a = \left\{ \frac{l-x}{l} + \frac{x(l-x)}{2l^3(l+h')} [2l(l+h') - x(4l+h')] \right\} \cdot P,$$

$$X_b = - \frac{x(l-x)(2l+12h'-x)}{2h(l^2+9l \cdot h'+6h'^2)} \cdot P,$$

$$X_c = - \frac{x(l-x)[l(l+4h') - x(l+2h')]}{l(l^2+12l \cdot h'+24h'^2)} \cdot P.$$

Setzt man in diesen Gleichungen  $h = h' = \infty$ , so werden  $X_b$  und  $X_c = 0$ , während  $X_a$  den Auflagerdruck der Mittelstütze des Balkens auf drei Stützen angibt.

Wärmeänderung um  $t_0$ .

Aus der symmetrischen Anordnung folgt, daß bei einer gleichmäßigen Erwärmung des Trägers um  $t_0$  die Unbekannten  $X_b$  und  $X_c = 0$  werden müssen. Da bei dem Zustande  $X_a = 1$  die in dem Balken herrschende Längskraft

$$H_{ca} = \frac{3l^2}{2h(4l+h')} \text{ ist, wird}$$

$$19) \quad \delta_{at} = \frac{3\varepsilon \cdot t_0 \cdot l^3}{h(4l+h')} \text{ und daher}$$

$$X_{at} = - \frac{18\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0}{h(l+h')} = B_t.$$

Die in dem Hauptssystem infolge einer Erwärmung um  $t_0$  auftretenden Kämpferkräfte sind durch die Gl. 20 (S. 72) gegeben. Es ist

$$A_{ot} = C_{ot} = 0,$$

$$H_{aot} = - H_{cot} = \frac{12\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l(l+h')}{h^2 \cdot h'(4l+h')} \text{ und}$$

$$Y_{aot} = - Y_{cot} = \frac{6\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l(2l+h')}{h \cdot h'(4l+h')}.$$

Mit  $A_t = A_{ot} + A_a \cdot X_{at}$   
 . . . . . findet man:

$$A_t = C_t = \frac{9\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0}{h(l+h')},$$

$$H_{at} = - H_{ct} = \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l(l+4h')}{h^2 \cdot h'(l+h')},$$

$$H_{bt} = 0,$$

$$Y_{at} = - Y_{ct} = \frac{3\varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l(l+2h')}{h \cdot h'(l+h')},$$

$$Y_{bt} = 0.$$

Die in dem Rahmen hervorgerufenen Momente sind:

Am Fuße der Stütze  $A$ :  $M_t = Y_{at}$ .

Am Kopfe der Stütze  $A$ :  $M_t = Y_{at} - H_{at} \cdot h = -\frac{6 \varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l}{h(l+h')}$ .

In dem Balken über der Mittelstütze bei  $B'$ :

$$M_t = Y_{at} - H_{at} \cdot h + A_t \cdot l = \frac{3 \varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_0 \cdot l}{h(l+h')}$$

Der Balken wird über den Endstützen doppelt so hoch beansprucht wie über der Mittelstütze. Nimmt man wie bei den früheren Beispielen die Trägerhöhe  $d = \frac{1}{15} \cdot l$ ,  $J = J^v$ ,  $\varepsilon \cdot E = 25$  und  $t_0 = 35^0$  an, dann wird die in dem Balken über den Endstützen auftretende Spannung

$$\sigma = 230 \text{ kg/cm}^2 \text{ bei } h = 0,5 \cdot l \text{ und}$$

$$\sigma = 90 \text{ kg/cm}^2 \text{ bei } h = 1,0 \cdot l.$$

Ist die Stärke der Stützen ebenfalls gleich  $d = \frac{1}{15} \cdot l$ , so wird an der Einspannung der Endstützen

$$\sigma = 465 \text{ kg/cm}^2 \text{ bei } h = 0,5 \cdot l \text{ und}$$

$$\sigma = 130 \text{ kg/cm}^2 \text{ bei } h = 1,0 \cdot l.$$

### 3. Der vierstielige Rahmen.

Die Abb. 90 zeigt einen symmetrischen vierstieligen Rahmen mit eingespannten Füßen. Die Spannweite der Mittelöffnung ist  $2 \cdot c$ , ihr Trägheitsmoment

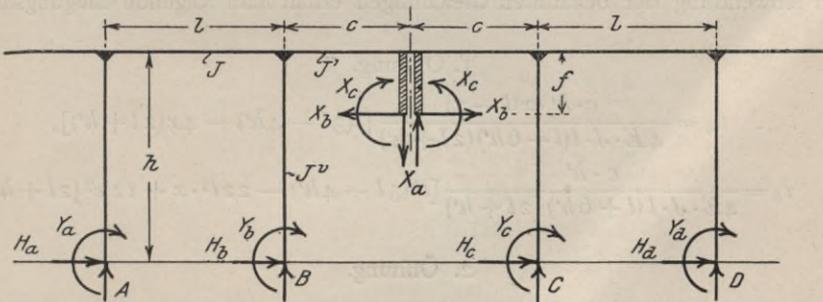


Abb. 90.

$J$ . In der Mittelachse werden im Abstände  $f$  unter der Balkenachse die Unbekannten  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  angebracht. Infolge der Symmetrie sind  $\delta_{ab}$  und  $\delta_{ac} = 0$ ;  $f$  ist so zu bestimmen, daß auch  $\delta_{bc} = 0$  wird.

Zustand  $X_a = 1$ .

Die durch den Zustand  $X_a = 1$  hervorgerufenen Stützkräfte des aus zwei zweistieligen Rahmen bestehenden Hauptsystems sind bei Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte durch die Gl. 14 und 16 (S. 70, 71) gegeben. Es wird

$$A_a = -D_a = -\frac{6h' \cdot c}{l(l+6h')},$$

$$B_a = -C_a = 1 + \frac{6h'c}{l(l+6h')},$$

$$H_{aa} = -H_{ba} = -H_{ca} = H_{da} = -\frac{3c \cdot l}{2h(2l+h')},$$

$$Y_{aa} = Y_{da} = -\frac{c \cdot l(3l+7h')}{2(l+6h')(2l+h')},$$

$$Y_{ba} = Y_{ca} = -\frac{c \cdot l(l-5h')}{2(l+6h')(2l+h')}.$$

Mit der Gl. 76 (S. 23) findet man:

$$\tau_{Aa} = \tau_{Da} = \frac{c \cdot h' \cdot l(3l-4h')}{4E \cdot J(l+6h')(2l+h')},$$

$$\tau_{Ba} = \tau_{Ca} = \frac{c \cdot h' \cdot l(5l+8h')}{4E \cdot J(l+6h')(2l+h')}.$$

Die wagerechte Verschiebung wird für alle Punkte des Balkens gleich, nämlich

$$1) \quad \dots \quad e_a = \frac{c \cdot l \cdot h \cdot h'}{4E \cdot J(l+6h')}.$$

Die den Balken beanspruchenden Biegemomente sind:

$$1. \text{ Öffnung: } M_a = \frac{11c \cdot l \cdot h'}{2(l+6h')(2l+h')} - \frac{6c \cdot h'}{l(l+6h')} \cdot x$$

$$2. \text{ Öffnung: } M_a = -(c-x)$$

$$3. \text{ Öffnung: } M_a = \frac{c \cdot h'(13l+12h')}{2(l+6h')(2l+h')} - \frac{6c \cdot h'}{l(l+6h')} \cdot x.$$

Unter Anwendung der bekannten Gleichungen erhält man folgende Biegelinien:

1. Öffnung.

$$2) \quad \delta_a = \frac{c \cdot h' \cdot x(l-x)}{4E \cdot J \cdot l(l+6h')(2l+h')} [l(3l-4h') - 4x(2l+h')],$$

$$3) \quad \tau_a = \frac{c \cdot h'}{4E \cdot J \cdot l(l+6h')(2l+h')} [l^2(3l-4h') - 22l^2 \cdot x + 12x^2(2l+h')].$$

2. Öffnung.

$$4) \quad \delta_a = \delta_{aa} \frac{x}{2c} - \frac{x(c-x)(2c-x)}{6E \cdot J'}$$

in der ersten Hälfte von  $x=0$  bis  $x=c$ ,

$$\delta_a = -\delta_{aa} \frac{2c-x}{2c} - \frac{x(c-x)(2c-x)}{6E \cdot J'}$$

in der zweiten Hälfte von  $x=c$  bis  $x=2 \cdot c$ ; ferner

$$5) \quad \tau_a = \frac{c \cdot h' \cdot l(5l+8h')}{4E \cdot J(l+6h')(2l+h')} + \frac{x(2c-x)}{2E \cdot J'}$$

3. Öffnung.

$$6) \quad \delta_a = \frac{c \cdot h' \cdot x(l-x)}{4E \cdot J \cdot l(l+6h')(2l+h')} [l(5l+8h') - 4x(2l+h')],$$

$$7) \quad \tau_a = \frac{c \cdot h'}{4E \cdot J \cdot l(l+6h')(2l+h')} [l^2(5l+8h') - 2l \cdot x(13l+12h') + 12x^2(2l+h')].$$

Für  $\delta_{aa}$  liefert Gl. 59 (S. 20):

$$8) \quad \delta_{aa} = \frac{c^2 \cdot h' \cdot l (5l + 8h')}{2 E \cdot J (l + 6h') (2l + h')} + \frac{2c^2 \cdot c'}{3 E \cdot J}.$$

Bei gleichen Spannweiten ( $2 \cdot c = l$ ) und gleichen Trägheitsmomenten ( $J = J$ ) wird

$$\delta_{aa} = \frac{l^3 (4l^2 + 41l \cdot h' + 36h'^2)}{24 E \cdot J (l + 6h') (2l + h')}.$$

Zustand  $X_b = 1$ .

Infolge der Kraft  $X_b = 1$  treten nach Gl. 17 (S. 71) folgende Stützkkräfte an dem Hauptsystem auf:

$$A_b = - B_b = - C_b = D_b = \frac{3h'(h - 2f)}{l(l + 6h')},$$

$$H_{ab} = - H_{db} = \frac{1}{2} - \frac{3f \cdot l}{2h(2l + h')},$$

$$H_{bb} = - H_{cb} = \frac{1}{2} + \frac{3f \cdot l}{2h(2l + h')},$$

$$Y_{ab} = - Y_{db} = \frac{h(l + 3h')}{2(l + 6h')} - \frac{f \cdot l(3l + 7h')}{2(l + 6h')(2l + h')},$$

$$Y_{bb} = - Y_{cb} = \frac{h(l + 3h')}{2(l + 6h')} - \frac{f \cdot l(l - 5h')}{2(l + 6h')(2l + h')}.$$

Nach Gl. 76 (S. 23) können jetzt die Neigungswinkel der Stützenköpfe und deren wagerechte Verschiebungen angegeben werden. Man erhält

$$\tau_{Ab} = - \tau_{Db} = - \frac{l \cdot h' [h(2l + h') - f(3l - 4h')]}{4 E \cdot J (l + 6h') (2l + h')},$$

$$\tau_{Eb} = - \tau_{Cb} = - \frac{l \cdot h' [h(2l + h') - f(5l + 8h')]}{4 E \cdot J (l + 6h') (2l + h')} \quad \text{und}$$

$$9) \quad e_{Ab} = e_{Bb} = - e_{Cb} = - e_{Db} = - \frac{h \cdot h' [h(2l + 3h') - 3f \cdot l]}{12 E \cdot J (l + 6h')}.$$

Die Gl. 57 und 63 (S. 20) ergeben:

$$10) \quad f = \frac{l \cdot h \cdot h' (2l + h')}{h' \cdot l (5l + 8h') + 4c' (l + 6h') (2l + h')} \quad \text{und}$$

$$11) \quad \delta_{bb} = \frac{h \cdot h' [h(2l + 3h') - 3f \cdot l]}{6 E \cdot J (l + 6h')}.$$

In der ersten Öffnung ist

$$M_b = - \frac{3h \cdot h' (2l + h') - 11 \cdot f \cdot l \cdot h'}{2(l + 6h')(2l + h')} + \frac{3h'(h - 2f)}{l(l + 6h')} \cdot x, \quad \text{daher}$$

$$12) \quad \delta_b = - \frac{h' \cdot x \cdot (l - x)}{4 E \cdot J \cdot l (l + 6h') (2l + h')} [l \{h(2l + h') - f(3l - 4h')\} - 2x(h - 2f)(2l + h')] \quad \text{und}$$

$$13) \quad \tau_b = - \frac{h'}{4 E \cdot J \cdot l (l + 6h') (2l + h')} [l^2 \{h(2l + h') - f(3l - 4h')\} - 2l \cdot x \{3h(2l + h') - 11f \cdot l\} + 6x^2(h - 2f)(2l + h')].$$

In der zweiten Öffnung ist

$$14) \quad \delta_b = -\frac{f \cdot x(2c-x)}{2E \cdot J'} \quad \text{und}$$

$$15) \quad \tau_b = -\frac{f(c-x)}{E \cdot J'}.$$

Die  $\delta_b$ -Linie in der dritten Öffnung kann als Spiegelbild zu der  $\delta_b$ -Linie in der ersten Öffnung erhalten werden.

Zustand  $X_c = 1$ .

Bei dem Zustande  $X_c = 1$  sind die Stützkräfte des Hauptsystems nach Gl. 18 (S. 72):

$$\begin{aligned} A_c &= -B_c = -C_c = D_c = -\frac{6h'}{l(l+6h')}, \\ H_{ac} &= -H_{bc} = H_{cc} = -H_{dc} = -\frac{3l}{2h(2l+h')}, \\ Y_{ac} &= -Y_{dc} = -\frac{l(3l+7h')}{2(l+6h')(2l+h')}, \\ Y_{bc} &= -Y_{cc} = -\frac{l(l-5h')}{2(l+6h')(2l+h')}; \end{aligned}$$

man findet entsprechend wie früher:

$$\begin{aligned} \tau_{Ac} &= -\tau_{Dc} = \frac{l \cdot h'(3l-4h')}{4E \cdot J(l+6h')(2l+h')}, \\ \tau_{Bc} &= -\tau_{Cc} = \frac{l \cdot h'(5l+8h')}{4E \cdot J(l+6h')(2l+h')} \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$16) \quad e_{Ac} = e_{Bc} = -e_{Cc} = -e_{Dc} = \frac{l \cdot h \cdot h'}{4E \cdot J(l+6h')}.$$

Mit Gl. 66 (S. 20) erhält man

$$17) \quad \delta_{cc} = \frac{l \cdot h'(5l+8h')}{2E \cdot J(l+6h')(2l+h')} + \frac{2c'}{E \cdot J}.$$

In der ersten Öffnung ist

$$M_c = \frac{11 \cdot h' \cdot l}{2(l+6h')(2l+h')} - \frac{6 \cdot h' \cdot x}{l(l+6h')}, \quad \text{daher}$$

$$18) \quad \delta_c = \frac{h' \cdot x(l-x)}{4E \cdot J \cdot l(l+6h')(2l+h')} [l(3l-4h') - 4x(2l+h')] \quad \text{und}$$

$$19) \quad \tau_c = \frac{h'}{4E \cdot J \cdot l(l+6h')(2l+h')} [l^2(3l-4h') - 22l^2 \cdot x + 12x^2(2l+h')].$$

In der linken Hälfte der zweiten Öffnung ist

$$20) \quad \delta_c = \frac{l \cdot h'(5l+8h') \cdot x}{4E \cdot J(l+6h')(2l+h')} + \frac{x^2}{2E \cdot J'} \quad \text{und}$$

$$21) \quad \tau_c = \frac{l \cdot h'(5l+8h')}{4E \cdot J(l+6h')(2l+h')} + \frac{x}{E \cdot J'}.$$

Der übrige Teil der  $\delta_c$ -Linie ergibt sich aus der Symmetrie.

**Gleichmäßige Erwärmung um  $t_0$ .**

Infolge der Symmetrie wird  $\delta_{at} = 0$ . Bei den Zuständen  $X_b$  und  $X_c$  heben sich die in den Stützen herrschenden Normalkräfte gegenseitig auf, so daß

$$\delta_{bt} = \varepsilon \cdot t_0 (-H_{ab} \cdot l - 2c + H_{db} \cdot l) \text{ bzw.}$$

$$\delta_{bt} = -2\varepsilon \cdot t_0 (H_{ab} \cdot l + c) \text{ und}$$

$$\delta_{ct} = -2\varepsilon \cdot t_0 \cdot l \cdot H_{ac} \text{ wird.}$$

Wenn man die Werte für  $H_{ab}$  und  $H_{ac}$  einsetzt, ergibt sich:

$$22) \quad \delta_{bt} = -\varepsilon \cdot t_0 \left[ l + 2c - \frac{3f \cdot l^2}{h(2l+h')} \right] \text{ und}$$

$$23) \quad \delta_{ct} = \frac{3\varepsilon \cdot t_0 \cdot l^2}{h(2l+h')}.$$

**4. Der zwei-stielige Rahmen mit gestützten Kragarmen.**

Der in Abb. 91 dargestellte Rahmenträger ist fünffach statisch unbestimmt. Da Symmetrie angenommen wird, sind die Unbekannten  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  in der Symmetrieachse im Abstände  $f$  unter dem Balken anzubringen, und zwar  $X_a$  senk-

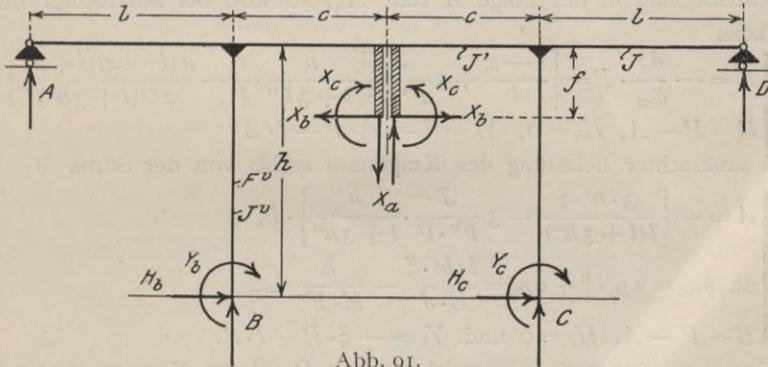


Abb. 91.

recht,  $X_b$  wagerecht und  $X_c$  als Moment. Das Hauptsystem besteht aus zwei einhäufigen einfach statisch unbestimmten Rahmen, die zunächst zu untersuchen sind, um ihre Stützkräfte unter beliebigen äußeren Lasten festzustellen. Führt man wie in Abb. 92 den Auflagerdruck des wagerechten Gleitlagers als statisch Unbestimmte  $X_a$  ein, so wird unter dem Einflusse dieser Kraft

$$B_a = -1, H_{ba} = 0 \text{ und } Y_{ba} = -l.$$

Für den Kopf der Stütze B findet man

$$1) \quad \tau_{Ba} = \frac{l \cdot h'}{E \cdot J} \text{ und}$$

$$e_{Ba} = e_a = \frac{l \cdot h \cdot h'}{2E \cdot J}.$$

Das Moment, welches den Balken beansprucht, ist  $M_a = x$ ; und man erhält daher, wenn man beachtet, daß die Ordinaten der Biegelinie des Balkens über den Stützen durch

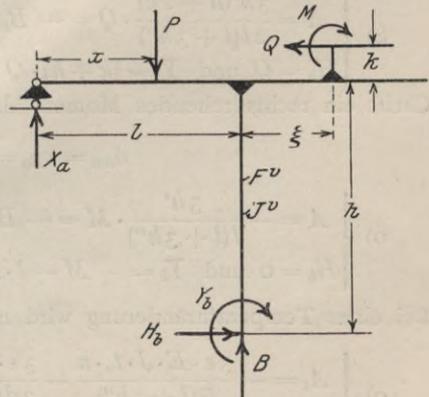


Abb. 92.

$\delta_{Aa} = -\delta_{aa}$  und  $\delta_{Ba} = -\frac{h}{E \cdot F^v}$  gegeben sind:

2) . . . .  $\delta_a = -\delta_{aa} \frac{l-x}{l} - \frac{h}{E \cdot F^v} \cdot \frac{x}{l} + \frac{x(l-x)(l+x)}{6 E \cdot J}$ .

Hierbei ist  $\delta_{aa} = \tau_{Ba} \cdot l + \frac{l^3}{3 E \cdot J} + \frac{h}{E \cdot F^v}$  oder

3) . . . .  $\delta_{aa} = \frac{l^2(l+3h'')}{3 E \cdot J}$ , wenn  $h \left( \frac{J}{J^v} + \frac{J}{l^2 \cdot F^v} \right) = h''$  gesetzt wird.

Da  $\frac{\delta_{Ba} - \delta_{Aa}}{l} = \frac{l^2(l+3h'')}{3 E \cdot J}$  ist, gibt Gl. 7 (S. 11) den Neigungswinkel der  $\delta_a$ -Linie an zu

4) . . . .  $\tau_a = \frac{l(l+2h')}{2 E \cdot J} - \frac{x^2}{2 E \cdot J}$ .

Es erübrigt noch,  $\delta_{at}$  zu bestimmen, damit alle Formänderungen bekannt sind, um die Berechnung von  $X_a = A$  zu ermöglichen; man findet

5) . . . .  $\delta_{at} = \varepsilon \cdot t_o \cdot h + \varepsilon \frac{A t}{d} \cdot \frac{l^2}{2}$ .

Schreibt man in der Folge  $A$  statt  $X_a$ , so wird bei senkrechter Belastung des Balkens

6) 
$$\begin{cases} A = -\frac{\delta_a}{\delta_{aa}} \cdot P = \left[ \frac{l-x}{l} + 3 \frac{J}{F^v \cdot l^2} \cdot \frac{h}{l+3h''} \cdot \frac{x}{l} - \frac{x(l-x)(l+x)}{2 l^2(l+3h'')} \right] \cdot P, \\ B = P - A, H_b = 0, Y_b = (l-x) \cdot P - l \cdot A \end{cases}$$

und bei senkrechter Belastung des Kragarmes rechts von der Stütze B

7) 
$$\begin{cases} A = -\left[ \frac{3 \cdot h' \cdot \xi}{l(l+3h'')} - 3 \frac{J}{F^v \cdot l^2} \cdot \frac{h}{l+3h''} \right] \cdot P, \\ \text{da } \delta_{ma} = \tau_{Ba} \cdot \xi + \delta_{Ba} = \frac{l \cdot h' \cdot \xi}{E \cdot J} - \frac{h}{E \cdot F^v} \text{ ist,} \\ B = P - A, H_b = 0 \text{ und } Y_b = -\xi \cdot P - l \cdot A. \end{cases}$$

Eine von rechts nach links gerichtete Last  $Q$ , die am Kragarm in der Höhe  $k$  über der Balkenachse angreift, leistet bei dem Zustande  $X_a = 1$  eine Arbeit von

$$\delta_{ma} = -e_a - k \cdot \tau_{Ba} = -\frac{l \cdot h \cdot h'}{2 E \cdot J} - \frac{k \cdot l \cdot h'}{E \cdot J};$$

daher wird infolge dieser Last

8) 
$$\begin{cases} A = \frac{3 h' (h+2k)}{2 l (l+3 h'')} \cdot Q = -B, \\ H_b = Q \text{ und } Y_b = (k+h) \cdot Q - l \cdot A. \end{cases}$$

Greift ein rechtsdrehendes Moment  $M$  an dem Kragarm an, so wird

$$\delta_{ma} = \tau_{Ba} = \frac{l \cdot h'}{E \cdot J}, \text{ mithin}$$

9) 
$$\begin{cases} A = -\frac{3 h'}{l(l+3 h'')} \cdot M = -B, \\ H_b = 0 \text{ und } Y_b = -M - l \cdot A. \end{cases}$$

Bei einer Temperaturänderung wird mit  $X_{at} = -\frac{\delta_{at}}{\delta_{aa}}$ :

10) 
$$\begin{cases} A_t = -\frac{3 \varepsilon \cdot E \cdot J \cdot t_o \cdot h}{l^2(l+3 h'')} - \frac{3 \varepsilon \cdot E \cdot J \cdot A t}{2 d(l+3 h'')} = -B_t, \\ H_{bt} = 0 \text{ und } Y_{bt} = -l \cdot A_t. \end{cases}$$

Nachdem durch die vorstehenden Ausführungen die Berechnung der Kräfte ermöglicht ist, die in dem Hauptssystem des in Abb. 91 dargestellten Rahmen-trägers auftreten, kann jetzt dessen Untersuchung begonnen werden. Die bei dem Zustande  $X_a = 1$  hervorgerufenen Stützkräfte sind:

$$A_a = -D_a = -\frac{3h' \cdot c}{l(l+3h'')} + 3 \frac{J}{F^v \cdot l^2} \cdot \frac{h}{l+3h''},$$

$$B_a = -C_a = 1 - A_a = 1 + \frac{3h' \cdot c}{l(l+3h'')} - 3 \frac{J}{F^v \cdot l^2} \cdot \frac{h}{l+3h''},$$

$$H_{ba} = H_{ca} = 0,$$

$$Y_{ba} = Y_{ca} = -c + \frac{3h' \cdot c}{l+3h''} - 3 \frac{J}{F^v \cdot l^2} \cdot \frac{h \cdot l}{l+3h''}.$$

Die Stützkräfte des Zustandes  $X_b = 1$  sind

$$A_b = -B_b = -C_b = D_b = \frac{3h'(h-2f)}{2l(l+3h'')},$$

$$H_{bb} = -H_{cb} = 1,$$

$$Y_{bb} = -Y_{cb} = h - f - \frac{3h'(h-2f)}{2(l+3h'')},$$

während man für den Zustand  $X_c = 1$  findet:

$$A_c = -B_c = -C_c = D_c = -\frac{3h'}{l(l+3h'')},$$

$$H_{bc} = H_{cc} = 0,$$

$$Y_{bc} = -Y_{cc} = -1 + \frac{3h'}{l+3h''}.$$

Die Berechnung der Biegungslinien erfolgt in der üblichen Weise und braucht nicht näher aufgeführt zu werden; es möge nur noch der Wert  $f$  unter Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte ermittelt werden. Bei dem Zustande  $X_b = 1$  wird

$$\tau_{Bb} = -Y_{bb} \frac{h'}{E \cdot J} + \frac{h \cdot h'}{2E \cdot J}, \quad \text{mithin}$$

$$\tau_{Bb} = -\frac{h' \cdot l(h-2f)}{2E \cdot J(l+3h'')} \left[ 1 + 3 \frac{J}{F^v \cdot l^2} \cdot \frac{h}{l} \right].$$

Da nun  $f = -\frac{E \cdot J \cdot \tau_{Bb}}{c'}$  ist, erhält man

$$f = \frac{h \cdot h' \cdot l \left( 1 + 3 \frac{J}{F^v \cdot l^2} \cdot \frac{h}{l} \right)}{2 \left[ c'(l+3h'') + h' \cdot l \left( 1 + 3 \frac{J}{F^v \cdot l^2} \cdot \frac{h}{l} \right) \right]}.$$

Ein anderer Weg zur Berechnung des vorliegenden zweiastigen Rahmens mit gestützten Kragarmen besteht darin, daß man die Einspannung der beiden Stützen entfernt und diese im Fuße gelenkig lagert. Man erhält dann den auf S. 66 u. f. behandelten und in Abb. 83 dargestellten Rahmen als Hauptssystem. Als Unbekannte führt man die Summe  $X_a$  und die Differenz  $X_b$  der beiden Einspannungsmomente  $Y_b$  und  $Y_c$  ein;  $\delta_{ab}$  wird = 0. Die Lösung liefert sehr übersichtliche Ergebnisse.



Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W66

Wilhelmstraße 90.

**Statische Tabellen.** Belastungsangaben und Formeln zur Aufstellung von Berechnungen für Baukonstruktionen. Von F. Boerner, Ingenieur. Mit 399 Textabbildungen. Fünfte neubearbeitete Aufl. 1915. geh. 4,40 M.

**Veranschlagen von Eisenbetonbauten.** Grundlagen für den Entwurf und für die Kostenberechnung von Tief- und Hochbauten. Mit mehreren, der Praxis entnommenen Beispielen. Von Dr.-Ing. A. Kleinlogel, Privatdozent a. d. Techn. Hochschule, Darmstadt. Mit 28 Textabb. 1913. geh. 3,60 M., kart. 4 M.

**Der Eisenbetonbau.** Ein Leitfaden für Schule und Praxis. Von C. Kersten, Bauingenieur u. Kgl. Oberlehrer.

Teil I. *Ausführung und Berechnung der Grundformen.*

Mit 232 Abb. Zehnte neubearb. Aufl. 1915. geh. 5,20 M.

Teil II. *Anwendungen im Hoch- und Tiefbau.*

Mit 593 Abb. Siebente neubearbeitete Aufl. 1913. geh. 4,40 M.

**Störungen des normalen Zustandes in Brückengewölben.** Von Dr.-Ing. G. Gilbrin.

Mit 14 Abb. 1914. geh. 2,80 M.

**Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik.** Von Professor Dr.-Ing. O. Mohr, Geh. Regierungsrat.

Zweite neubearbeitete Auflage.

Mit 491 Textabb. 1913. geh. 18 M., geb. 19,50 M.

**Der Abbruch von Beton- und Eisenbetonbauten.** Eine wirtschaftliche Studie. Von Dipl.-Ing. E. Schick.

Mit 7 Abb. 1913. geh. 1,20 M.

**Neuere Bauausführungen in Eisenbeton bei der Württemberg. Staatseisenbahnverwaltung.** Von Jori, Königl. Baurat, und Schaechterle, Reg.-Baumeister.

I. *Bogenbrücken.* Mit 177 Abb. 1911. geh. 4,50 M.

II. *Balkenbrücken.* Mit 149 Abb. 1913. geh. 4,50 M.

**Einige neuere Brückenausführungen in Eisenbeton nach Bauweise Melan.** Von k. k. Hofrat J. Melan, Professor an der Deutschen Technischen Hochschule, Prag, und K. Kluge, Oberingenieur Prag.

Zweite erweiterte Auflage. Mit 139 Abb. 1911. geh. 3,60 M.

**Der doppelt gekrümmte Träger und das schiefe Gewölbe im Eisenbetonbau.** Von Dr.-Ing. H. Marcus.

Mit 23 Textabb. 1914. geh. 2,80 M.

**Beton-Kalender 1915.** Taschenbuch für den Beton- und Eisenbetonbau sowie die verwandten Fächer. Unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner herausgegeben von der Zeitschrift „Beton u. Eisen“. X. neubearbeiteter Jahrgang. Mit 1299 Textabbildungen.

Teil I in Leinen geb., Teil II geh. Beide Teile zusammen 4 M.

*Empfohlen durch Runderlaß*

*des Herrn Ministers der öffentlichen Arbeiten.*

**Rechentafel** nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte.

Von Dr.-Ing. Dr. H. Zimmermann, Wirkl. Geh. Oberbaurat.

Ausgabe A (wie bisher) 7. Aufl. 1913. geh. 5 M.

Ausgabe B mit Anhang: Quädrattafel. 7. Aufl. 1913. geb. 6 M.



Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn  
Wilhelmstraße

Kdn. Zam. 480/55 20.000

**Einführung in die Berechnung der im Eisenbetonbau gebräuchlichen biegungsfesten Rahmen.** Von Dipl.-Ing. H. v. Bronneck. Mit 113 Textabb. 1913. geh. 6,— M., geb. 6,80 M.

**Die Berechnung der Rahmenträger mit besonderer Rücksicht auf die Anwendung.** Von Dr.-Ing. Fr. Engesser, Geh. Oberbaurat, Professor an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Mit 42 Textabb. 1913. geh. 1,80 M.

**Der Rahmen.** Einfaches Verfahren zur Berechnung von Rahmen aus Eisen und Eisenbeton mit ausgeführten Beispielen. Von Dr.-Ing. W. Gehler, Professor an der Technischen Hochschule, Dresden. Mit 190 Textabb. 1913. geh. 8,60 M., geb. 9,50 M.

**Statisch unbestimmte Systeme des Eisen- und Eisenbetonbaues.** Von Oberingenieur Dr.-Ing. Friedr. Hartmann. Mit 353 Abb. 1913. geh. 8 M., geb. 8,80 M.

**Rahmenformeln.** Gebrauchsfertige Formeln für einhäufige, zwei-stielige, dreieckförmige und geschlossene Rahmen aus Eisen- oder Eisenbetonkonstruktion nebst Anhang mit Sonderfällen teilweise und ganz eingespannter Träger. Von Dr.-Ing. A. Kleinogel, Privatdozent an der Technischen Hochschule, Darmstadt. 169 Rahmenfälle mit 338 Abb. 1914. geh. 10 M., geb. 11 M.

**Der Einfluß der Längs- und Querkkräfte auf statisch unbestimmte Bogen- und Rahmentragwerke.** Von Dipl.-Ing. Rueb. Mit 6 Textabb. u. 3 Tafeln. 1913. geh. 2,60 M.

**Beiträge zur Berechnung der im Eisenbetonbau üblichen elastischen Bogen und Rahmen.** Von Dr.-Ing. K. W. Schaechterle, Regierungsbaumeister. Zweite neubearbeitete und erweiterte Auflage.

Mit 164 Textabb. 1914. geh. 6,80 M., geb. 7,60 M.

**Berechnung mehrstöckiger Rahmen mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes.** Von Ing. A. Straßner. Mit 21 Textabb. 1912. geh. 2,60 M.

**Zur Statik der Stockwerkrahmen.** Von R. Wuczkowski, Ingenieur. Zweite neubearbeitete Aufl. Mit 14 Textabb. 1912. geh. 1,60 M.

**Statische Berechnung von Tunnelmauerwerk.** Von Dr.-Ing. O. Kommerell, Kaiserl. Baurat. 1912. geh. 12 M., geb. 13,50 M.

**Tafeln für Eisenbahnbrücken aus einbetonierten Walzträgern.** Von Dr.-Ing. O. Kommerell, Kaiserl. Baurat im Reichsamt für die Verwaltung der Reichseisenbahnen. Mit 8 Textabb. 1911. geh. 2,40 M.

*Empfohlen vom Ministerium der öffentlichen Arbeiten.*

**Tabellen für Straßenbrücken aus einbetonierten Walzträgern.** Von Dr.-Ing. O. Kommerell, Kaiserl. Baurat im Reichsamt für die Verwaltung der Reichseisenbahnen. Mit 44 Textabb. 1912. geh. 6,80 M., kart. 7,40 M.

