



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000301195





# Bau und Berechnung gewölbter Brücken und ihrer Lehrgerüste

Drei Beispiele von der badischen Murgtalbahn

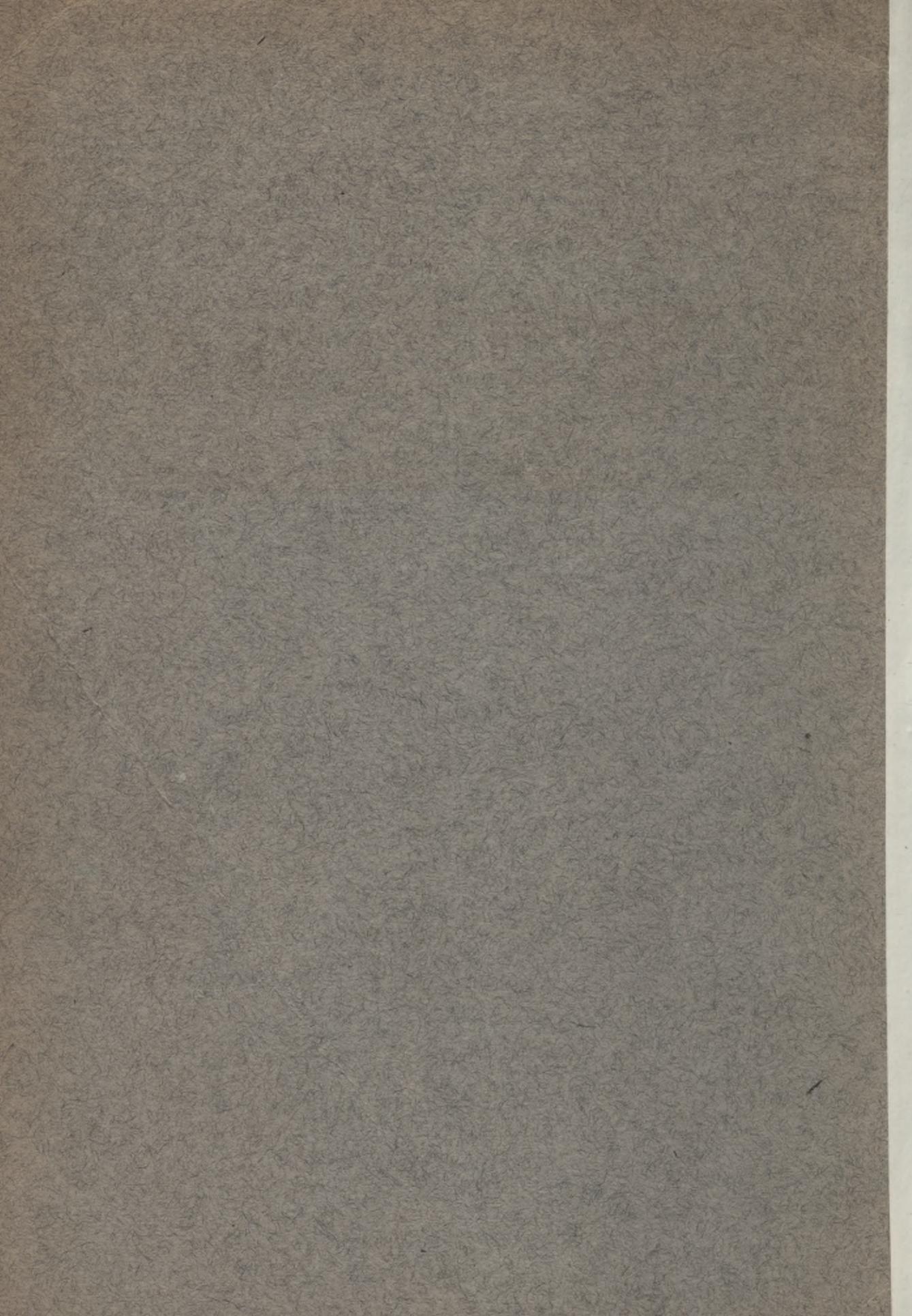
Von

**Dr.-Ing. Ernst Gaber**  
Gr. Bauinspektor

Mit 56 Textabbildungen



Berlin  
Verlag von Julius Springer  
1914



87

# Bau und Berechnung gewölbter Brücken und ihrer Lehrgerüste

Drei Beispiele von der badischen Murgtalbahn

Von

**Dr.-Ing. Ernst Gaber**  
Gr. Bauinspektor



Mit 56 Textabbildungen



*Handwritten signature: Johann Stur*  
*ho-*  
*927. 12*

Berlin  
Verlag von Julius Springer  
1914



Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

III 36.966

Akc. Nr. D 38.27 / 58

## Vorwort.

Unter Benutzung der Vorträge und Arbeiten Engeßers wird der beiderseits eingespannte, gelenklose Bogen aus beliebigem elastischen Stoffe allgemein und möglichst erschöpfend untersucht. Das Ergebnis der allgemeinen Untersuchung wird für die praktische Rechenarbeit nutzbar gemacht und an dem Beispiele eines gelenklosen steinernen Gewölbes erläutert. Dabei wird der Einfluß der Neben- und Zusatzkräfte auf das Zahlenergebnis festgestellt und eine Vereinfachung auf dem rechnerischen und zeichnerischen Wege erzielt.

Die theoretische Untersuchung wurde dadurch angeregt, daß in verantwortlicher Tätigkeit mehrere eingespannte Gewölbe nach der Elastizitätstheorie berechnet werden mußten. Darin liegt es auch begründet, daß die Theorie zwar genau entwickelt, aber in ihrem Ergebnis dem wirklichen Bedürfnis der Anwendung angepaßt ist. Es ist daher zu hoffen, daß nicht nur der Theoretiker, sondern auch der in der Praxis Stehende seinen Nutzen von dieser Arbeit hat. Da bei Entwurfsarbeiten nicht immer Zeit zu umfassenden Vorarbeiten vorhanden ist, sind die wichtigen Gleichungen in einer Zusammenstellung vereinigt und die im allgemeinen bekannten Grundlagen in einem Anhang lückenlos abgeleitet.

Als Beispiel wurde der 59 m weit gespannte Hauptbogen des Talüberganges bei Langenbrand gewählt. Das Bauwerk liegt im Zuge der in den Jahren 1907—1910 gebauten Bahn von Weisenbach nach Forbach im badischen Murgtale. In dem schluchtenreichen und schönsten Tale des nördlichen Schwarzwaldes wurden für die Gebirgsbahn neben sonstigen Kunstbauten damals drei Steinbrücken gebaut: Bei Langenbrand der Talübergang, in der Tennetschlucht ein hoher Viadukt und in der Rappenschlucht ein unsymmetrischer Bogen.

In einem zweiten Abschnitte des Buches wird der durch das Gelände erschwerte Bau der drei Brücken geschildert, und die dabei gesammelten Erfahrungen werden festgehalten und allgemein verwertet. Insbesondere wird die Einzelausbildung der Lehrgerüste beschrieben und ihre Festigkeitsberechnung so vorgeführt, wie sie nicht nur aus Gründen der Standicherheit, sondern auch der Wirtschaftlichkeit verlangt werden muß. Dabei sind die drei Arten des auf der ganzen Länge unterstützten, des auf mehreren Stützpunkten ruhenden und endlich des freigespannten Lehrgerüsts vertreten. Als Grundlage für die Beurteilung der Wirtschaftlichkeit wird für die Tennetschluchtbrücke das Bauprogramm genau entwickelt und zeichnerisch dargestellt und der wirkliche Fortschritt mit dem angenommenen verglichen. Auch sonst werden die tatsächlichen Leistungen und Kosten in allgemein verwertbarer Form angegeben.

Der zeichnerische Entwurf des Talüberganges entstand unter der Oberleitung von Herrn Baurat Hauger, der übrigen Bauwerke und der Lehrgerüste unter Herrn Oberbauinspektor Lehn, welcher zugleich die Oberleitung über den Bau der Murgtalbahn hatte. Die Beobachtungen der Senkung des Hauptbogens am Talübergang stammen von den Herren Bauinspektor Eisenlohr und Pfützner, welche dessen Bau leiteten. Der Verfasser war Bauleiter der Teilstrecke, in welcher die Tennet- und Rappenschlucht lagen und benutzte das in amtlicher Tätigkeit entstandene Material des zweiten Abschnittes mit Erlaubnis der Gr. Badischen Eisenbahnverwaltung.

Heidelberg, im Dezember 1913.

Gaber, Gr. Bauinspektor.

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort . . . . .	III
Inhaltsverzeichnis . . . . .	IV
Verzeichnis der Listen . . . . .	VI
Verzeichnis der Abbildungen . . . . .	VII
<b>1. Allgemeine Untersuchung des eingespannten Bogens . . . . .</b>	<b>1</b>
I. Die Grundgleichungen für lotrechte Last und wagrechte Längslast . . . . .	1
II. Die Lage des Achsenkreuzes . . . . .	4
III. Die lotrechten Kräfte . . . . .	4
1. Die Einflußlinien der zusätzlichen Lagerkräfte . . . . .	4
2. Die Gestalt der Einflußlinien und die Grenzwerte . . . . .	6
3. Die Kämpferdruckschnitt- und Umhüllungslinien . . . . .	6
4. Die Einflußlinie der Spannungsgrößtwerte . . . . .	7
5. Die Einflußlinie der Scheitelsenkung . . . . .	8
6. Der Einfluß der Formänderung der Widerlager . . . . .	11
IV. Die wagrechten Längsbelastungen . . . . .	12
1. Der frei aufliegende Träger . . . . .	12
2. Der statisch unbestimmte Träger . . . . .	13
3. Die Gestalt der Einflußlinien und die Grenzwerte . . . . .	14
3. Die Kämpferdruckschnitt- und Umhüllungslinien . . . . .	14
4. Die Einflußlinie der Spannungsgrößtwerte . . . . .	15
V. Die wagrechten Querbeltungen . . . . .	15
A. Die genaue Rechnung . . . . .	15
1. Die Grundgleichungen . . . . .	15
2. Die Lage des Achsenkreuzes . . . . .	16
3. Die Einflußlinien der Grundwerte . . . . .	17
4. Die Gestalt der Einflußlinien und die Grenzwerte . . . . .	20
5. Die Einflußlinien der Spannungsgrößtwerte . . . . .	20
B. Die vereinfachte Rechnung . . . . .	21
1. Der erste Kräfteplan . . . . .	21
2. Der zweite Kräfteplan . . . . .	22
VI. Der Einfluß der Wärme . . . . .	22
1. Gleichmäßige Erneuerung . . . . .	22
2. Ungleichmäßige Erneuerung . . . . .	22
3. Der Einfluß der Wärme auf die Scheitellage . . . . .	23
<b>2. Der Talübergang bei Langenbrand . . . . .</b>	<b>25</b>
I. Die rechnerische Untersuchung des Hauptbogens . . . . .	25
A. Die Form des Hauptbogens . . . . .	25
B. Die Lage des Achsenkreuzes . . . . .	26
C. Die lotrechten Kräfte . . . . .	27
1. Die Einflußlinien $M_0$ , $H_0$ , $G$ und $W_1$ , $W_2$ , $W_3$ . . . . .	27
2. Der Einfluß der Normal- und Querkraft auf $M_0$ , $H_0$ , $G$ . . . . .	30
3. Der Einfluß der Normal- und Querkraft auf die Spannungen . . . . .	32
4. Die Kämpferdruckschnitt- und Umhüllungslinien . . . . .	34
5. Die Einflußlinien der Kantenpressung . . . . .	35
6. Die Einflußlinie der Scheitelsenkung . . . . .	36
7. Die ruhende Last . . . . .	38
8. Die Scheitelsenkung durch die ruhende Last und Berechnung des Elastizitätsmoduls $E$ . . . . .	39
9. Die Verkehrslast . . . . .	41
10. Die Formänderung der Widerlager unter der ruhenden Last . . . . .	41
D. Die wagrechten Längsbelastungen: Die Bremskraft . . . . .	42
1. Die Einflußlinien $M_0$ , $H_0$ , $G$ und $W_1$ , $W_2$ , $W_3$ . . . . .	42
2. Der Einfluß der Quer- und Normalkraft auf $M_0$ , $H_0$ , $G$ . . . . .	44
3. Die Kämpferdruckschnitt- und Umhüllungslinien . . . . .	46
4. Die Einflußlinien der Kantenpressung . . . . .	47
5. Die Beanspruchungen in Querschnitt 11 und 16 . . . . .	48

	Seite
E. Die wagrechten Querbelastungen: Der Wind . . . . .	49
a) Die genaue Rechnung . . . . .	49
1. Die Lage des Achsursprunges . . . . .	49
2. Die Einflußlinien $W_1, W_2, W_3$ . . . . .	49
3. Die Einflußlinien der Randspannungen . . . . .	52
4. Die Spannungen der Querschnitte 11 und 16 . . . . .	53
b) Die genäherte Rechnung . . . . .	54
1. Der Wind auf der Brücke . . . . .	54
2. Der Wind auf die Verkehrslast . . . . .	55
3. Die Gesamtspannungen . . . . .	56
F. Der Einfluß der Wärme . . . . .	56
1. Die gleichmäßige Erwärmung . . . . .	56
2. Die ungleichmäßige Erwärmung . . . . .	57
3. Der Einfluß der Wärme auf die Scheitellage . . . . .	57
G. Die größten Beanspruchungen des Hauptbogens . . . . .	57
H. Die Standfestigkeit des Ganzen . . . . .	59
J. Zusammenfassung . . . . .	59
1. Die allgemeine Untersuchung . . . . .	59
2. Die rechnerische Untersuchung . . . . .	64
I. Der Einfluß der Normal- und Querkraft . . . . .	64
II. Die elastische Änderung der Widerlager . . . . .	65
III. Die Zusatzspannungen . . . . .	65
K. Die vereinfachte Untersuchung für lotrechte Last . . . . .	65
1. Die Gestalt der Schnitt- und Umhüllungslinien . . . . .	65
2. Der symmetrische Kreisbogen . . . . .	67
a) Das Zeichenverfahren . . . . .	67
b) Das Rechenverfahren . . . . .	68
3. Der Kreisbogen mit $\frac{f}{l} = \frac{1}{4}$ . . . . .	69
4. Der unsymmetrische Kreisbogen . . . . .	69
5. Der kreisähnliche Korbbogen . . . . .	70
II. Die Bauausführung des Talüberganges bei Langenbrand . . . . .	71
A. Der Bauvorgang . . . . .	71
B. Erster Entwurf für das große Lehrgerüst . . . . .	74
C. Ausführungsentwurf für das große Lehrgerüst . . . . .	76
<b>3. Die Tennetschluchtbrücke . . . . .</b>	<b>79</b>
I. Die Bauausführung mit Bauprogramm . . . . .	79
II. Das Versetzgerüst . . . . .	88
III. Das Lehrgerüst . . . . .	88
IV. Der Zeug- und Arbeitsaufwand . . . . .	93
V. Der Einheitsaufwand . . . . .	94
<b>4. Die Rappenschluchtbrücke . . . . .</b>	<b>94</b>
I. Die Bauausführung . . . . .	94
II. Das Lehrgerüst . . . . .	97
III. Der Zeug- und Arbeitsaufwand für das Lehrgerüst . . . . .	98
<b>5. Schluß . . . . .</b>	<b>98</b>
<b>6. Anhang zur allgemeinen Untersuchung des eingespannten Bogens . . . . .</b>	<b>101</b>
Die Grundlagen für den ebenen Bogen ohne Gelenke . . . . .	101
Die Grundlagen für den räumlichen Bogen ohne Gelenke . . . . .	103

## Verzeichnis der Listen.

Liste	Seite
1 Grundlage der Rechnung für lotrechte und wagrechte Längslast . . . . .	26
2 Die Lastlagen, die zugehörigen Querschnittsgrößen und die Bogeneigenlast . . . . .	28
3 Einflußlinie $M_0$ . . . . . für lotrechte Last	29
4 Einflußlinie $H_0$ . . . . . " " "	29
5 Einflußlinie $G$ . . . . . " " "	30
6 Die Werte $M_0, H_0, G$ der rechten Brückenhälfte . . . . .	30
7 Der Beitrag der Normal- und Querkraft zu den Spannungen . . . . .	33
8 Der Einfluß der Normal- und Querkraft auf die Spannungen . . . . .	34
9 Die Kämpferkräfte mit Schnitt- und Umhüllungslinien . . . . .	35
10 Genäherte Einflußlinie der Scheitelsenkung . . . . .	36
11 Genaue Einflußlinie der Scheitelsenkung . . . . .	37
12 Die Teillasten der Übermauerung . . . . .	38
13 Einflußlinie $M_0$ . . . . . für wagrechte Längslast	43
14 Einflußlinie $H_0$ . . . . . " " "	44
15 Einflußlinie $G$ . . . . . " " "	44
16 Die Werte $M_0, H_0, G$ der rechten Brückenhälfte . . . . .	44
17 Die Kämpferkräfte mit Schnitt- u. Umhüllungslinien . . . . .	48
18 Grundlage der Rechnung . . . . . für wagrechte Querlast	49
19 Einflußlinie $W_1$ . . . . . " " "	51
20 Einflußlinie $W_2$ . . . . . " " "	51
21 Einflußlinie $W_3$ . . . . . " " "	51
22 Die Werte $W_1, W_2, W_3$ der rechten Brückenhälfte . . . . .	52
23 Vergleich der genauen und genäherten Rechnung . . . . .	56
24 Die Spannungen der oberen Faser durch lotrechte Last und Wärme . . . . .	58
25 Die Spannungen der unteren Faser durch lotrechte Last und Wärme . . . . .	58
26 Die größten Spannungen in den gefährdeten Querschnitten . . . . .	58
27 Zusammenstellung der Gleichungen für lotrechte Last, wagrechte Längslast und wagrechte Querlast . . . . .	60
28 Vergleich des Einflusses der Normal- und Querkraft auf die Lagerkräfte . . . . .	64
29 Vergleich des Einflusses der Normal- und Querkraft auf die Spannungen . . . . .	64
30 Vergleich des Einflusses der Normal- und Querkraft auf die Spannungen . . . . .	64
31 Der Einfluß der elastischen Widerlageränderung auf die Spannungen . . . . .	65
32 Vergleich der Lagerkräfte für lotrechte Last des genäherten Rechenverfahrens mit dem genauen	69
33 Lehrgerüstscheitelsenkungen . . . . . an der Tennetschluchtbrücke	86
34 Arbeits- und Zeugaufwand für die Bögen . . . . . " " "	86
35 Pfeilerbewegungen beim Wölben . . . . . " " "	87
36 Der Horizontalschub des Lehrgerüsts . . . . . " " "	90
37 Die Fachwerksspannungen in dem Lehrgerüst . . . . . " " "	91
38 Die wirklichen Spannungen in dem Lehrgerüst . . . . . " " "	91
39 Zusammenstellung der Lehrgerüstaufwendungen . . . . .	99
40 Zusammenstellung der Versetzgerüstaufwendungen . . . . .	99
41 Zusammenstellung von Überhöhung und Senkung der Lehrgerüste . . . . .	100
42 Zusammenstellung des gemittelten Arbeits- und Zeugaufwandes für 1 cbm Gewölbe . . . . .	100

# Verzeichnis der Abbildungen.

Abb.		Seite
<b>Die allgemeine Untersuchung des eingespannten Bogens.</b>		
1	Die Zerlegung des Kräfteplanes . . . . . für den gelenklosen, ebenen Bogen	2
2	Die Querschnittskräfte . . . . . " " " " " "	2
3	Die Lage des Achsenkreuzes . . . . . " " " " " "	4
4	Die Gestalt der Einflußlinien $M_0, H_0, G$ und $W_1, W_2, W_3$ . . . . . für lotrechte Last	6
5	Die Kämpferdruckschnitt- und Umhüllungslinien . . . . . " " " "	6
6	Die Ableitung der Einflußlinie der Scheitelsenkung . . . . . " " " "	8
7	Die Formänderung des Widerlagers . . . . . " " " "	11
8	Die Formänderung der Baugrubensohle . . . . . " " " "	12
9	Frei aufliegender und statisch unbestimmter Träger . . . . . bei wagrechter Längslast	13
10	Die Gestalt der Einflußlinien $M_0, H_0, G$ und $W_1, W_2, W_3$ . . . . . " " " "	14
11	Statisch unbestimmter und bestimmter Träger sowie die Querschnittskräfte . . . . . " " " "	15
12	Die Gestalt der Einflußlinien $W_1, W_2, W_3$ . . . . . " " " "	20
13	Die Spannungen im Querschnitt . . . . . " " " "	21
14	Die Kräfteplanzerlegung eines Bogens . . . . . " " " "	21
15	Die Formänderung bei ungleichmäßiger Erwärmung eines Bogenteiles . . . . . " " " "	23
16	Die Formänderung bei ungleichmäßiger Erwärmung des ganzen Bogens . . . . . " " " "	23
<b>Die rechnerische Untersuchung des Hauptbogens am Talübergang bei Langenbrand.</b>		
17	Ansicht des Talüberganges . . . . . " " " "	25
18	Die Form des Hauptbogens . . . . . " " " "	26
19	Die Einflußlinien $M_0, H_0, G$ und $W_1, W_2, W_3$ . . . . . für lotrechte Last	28
20	Die Einflußlinien $M_1, A, H_1$ und die Kämpferdruckschnitt- und Umhüllungslinien . . . . . " " " "	35
21	Die Einflußlinie $\sigma_0$ und $\sigma_1$ im Querschnitt 5 und die zeichnerische Bestimmung von $\sigma_0$ . . . . . " " " "	36
22	Die Einflußlinie der Scheitelsenkung . . . . . " " " "	38
23	Die Spannungen in der oberen und unteren Leibung . . . . . " " " "	39
24	Das Schema der Verkehrslast . . . . . " " " "	41
25	Die Veränderung der Kämpferlage bei elastischen Widerlagern . . . . . " " " "	42
26	Die Einflußlinien $M_0, H_0, G$ und $W_1, W_2, W_3$ . . . . . für wagrechte Längslast	43
27	Die Einflußlinien $M_1, A, H_1$ und die Kämpferdruckschnitt- und Umhüllungslinien . . . . . " " " "	47
28	Die Einflußlinien $\sigma_0, \sigma_1$ der Querschnitte 11 und 16 . . . . . " " " "	48
29	Die Einflußlinien $W_1, W_2, W_3$ . . . . . für wagrechte Querlast	50
30	Die Einflußlinien der Normal- und Tangentialspannungen im Querschnitt 0 und 5 . . . . . " " " "	53
31	Die Kräfteplanzerlegung für Querschnitt 11 und 16 . . . . . " " " "	55
32	Die größten Spannungen in den oberen Fasern von Querschnitt 11 und 16 . . . . . " " " "	59
33	Die größten Spannungen in der Fuge des rechten Kämpfers . . . . . " " " "	59
34	Das Zeichenverfahren für die Einflußlinien $M_1, A, H_1$ . . . . . bei lotrechter Last	67
35	Das Zeichenverfahren für die Einflußlinien $M_1, A, H_1$ beim Kreisbogen mit $\frac{f}{l} = \frac{1}{4}$ . . . . . " " " "	69
36	Der Hauptbogen des Talüberganges bei Forbach. Die Einflußlinien $M_1, A, H_1$ und die Kämpferdruckschnitt- und Umhüllungslinien bei lotrechter Last . . . . . " " " "	70
<b>Die Bauausführung des Talüberganges bei Langenbrand.</b>		
37	Blick fußabwärts auf das fertige Bauwerk . . . . . " " " "	71
38	Lageplan der Baustellen der drei Steinbrücken . . . . . " " " "	72
39	Darstellung des Wölbvorganges und der Lehrgerüstsenkungen am Hauptbogen . . . . . " " " "	73
40	Lehrgerüst für den Hauptbogen. Erster Entwurf . . . . . " " " "	75
41	Lehr- und Versetzerüst für den Hauptbogen. Ausführungsentwurf . . . . . " " " "	76
42	Blick fußaufwärts auf den Talübergang nach dem Schluß des ersten Ringes . . . . . " " " "	77

Abb.	<b>Die Bauausführung der Tennetschluchtbrücke.</b>	Seite
43	Blick flußaufwärts auf das fertige Bauwerk . . . . .	79
44	Ansicht und Grundriß . . . . .	80
45	Die Baueinrichtung und das Versetzgerüst . . . . .	81
46	Das Bauprogramm . . . . .	83
47	Die drei höchsten Pfeiler und ihre Absteckung . . . . .	84
48	Ansicht des Lehrgerüsts und Darstellung des Wölbvorganges . . . . .	85
49	Blick flußaufwärts auf die Baustelle . . . . .	86
50	Das Fachwerk des Lehrgerüsts . . . . .	89
51	Einzelheiten vom Lehrgerüst . . . . .	92
 <b>Die Bauausführung der Rappenschluchtbrücke.</b>		
52	Blick auf die Baustelle mit Lehrgerüst . . . . .	95
53	Das Lehrgerüst und Darstellung des Wölbvorganges . . . . .	96
 <b>Anhang zur allgemeinen Untersuchung des eingespannten Bogens.</b>		
54	Die Koordinatenänderungen durch M, N, Q beim ebenen Bogen . . . . .	102
55	Die Längen- und Winkeländerungen . . . . . beim räumlichen Bogen	104
56	Die Koordinatenänderungen . . . . . „ „ „	105

# 1. Allgemeine Untersuchung des eingespannten Bogens.

Die ganze Betrachtung setzt voraus, daß der Bogen dem Hookeschen Gesetze  $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$  für die Spannungen unterliegt, welche innerhalb der üblichen und der dem besonderen Baumaterial zugehörigen Grenzen bleiben. Wenn ein Bogen sich nicht aus einem Stoffe sondern z. B. aus Quadern und Mörtel zusammensetzt, so kommt ein entsprechender Mittelwert von  $E$  zur Wirkung, der auf Grund von Erfahrungen festgestellt wird.

Die äußeren Kräfte des Bogens lassen sich in solche, welche in der Trägerebene liegend lotrecht und wagrecht angreifen, und in solche, welche zu ihr senkrecht stehen, zerlegen; und demnach zerfällt das räumliche Problem in drei getrennte Untersuchungen. Die erste Untersuchung umfaßt die lotrecht in der Trägerebene wirkenden Kräfte der Eigen- und Verkehrslast, mit denen gleichzeitig auch der Einfluß der Wärme, das Ausweichen der Widerlager und die Scheitelbewegung behandelt wird. Sie überwiegt mit ihrem Einfluß, da ihre Kräfte weitaus am größten sind. Die zweite, welche die wagrecht in der Trägerebene liegenden Kräfte betrifft, kann häufig entfallen, da die in ihr enthaltene Bremskraft nur bei erheblichen Spannweiten mit großem Bogenpfeil sich bemerkbar macht. Sind jedoch über dem Hauptgewölbe weitgespannte Spargewölbe angebracht, welche erheblichen Schub ausüben, so muß die Untersuchung auch bei weniger großen Spannweiten durchgeführt werden. Die dritte Untersuchung ist bei größeren Spannweiten unentbehrlich, denn die Beanspruchungen durch den Wind müssen nachgewiesen werden; aber sie kann oft in einfacher und genäherter Weise erfolgen.

Das Ziel der ersten Untersuchung sind die Linien der größten Beanspruchung in der oberen und unteren Leibung  $\sigma^I$ ,  $\sigma^{II}$  unter Berücksichtigung der ruhenden Eigenlast des Bogens  $e\sigma$ , der ruhenden Übermauerung  $u\sigma$  und der beweglichen Last  $v\sigma$ . Unter Beachtung der durch die Wärme erzeugten Spannung  $t\sigma$  können aus den Linien der  $\sigma^I$ ,  $\sigma^{II}$  die gefährdeten Fugen des Bogens gefunden werden, so daß die beiden folgenden Untersuchungen sich nicht mehr über den ganzen Bogen ausdehnen müssen, sondern sich auf die wenigen gefährdeten Fugen beschränken können.

## I. Die Grundgleichungen für lotrechte Last und wagrechte Längslast.

Der beiderseits eingespannte Bogen, als ebenes Problem betrachtet, ist dreifach statisch unbestimmt. Eine beliebige Last ruft an jedem Kämpfer eine Lagerkraft hervor, die zu ihrer Bestimmung die Kenntnis ihrer Größe, Lage und Richtung erfordert. Da die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nur drei Gleichungen ergeben, so sind noch drei von den sechs Bestimmungsgrößen der Lagerwirkungen am rechten und linken Kämpfer unbekannt; sie werden bekannt, sobald die Formänderung des Bogens an drei Bedingungen gebunden ist. Für die Berechnung ersetzt man die Kämpferkraft gewöhnlich durch einen wagerechten Lagerschub  $H$ , einen lotrechten Lagerdruck  $A$  und ein Spannungsmoment  $M$ . Statt nun drei dieser sechs Größen als unbekannt aufzufassen, ist es zweckmäßig, jene zusätzlichen Lagerwirkungen des linken Kämpfers als Unbekannte einzuführen, welche infolge der statischen Unbestimmtheit zu den Lagerkräften des freiaufliegenden Trägers hinzutreten. Man denkt sich den wirklichen Kräftenplan 1 in die Pläne 2 und 3 aufgelöst.

Plan 2 stellt das Kräftebild des frei aufliegenden Trägers vor. Plan 3 zeigt die Lagerwirkungen, die nötig sind, um den durch die äußeren Kräfte veränderten freiaufliegenden Träger in die durch drei Bedingungen vorgeschriebene Form, meist die Urform 1, zu

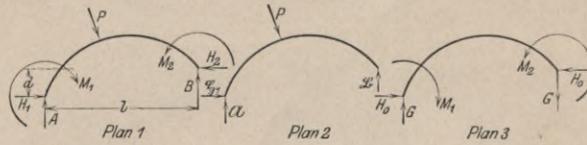


Abb. 1.

bringen, und hier offenbart sich die Wirkung der statischen Unbestimmtheit. Jeder der Kräftepläne muß für sich im Gleichgewicht sein. Nach der Erklärung der drei Pläne ist für lotrechte Lasten:

$$A = \mathfrak{A} + G, \quad H_1 = H_0, \quad M_1 = M_1, \quad B = \mathfrak{B} - G, \quad H_2 = -H_0, \quad M_2 = M_2 \quad (1)$$

Der weiteren Untersuchung wird ein rechtwinkliges Achsenkreuz zugrunde gelegt, dessen Y-Achse lotrecht ist. Indem man die drei zusätzlichen Lagerwirkungen des linken Kämpfers an den Achsursprung versetzt, ändert sich von den dreien nur  $M_1$  um das Versetzmoment zu seinem neuen Werte  $M_0 = M_1 + H_0 y_1 - G x_1$ . Es heißen sonach die für den linken Kämpfer zusätzlichen Lagerwirkungen bezogen auf den gewählten Achsursprung  $M_0, H_0, G$ .

Um eine Beziehung zwischen den äußeren und inneren Kräften zu finden, schneidet man im Achspunkte  $x, y$  den Träger senkrecht zur Achse; dann müssen die im Querschnitt auftretenden Spannungen — als äußere Kräfte betrachtet — mit den äußeren Kräften des linken Trägerteiles Gleichgewicht halten. Die im Schwerpunkt des Querschnitts gebildete Summe der Spannungen gibt eine Kraft  $R$  und ein Moment  $M$ . Die Kraft  $R$ , parallel der Tangenten und der Normalen zerlegt, gibt die Normalkraft  $N$  und die Querkraft  $Q$ , parallel den Koordinatenachsen zerlegt, jedoch die Kräfte  $H$  und  $V$ .

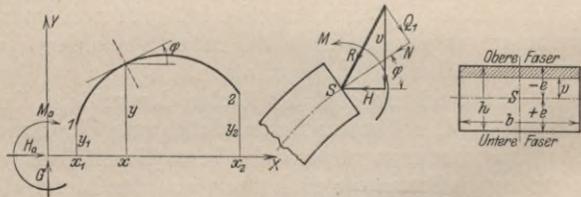


Abb. 2.

Der von der Achstangente mit der positiven X-Achse gebildete Winkel ist  $\varphi$ . Zwischen  $N, Q, M$  nebst  $H$  und  $V$  einerseits und den äußeren Kräften des linken Trägerteils andererseits bestehen die drei Gleichgewichtsbedingungen, daß die Summe der lotrechten und wagerechten Kräfte und der Momente verschwinden muß. Daraus finden sich die inneren Kräfte:

$$\begin{aligned} M &= M_0 - H_0 y + G x + \mathfrak{M}, & N &= H_0 \cos \varphi + G \sin \varphi + \mathfrak{N}, \\ Q &= H_0 \sin \varphi - G \cos \varphi + \mathfrak{Q} \end{aligned} \quad (2)$$

Unter  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{Q}$  sind Moment, Normal- und Querkraft des freiaufliegenden Trägers verstanden. Die im Sinne der positiven X- und Y-Achse gerichteten äußeren Kräfte und im Uhrzeigersinne drehenden äußeren Momente gelten als positiv. Ergibt sich für die Kraft  $N$  oder  $Q$  ein negativer Wert, so deutet dies eine der im Bild 2 gezeichneten entgegengesetzte Richtung — also eine vom Krümmungsmittelpunkt oder Trägerstumpf abgewendete Richtung an. Der Zusammenhang zwischen den äußeren Kräften und den inneren Spannungen ist durch die Gleichung 3 gegeben\*).

$$\sigma = -\frac{N}{F} - \frac{M}{Fr} - \frac{Mv}{Y} \cdot \frac{r}{r+v}; \quad Y = \int \frac{v^2 dFr}{r+v} = \sim J. \quad (3)$$

\*) Abgeleitet im Anhang.

Mit hinreichender Genauigkeit darf man für die Spannung  $\sigma$  in der beliebigen Querschnittsfaser  $v$  schreiben  $\sigma = -\frac{N}{F} - \frac{M}{F r} - \frac{M v}{J}$ .  $J$  ist das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die wagrechte Schwerlinie. Es möge beachtet werden, daß nach der Annahme im Bild 2 Druckspannungen auftreten, und daß  $\sigma$  dafür in Gleichung 3 mit Minus steht. Alle Druckspannungen erscheinen daher künftig negativ, alle Zugspannungen positiv.

Die Änderung in der gegenseitigen Lage der Kämpfer ist durch Gleichungsgruppe (4) gegeben \*):

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi_2 - \varphi_1) &= \frac{1}{E} \left[ \int_1^2 \left( \frac{N}{F r} + \frac{M}{Y} + \frac{M}{F r^2} \right) ds \right]; \\ \Delta(x_2 - x_1) &= \frac{1}{E} \left[ - \int_1^2 \left( N + \frac{M}{r} \right) \frac{dx}{F} + \int_1^2 \left( \frac{N}{F r} + \frac{M}{F r^2} + \frac{M}{Y} \right) y ds \right] + \\ &+ \frac{1}{E} \left[ - y_2 \int_1^2 \left( \frac{N}{F r} + \frac{M}{F r^2} + \frac{M}{Y} \right) ds + \int_1^2 \frac{Q}{\alpha F} dy - E(y_2 - y_1) \Delta\varphi_1 \right]; \quad (4) \\ \Delta(y_2 - y_1) &= \frac{1}{E} \left[ - \int_1^2 \left( N + \frac{M}{r} \right) \frac{dy}{F} - \int_1^2 \left( \frac{N}{F r} + \frac{M}{F r^2} + \frac{M}{Y} \right) x ds \right] + \\ &+ \frac{1}{E} \left[ x_2 \int_1^2 \left( \frac{N}{F r} + \frac{M}{F r^2} + \frac{M}{Y} \right) ds - \int_1^2 \frac{Q}{\alpha F} dx + E(x_2 - x_1) \Delta\varphi_1 \right]. \end{aligned}$$

Die Größe  $\alpha$  setzt sich aus 2 Faktoren zusammen  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ ;  $\alpha_1$  gibt den Bruchteil des Querschnittes an, über den man sich  $Q$  gleichmäßig verteilt denken muß, wenn die Formänderungsarbeit der gleichmäßig verteilten Spannungen  $\tau$  gleich der wirklichen Arbeit sein soll.  $\alpha_2$  ist das Verhältnis der Zug- und Druck- zur Schubelastizität  $\alpha_2 \cong \frac{2}{5}$ ;  $\alpha_1$  ist nur von der geometrischen Form des Querschnittes, die oft ein Rechteck ist, abhängig. Die Verschiebung eines Flächenelementes im Abstände  $v$  von der neutralen Achse und mit der Schubspannung  $\tau$  ist  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ , die dabei verrichtete Arbeit der Spannung des Flächenelementes

ist  $\tau dF \gamma$ , die Gesamtarbeit des Querschnittes:  $\int_{-e}^{+e} \tau dF \gamma$ . Die Arbeit der äußeren Kraft ist  $Q$  mal der unbekanntenen mittleren Schiebung  $\gamma_m$

$$\begin{aligned} Q \gamma_m &= \int_{-e}^{+e} \tau \gamma dF = \int_{-e}^{+e} \tau^2 \cdot \frac{dF}{G}, \quad \tau = Q 6 \frac{e^2 - v^2}{b h^3}, \quad \gamma_m = \frac{Q}{\alpha_1 F G} = \frac{6}{5} \frac{Q}{F G}, \\ \alpha_1 &= \frac{5}{6}, \quad \alpha = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{für jedes Rechteck.} \end{aligned}$$

Aus den Gl. 4 finden sich die zusätzlichen Lagerkräfte  $M_0$ ,  $H_0$ ,  $G$ , wenn man die inneren Kräfte  $N$ ,  $M$ ,  $Q$  durch die äußeren ausdrückt, wie es in den Gl. 2 geschah. Um die Untersuchung zu vereinfachen, wird ein symmetrischer Bogen angenommen und der Achsprung so auf die lotrechte Symmetrieachse gelegt, daß

$$\int_1^2 \left( \frac{\cos \alpha_0}{F r} - \frac{y}{Y} \right) ds = 0 \quad (5)$$

\*) Abgeleitet im Anhang.

Nach einigen Umformungen erhält man sodann die Gleichungen\*):

$$M_0 = \frac{E \Delta(\varphi_2 - \varphi_1) - \int_1^2 \mathfrak{M} ds \left( \frac{1}{J} + \frac{1}{F r^2} \right) - \int_1^2 \mathfrak{M} \frac{ds}{F r}}{\int_1^2 \left( \frac{1}{J} + \frac{1}{F r^2} \right) ds}$$

$$H_0 = \frac{E[-\Delta l + k \Delta(\varphi_2 - \varphi_1)] + \int_1^2 \mathfrak{M} ds \left( \frac{y}{J} - \frac{\cos \alpha_0}{F r} \right) - \int_1^2 \mathfrak{M} \cos \alpha_0 \frac{ds}{F} + \int_1^2 \mathfrak{Q} \sin \varphi \frac{ds}{\alpha F}}{\int_1^2 \left( \frac{y^2}{J} + \frac{\cos^2 \alpha_0}{F} + \frac{\sin^2 \varphi}{\alpha F} \right) ds} \quad (6)$$

$$G = \frac{E[-\Delta d + \frac{l}{2} \Delta(\varphi_2 + \varphi_1)] - \int_1^2 \mathfrak{M} x \frac{ds}{J} - \int_1^2 \mathfrak{Q} \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F}}{\int_1^2 x^2 \frac{ds}{J} + \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}}$$

Die zusätzlichen Lagerkräfte sind hiernach als Abhängige der Bogenform, der äußeren Kräfte und der Lageränderungen bestimmt. In ihrer jetzigen Form ist der Einfluß sowohl des Momentes als auch der Normal- und Querkraft enthalten und kein Glied vernachlässigt; nur für Y wurde J gesetzt.

## II. Die Lage des Achsenkreuzes.

Die Gleichung 5 und die Bedingung, daß die Y-Achse Symmetrieachse werde, legen das Achsenkreuz eindeutig fest. Durch den beliebigen Punkt M — beim Kreisbogen ist dies zweckmäßig der Mittelpunkt — wird ein Hilfskreuz M X' und M Y' gelegt. Der gesuchte Abstand c ist alsdann

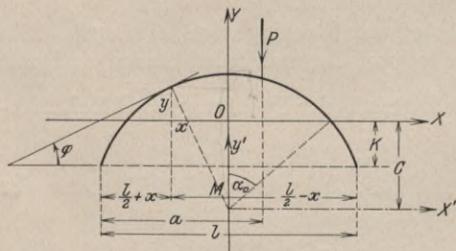


Abb. 3.

$$c = \frac{\int_1^2 y' \frac{ds}{J}}{\int_1^2 \frac{ds}{J} + \int_1^2 \frac{ds}{F r^2}} \quad (7)$$

Punkt 0 liegt nach Aussage der Gleichung etwa im Schwerpunkte der in der Bogenachse liegend gedachten elastischen Gewichte  $\frac{ds}{J}$ .

## III. Die lotrechten Kräfte.

**1. Die Einflußlinien der zusätzlichen Lagerkräfte.** In den Gleichungen 6 kommen im Nenner nur Ausdrücke vor, die von der Bogenform abhängen, und im Zähler stehen die Glieder, welche die Abhängigkeit von den äußeren Lasten ausdrücken. Um die Einflußlinien zu erhalten, müssen  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{Q}$  für den Sonderfall der wandernden lotrechten Einzelast  $P = 1 t$  umgeformt werden. Nach Abb. 3 ist:

$$\frac{l}{2} + x < a, \quad \mathfrak{M} = + \frac{l-a}{l} \left( \frac{l}{2} + x \right) \quad \frac{l}{2} + x > a, \quad \mathfrak{M} = + \frac{a}{l} \left( \frac{l}{2} - x \right)$$

\*) Abgeleitet im Anhang.

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} &= + \frac{l-a}{l} \sin \varphi & \mathfrak{N} &= - \frac{a}{l} \sin \varphi \\ \mathfrak{D} &= + \frac{l-a}{l} \cos \varphi & \mathfrak{D} &= - \frac{a}{l} \cos \varphi \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke in Gruppe 6 eingeführt geben für starre Kämpfer folgende Gleichungsgruppe:

$$\begin{aligned} M_0 &= - \frac{a}{2} \frac{\int_1^a \frac{ds}{J} + \int_1^a x \frac{ds}{J} + \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \frac{ds}{Fr^2}}{\int_1^2 \frac{ds}{J} + \int_1^2 \frac{ds}{Fr^2}} = - \frac{a}{2} - W_1 \\ H_0 &= + \frac{\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a y \frac{ds}{J} + \int_1^a xy \frac{ds}{J} - c \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \frac{ds}{Fr^2} + \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F}}{\int_1^2 y^2 \frac{ds}{J} + c^2 \int_1^2 \frac{ds}{Fr^2} + \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}} = + W_2 \quad (8) \\ G &= + \frac{a}{l} \frac{\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a x \frac{ds}{J} + \int_1^a x^2 \frac{ds}{J} + \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}}{\int_1^2 x^2 \frac{ds}{J} + \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}} = + \frac{a}{l} - W_3 \end{aligned}$$

Für den weiteren Fortgang sind nur die sogenannten Grundwerte  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ , welche in Gruppe 9 noch besonders zusammengestellt sind, nötig.

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \frac{ds}{J} + \int_1^a x \frac{ds}{J} + \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \frac{ds}{Fr^2}}{\int_1^2 \frac{ds}{J} + \int_1^2 \frac{ds}{Fr^2}} \\ W_2 &= \frac{\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a y \frac{ds}{J} + \int_1^a xy \frac{ds}{J} - \left(\frac{l}{2} - a\right) c \int_1^a \frac{ds}{Fr^2} + \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F}}{\int_1^2 y^2 \frac{ds}{J} + c^2 \int_1^2 \frac{ds}{Fr^2} + \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}} \quad (9) \\ W_3 &= \frac{\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a x \frac{ds}{J} + \int_1^a x^2 \frac{ds}{J} + \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}}{\int_1^2 x^2 \frac{ds}{J} + \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}} \end{aligned}$$

Die Nenner der drei Gleichungen heißen künftig  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ .

**2. Die Gestalt der Einflußlinien und die Grenzwerte.** Beim symmetrischen Träger kann man aus den Werten der 3 Lagergrößen für die Lastlage a auf jene, welche der symmetrischen Lastlage  $l - a$  zugehören, schließen, indem man in den Gleichungen 9 das a durch  $l - a$  ersetzt und den neuen Ausdruck mit dem früheren vergleicht.

$$M_{0,a} = + M_{0,l-a}, H_{0,a} = + H_{0,l-a}, G_a = - G_{l-a} \tag{10}$$

$$W_{1,l-a} = - \left( \frac{l}{2} - a \right) + W_{1,a}, W_{2,a} = + W_{2,l-a}, W_{3,l-a} = + 1 - W_{3,a}$$

Die Linien der W haben einfache Beziehungen zwischen den symmetrischen Lastlagen zugehörigen Werten und entsprechend einfache geometrische Konstruktionen.

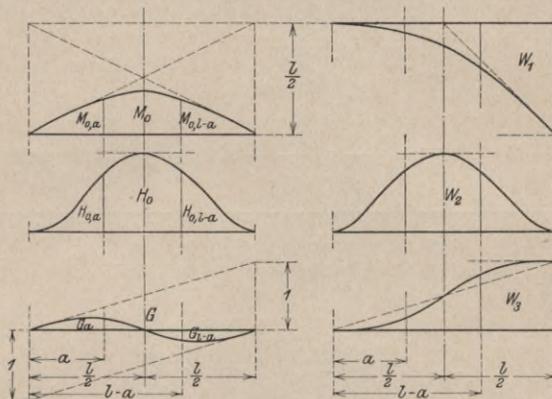


Abb. 4.

Für die 3 ausgezeichneten Lastlagen über den Kämpfern und dem Bogenscheitel sind die Grenzwerte:

$$a = 0, W_1 = 0; \quad a = \frac{l}{2}, W_1 = \frac{1}{N_1} \cdot \int_1^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J}; \quad a = l, W_1 = - \frac{l}{2}$$

$$,, \quad W_2 = 0; \quad ,, \quad W_2 = \frac{1}{N_2} \cdot \left[ \int_1^{\frac{l}{2}} x y \frac{ds}{J} + \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right]; \quad ,, \quad W_2 = 0$$

$$,, \quad W_3 = 0; \quad ,, \quad W_3 = + \frac{1}{2}; \quad ,, \quad W_3 = + 1$$

**3. Die Kämpferdruckschnitt- und Umhüllungslinien.**

Die Last P ruft die beiden Lagerdrücke  $R_1$  und  $R_2$  hervor und schneidet sich mit ihnen im Punkte S. Beim Wandern der Last beschreibt S die Linie a a, Kämpferdruckschnittlinie genannt, und umhüllt  $R_1$  die Kämpferdruckumhüllungslinie bb bzw.  $R_2$  die Linie cc. Bei gegebenen Linien a, b, c findet man die der bestimmten Lastlage a zugehörigen Kämpferdrücke, wenn man die Lastlinie P mit der Linie aa schneidet und vom Schnittpunkte S die Tangenten an die beiden Umhüllungslinien b und c zeichnet.

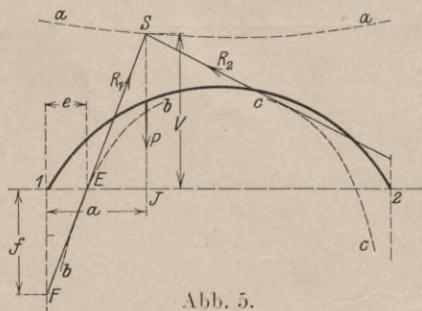


Abb. 5.

Die Schnittlinie a-a ist bestimmt durch  $JS = v$  und jede Umhüllungslinie durch die Tangenten von S aus, von welchen die Strecken  $e = \overline{IE}$  oder  $f = \overline{IF}$  auf der Wagrechten und Lotrechten durch die Kämpfer abgeschnitten werden.

$$\begin{aligned}
 M_1 &= -A e = -H_1 f = -W_1 + W_2 k + W_3 \frac{l}{2} - a \\
 e &= \frac{W_1 - W_2 k - W_3 \cdot \frac{l}{2} + a}{1 - W_3}, \quad f = -k + \frac{W_1 - W_3 \cdot \frac{l}{2} + a}{W_2}, \\
 v &= +k - \frac{W_1 - W_3 \cdot \left(\frac{l}{2} - a\right)}{W_2}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Die gefundenen Linien lassen leicht die Lastscheiden für die äußeren Fasern eines Querschnittes ermitteln, wenn noch die beiden Kernlinien des Bogens gezeichnet werden. Die Lastscheiden für die innere Faser des Querschnittes werden gefunden, indem man von dem der Faser abgelegenen Kernpunkte des Querschnittes an die Umhüllungslinien die zwei Tangenten zieht, sie bis zu den Schnitten mit der Schnittlinie verlängert und durch die beiden Schnittpunkte die Senkrechten fällt, welche die Lastscheiden begrenzen. Eine Last, die hier steht, ruft in der betr. Faser keine Spannung hervor; wandert sie nach rechts, so ist die Spannung entgegengesetzt jener, welche durch eine links gelegene Laststellung entsteht.

Die Querschnittsform des Bogens ist gewöhnlich ein Rechteck und seine Kernfigur ein Parallelogramm, dessen Ecken auf den Symmetrieachsen liegen und sie in drei gleiche Teile teilen.

**4. Die Einflußlinie der Spannungsgrößtwerte.** In einem Querschnitte treten Normal- und Tangentialspannungen auf. Die Normalspannungen erhalten innerhalb des Querschnittes ihren Größtwert in den beiden äußeren Fasern, die Tangentialspannungen in der neutralen Faser. Nach Gleichung 3 ist die Normalspannung im Abstände  $v$  von der neutralen Faser

$$\sigma = -\frac{N}{F} - \frac{M}{F r} - \frac{M v}{J}, \quad F = b h, \quad J = \frac{b h^3}{12} \quad (\text{Abb. 2 Seite 2})$$

Für  $v = \mp e$  wird  $\sigma = \sigma_0$  bez.  $\sigma_u$ .

$$\sigma_0 = -\frac{N}{F} - \frac{M}{F r} - \frac{M}{W}, \quad \sigma_u = -\frac{N}{F} - \frac{M}{F r} + \frac{M}{W}, \quad \frac{J}{e} = W$$

$\sigma_0$  ist die Spannung in der oberen,  $\sigma_u$  jene in der unteren Faser, und Druck ist negativ angesetzt.

Die Querkraft ruft im Abstände  $v$  von der neutralen Faser die Schubspannung hervor

$$\tau = Q \cdot \frac{\int_v^e v dF}{u J} = \frac{3}{2} Q \frac{h^2 - 4 v^2}{b h^3}$$

Mit Hilfe der Gruppe 9 ergeben sich für  $M, N, Q$  in Gruppe 2 einfache Ausdrücke, welche die Werte des freiaufliegenden Trägers und damit deren langweilige Ausrechnung ausschalten.

$$\begin{aligned}
 M &= M_0 - H_0 y + G x + \mathfrak{M}, & N &= + H_0 \cos \varphi + G \sin \varphi + \mathfrak{N}, \\
 Q &= - H_0 \sin \varphi + G \cos \varphi + \mathfrak{Q}.
 \end{aligned}$$

Je nach der Lastlage ist nun:

$$\begin{aligned}
 a < \frac{l}{2} + x, & \quad M = -W_1 - W_2 y - W_3 x \\
 & \quad N = +W_2 \cos \varphi - W_3 \sin \varphi \\
 & \quad Q = -W_2 \sin \varphi - W_3 \cos \varphi \\
 a > \frac{l}{2} + x, & \quad M = -W_1 - W_2 y - W_3 x + \frac{l}{2} - a + x \\
 & \quad N = +W_2 \cos \varphi - W_3 \sin \varphi + \sin \varphi \\
 & \quad Q = -W_2 \sin \varphi - W_3 \cos \varphi + \cos \varphi
 \end{aligned} \tag{12}$$

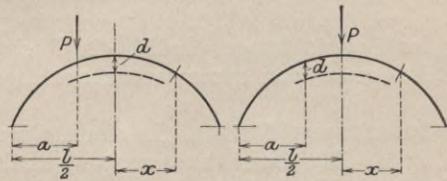
Die Einflußlinien der M, N, Q müssen auch beim symmetrischen Träger für die ganze Brücke berechnet werden, aber die Arbeit wird geringfügig, da die einzelnen Summanden bei symmetrischer Lastlage gleiche absolute Größe haben.

$$\begin{aligned} M_{l-a} &= -W_{1,a} - W_{2,a}y + W_{3,a}x - (l-2a) \\ N_{l-a} &= +W_{2,a}\cos\varphi + W_{3,a}\sin\varphi \\ Q_{l-a} &= -W_{2,a}\sin\varphi + W_{3,a}\cos\varphi \end{aligned}$$

**5. Die Einflußlinie der Scheitelsenkung.** Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen entnimmt man zur Berechnung der Scheitelsenkung bei beliebiger Lastlage a dem wirklichen Kräfteplan W die Wege, einem gedachten Plan I die Kräfte und erhält durch die Gleichung

$$E d = \int_1^2 m_1 \cdot \frac{M ds}{J} + \int_1^2 n_1 \cdot \frac{N ds}{F} + \int_1^2 q_1 \cdot \frac{Q ds}{\alpha F}$$

die Größe der wirklichen Senkung d.



Plan W mit M, N, Q. Plan I mit  $m_1$ ,  $n_1$ ,  $q_1$ .  
Abb. 6.

Für den Kräfteplan I ist nach den Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} + x < \frac{l}{2}, \quad m_1 &= -w_1 - w_2 y + \frac{x}{2}, & \frac{l}{2} + x > \frac{l}{2}, \quad m_1 &= -w_1 - w_2 y - \frac{x}{2} \\ n_1 &= +w_2 \cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{2}, & n_1 &= +w_2 \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{2} \\ q_1 &= -w_2 \sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{2}, & q_1 &= -w_2 \sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{2} \end{aligned}$$

Dabei heißen die der Lastlage  $a = \frac{l}{2}$  entsprechenden Grundwerte  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  und haben die Größe:

$$w_1 = \frac{1}{N_1} \int_1^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J}, \quad w_2 = \frac{1}{N_2} \left[ \int_1^{\frac{l}{2}} xy \frac{ds}{J} + \int_1^{\frac{l}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \frac{ds}{\alpha F} \right], \quad w_3 = +\frac{1}{2}$$

Aus dem Kräfteplan W entstammen:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} + x < a, \quad M &= W_1 - W_2 y - W_3 x + \frac{l}{2} - a + x \\ N &= +W_2 \cos\varphi - W_3 \sin\varphi + \sin\varphi \\ Q &= -W_2 \sin\varphi - W_3 \cos\varphi + \cos\varphi \\ \frac{l}{2} + x > a, \quad M &= -W_1 - W_2 y - W_3 x \\ N &= +W_2 \cos\varphi - W_3 \sin\varphi \\ Q &= -W_2 \sin\varphi - W_3 \cos\varphi. \end{aligned}$$

Mit diesen Werten werden die Integrale der Gleichung für E d entwickelt:

$$\int_1^2 m_1 M \frac{ds}{J} = -w_1 \int_1^2 M \frac{ds}{J} - w_2 \int_1^2 M y \frac{ds}{J} + \frac{1}{2} \left[ \int_1^{\frac{l}{2}} M x \frac{ds}{J} - \int_{\frac{l}{2}}^2 M x \frac{ds}{J} \right]$$

$$\int_1^2 M \frac{ds}{J} = -W_1 \int_1^2 \frac{ds}{J} - W_2 c \int_1^2 \frac{ds}{F r^2} + \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a \frac{ds}{J} + \int_1^a x \frac{ds}{J}$$

$$\int_1^2 M y \frac{ds}{J} = -W_1 c \int_1^2 \frac{ds}{F r^2} - W_2 \int_1^2 y^2 \frac{ds}{J} + \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a y \frac{ds}{J} + \int_1^a x y \frac{ds}{J}$$

$$\int_1^{\frac{l}{2}} M x \frac{ds}{J} = -W_1 \int_1^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J} - W_2 \int_1^{\frac{l}{2}} x y \frac{ds}{J} - W_3 \int_1^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{ds}{J} + \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a x \frac{ds}{J} + \int_1^a x^2 \frac{ds}{J}$$

$$-\int_{\frac{l}{2}}^2 M x \frac{ds}{J} = -W_1 \int_1^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J} - W_2 \int_1^{\frac{l}{2}} x y \frac{ds}{J} + W_3 \int_1^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{ds}{J}$$

$$\int_1^2 w_1 \cdot N \frac{ds}{F} = w_2 \int_1^2 N \cos \varphi \frac{ds}{F} + \frac{1}{2} \left[ \int_1^{\frac{l}{2}} N \sin \varphi \frac{ds}{F} - \int_{\frac{l}{2}}^2 N \sin \varphi \frac{ds}{F} \right]$$

$$\int_1^2 N \cos \varphi \frac{ds}{F} = W_2 \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{F} + \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F}$$

$$\int_1^{\frac{l}{2}} N \sin \varphi \frac{ds}{F} = W_2 \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F} - W_3 \int_1^{\frac{l}{2}} \sin^2 \varphi \frac{ds}{F} + \int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{F}$$

$$\int_{\frac{l}{2}}^2 N \sin \varphi \frac{ds}{F} = -W_2 \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F} - W_3 \int_1^{\frac{l}{2}} \sin^2 \varphi \frac{ds}{F}$$

$$\int_1^2 q_1 Q \frac{ds}{\alpha F} = -w_2 \int_1^2 Q \sin \varphi \frac{ds}{\alpha F} + \frac{1}{2} \left[ \int_1^{\frac{l}{2}} Q \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} - \int_{\frac{l}{2}}^2 Q \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right]$$

$$\int_1^2 Q \sin \varphi \frac{ds}{\alpha F} = -W_2 \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} + \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F}$$

$$\int_1^{\frac{l}{2}} Q \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} = -W_2 \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} - W_3 \int_1^{\frac{l}{2}} \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} + \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}$$

$$\int_{\frac{l}{2}}^2 Q \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} = +W_2 \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} - W_3 \int_1^{\frac{l}{2}} \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}$$

Die Gleichung E · d verändert sich durch diese Integralwerte zu:

$$\begin{aligned}
 E \cdot d = & W_1 \left[ w_1 \int_1^2 \frac{ds}{J} + w_2 \cdot c \int_1^2 \frac{ds}{F r^2} - \int_1^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J} \right] + \\
 + W_2 \cdot & \left[ w_1 \cdot c \int_1^2 \frac{ds}{F r^2} + w_2 \left( \int_1^2 y^2 \frac{ds}{J} + \int_2^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{F} + \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right) - \int_1^{\frac{l}{2}} x y \frac{ds}{J} + \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F} - \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right] + \\
 & - w_1 \left[ \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a \frac{ds}{J} + \int_1^a x \frac{ds}{J} \right] + \\
 & - w_2 \left[ \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a y \frac{ds}{J} + \int_1^a x y \frac{ds}{J} - \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F} + \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a x \frac{ds}{J} + \int_1^a x^2 \frac{ds}{J} + \int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{F} + \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right].
 \end{aligned}$$

Die Faktoren von  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $\frac{1}{2}$  sind fast identisch mit den Zählerwerten von  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  in Gruppe 9 und werden durch sie ersetzt.

$$\begin{aligned}
 E d = & - W_1 \left[ w_1 N_1 + w_1 \int_1^2 \frac{ds}{F r^2} - w_2 c \int_1^2 \frac{ds}{F r^2} \right] + \\
 - W_2 \left[ & w_2 N_2 - w_1 c \int_1^2 \frac{ds}{F r^2} - w_2 \left( \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{F} - c^2 \int_1^2 \frac{ds}{F r^2} \right) - \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F} \right] + W_3 w_3 N_3 + \\
 + w_1 \cdot & \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a \frac{ds}{F r^2} - w_2 \left[ \left( \frac{l}{2} - a \right) \cdot c \int_1^a \frac{ds}{F r^2} - \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F} \right] + w_3 \int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{F}.
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  sind konstante Größen ebenso wie  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  als die der Lastlage  $a = \frac{l}{2}$  entsprechenden Grundwerte. Die Gleichung enthält eine Anzahl geringwertiger Glieder und kann ohne erhebliche Einbuße an Genauigkeit geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 E d = & - W_1 w_1 N_1 - W_2 w_2 N_2 + W_3 w_3 N_3 - w_1 \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a \frac{ds}{F r^2} + \\
 & - w_2 \left[ \left( \frac{l}{2} - a \right) c \int_1^a \frac{ds}{F r^2} - \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F} \right] + w_3 \int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{F}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Wenn man die alle Nebenkräfte enthaltenden Gleichungen für die Werte  $W$  benutzt, so darf man noch weiter alle Glieder mit  $r^2$  im Nenner fortlassen, ohne damit den Einfluß von Normal oder Querkraft wesentlich zu vernachlässigen. Dann ergibt sich für die Scheitel-senkung die einfache Gleichung

$$E d = - W_1 w_1 N_1 - W_2 w_2 N_2 + W_3 w_3 N_3. \tag{14}$$

Die Einflußlinie für  $d$  leitet sich somit auf einfachste Art aus denen der Grundwerte  $W$  ab,

indem man sie jeweils mit den konstanten Faktoren  $w_1 N_1$ ,  $w_2 N_2$ ,  $w_3 N_3$  vervielfacht und zusammenfügt.

$$w_1 N_1 = \int_1^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J}, \quad w_2 N_2 = \int_1^{\frac{l}{2}} x y \frac{ds}{J} + \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F}, \quad w_3 N_3 = \int_1^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{ds}{J} + \int_1^{\frac{l}{2}} \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}.$$

**6. Der Einfluß der Formänderung der Widerlager.** Der ganzen bisherigen Entwicklung liegt die Elastizität des Baustoffes, aus dem der Träger gebildet ist, zugrunde, und da das Widerlager auch elastisch ist wie der Bogen, so verhält es sich bei Einwirkung von äußeren Lasten keineswegs starr, sondern übernimmt einen Teil der Formänderung. Die Schwierigkeit, diese richtig zu ermitteln, liegt darin, daß die Querschnittsabmessungen des Widerlagers sehr groß sind im Vergleich zur Längenausdehnung. Die Gleichungen der Elastizitätslehre sind jedoch nur dann gültig, wenn vor der Formänderung ebene Querschnitte auch nachher noch eben sind, eine Bedingung, welche verhältnismäßig geringe Querschnittsabmessungen, d. h. Stabform, voraussetzt. Aus diesen Gründen hat die folgende Ableitung, welche unnachgiebigen Untergrund annimmt, bedingte Gültigkeit. Der Widerlagerkörper ist als Prismatoid mit zwei zueinander senkrechten Symmetrieebenen angenommen. Untersucht wird die Lageänderung der ebenen Fläche der Kämpferfuge unter dem Einfluß einer Achsialkraft, einer Querkraft und eines Momentes.

Da die Seitenflächen meist keinen oder nur einen schwachen Anzug haben, kann die Breite  $b$  konstant angenommen werden.

$$F = s \cdot \frac{F_2 - F_1}{l_0} + F_1, \quad P_1 = A \sin \varphi_1 + H_1 \cos \varphi_1, \quad Q_1 = A \cos \varphi_1 - H_1 \sin \varphi_1, \quad M_1 = M_1.$$

$$\Delta l_0 = \int_0^{l_0} P \cdot \frac{ds}{E F}, \quad E \Delta l_0 = P \int_0^{l_0} \frac{ds}{F_1 + \frac{F_2 - F_1}{l_0} \cdot s} = P \cdot \frac{l_0}{F_2 - F_1} \cdot l_n \left( \frac{F_2}{F_1} \right),$$

$l_n$  ist der natürliche Logarithmus.

Durch Querkraftwirkung der Kraft  $Q$  entsteht die Verschiebung  $\Delta h'$  und durch Biegung die Verschiebung  $\Delta h''$ . Zunächst wird die Verschiebung  $\Delta h'$  in der Querschnittsebene ermittelt.

$$E \Delta h' = \int_0^{l_0} Q \frac{ds}{\alpha F} = \frac{Q}{\alpha} \cdot \frac{l_0}{F_2 - F_1} \cdot l_n \left( \frac{F_2}{F_1} \right).$$

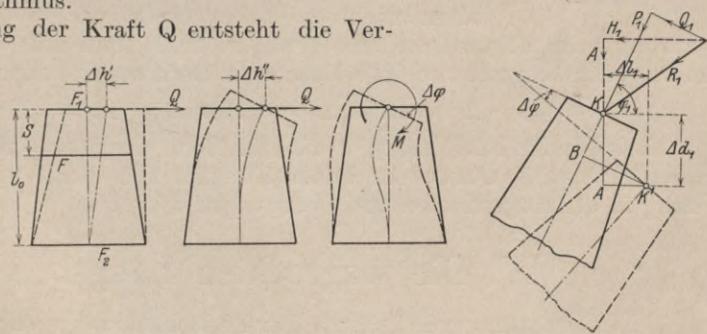


Abb. 7.

Ein Moment  $M$  verursacht die Drehung des oberen Querschnittes um  $\Delta \varphi$ .

$$E \Delta \varphi = \int_0^{l_0} M \frac{ds}{J} = M l_0 \cdot \frac{6 (h_2 + h_1)}{h_2^2 h_1^2 b}. \tag{15}$$

$$E \Delta h'' = \int_0^{l_0} m_1 M \frac{ds}{J}, \quad m_1 = +s, \quad M = +Qs,$$

$$E \Delta h'' = \frac{12 Q l_0^2}{(h_2 - h_1)^2} \left[ \frac{l_n \left( \frac{h_2}{h_1} \right) l_0}{h_2 - h_1} - \frac{3 h_2 - h_1}{2 h_2^2} + \frac{1}{h_1} \right].$$

Insgesamt ist sonach die Änderung senkrecht zur Längsachse durch Q

$$E \Delta h = E (\Delta h' + \Delta h'') = \\ = Q \cdot \left[ \frac{l_0}{\alpha (F_2 - F_1)} \cdot l_n \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{12 l_0^2}{b (h_2 - h_1)^2} \left( \frac{l_0}{h_2 - h_1} \cdot l_n \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \frac{1}{h_1} - \frac{3 h_2 - h_1}{2 h_2^2} \right) \right] \quad (16)$$

Mit Hilfe von  $\Delta l_0$ ,  $\Delta h$ ,  $\Delta \varphi$  ist die Lage des Kämpferpunktes und der Kämpferfuge nach der Formänderung bekannt. Um die Gleichung für die Rechnungen zu verwenden, ist folgender Weg notwendig:

Zunächst werden unter der Annahme völlig starrer Widerlager die durch die gegebene Belastung auftretenden Kämpferkräfte gerechnet und die Formänderungen der Widerlager durch diese Kämpferdrücke ermittelt. Hierauf ergibt sich die Änderung der Lagerkräfte durch das Nichtstarrsein der Widerlager aus den Gleichungen 6 S. 4

$$\Delta M_0 = \frac{E}{N_1} \Delta (\varphi_2 - \varphi_1), \Delta H_0 = \frac{E}{N_2} \cdot [-\Delta l + k \Delta (\varphi_2 - \varphi_1)], \Delta G = \frac{E}{N_3} \left[ -\Delta d + \frac{l}{2} \Delta (\varphi_1 + \varphi_2) \right]. \quad (17)$$

Hierin setzt sich  $\Delta l$  und  $\Delta d$  aus den Änderungen beider Kämpfer zusammen (Abb. 7):

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2, \Delta d = \Delta d_1 - \Delta d_2, \\ \Delta l_1 = \Delta h \sin \varphi_1 - \Delta l_0 \cos \varphi_1, \Delta d_1 = \Delta h \cos \varphi_1 + \Delta l_0 \sin \varphi_1, \Delta \varphi_1 = \Delta \varphi.$$

Hat man die Änderung der Lagerwirkungen bestimmt, so müßte man mit den neuen Kämpferdrücken das Verfahren wiederholen, bis man jene Kämpferkräfte gefunden hat, welche den veränderten Widerlagern genau entsprechen. Bei dem geringen Maß von Genauigkeit der Untersuchung genügt jedoch eine einmalige Berechnung.

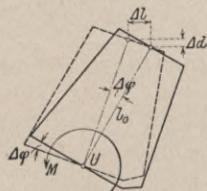


Abb. 8.

Will man weiter noch den Einfluß eines Nachgebens im Untergrunde feststellen, so genügt es unter Annahme starrer Widerlager, die Veränderung in der Lage der beiden Kämpfer zu ermitteln und in Gruppe 17 einzusetzen. Ungleichmäßige Setzungen, seltener hervorgerufen durch ungleichmäßige Beschaffenheit des Baugrundes als durch ungleichmäßige Beanspruchung durch die Endmomente, sind vor allem wichtig. Neben ihnen spielen die Absolutgrößen der Endresultanten im allgemeinen eine geringere Rolle und man berücksichtigt nur die Verdrehung der Baugrubensohle, welche dem Endmoment proportional ist:

$$\Delta \varphi = \alpha M, \Delta l = l_0 \Delta \varphi \sin \varphi, \Delta d = l_0 \Delta \varphi \cos \varphi.$$

Nachdem für beide Kämpfer die drei Werte ermittelt sind, wird die Gesamtänderung in der gegenseitigen Lage der beiden Kämpfer und damit auch nach Gruppe 17 die Änderung in den Lagerkräften und Spannungen bekannt.

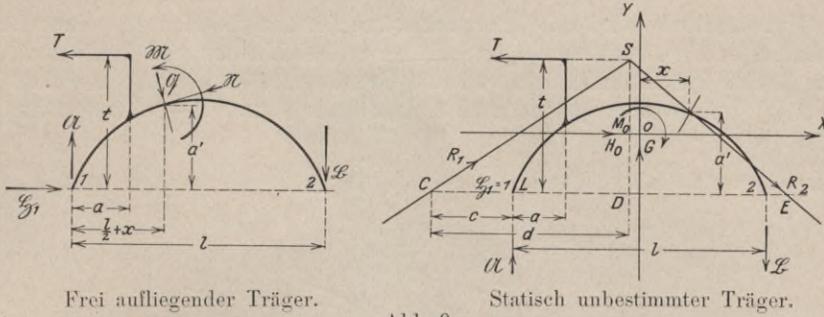
## IV. Die wagrechten Längsbelastungen.

**1. Der frei aufliegende Träger.** Der Einfachheit wegen sei wieder ein Träger mit gleich hohen Lagern angenommen, dessen linkes Lager fest und rechtes beweglich ist. Die drei Lagerdrücke sind  $\mathfrak{A} = +T \cdot \frac{t}{l} = -\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{S}_1 = -T$ . Der beliebige Querschnitt ist  $a'$  von der Kämpferlinie entfernt und hat als Summe seiner Spannungen das Moment  $\mathfrak{M}$ , die Normalkraft  $\mathfrak{N}$  und die Querkraft  $\mathfrak{Q}$ , welche als äußere Kräfte angesehen werden. Da sie das Gleichgewicht am linken Trägerteil halten müssen, gelten die Gleichungen

$$\frac{l}{2} + x < a, \mathfrak{M} = T \left[ \frac{t}{l} \left( \frac{l}{2} + x \right) - a' \right] \quad \frac{l}{2} + x > a, \mathfrak{M} = -T \frac{t}{l} \left( \frac{l}{2} - x \right) \\ \mathfrak{N} = T \left( \frac{t}{l} \sin \varphi + \cos \varphi \right) \quad \mathfrak{N} = T \frac{t}{l} \sin \varphi \\ \mathfrak{Q} = T \left( \frac{t}{l} \cos \varphi - \sin \varphi \right) \quad \mathfrak{Q} = T \frac{t}{l} \cos \varphi$$

Die gleichen Richtungen wie früher gelten als positiv.

2. Der statisch unbestimmte Träger. Die Gruppe 6 gilt hier in vollem Umfange, da nur in den Gliedern mit  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{Q}$  vom frei aufliegenden Träger die besondere Belastung



Frei aufliegender Träger.

Statisch unbestimmter Träger.

Abb. 9.

sich bemerkbar macht. Wenn die Widerlager unter der Last ihre Form nicht ändern, so nehmen die Gleichungen 6 auf Seite 4 diese Gestalt an.

$$M_0 = - \frac{(t - k) \int_1^a \frac{ds}{J} - \int_1^a y \frac{ds}{J} - \frac{t}{2} \int_1^2 \frac{ds}{J} - \frac{l}{2} \int_1^2 \frac{ds}{F r^2} + (l + r - f) \int_1^a \frac{ds}{F r^2}}{N_1}$$

$$H_0 = + \frac{(t - k) \int_1^a y \frac{ds}{J} - \int_1^a y^2 \frac{ds}{J} - \int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} + c \frac{l}{2} \int_1^2 \frac{ds}{F r^2} - c(l + r - f) \int_1^a \frac{ds}{F r^2}}{N_2} \quad (18)$$

$$G = - \frac{(t - k) \int_1^a x \frac{ds}{J} - \int_1^a x y \frac{ds}{J} - \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F}}{N_3} - \frac{t}{l}.$$

Will man im Zähler die Normal- und Querkraft vernachlässigen und alle Glieder mit  $r^2$  im Nenner übersehen, so ist die vereinfachte Form:

$$M_0 = + \frac{t}{2} - W_1, \quad H_0 = + W_2, \quad G = - \frac{t}{l} - W_3$$

$$W_1 = + \frac{(t - k) \int_1^a \frac{ds}{J} - \int_1^a y \frac{ds}{J}}{N_1}, \quad N_1 = \int_1^2 \frac{ds}{J} + \int_1^2 \frac{ds}{F r^2}$$

$$W_2 = + \frac{(t - k) \int_1^a y \frac{ds}{J} - \int_1^a y^2 \frac{ds}{J}}{N_2}, \quad N_2 = \int_1^2 y^2 \frac{ds}{J} + c^2 \int_1^2 \frac{ds}{F r^2} + \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} \quad (19)$$

$$W_3 = + \frac{(t - k) \int_1^a x \frac{ds}{J} - \int_1^a x y \frac{ds}{J}}{N_3}, \quad N_3 = \int_1^2 x^2 \frac{ds}{J} + \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}$$

Die Kräfte am Kämpfer sind damit auch bekannt.

$$A = -W_3, \quad H_1 = 1 + W_2, \quad M_1 = -W_1 + W_2 k + W_3 \cdot \frac{l}{2} + t.$$

Diese Grundwerte  $W$  sind mit jenen der lotrechten Kräfte nicht zu verwechseln. Das Achsenkreuz hat jedoch die gleiche Lage wie früher und die Nenner sind ebenfalls die gleichen.

3. Die Gestalt der Einflußlinien und die Grenzwerte. Auch hier bestehen zwischen den Werten  $W$ , welche den symmetrischen Lastlagen  $a$  und  $l - a$  zugehören, einfache Beziehungen:

$$W_{1, l-a} = -W_{1, a} + t - k, \quad W_{2, l-a} = -W_{2, a} - 1, \quad W_{3, l-a} = +W_{3, a}. \quad (20)$$

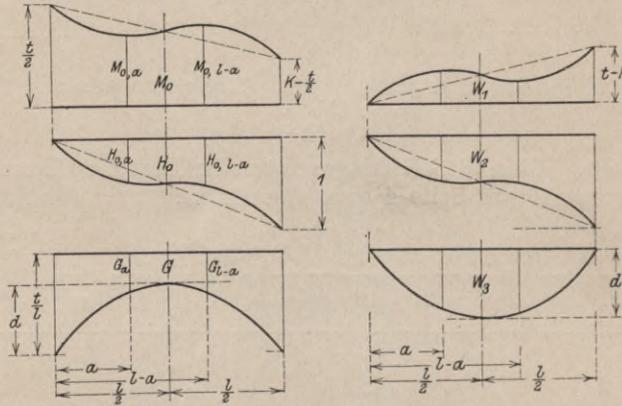


Abb. 10.

Die Grenzwerte sind:

$$\begin{aligned}
 a = 0, \quad W_1 = 0, \quad a = \frac{l}{2}, \quad W_1 = + \frac{t - k}{2}, \quad a = l, \quad W_1 = t - k \\
 \text{,,} \quad W_2 = 0, \quad \text{,,} \quad W_2 = - \frac{1}{2}, \quad \text{,,} \quad W_2 = - 1 \\
 \text{,,} \quad W_3 = 0, \quad \text{,,} \quad W_3 = + \frac{1}{N_3} \left[ (t - k) \int_1^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J} - \int_1^{\frac{l}{2}} xy \frac{ds}{J} \right], \quad \text{,,} \quad W_3 = 0
 \end{aligned}$$

3. Die Kämpferdruckschnitt- und Umhüllungslinien. Die Kämpferdruck-Schnitt- und Umhüllungslinien werden hier nur wegen der Vollständigkeit abgeleitet, da sie ohne praktische Bedeutung sind. Bei veränderlicher Lastlage, also bei veränderlichem  $a$  und  $t$ , beschreibt der Schnittpunkt  $S$  der Kämpferkräfte  $CS$  und  $ES$  die Schnittlinie, und der Strahl  $CS$  berührt die linke, der Strahl  $ES$  die rechte Umhüllungslinie. Zur Kenntnis der Lage eines Kämpferdruckes sind nur die Größen  $CL = c$  und  $CD = d$  nötig, da  $t$  durch die Lastlage gegeben ist. Da  $M_1 = A c$  und  $\frac{t}{d} = \frac{A}{H_1}$ , so ist

$$c = \frac{M_1}{A}, \quad d = t \cdot \frac{H_1}{A}. \quad (\text{Abb. 9 Seite 13.})$$

Ist die wandernde Last immer gleich hoch über der Kämpferverbindungsline, so fällt die Kämpferdruckschnittlinie mit dieser wagrechten Angriffslinie zusammen. Die Grenzwerte von  $c$  und  $d$  sind:

$$\begin{aligned}
 a = 0 \quad c = \infty, \quad a = l \quad c = \infty \\
 \quad \quad d = \infty, \quad \quad \quad \quad \quad d = \infty
 \end{aligned}$$

so daß beidesmal die Kämpferdrücke wagrecht sind.

4. Die Einflußlinie der Spannungsgrößtwerte. Nach Gleichung 3 auf S. 2 ist die Normalspannung in der oberen und unteren Faser des Querschnittes  $x, y$  genau genug:

$$\sigma = -\frac{N}{F} \mp \frac{M}{W}$$

$$a < \frac{l}{2} + x \quad M = -W_1 - W_2 y - W_3 x, \quad a > \frac{l}{2} + x, \quad M = -W_1 - W_2 y - W_3 x + t - a'$$

$$N = +W_2 \cos \varphi - W_3 \sin \varphi \quad N = +W_2 \cos \varphi - W_3 \sin \varphi + \cos \varphi$$

$$Q = -W_2 \sin \varphi - W_3 \cos \varphi \quad Q = -W_2 \sin \varphi - W_3 \cos \varphi - \sin \varphi$$

Aus den einzelnen Werten für die Lastlagen der linken Trägerhälfte finden sich die  $M, N, Q$  für die symmetrischen Lastlagen auf der rechten Hälfte durch folgende Gleichungen ohne Mühe:

$$M_{l-a} = +W_{1,a} + W_{2,a} y - W_{3,a} x$$

$$N_{l-a} = -W_{2,a} \cos \varphi - W_{3,a} \sin \varphi$$

$$Q_{l-a} = +W_{2,a} \sin \varphi - W_{3,a} \cos \varphi$$

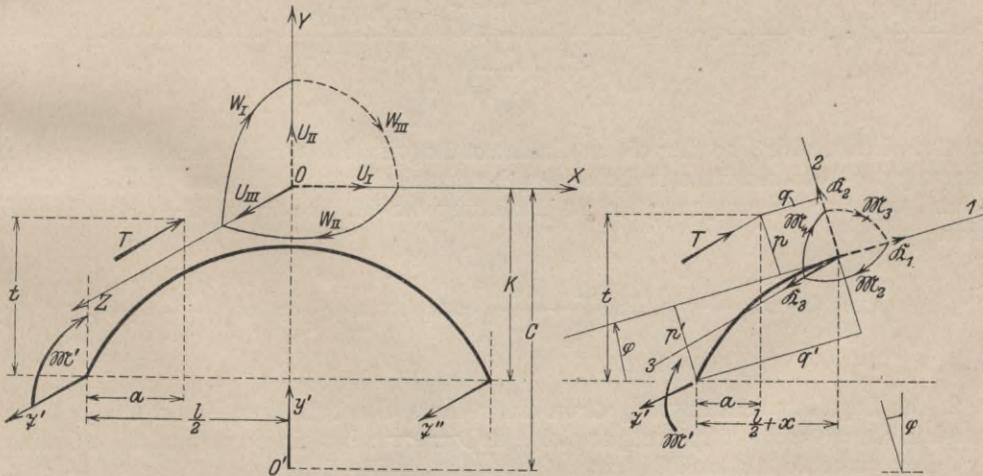
Damit ist die Normalspannung  $\sigma$  als einfache Abhängige von den Grundwerten  $W_1, W_2, W_3$  gegeben. Die Schubspannung  $\tau$  hat ihren Größtwert im Querschnitt in

$$\text{dessen wagrechter Schwerachse: } \tau_m = \frac{3}{2} \frac{Q}{F}$$

## V. Die wagrechten Querbelastungen.

### A. Die genaue Rechnung.

1. Die Grundgleichungen. In seiner Abhandlung „Das elastische Tonnengewölbe als räumliches System betrachtet“ (Zeitschrift für Bauwesen 1908) gibt Engesser die Gl. für die  $W_I, W_{II}, U_{III}$  benannten zusätzlichen Lagerkräfte, welche außerhalb der Symmetrieebene  $XY$  wirken\*). Die Kräfte  $U_I, U_{II}, W_{III}$  bleiben hier außer Betracht, da sie durch die Lasten in der Trägerebene  $XY$  entstehen und hier nur Lasten senkrecht zu dieser Ebene angenommen werden.



Statisch unbestimmter Träger.

Statisch bestimmter Träger.

Abb. 11.

Ist der Bogen in Bezug auf die beiden zueinander senkrechten Ebenen  $XY$  und  $YZ$  symmetrisch und sind die Widerlager starr, so lauten die Gl. unter teilweiser Vernachlässigung der Nebenkräfte:

\*) Siehe Ableitung im Anhang.

$$W_I = \frac{1}{N_1} \left[ \int_1^2 \mathfrak{M}_2 \sin \varphi \frac{ds}{J_2} - \frac{8}{3} \int_1^2 \mathfrak{M}_1 \cos \varphi \frac{ds}{J_1} \right], W_{II} = -\frac{1}{N_2} \left[ \int_1^2 \mathfrak{M}_2 \cos \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int_1^2 \mathfrak{M}_1 \sin \varphi \frac{ds}{J_1} \right],$$

$$U_{III} = \frac{1}{N_3} \left[ \int_1^2 \mathfrak{M}_2 (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int_1^2 \mathfrak{M}_1 (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{ds}{J_1} - 3, 2 \int_1^2 \frac{\mathfrak{R}_3 ds}{F} \right] \quad (21)$$

Im Gegensatz zu früher haben hier die Nenner  $N_1, N_2, N_3$  folgende Werte:

$$N_1 = \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_1}, \quad N_2 = \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_1}$$

$$N_3 = \int_1^2 (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int_1^2 (x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2 \frac{ds}{J_1} + 3, 2 \int_1^2 \frac{ds}{F}$$

Im beliebigen Querschnittsschwerpunkt  $x, y$  werden drei zueinander senkrechte Achsen 1, 2, 3 angenommen, von denen Achse 1 in der XY-Ebene liegt und mit der Bogen-tangente zusammenfällt, Achse 2, in der gleichen Ebene liegend, die Bogennormale ist, und die Achse 3 zur XY-Ebene senkrecht steht. Im Anfangszustand, bei welchem der Träger statisch bestimmt gedacht wird, haben sämtliche äußeren Kräfte links vom Bogenquerschnitt eine Resultante  $\mathfrak{R}$  und ein Moment  $\mathfrak{M}$ , wenn man sie im Querschnittsschwerpunkt zusammenfügt. Die Kraft  $\mathfrak{R}$  wird nach den Richtungen der Achsen 1, 2, 3 zerlegt und hat die Komponenten  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ . Ebenso wird das Moment nach den drei Ebenen 2—3, 1—3, 1—2 zerlegt und hat in ihnen die Teilmomente  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ . Die Kräfte gelten als positiv, wenn sie im Sinne der positiven Achsen 1, 2, 3 gerichtet sind, und die Momente, wenn sie, in der Richtung von der Pfeilspitze gegen die Ebene betrachtet, im Uhrzeigersinne drehen. Der Querschnitt hat in der Achse 2 die Höhe  $h$  und in der Achse 3 die Breite  $b$ . Die Momente zweiten Grades in bezug auf die drei Achsen sind:

$$J_3 = \frac{b h^3}{12}, \quad J_2 = \frac{b^3 h}{12}, \quad J_1 = \frac{8}{3 \left( \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_3} \right)} = \frac{2 \cdot 9 \cdot b^3 h^3}{2(b^2 + h^2)}; \quad \frac{8}{3 J_1} = \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_3} = \frac{1}{J}$$

Die einfachen Ausdrücke für die zusätzlichen Lagerkräfte wurden durch die geschickte Verlegung des Achsenkreuzes in die beiden Symmetrieebenen des Bogens und noch dadurch erreicht, daß der Achsursprung bis zur Erfüllung der Gl. 22 auf der Y-Achse verschoben wurde.

$$\int_1^2 \sin \varphi (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \frac{ds}{J_2} - \frac{8}{3} \int_1^2 \cos \varphi (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{ds}{J_1} = 0. \quad (22)$$

**2. Die Lage des Achsursprunges.** In einem durch den beliebigen Punkt  $O'$  der Y-Achse gehenden, dem gesuchten System parallelen Achsenkreuz hat ein Bogenpunkt die Ordinaten  $x, y'$ . Der gesuchte Abstand  $OO'$  ist  $c$ . Setzt man in Gl. 22 für  $y$  den Wert  $y' - c$  so ist die neue Form der Gleichung:

$$\int_1^2 (y' - c) \left( \frac{ds}{J_2} + \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} \right) - \int_1^2 x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} = 0.$$

Ist der Bogen ein Kreisbogen, so legt man den Hilfsursprung  $O'$  mit Vorteil in den Kreis-

mittelpunkt. Dann ist

$$c = \frac{\int_1^2 y' \frac{ds}{J}}{\int_1^2 \frac{ds}{J} - \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3}} \quad (23)$$

3. Die Einflußlinien der Grundwerte  $W_I$ ,  $W_{II}$ ,  $U_{III}$ . Im Anfangszustand wird am linken Lager die der Z-Achse parallele Lagerkraft  $\mathfrak{Z}'$ , am rechten Lager die gleichgerichtete Kraft  $\mathfrak{Z}''$  und am linken Lager das in einer zur YZ-Ebene parallelen Ebene drehende Lagermoment  $\mathfrak{M}'$  angenommen.  $\mathfrak{Z}'$ ,  $\mathfrak{Z}''$ ,  $\mathfrak{M}'$  berechnen sich aus den allgemeinen drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \Sigma M_x = 0 &= T t + \mathfrak{M}', & \mathfrak{M}' &= - T t \\ \Sigma M_y = 0 &= - T a + \mathfrak{Z}'' l, & \mathfrak{Z}'' &= + T \frac{a}{l} \\ \Sigma Z = 0 &= \mathfrak{Z}' + \mathfrak{Z}'' - T, & \mathfrak{Z}' &= + T \frac{l-a}{l}. \end{aligned}$$

Im Querschnitte  $x$ ,  $y$  ist:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} + x < a, \quad \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = 0, \quad \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{Z}', & \quad \frac{l}{2} + x > a, \quad \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = 0, \quad \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{Z}' - T \\ \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}' \cos \varphi + \mathfrak{Z}' p' & \quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}' \cos \varphi + \mathfrak{Z}' p' - \mathfrak{Z} p \\ \mathfrak{M}_2 = - \mathfrak{M}' \sin \varphi - \mathfrak{Z}' q' & \quad \mathfrak{M}_2 = - \mathfrak{M}' \sin \varphi - \mathfrak{Z}' q' + T q \end{aligned}$$

Drückt man  $p$ ,  $q$ ,  $p'$ ,  $q'$ , durch  $x$ ,  $y$  und  $\varphi$  aus, so erhält man nach Abb. 11 Seite 15:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} + x < a; \quad \mathfrak{R}_3 &= \frac{l-a}{l}, \\ \mathfrak{M}_1 &= - t \cos \varphi + \frac{l-a}{l} \left[ - \left( \frac{l}{2} + x \right) \sin \varphi + (k+y) \cos \varphi \right], \\ \mathfrak{M}_2 &= + t \sin \varphi - \frac{l-a}{l} \left[ \left( \frac{l}{2} + x \right) \cos \varphi + (k+y) \sin \varphi \right], \\ \frac{l}{2} + x > a; \quad \mathfrak{R}_3 &= - \frac{a}{l} \\ \mathfrak{M}_1 &= - t \cos \varphi + \frac{l-a}{l} \left[ - \left( \frac{l}{2} + x \right) \sin \varphi + (k+y) \cos \varphi \right] + \\ &+ \left( \frac{l}{2} - a + x \right) \sin \varphi - (k-t+y) \cos \varphi, \\ \mathfrak{M}_2 &= + t \sin \varphi - \frac{l-a}{l} \left[ \left( \frac{l}{2} + x \right) \cos \varphi + (k+y) \sin \varphi \right] + \\ &+ \left( \frac{l}{2} - a + x \right) \cos \varphi + (k-t+y) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Nun ist es möglich, die einzelnen Integrale der Gruppe 21 S. 16 auszurechnen.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \mathfrak{M}_2 \sin \varphi \frac{ds}{J_2} &= + \frac{a k}{l} \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{a}{l} \int_1^2 x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{a}{l} \int_1^2 y \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_2} + \\ &- (k-t) \int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_2} - \int_1^a x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2} - \int_1^a y \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_2} - \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \mathfrak{M}_1 \cos \varphi \frac{ds}{J_1} &= -\frac{a k}{l} \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_1} + \frac{a}{l} \int_1^2 x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1} - \frac{a}{l} \int_1^2 y \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_1} + \\
&+ (k - t) \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_1} - \int_1^a x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1} + \int_1^a y \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_1} - \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1}; \\
\int_1^2 \mathfrak{M}_2 \cos \varphi \frac{ds}{J_2} &= -\frac{a}{2} \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_2} - \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_2} - \int_1^a x \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_2} + \\
&- (k - t) \int_1^a \cos \varphi \sin \varphi \frac{ds}{J_2} - \int_1^a y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2}; \\
\int_1^2 \mathfrak{M}_1 \sin \varphi \frac{ds}{J_1} &= -\frac{a}{2} \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_1} - \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_1} - \int_1^a x \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_1} + \\
&+ (k - t) \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1} + \int_1^a y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1}; \\
\int_1^2 \mathfrak{M}_2 x \cos \varphi \frac{ds}{J_2} &= +\frac{a k}{l} \int_1^2 x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{a}{l} \int_1^2 x^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{a}{l} \int_1^2 x y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2} + \\
&- (k - t) \int_1^a x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2} - \int_1^a x^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_2} - \int_1^a x y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2} - \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a x \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_2}; \\
\int_1^2 \mathfrak{M}_2 y \sin \varphi \frac{ds}{J_2} &= +\frac{a k}{l} \int_1^2 y \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{a}{l} \int_1^2 y^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{a}{l} \int_1^2 x y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2} + \\
&- (k - t) \int_1^a y \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_2} - \int_1^a y^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_2} - \int_1^a x y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2} - \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2}; \\
\int_1^2 \mathfrak{M}_1 x \sin \varphi \frac{ds}{J_1} &= -\frac{a k}{l} \int_1^2 x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1} + \frac{a}{l} \int_1^2 x^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_1} - \frac{a}{l} \int_1^a x y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1} + \\
&+ (k - t) \int_1^a x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1} - \int_1^a x^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_1} + \int_1^a x y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1} - \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a x \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_1}; \\
\int_1^2 \mathfrak{M}_1 y \cos \varphi \frac{ds}{J_1} &= -\frac{a k}{l} \int_1^2 y \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_1} - \frac{a}{l} \int_1^2 y^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_1} + \frac{a}{l} \int_1^2 x y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1} + \\
&+ (k - t) \int_1^a y \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_1} + \int_1^a y^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_1} - \int_1^a x y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1} - \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a x y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1}.
\end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in die Gruppe 21 S. 16 ein und beachtet, daß nach Gleichung 22

$$\int_1^2 \sin \varphi (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \frac{ds}{J_2} - \frac{8}{3} \int_1^2 \cos \varphi (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{ds}{J_1} =$$

$$= \int_1^2 x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J} + \int_1^2 y \sin^2 \varphi \frac{ds}{J} + \frac{8}{3} \int_1^2 \frac{ds}{J_1} = 0$$

so erhält man die endgültigen Gleichungen für die Einflußlinien.

$$W_I = + \frac{ak}{l} - W_1, \quad W_{II} = + \frac{a}{2} + W_2, \quad U_{III} = + \frac{a}{l} - W_3 \quad (24)$$

Wie bei den lotrechten Lasten empfiehlt es sich wieder, die zusätzlichen Lagerkräfte in der weiteren Rechnung durch die Größen  $W_1, W_2, W_3$ , die sogenannten Grundwerte, zu ersetzen.

$$W_1 = \frac{1}{N_1} \left[ \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} + (k-t) \int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} + \int_1^a y \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} \right] +$$

$$+ \frac{1}{N_1} \left[ \int_1^a x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} - (k-t) \int_1^a \frac{ds}{J} - \int_1^a y \frac{ds}{J} \right];$$

$$W_2 = \frac{1}{N_2} \left[ \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} + (k-t) \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} + \int_1^a x \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} \right] +$$

$$+ \frac{1}{N_2} \left[ - \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a \frac{ds}{J} - \int_1^a x \frac{ds}{J} \right]; \quad (25)$$

$$W_3 = \frac{1}{N_3} \left[ \left( \frac{l}{2} - a \right) \left( \int_1^a x \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} + \int_1^a y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} \right) + (k-t) \left( \int_1^a x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} + \int_1^a y \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{N_3} \left[ \int_1^a (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \frac{ds}{J_3} - \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a x \frac{ds}{J} \right] +$$

$$+ \frac{1}{N_3} \left[ - (k-t) \int_1^a y \frac{ds}{J} - \int_1^a (x^2 + y^2) \frac{ds}{J} - 3, 2 \int_1^a \frac{ds}{F} \right];$$

Diese Grundwerte sind nicht mit den früheren zu verwechseln, und auch die Nenner  $N_1, N_2, N_3$  haben hier folgende andere Bedeutung nach Seite 16:

$$N_1 = \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} - \int_1^2 \frac{ds}{J}, \quad N_2 = \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} - \int_1^2 \frac{ds}{J},$$

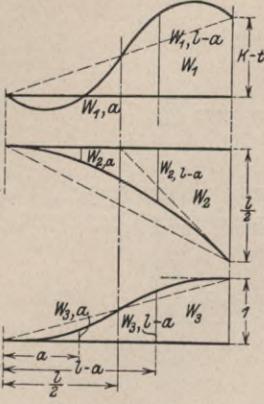
$$N_3 = \int_1^2 (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \frac{ds}{J_3} - \int_1^2 (x^2 + y^2) \frac{ds}{J} - 3, 2 \int_1^2 \frac{ds}{F}.$$

**4. Die Gestalt der Einflußlinien und die Grenzwerte.** Zwischen den Werten  $W_1, W_2, W_3$ , welche den symmetrischen Lastlagen  $a$  und  $l-a$  zugehören, bestehen folgende Beziehungen:

$$W_{1,l-a} = -W_{1,a} + k - t, \quad W_{2,l-a} = +W_{2,a} - \left(\frac{l}{2} - a\right), \quad W_{3,l-a} = -W_{3,a} + 1 \quad (26)$$

Die Werte für die drei Lastlagen im Scheitel und in den Kämpfern sind:

$$a = 0, \quad W_1 = 0, \quad a = \frac{l}{2}, \quad W_1 = +\frac{k-t}{2}$$



$$\begin{aligned} \text{,, } W_2 = 0, \quad \text{,, } W_2 &= \frac{1}{N_2} \left[ (k-t) \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} + \right. \\ &\quad \left. + \int_1^{\frac{l}{2}} x \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} - \int_1^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J} \right] \end{aligned}$$

$$\text{,, } W_3 = 0, \quad \text{,, } W_3 = +\frac{1}{2}$$

$$a = l, \quad W_1 = +k - t$$

$$\text{,, } W_2 = -\frac{l}{2}$$

$$\text{,, } W_3 = +1.$$

Abb. 12.

**5. Die Einflußlinien der Spannungsgrößtwerte.** Im Anfangszustande ergibt die Reduktion aller links vom Bogenquerschnitt  $x, y$  liegenden Kräfte auf den Schwerpunkt des Querschnittes drei Kräfte  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$  und drei Momente  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ , welche in den drei festgelegten Achsen und Achsebenen des Querschnittes angreifen. Von den tatsächlichen Kräften  $K_1, K_2, K_3$ , und tatsächlichen Momenten  $M_1, M_2, M_3$ , im Querschnitte  $x, y$ , zerlegt wieder nach den Achsen 1, 2, 3, und den Achsebenen 2-3, 1-3, 1-2, brauchen nur die Momente  $M_1, M_2$  und die Kraft  $K_3$  berechnet zu werden, da für ausschließlich wagerechte Querbelastung  $K_1 = K_2 = M_3 = 0$  ist.

$$K_3 = \mathfrak{R}_3 + U_{III}, \quad M_1 = \mathfrak{M}_1 + W_I \cos \varphi + W_{II} \sin \varphi - U_{III} (x \sin \varphi - y \cos \varphi),$$

$$M_2 = \mathfrak{M}_2 - W_I \sin \varphi + W_{II} \cos \varphi - U_{III} (x \cos \varphi + y \sin \varphi).$$

Setzt man für  $\mathfrak{R}_3, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$  die früher berechneten Werte und drückt man  $W_I, W_{II}, U_{III}$  durch ihre Grundwerte  $W_1, W_2, W_3$  aus, so ergibt sich je nach der Lastlage links oder rechts des betrachteten Querschnittes nach Abb. 11 Seite 15:

$$a < \frac{l}{2} + x, \quad K_3 = -W_3$$

$$M_1 = -W_1 \cos \varphi + W_2 \sin \varphi + W_3 (x \sin \varphi - y \cos \varphi),$$

$$M_2 = +W_1 \sin \varphi + W_2 \cos \varphi + W_3 (x \cos \varphi + y \sin \varphi),$$

$$a > \frac{l}{2} + x, \quad K_3 = -W_3 + 1$$

$$M_1 = -W_1 \cos \varphi + W_2 \sin \varphi + W_3 (x \sin \varphi - y \cos \varphi) + \quad (27)$$

$$+ (k-t+y) \cos \varphi - \left(\frac{l}{2} - a + x\right) \sin \varphi;$$

$$M_2 = +W_1 \sin \varphi + W_2 \cos \varphi + W_3 (x \cos \varphi + y \sin \varphi) +$$

$$- (k-t+y) \sin \varphi - \left(\frac{l}{2} - a + x\right) \cos \varphi.$$

Auch hier genügt es, die Werte für die Lastlagen auf der linken Trägerhälfte zu berechnen, da zwischen den symmetrischen Lastlagen zugehörigen Größen ein einfacher

Zusammenhang besteht. Bei der Lastlage rechts vom Scheitel ist für alle Querschnitte der linken Bogenhälfte  $a > \frac{l}{2} + x$ .

$$\begin{aligned} K_{3,l-a} &= +W_{3,a}, \quad M_{1,l-a} = +W_{1,a} \cos \varphi + W_{2,a} \sin \varphi - W_{3,a} (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \\ M_{2,l-a} &= -W_{1,a} \sin \varphi + W_{2,a} \cos \varphi - W_{3,a} (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \end{aligned} \quad (28)$$

Im Querschnitt entstehen durch  $K_3$  Schubspannungen parallel der Achse 3, durch  $M_1$  ebenfalls Schubspannungen, weil es in der Ebene 2—3 als Verdrehungsmoment wirkt, und durch  $M_2$  Normalspannungen parallel der Achse 1, weil es in der Ebene 1—3 dreht. Der Größtwert der Normalspannungen tritt in den der Achse 2 parallelen Seiten auf. In den gleichen Kanten wirkt die größte Schubspannung  $\tau$  parallel der Achse 2, verursacht durch das Verdrehungsmoment  $M_1$ ; in den der Achse 3 parallelen Kanten sind die Schubspannungen  $\tau_1'$ ,  $\tau_2'$  verursacht durch  $M_1$  und  $K_3$ .

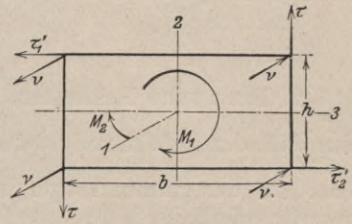


Abb. 13. Die Spannungen im Querschnitt.

$$v = \mp \frac{6 M_2}{b^2 h}, \quad \tau_{1,2} = \mp 4,5 \frac{M_1}{b h^2} + 1,5 \frac{K_3}{b h}, \quad \tau = \mp 4,5 \frac{M_1}{b^2 h} \quad (29)$$

### B. Die vereinfachte Berechnung.

Einigermaßen wird den besonderen Verhältnissen der Querbelastung Rechnung getragen, wenn man den wirklichen Kräfteplan in zwei Einzelpläne auflöst. Bei dem ersten Plane wird der Träger als beiderseits eingespannter Stab mit gerader Achse und einer Spannweite gleich der ausgestreckten Bogenachse betrachtet. Beim zweiten Plane nimmt man den Träger ebenfalls mit gerader Achse, als Kragträger an, dessen Kraglänge gleich der Pfeilhöhe  $f$  ist. Bei gleichförmig verteilter Windlast über die ganze Trägerlänge nimmt man beim ersten Plane als Last für den lfd. m die Größe  $p_1 = \frac{\sum W}{l}$  und beim zweiten

Plane die Größe  $p_2 = \frac{\sum W}{2 \cdot f}$ .

**1. Der erste Kräfteplan.** Nach dieser Annahme ist der Träger in beiden Lagern eingespannt und wird durch Kräfte, welche in der wagrechten Trägerebene liegen, beansprucht. Man kann den beiderseits eingespannten Stab als den Sonderfall eines beiderseits eingespannten Bogens betrachten, dessen Bogenhalbmesser unendlich groß ist, so daß auch die Gleichungen 8 für die Einflußlinien der unbekanntenen  $M_0, H_0, G$  gelten. Aus der Lage des Achsenkreuzes in der lotrechten Symmetrieachse des Trägers und

im Schwerpunkte der  $\frac{ds}{J}$  ergibt sich ohne weiteres, daß  $H_0$  verschwindet, da alle  $y = 0$  sind. Trägheitsmoment und Querschnitt seien über den ganzen Träger gleich.

Bei der über die ganze Stützweite gleichförmig verteilten Last  $p_1$  tritt in der Entfernung  $a$  vom Lager das Moment auf:

$$M' = \frac{p_1}{12} \cdot [6a(l-a) - l^2] \quad (30)$$

Reicht die Last nur über die Strecke  $s$ , so ist das Moment im Querschnitt  $a$

$$M' = M_2 \frac{a}{l} + M_1 \frac{l-a}{l} + \mathfrak{M}$$

Wirklicher Kräfteplan.

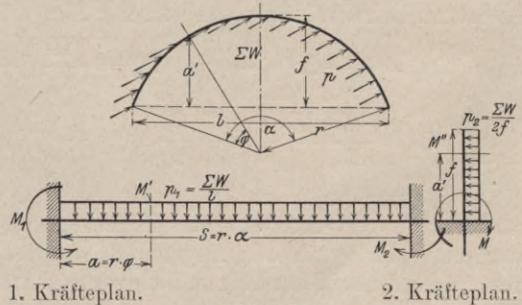


Abb. 14.

$$M_1 = P_1 \frac{s^2}{12} \left[ 6 - 8 \frac{s}{l} + 3 \left( \frac{s}{l} \right)^2 \right], \quad M_2 = - \frac{P_1}{12} \left( \frac{s}{l} \right)^2 (4l - 3s) \quad (31)$$

$$\mathfrak{M} = P_1 \frac{s}{l} \left( l - \frac{s}{2} \right) a - P_1 \cdot \frac{a^2}{2}, \text{ wenn } a < s$$

Die Spannung aus dem ersten Kräfteplane ist sodann

$$\nu_1 = \frac{M'}{W}.$$

**2. Der zweite Kräfteplan.** Die Spannungen aus dem zweiten Plane ermitteln sich für den Fall der gleichförmig verteilten Last  $p_2 = \frac{\Sigma W}{2f}$  sehr einfach. Erstreckt sich die Last auf den ganzen Träger, so ist im Querschnitte, der  $a$  vom linken Lager und  $a'$  über der Kämpferlinie liegt:

$$M'' = p_2 \frac{(f - a')^2}{2} \quad (32)$$

Erstreckt sich die Last nur auf die Strecke  $s'$ , so wird für  $a' < s'$

$$M'' = p_2 \frac{(s' - a')^2}{2} \quad (33)$$

Die Spannung aus dem zweiten Kräfteplane ist sodann  $\nu_2 = \frac{M''}{W}$ .

Die Gesamtspannung durch Wind ist im Querschnitte  $a, a', \nu = \nu_1 + \nu_2$ .

## VI. Der Einfluß der Wärme.

**1. Gleichmäßige Erwärmung.** Bei jedem statisch unbestimmten Träger spielt die Wärme eine mit der Zahl der statischen Unbekannten an Bedeutung zunehmende Rolle. Der Ausdehnungskoeffizient des Stoffes in linearer Richtung sei  $\omega$ , die Temperaturzunahme  $t^0 C$  und der Elastizitätsmodul  $E$ . Schaltet man jede äußere Last, auch das Eigengewicht, aus, so ruft die Wärme Lagerwirkungen hervor, welche aus den Gleichungen 6 sich ableiten. Bei gleichmäßiger Erwärmung behält der Träger stets eine der Urform ähnliche Gestalt. Es treten keine Winkel-, sondern nur Längenänderungen auf.

$$M_0 = \frac{E}{N_1} \Delta (\varphi_2 - \varphi_1), \quad H_0 = \frac{E}{N_2} [-\Delta l + k \Delta (\varphi_2 - \varphi_1)],$$

$$G = \frac{E}{N_3} \cdot \left[ -\Delta d + \frac{l}{2} \Delta (\varphi_1 + \varphi_2) \right], \quad \Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_2 = 0, \quad \Delta l = -\omega t \cdot l$$

Bei symmetrischem Träger ist  $\Delta d = 0 = \Delta \varphi_2 - \Delta \varphi_1$ , und es entsteht nur eine zusätzliche Lagerkraft, ein am Achsursprung angreifender Horizontalschub, welcher bei starren Widerlagern den Bogen um so viel zusammendrückt, als die Spannweite unter dem freien Einfluß der Wärme sich vergrößern würde.

$$H_0 = \frac{E \omega t l}{\int_1^2 y^2 \frac{ds}{J} + c^2 \int_1^2 \frac{ds}{F r^2} + \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}}, \quad M_0 = G = 0. \quad (34)$$

Versetzt man ihn an den linken Kämpfer, so tritt hier noch ein Moment hinzu.

$$M_1 = k H_0, \quad H_1 = H_0, \quad A = 0.$$

**2. Ungleichmäßige Erwärmung.** In der oberen Faser sei die Wärme  $-t^0$ , in der unteren Faser  $+t^0$  und somit in jedem Querschnitte ein Wärmeunterschied  $\Delta t = 2t^0$ . Zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten tritt eine Winkeländerung auf:

$$\Delta d\varphi = \omega \Delta t \cdot \frac{ds}{h}.$$

Zwischen den beiden Kämpfern ist die Winkeländerung:

$$\Delta(\varphi_2 - \varphi_1) = + \omega \Delta t \int_1^2 \frac{ds}{h}$$

Der beliebige Querschnitt A drehe sich um  $\Delta d\varphi$ , nehme den rechtsseitigen Trägerteil mit und rufe in der Lage des rechtsseitigen Kämpfers die Änderungen hervor  $d\Delta x_2$ ,  $d\Delta y_2$ .

Weil  $\Delta d\varphi$  klein ist, so gilt:

$$A B' = A B, \sphericalangle B B' C = \\ = \sphericalangle A B D, B' B \perp A B, C B' \perp D B.$$

$$d\Delta x_2 = - (y_2 - y) \frac{ds}{h} \omega \Delta t, d\Delta y_2 = \\ = (x_2 - x) \frac{ds}{h} \omega \Delta t.$$

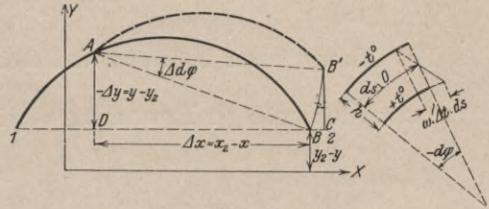


Abb. 15.

Beide Kämpfer sind frei beweglich gedacht und die Spannweite wird sich nach vollzogener Drehung aller Querschnitte um  $\Delta l = \int_1^2 d\Delta x_2$  vergrößert haben. Bei symmetrischem Bogen werden sie sich, wenn man den Scheitel festgehalten denkt, um  $\frac{1}{2} \int_1^2 d\Delta y_2$  gehoben haben. Die Summe der  $d\Delta y_2$  verteilt sich gleich auf  $y_1$  und  $y_2$ , so daß

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \frac{\omega \Delta t}{2} \int_1^2 (x_2 - x) \frac{ds}{h}.$$

Um so viel vermindert sich der Bogenpfeil, da die Kämpfer natürlich in gleicher gegenseitiger Lage bleiben.

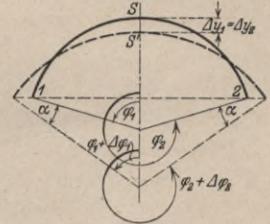


Abb. 16.

$$\Delta d = 0, \Delta l = \omega \Delta t \left[ \int_1^2 y \frac{ds}{h} + k \int_1^2 \frac{ds}{h} \right], \Delta(\varphi_1 + \varphi_2) = 0, \Delta(\varphi_2 - \varphi_1) = \omega \Delta t \int_1^2 \frac{ds}{h}$$

Man setzt diese Werte in die Gleichungen 6 ein und findet:

$$M_0 = - \frac{E \omega \Delta t}{N_1} \int_1^2 \frac{ds}{h}, H_0 = + \frac{E \omega \Delta t}{N_2} \int_1^2 y \frac{ds}{h}, G = 0 \quad (35)$$

Wenn der Bogen frei auflagen würde, dann würde die Wärmeabnahme in der oberen und Zunahme in der unteren Faser die berechneten Formänderungen verursachen. Die durch die tatsächlich starren Widerlager auftretenden Lagerkräfte müssen nun gleichgroße entgegengesetzte Wirkungen haben; sie müssen z. B. in diesem Falle eine Verkleinerung der Spannweite um  $\Delta l$  bewirken und deswegen sind die Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen in die Gleichungen 6 einzuführen.

Hat die obere Faser die Wärme  $+ a$ , die untere Faser die Wärme  $+ b$ , so zerlegt man den Fall in die gleichmäßige Erwärmung  $\frac{a+b}{2}$  und in die ungleichmäßige Erwärmung  $\frac{b-a}{2}$  wobei  $\Delta t = b - a$ . Da die zusätzlichen Lagerkräfte bekannt sind, können auch die durch die Wärmeänderung entstehenden Spannungen berechnet werden. Sie werden umso größer, je größer der Elastizitätsmodul  $E$  und der Ausdehnungsfaktor  $\omega$  des Stoffes ist.

**3. Der Einfluß der Wärme auf die Scheitellage.** Bei gleichmäßiger Erwärmung findet man die Scheitelbewegung aus Gleichung 13, sobald man darin  $W_2 = H_t$  setzt und alle anderen veränderlichen Glieder gleich 0 nimmt.

$$E d = - H_t \left[ \int_1^{\frac{l}{2}} x y \frac{ds}{J} + \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right] \quad (36)$$

$$d = - \frac{\omega t l}{N_2} \left[ \int_1^{\frac{l}{2}} x y \frac{ds}{J} + \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right]$$

Das Minuszeichen bedeutet, daß bei zunehmender Wärme der Bogenscheitel sich hebt.

Bei ungleichmäßiger Erwärmung des Bogens ist die Scheitelbewegung

$$E d = M_{0,t} \int_1^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J} - H_t \left[ \int_1^{\frac{l}{2}} x y \frac{ds}{J} + \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right].$$

Der Elastizitätsmodul hat auf die Scheitelbewegung beim Wärmewechsel keinen Einfluß, wohl aber der Ausdehnungskoeffizient  $\omega$ .

## 2. Der Talübergang bei Langenbrand.

Die eingleisige Bahn Weisenbach-Forbach im nördlichen, badischen Schwarzwald überschreitet die Murg unmittelbar vor dem Dorfe Langenbrand auf einer 150 m langen Steinbrücke in einer Höhe von 25 m über der Sohle. Die Linie liegt in der Geraden und hat eine Steigung 1 : 45. Das Flußbett wird von einem Hauptbogen auf 59 m frei überspannt; auf dem linken Ufer reihen sich zwei, auf dem rechten drei Nebenbögen von 12 m lichter Weite an. In Scheitelhöhe des Hauptbogens ist das Bauwerk 4,30 m breit; die Stirnen haben einen seitlichen Anzug von 1 : 30. Durch Auskragung der Abdeckplatten wird die Fahrbahn auf 5,20 m verbreitert. Alle Bauteile sind auf den gewachsenen Fels, Granit, gegründet und bestehen aus granitem Bruchstein; nur zum großen Gewölbe sind Granitquader verwendet. Unter Benutzung der in der allgemeinen Untersuchung entwickelten Gleichungen wird im folgenden die Beanspruchung des Hauptbogens eingehend berechnet.

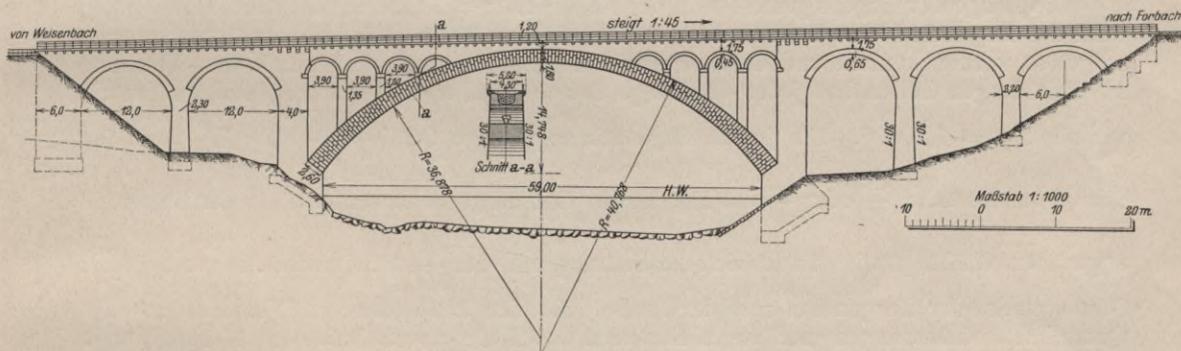


Abb. 17.

### I. Die rechnerische Untersuchung des Hauptbogens.

#### A. Die Form des Hauptbogens.

Die lichte Weite des symmetrischen Hauptbogens beträgt 59,00 m und der zugehörige Stich der inneren Leibung ist ein Viertel der Lichtweite. Die Scheitelstärke wurde zu 1,800 m, die Kämpferstärke zu 2,600 m gewählt. Die Bogenachse, auf welcher alle Querschnitte senkrecht stehen, ist einem Kreisbogen mit  $r = 38,800$  m, die innere Leibung einem Bogen mit  $r_1 = 36,878$  m nachgebildet. Alle Winkel dieser rechnerischen Untersuchung werden in der neuen Hundertteilung angegeben.

$$\varphi_1 = 57,6390^\circ, f_1 = 14,748 \text{ m}, 1,3 \cos \varphi_1 = 0,803 \text{ m}, 1,3 \sin \varphi_1 = 1,023 \text{ m}.$$

Die Entfernung der beiden Kämpferfugenmitten ist  $l$  und der Stich der Bogenachse ist  $f$ .

$$l = 61,045 \text{ m}, f = 14,845 \text{ m}.$$

Die Abstände der Kreismittelpunkte voneinander sind  $m$  und  $n$ .

$$m = 1,068 \text{ m}, n = 1,022 \text{ m}.$$

Da die Gewölbebreite erst während der Rechnung von 4,200 auf 4,300 m erhöht worden ist, liegt der Berechnung der Einflußlinien noch die Gleichung  $b = \frac{r - y'}{15} + 4,2$  für die Gewölbebreite im Querschnitte  $x, y'$  zugrunde. Die Verbreiterung konnte noch am Schlusse

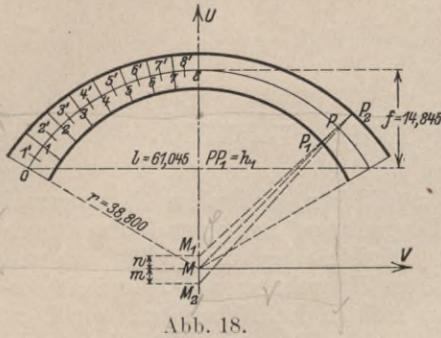


Abb. 18.

berücksichtigt werden, da alle Spannungen mit Ausnahme der durch Eigenlast und Wind der Breite umgekehrt proportional sind. Die gesuchte Gewölbstärke im Achspunkte  $P$  ist  $h = 2 h_1$ . Die Koordinaten der Punkte  $P$  und  $P_1$  auf das in Abb. 18 gezeichnete Achsenkreuz bezogen, sind  $u, v$  und  $u_1, v_1$ . Die Gleichung der Bogenachse ist

$$v = r \sin \varphi, \quad u = r \cos \varphi.$$

Die Gleichung des inneren Leibungskreises ist

$$(u - n)^2 + v^2 = r_1^2;$$

die Gleichung der Geraden  $MP$  ist

$$v = u \operatorname{tg} \varphi.$$

Gesucht wird der Schnittpunkt  $P_1$  des inneren Leibungskreises mit der Geraden:

$$u_1 = \cos \varphi [n \cos \varphi + \sqrt{r_1^2 - (n \sin \varphi)^2}]; \quad v_1 = \sin \varphi [n \cos \varphi + \sqrt{r_1^2 - (n \sin \varphi)^2}]$$

$$h_1 = \frac{u - u_1}{\cos \varphi} = r - n \cos \varphi - \sqrt{r_1^2 - (n \sin \varphi)^2}; \quad h = 2 \cdot h_1.$$

Die Länge des Bogens gemessen in der Achse ist  $S = 70,258$  m. Für die Berechnung wird der Bogen in kleine Teile zerlegt, da die vorkommenden Integrale nicht geschlossen aufgelöst werden können und durch endliche Summen ersetzt werden müssen. Von den 16 gleichlangen Teilen hat jedes die Länge  $\Delta s = 4,391$  m und den zugehörigen Zentriwinkel  $\Delta \varphi = 7,2049^\circ$ . Die jedem Bogenteil zugehörige Größe  $\frac{\Delta s}{J}$  und  $\frac{\Delta s}{F}$  muß im Schwerpunkte aller  $\frac{ds}{J}$  oder  $\frac{ds}{F}$  des Bogenteiles liegend gedacht werden. Da der Bogenteil angenähert ein Trapez ist, findet sich der Schwerpunkt der  $\frac{ds}{J}$  auf einfache Art: er liegt im Schnittpunkt der Diagonalen mit der Achse. Da der Halbmesser im Vergleich zu den Querschnittsabmessungen groß ist, nähert sich das Teilungsverhältnis dem Werte  $\frac{1}{2}$  und man kann unbedenklich den Schwerpunkt der  $\frac{ds}{J}$  und  $\frac{ds}{F}$  eines jeden Bogenteiles in seine Mitte setzen.

### B. Die Lage des Achsenkreuzes.

Bei dem symmetrischen Gewölbe genügt es, im Zähler und Nenner der Gleichung 7 die Integrale nur über die halbe Bogenweite auszudehnen. In der Liste 1 sind die den Teilmitten 1' — 8' zukommende Gewölbstärke, Breite und Querschnittsfläche und das Trägheitsmoment angegeben.

Liste 1. Grundlage der Rechnung für lotrechte und wagerechte Längs-Last. Die Größen gehören zu den Teilmitten.

	$\varphi$	$h$	$b$	$F$	$J$	$\frac{\Delta s}{J}$	$\frac{\Delta s}{F}$	$y'$	$x$	$y = y' - c$
1'	54,0366	2,509	5,137	12,889	6,7616	0,649 43	0,340 663	25,642	- 29,119	- 9,642
2'	46,8317	2,341	4,929	11,539	5,2697	0,833 29	0,380 555	28,767	- 26,037	- 6,517
3'	39,6268	2,193	4,745	10,405	4,1703	1,052 95	0,421 991	31,523	- 22,617	- 3,761
4'	32,4220	2,066	4,588	9,479	3,4500	1,302 40	0,463 266	33,876	- 18,917	- 1,408
5'	25,2171	1,962	4,460	8,750	2,8070	1,564 33	0,501 815	35,796	- 14,970	+ 0,512
6'	18,0122	1,883	4,363	8,216	2,4272	1,808 94	0,534 494	37,257	- 10,832	+ 1,973
7'	10,8073	1,830	4,297	7,864	2,1945	2,000 97	0,558 421	38,242	- 6,557	+ 2,958
8'	3,6024	1,803	4,264	7,688	2,0828	2,108 41	0,571 170	38,738	- 2,194	+ 3,454

11,32072  
769841

$$c = \frac{\int_1^2 y' \frac{ds}{J}}{\int_1^2 \frac{ds}{J} + \int_1^2 \frac{ds}{Fr^2}} = \frac{399,526}{11,32073 + 0,00251} = 35,284 \text{ m.}$$

*man kann ja auch*

Vernachlässigt man das zweite Glied des Nenners, so wird  $c = 35,292$  und die Ungenauigkeit beträgt  $0,022\%$ .

Beim Weglassen des zweiten Nennergliedes wird  $\int_1^2 y \frac{ds}{J} = 0$ , sonst jedoch

$$\int_1^2 y \frac{ds}{J} = c \int_1^2 \frac{ds}{Fr^2} = 0,176830 \frac{1}{\text{m}^2}.$$

Der Rechnung ist das genaue  $c = 35,284$  m zugrunde gelegt. Die Ordinaten der Bogenachse im neuen Achsenkreuz sind

$$x = x' = r \cos \varphi, \quad y = y' - c.$$

### C. Die lotrechten Kräfte.

1. Die Einflußlinien  $M_0$ ,  $H_0$ ,  $G$  und  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ . Die konstanten Nenner der Gruppe 8 und 9 auf Seite 5 sind

$$N_1 = \int_1^2 \frac{ds}{J} + \int_1^2 \frac{ds}{Fr^2}, \quad N_2 = \int_1^2 y^2 \frac{ds}{J} + c^2 \int_1^2 \frac{ds}{Fr^2} + \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}, \quad N_3 = \int_1^2 x^2 \frac{ds}{J} + \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}$$

In den Zählern der Gruppen 8, 9 kommen folgende Integrale vor:

$$\int_1^a \frac{ds}{J}, \quad \int_1^a x \frac{ds}{J}, \quad \int_1^a y \frac{ds}{J}, \quad \int_1^a x y \frac{ds}{J}, \quad \int_1^a x^2 \frac{ds}{J}; \quad \int_1^a \frac{ds}{F}, \quad \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}, \quad \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F}.$$

Der Wert  $\alpha = \frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{\alpha} = 3$  ist auf Seite 3 abgeleitet.

$$N_1 = 22,64146 + 0,00501 = 22,64647 \frac{1}{\text{m}^3}$$

$$N_2 = 326,7248 + 6,2392 + 4,5057 = 337,4697 \frac{1}{\text{m}}$$

$$N_3 = 5558,868 + 18,129 = 5576,997 \frac{1}{\text{m}}$$

Die einzelnen Summanden sind für sich angeführt, damit der von der Normal- und Querkraft herrührende Teil von dem Hauptwerte, welcher dem Moment zugehört, sich unterscheidet. Das Glied der Querkraft führt stets den Faktor  $\frac{ds}{\alpha F}$ , das der Normalkraft  $\frac{ds}{F}$  mit sich.

Es werden auf der linken Trägerhälfte 9 Lastlagen in den Punkten 0—8 nach Abb. 18, S. 26 angenommen,

$$a_0 = 0, \quad a_8 = \frac{l}{2}, \quad a = \frac{l}{2} - r \sin \psi.$$

Die Werte stehen in der Liste 2.

Liste 2. Die Lastlagen, die zugehörigen Querschnittsgrößen und die Bogeneigenlast in t.

	$\psi$	x	y	a	$\frac{a}{l}$	h	b	F	W	$2,4 \cdot F \cdot \Delta s$
0	57,6390	- 30,523	- 11,329	0	0	2,600	5,250	13,650	5,910	70,3
1	50,4341	- 27,622	- 8,036	2,901	0,047 522	2,412	5,030	12,132	4,877	127,9
2	43,2292	- 24,368	- 5,091	6,154	0,100 815	2,250	4,834	10,877	4,079	114,6
3	36,0243	- 20,803	- 2,532	9,720	0,159 226	2,113	4,663	9,851	3,468	103,8
4	28,8196	- 16,971	- 0,392	13,552	0,221 998	2,000	4,521	9,042	3,014	95,3
5	21,6147	- 12,922	+ 1,301	17,601	0,288 323	1,913	4,408	8,430	2,687	88,8
6	14,4098	- 8,708	+ 2,526	21,815	0,357 361	1,850	4,326	8,003	2,467	84,3
7	7,2049	- 4,382	+ 3,268	26,141	0,428 221	1,812	4,277	7,750	2,340	81,7
8	0	0	+ 3,516	30,523	0,500 000	1,800	4,260	7,608	2,300	80,8

Bei der Ermittlung der Spannungen sollte der Einfluß der Nebenkkräfte beobachtet werden; deshalb wurden wiederholt nicht die zur Rechnung einfachsten Gleichungen gewählt, welche am Schlusse der Untersuchung in der Zusammenfassung angeführt sind, sondern jene, bei denen sich eben der gesuchte Einfluß deutlich hervorhob. Die Werte von  $M_0$ ,  $H_0$ ,  $G$  stehen in den Listen 3, 4, 5, 6; die Teile der Zähler sind getrennt und zum Schlusse in ihrer Summe angegeben. Die Einflußlinien der  $M_0$ ,  $H_0$ ,  $G$  und auch die Grundwerte  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  wurden in Abb. 19 mit den gefundenen Werten aufgetragen.  $M_0$  und  $H_0$  sind symmetrische Linien; bei  $G$  entsprechen 2 symmetrischen Lastlagen entgegengesetzt gleiche Werte: es hat „negative Symmetrie“. Bemerkenswert ist, daß die Linie der Gewölbstärke  $h$  mit großer Annäherung eine Parabel ist.

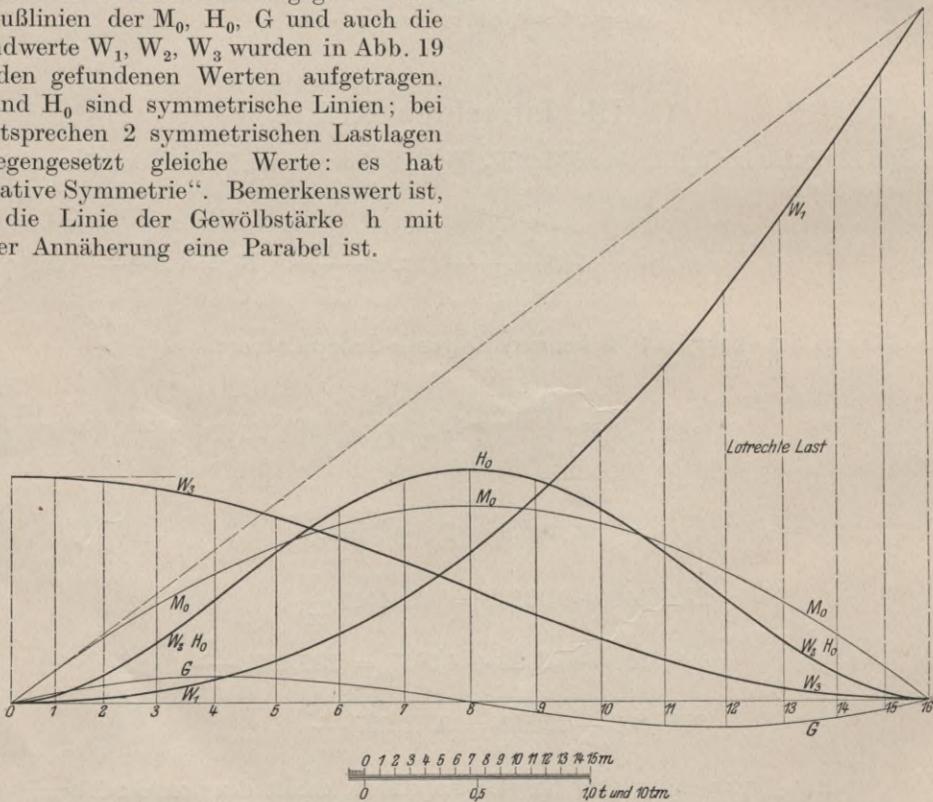


Abb. 19. Die Einflußlinien der zusätzlichen Lagerkräfte  $M_0$ ,  $H_0$ ,  $G$  und der Grundwerte  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  für lotrechte Last.

Zur Sicherheit wurde eine Proberechnung der Werte  $M_0$ ,  $H_0$ ,  $G$  nach den vereinfachten Gleichungen ohne Nebenkkräfte unter Benutzung einer dreistelligen Rechentafel durchgeführt; sie ergab eine genügende Übereinstimmung. Die gesamte Hauptrechnung wurde mit sechsstelligen Logarithmen durchgeführt, da der Nebenzweck der Untersuchung diese sonst ungebrauchliche Genauigkeit erwünscht sein ließ.

Liste 3. Einflußlinie  $M_0$ , für lotrechte Last.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \frac{ds}{J}$	17,9387	36,1315	52,7489	65,1354	69,8093	62,7931	40,3665	0
$+\frac{a}{2} \int_1^2 \frac{ds}{J}$	32,8347	69,6713	110,0375	153,4179	199,2541	246,9641	295,9340	345,5391
$+\int_1^a x \frac{ds}{J}$	-18,9107	-46,6070	-64,4264	-89,0640	-112,4824	-132,0769	-145,1935	-149,8201
$+\frac{1}{r^2} \left[ \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \frac{ds}{F} + \frac{a}{2} \int_1^2 \frac{ds}{F} \right]$	0,0137	0,0271	0,0402	0,0521	0,0622	0,0700	0,0748	0,0764
$Z_1 = \sum$	31,8764	65,2229	98,4002	129,5414	156,6432	177,7503	191,1818	195,7955
$M_0$	<b>1,4076</b>	<b>2,8800</b>	<b>4,3451</b>	<b>5,7201</b>	<b>6,9169</b>	<b>7,8489</b>	<b>8,4420</b>	<b>8,6457</b>
$100 p_1$	0,0197	0,0194	0,0187	0,0181	0,0176	0,0172	0,0170	0,0169

$M_0 = \frac{Z_1}{r_1}$

$\int_0^{\frac{l}{2}} z da = 1,539, \quad \int_0^{\frac{l}{2}} Z_1 da = 3862,452.$

Liste 4. Einflußlinie  $H_0$ , für lotrechte Last.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a y \frac{ds}{J}$	-172,955	-284,918	-325,606	-296,738	-215,592	-114,192	-31,523	0
$+\int_1^a x y \frac{ds}{J}$	183,328	323,725	413,303	447,983	435,390	397,318	358,511	342,530
$-\frac{c}{r^2} \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \frac{ds}{F}$	-0,219	-0,412	-0,558	-0,639	-0,639	-0,539	-0,329	0
$+\frac{1}{a} \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F}$	0,507	1,075	1,675	2,266	2,802	3,232	3,511	3,608
$Z_2 = \sum$	9,660	39,470	88,817	152,872	222,561	285,819	330,170	346,138
$H_0$	<b>0,028 625</b>	<b>0,116 959</b>	<b>0,263 185</b>	<b>0,452 994</b>	<b>0,659 499</b>	<b>0,846 946</b>	<b>0,978 370</b>	<b>1,025 686</b>
$100 p_1'$	-4,15	-2,93	-2,51	-2,30	-2,17	-2,07	-1,98	-1,88
$100 p_1''$	+3,62	+1,37	+0,53	+0,13	+0,09	-0,22	-0,29	-0,31

$H_0 = \frac{Z_2}{r_2}$

$\int_0^{\frac{l}{2}} z' da = -11,041, \quad \int_0^{\frac{l}{2}} z'' da = +68,919, \quad \int_0^{\frac{l}{2}} Z_2 da = +5427,198$

Liste 5. Einflußlinie G, für lotrechte Last.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a x \frac{ds}{J}$	522,355	989,528	1340,244	1511,490	1453,480	1150,063	636,210	0
$-\frac{a}{l} \int_1^2 x^2 \frac{ds}{J}$	264,116	560,419	885,116	1234,050	1602,752	1986,543	2380,422	2779,434
$\int_1^a x^2 \frac{ds}{J}$	550,663	1115,567	1654,402	2130,473	2471,053	2683,300	2769,281	2779,434
$\frac{l}{a} \left[ \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{F} - \frac{a}{l} \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{F} \right]$	0,443	0,754	0,977	1,055	0,977	0,750	0,407	0
$Z_3$	263,251	435,134	571,935	626,122	586,156	454,056	247,758	0
<b>G</b>	<b>0,042 362</b>	<b>0,078 023</b>	<b>0,102 553</b>	<b>0,122 269</b>	<b>0,105 103</b>	<b>0,081 416</b>	<b>0,044 425</b>	<b>0</b>
100 p <sub>1</sub>	0,14	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	$\frac{0}{0}$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} z da = -20,717, \quad \int_0^{\frac{l}{2}} Z_3 da = -12230,457.$$

Liste 6. Die Werte M<sub>0</sub>, H<sub>0</sub>, G der rechten Brückenhälfte, für lotrechte Last.

	16	15	14	13	12	11	10	9	8
M <sub>0</sub>	0	-1,4076	-2,8800	-4,3451	-5,7201	-6,9169	-7,8489	-8,4420	-8,6457
H <sub>0</sub>	0	0,028625	0,116959	0,263185	0,452994	0,659499	0,846946	0,978370	1,025686
G	0	-0,042362	-0,078023	-0,102553	-0,112269	-0,105103	-0,081416	-0,044425	0

2. Der Einfluß der Normal- und Querkraft auf M<sub>0</sub>, H<sub>0</sub>, G. Um den Einfluß der Normal- und Querkraft auf das Ergebnis festzustellen, wurden die an ihren Faktoren kenntlichen Beträge gegenseitig ins Verhältnis gesetzt. Zunächst wurde der prozentuale Beitrag der Normal- oder Querkraft zu den Einzelwerten von M<sub>0</sub>, H<sub>0</sub>, G für die 8 Lastlagen 1—8 und dann der gemittelte prozentuale Beitrag, welcher durch das Verhältnis des von der Normal- oder Querkraft stammenden Flächenteils zur Gesamtfläche der Einflußlinie bestimmt wird, berechnet und zeichnerisch dargestellt. Der genaue Wert von M<sub>0</sub>, H<sub>0</sub>, G für die Lastlage a wurde mit  $\frac{Z}{N}$  bezeichnet. Im Zähler wie im Nenner erscheint bei M<sub>0</sub> nur die Normalkraft, bei G nur die Querkraft und bei H<sub>0</sub> Quer- und Normalkraft. Der Beitrag einer dieser Nebenkräfte zum Zähler sei z, zum Nenner n und der Restwert des Zählers oder Nenners sei A und B.

$$\frac{Z}{N} = \frac{A + z}{B + n}$$

Der Wert von M<sub>0</sub>, H<sub>0</sub>, G ohne Nebenkraft ist dann  $\frac{A}{B}$ . Der Einfluß der einen Neben- kraft auf den Einzelwert für die Lastlage a ist p<sub>1</sub>.

$$p_1 = \frac{\frac{Z}{N} - \frac{A}{B}}{\frac{Z}{N}} = \frac{z}{Z} - \frac{n}{B} \cdot \frac{A}{Z}$$

Angenähert ist  $\frac{A}{Z} = 1$  und  $p_1 = \frac{z}{Z} - \frac{n}{B}$ .

Für den gemittelten Einfluß  $p_2$  der Nebenkraft braucht man die Gesamtfläche der Einflußlinie und den der Nebenkraft zugehörigen Flächenteil.

$$p_2 = \frac{\frac{1}{2} \sum_0^8 \lambda (z_\lambda + z_{\lambda+1}) \Delta a}{\frac{1}{2} \sum_0^8 \lambda (Z_\lambda + Z_{\lambda+1}) \Delta a} - \frac{n}{B}.$$

Der von den Lastlagen unabhängige Nenner  $N$  bleibt zunächst außer Betracht und es werden wie vorhin  $\frac{z}{Z}$  so jetzt die Flächenwerte ins Verhältnis gesetzt. Zieht man von diesem Verhältniswerte das Verhältnis der Nennergrößen ab, so erhält man endlich den gemittelten Einfluß  $p_2$  der einen Nebenkraft. Dieser Vergleich gibt einen richtigeren Maßstab zur Beurteilung als jener der Einzelwerte.

In der Gleichung 8 für  $M_0$  ist der Beitrag der Normalkraft

$$z = + \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a \frac{ds}{F} + \frac{a}{2} \int_1^2 \frac{ds}{F} \right], \quad n = \frac{1}{r^2} \int_1^2 \frac{ds}{F} = 0,00501,$$

$$B = \int_1^2 \frac{ds}{J} = 22,64146, \quad \frac{n}{B} = 0,000221.$$

In der Gleichung 8 für  $H_0$  ist der Beitrag der Normalkraft

$$z' = - \frac{c}{r^2} \left( \frac{l}{2} - a \right) \int_1^a \frac{ds}{F}, \quad n' = + \frac{c^2}{r^2} \int_1^2 \frac{ds}{F} = 6,2392,$$

$$B' = \int_1^2 y^2 \frac{ds}{J} + \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} = 331,2305, \quad \frac{n'}{B'} = 0,018837$$

und der Beitrag der Querkraft

$$z'' = + \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F}, \quad n'' = \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} = 4,5057,$$

$$B'' = \int_1^2 y^2 \frac{ds}{J} + \frac{c^2}{r^2} \int_1^2 \frac{ds}{F} = 332,9640, \quad \frac{n''}{B''} = 0,013532.$$

In der Gleichung 8 für  $G$  ist der Beitrag der Querkraft

$$z = \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} - \frac{a}{l} \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}, \quad n = \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} = 18,1287,$$

$$B = \int_1^2 x^2 \frac{ds}{J} = 5558,868, \quad \frac{n}{B} = 0,003261.$$

In den Listen 3, 4, 5 wurden die Werte ausgerechnet. Genäherte Gleichungen für  $M_0$ ,  $H_0$ ,  $G$  ergeben zu große Werte, wenn  $p < 0$  und zu kleine Werte, wenn  $p > 0$ .

Der Einfluß der Normalkraft auf  $M_0$  ist verschwindend; erreichen doch die prozentualen Einzelbeträge nicht einmal 0,02 % und auch im Mittel wird  $M_0$  nur um 0,018 %

bei Vernachlässigung der Normalkraft zu klein. In weit höherem Maße ist  $H_0$  von der Normalkraft abhängig. In der Kämpfernähe wird  $H_0$  um 4,15 % und auch gemittelt noch um 2,09 % ohne sie zu groß. Die Querkraft trägt nur wenig zu  $H_0$  bei. Der gemittelte Einfluß erreicht nur 0,084 %; Einzelbeträge erreichen allerdings bis zu 3,6 %, aber nur in Kämpfernähe, wo  $H_0$  an und für sich sehr klein ist. Das Querkraftglied des Nenners hebt den Einfluß des Zählers auf. Die Querkraft ist auch bei  $G$  ohne Bedeutung. Ihr Einzeleinfluß wächst nur bis zu + 0,16 % und ihr gemittelter Einfluß ist nur — 0,157 %.

Als Ergebnis darf zusammengefaßt werden, daß bei allen Bögen mit ähnlichen Verhältnissen die Querkraft bedeutungslos ist und auch die Normalkraft nur bei  $H_0$  berücksichtigt werden muß.

**3. Der Einfluß der Normal- und Querkraft auf die Spannungen.** Die Wirkung der Nebenkkräfte wurde weiter bis zu den Kantenpressungen der Querschnitte im Kämpfer, Scheitel und in der gefährdeten Fuge II verfolgt. Aus den bereits berechneten Flächenwerten der  $M_0$ ,  $H_0$ ,  $G$ -Linien ist es möglich, den Flächenwert der Einflußlinien für die Kantenpressung eines Querschnittes zu finden.

$$\sigma = -\frac{N}{F} \mp \frac{M}{W}, \int_0^l \sigma da = -\frac{1}{F} \int_0^l N da \mp \frac{1}{W} \int_0^l M da,$$

$$\int_0^l N da = \cos \varphi \int_0^l H_0 da + \sin \varphi \int_0^l G da + \sin \varphi \int_0^l \mathfrak{B} da$$

$$\int_0^l M da = \int_0^l M_0 da - y \int_0^l H_0 da + x \int_0^l G da + \int_0^l \mathfrak{M} da$$

Die Fläche  $\int \sigma da$  wurde sowohl von  $0-l$  als auch von  $0-\frac{l}{2}$  berechnet, damit auch  $G$  darin enthalten war. Die Spannung entspricht das eine Mal einer über den ganzen Träger gleichförmig verteilten Last,  $1 t/l$  fm und das andere Mal einer gleichen Belastung der linken Trägerhälfte.

$$\int_0^l M_0 da = -341,08, \int_0^l H_0 da = +32,164, \int_0^l G da = 0,$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} M_0 da = -170,54, \int_0^{\frac{l}{2}} H_0 da = +16,082, \int_0^{\frac{l}{2}} G da = +2,1929.$$

Um welche Beträge diese Größen beim Fortlassen von  $N$  oder  $Q$  sich ändern, gibt Liste 3, 4, 5 an. Der Inhalt der vom frei aufliegenden Träger stammenden Flächen ist allgemein:

$$\int_0^l \mathfrak{B} da = -x, \int_0^l \mathfrak{M} da = \frac{1}{8}(l^2 - 4x^2)$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \mathfrak{B} da = -\frac{l}{8}, \int_0^{\frac{l}{2}} \mathfrak{M} da = +\frac{l}{8}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

Die genauen und genäherten Spannungswerte sind in der Liste 7 zusammengestellt und der Einfluß von  $N$  und  $Q$  in Prozenten ausgedrückt in der Liste 8.

## Liste 7.

## Der Beitrag der Normal und Querkraft zu den Spannungen.

Ganzer Träger belastet	Genau	Ohne N	Ohne Q	Halber Träger belastet	Genau	Ohne N	Ohne Q
Querschnitt 11:							
$\int_0^l \sigma_0 da$	-2,86	-2,71	-2,86	$\int_0^{\frac{l}{2}} \sigma_0 da$	+ 8,70	+ 8,82	+ 8,69
$\int_0^l -\frac{N}{F} da$	-3,08	-3,23	-3,08	$\int_0^{\frac{l}{2}} -\frac{N}{F} da$	- 2,01	- 7,05	- 2,07
$\int_0^l -\frac{M}{W} da$	+ 0,22	+ 0,52	+ 0,22	$\int_0^{\frac{l}{2}} -\frac{M}{W} da$	+ 10,71	+ 10,87	+ 10,71
$\int_0^l \sigma_u da$	-3,30	-3,75	-3,30	$\int_0^{\frac{l}{2}} \sigma_u da$	-12,72	-12,92	-12,73
Linker Kämpfer:							
$\int_0^l \sigma_0 da$	-7,17	-8,50	-7,22	$\int_0^{\frac{l}{2}} \sigma_0 da$	+ 7,28	+ 6,58	+ 7,26
$\int_0^l -\frac{N}{F} da$	-3,22	-3,24	-3,22	$\int_0^{\frac{l}{2}} -\frac{N}{F} da$	- 2,10	- 2,12	- 2,10
$\int_0^l -\frac{M}{W} da$	-3,95	-5,26	-4,00	$\int_0^{\frac{l}{2}} -\frac{M}{W} da$	+ 9,38	+ 8,70	+ 9,36
$\int_0^l \sigma_u da$	+ 0,73	+ 2,02	+ 0,78	$\int_0^{\frac{l}{2}} \sigma_u da$	-11,48	-10,82	-11,46
Bogenscheitel:							
$\int_0^l \sigma_0 da$	-9,28	-9,08	-9,22	$\int_0^{\frac{l}{2}} \sigma_0 da$	-4,64	-4,58	-4,61
$\int_0^l -\frac{N}{F} da$	-4,20	-5,08	-4,20	$\int_0^{\frac{l}{2}} -\frac{N}{F} da$	-2,10	-2,54	-2,10
$\int_0^l -\frac{M}{W} da$	-5,08	-4,08	-5,02	$\int_0^{\frac{l}{2}} -\frac{M}{W} da$	-2,54	-2,04	-2,51
$\int_0^l \sigma_u da$	+ 0,88	-1,00	+ 0,82	$\int_0^{\frac{l}{2}} \sigma_u da$	+ 0,44	-0,50	+ 0,41

Die Zahlen sind  $t/m^2$  und Druck erscheint mit Minuszeichen. In der folgenden Liste wird der prozentuale Einfluß der Nebenkkräfte festgestellt:

Liste 8.

Der Einfluß der Normal und Querkraft auf die Spannungen.

	Ganzer Träger belastet						Linke Trägerhälfte belastet						
	Linker Kämpf.		Scheitel		Querschnitt 11		Linker Kämpf.		Scheitel		Querschnitt 11		
%	$\sigma_0$	$\sigma_{II}$	$\sigma_0$	$\sigma_{II}$	$\sigma_0$	$\sigma_{II}$	$\sigma_0$	$\sigma_{II}$	$\sigma_0$	$\sigma_{II}$	$\sigma_0$	$\sigma_{II}$	Normal- kraft
Unterschied	+ 18,6	+ 17,7	- 2,2	+ 214	- 5,3	+ 13,7	- 9,6	- 5,7	- 3,0	+ 214	+ 1,4	+ 1,6	
Ohne N	+ 1,33	+ 1,29	- 0,20	+ 1,88	- 0,15	+ 0,45	- 0,70	- 0,66	- 0,14	+ 0,94	+ 0,12	+ 0,20	Querkraft
Genau	- 8,50	+ 2,02	- 9,08	- 1,00	- 2,71	- 3,75	+ 6,58	- 10,82	- 4,50	- 0,50	+ 8,82	- 12,92	
Ohne Q	- 7,17	+ 0,73	- 9,28	+ 0,88	- 2,86	- 3,30	+ 7,28	- 11,48	- 4,64	+ 0,44	+ 8,70	- 12,72	$t/m^2$
Unterschied	+ 7,22	+ 0,78	- 9,22	+ 0,82	- 2,86	- 3,30	+ 7,26	- 11,46	- 4,61	+ 0,41	+ 8,69	- 12,73	Querkraft
%	+ 0,05	+ 0,05	- 0,06	- 0,06	0	0	- 0,02	- 0,02	- 0,03	- 0,03	- 0,01	+ 0,01	
%	+ 0,5	+ 6,9	- 0,6	- 6,8	0	0	- 0,3	- 0,2	- 0,6	- 6,8	- 0,1	+ 0,1	

Auch hier ist das Ergebnis, daß die Querkraft bedeutungslos und nur die Normalkraft von Einfluß ist. Eine weitere Überlegung zeigt, daß bei  $H_0$  auch das veränderliche von der Normalkraft stammende Zählerglied ohne wesentliche Einbuße an Genauigkeit fehlen darf, denn man sieht aus der Gleichung  $100 p_2' = 100 (- 0,002034 - 0,018837) \%$ , daß ohne das Nennerglied  $H_0$  um 1,88 %, ohne das Zählerglied jedoch nur um 0,20 % zu groß wird. Mit voller Berechtigung dürfen daher die Grundgleichungen 9 diese endgültige Form haben.

$$W_1 = \frac{\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \frac{ds}{J} + \int_1^a x \frac{ds}{J}}{\int_1^2 \frac{ds}{J}}, \quad M_0 = - \frac{a}{2} - W_1 \text{ zu klein um } 0,02 \%$$

$$W_2 = \frac{\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a y \frac{ds}{J} + \int_1^a xy \frac{ds}{J}}{\int_1^2 y^2 \frac{ds}{J} + c^2 \int_1^2 \frac{ds}{Fr^2}}, \quad H_0 = + W_2 \text{ zu groß um } 0,29 \%$$

$$W_3 = \frac{\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a x \frac{ds}{J} + \int_1^a x^2 \frac{ds}{J}}{\int_1^2 x^2 \frac{ds}{J}}, \quad G = + \frac{a}{l} - W_3 \text{ zu groß um } 0,16 \%$$

4. Die Kämpferdruck-Schnitt- und Umhüllungslinien. Aus den  $M_0, H_0, G$  findet man nach Gleichung 1 und 2 die Kräfte am linken Lager  $M_1, H_1, A$ , welche in Liste 9 angegeben sind. Die Einflußlinien sind auf Abb. 20 dargestellt.

Aus den Werten  $v, f$  der Gleichungen 11 und Liste 9 wurden die Kämpferdruck-schnittlinie und die beiden Umhüllungslinien gezeichnet. Für  $a = 0$  ist  $v = \frac{0}{0}$ ; eine Differen-

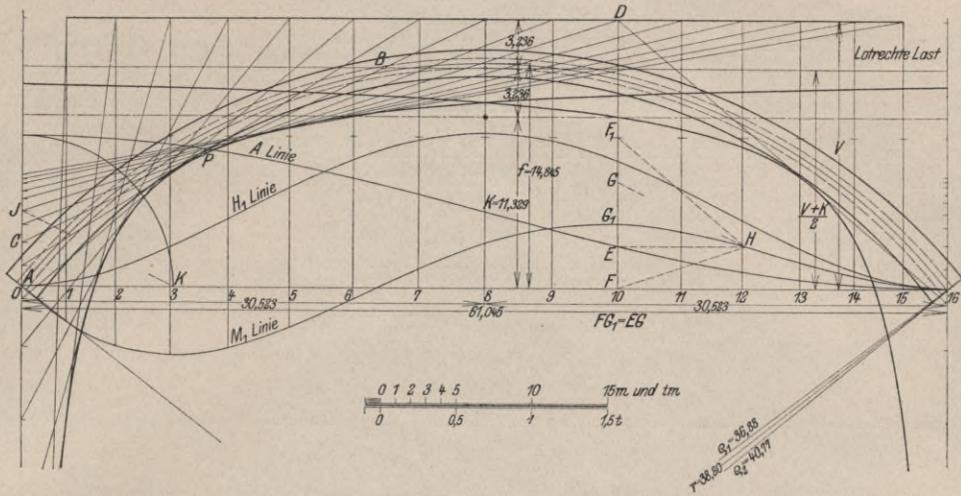


Abb. 20.  $FG_1 = M_1$ ,  $EH = H_1$ ,  $EF = A$ .  
Die Einflußlinien der Kräfte  $M_1$ ,  $A$ ,  $H_1$  am linken Kämpfer und die Kämpferdruck-Schnitt- und Umhüllungslinien für lotrechte Last.

tiation des Zählers und Nenners ergab  $v = \infty$ . Mit Ausnahme der Kämpfernähen fällt die Schnittlinie fast genau mit der Parallelen zur Kämpferverbindungsline zusammen. Die Kreisbögen, welche durch die mittleren Drittel der Kämpfer und Scheitelfugen gehen, werden als Kernlinien betrachtet und sind auf Abb. 20 mit ihren Halbmessern 38,155 und 39,453 m gezeichnet.

Liste 9.

Die Kämpferkräfte mit Schnitt- und Umhüllungslinien, für lotrechte Last.

	$M_1$	A	$H_1$	v	f
0	0	1	0	—	— $\infty$
1	— 2,3757	0,994 553	0,028 625	17,796	— 82,980
2	— 3,9364	0,977 208	0,116 959	17,764	— 33,656
3	— 4,4936	0,943 327	0,263 185	17,765	— 17,075
4	— 4,0148	0,890 271	0,452 994	17,771	— 8,863
5	— 2,6534	0,816 780	0,659 499	17,774	— 4,023
6	— 0,7388	0,724 055	0,846 946	17,779	— 0,871
7	+ 1,2861	0,616 204	0,978 370	17,800	+ 1,915
8	+ 2,9744	0,500 000	1,025 686	17,800	+ 2,899
9	+ 3,9980	0,383 796	0,978 370	17,800	+ 4,687
10	+ 4,2313	0,275 925	0,846 946	17,779	+ 4,997
11	+ 3,7626	0,183 220	0,659 499	17,774	+ 5,705
12	+ 2,8387	0,109 729	0,452 994	17,771	+ 6,266
13	+ 1,7367	0,056 673	0,263 185	17,765	+ 6,712
14	+ 0,8265	0,022 792	0,116 959	17,764	+ 7,068
15	+ 0,2101	0,005 447	0,028 625	17,796	+ 7,338
16	0	0	0	—	—

5. Die Einflußlinien der Kantenpressung. Die vereinfachte Gleichung für die Kantenpressung eines Querschnittes lautet für die obere Faser:  $\sigma_o = -\frac{N}{F} - \frac{M}{W}$  und die untere Faser  $\sigma_u = -\frac{N}{F} + \frac{M}{W}$ . Druck ist wie früher mit Minus, Zug mit Plus bezeichnet. Es

werden 9 Querschnitte  $a_0$ — $a_8$  untersucht, deren Achspunkte mit den früheren Lastlagen zusammenfallen (Abb. 18). Da die Gewölbstärke und Breite bisher nur für die Mitten der Bogenteile berechnet wurden, müssen sie für die neun Querschnitte ermittelt werden.

Nach Seite 28 ist die vereinfachte Gleichung der Gewölbstärke  $h = 2,6 - 3,2n \frac{(16 - n)}{16^2}$ ,  $n = 0$ — $8$ . Die Werte  $F$  und  $W$  sind in Liste 2 Seite 28 mit den Koordinaten  $x$ ,  $y$

der Achspunkte der neun Querschnitte und den Werten  $\frac{a}{l}$  gegeben. Die Berechnung der Werte M, N geschah nach Gleichung 12. Die Einheit der Größe drückt den Wert  $l \frac{t}{m^2} = 0,1 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$  aus, da Längen und Lasten mit m und t in die Rechnung eingeführt wurden. Die Linien der  $\sigma_0$  und  $\sigma_{II}$  für den als Beispiel herausgegriffenen Querschnitt 5 sind auf Abb. 21 gezeichnet.

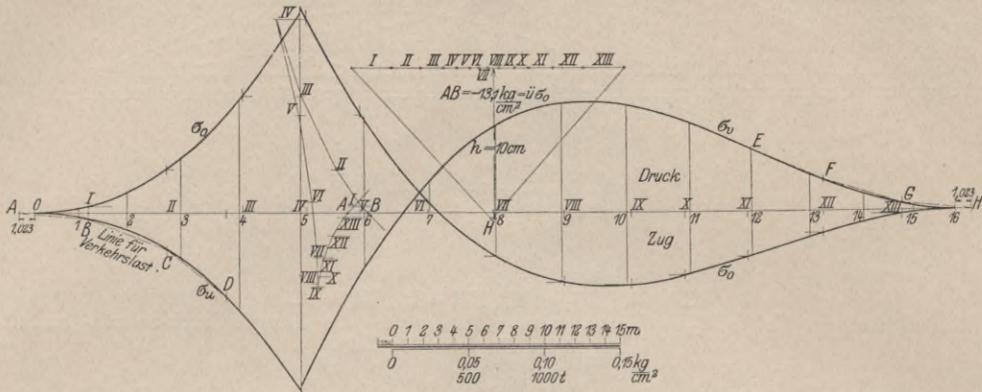


Abb. 21. Die Einflußlinien der Normalspannung in der oberen und unteren Faser des Querschnittes 5 für lotrechte Last und die zeichnerische Bestimmung von  $u\sigma_0$ .

Im Querschnitt selbst macht die Einflußlinie den von N herrührenden Sprung  $\frac{\sin \varphi}{F}$ . Druck wurde oberhalb und Zug unterhalb der Abszissenachse aufgetragen.

**6. Die Einflußlinie der Scheitelsenkung.** Bei der Berechnung wurde wieder Wert darauf gelegt, den Beitrag von N und Q zur Scheitelsenkung hervorzuheben; darum wurde Gleichung 13 so umgebildet, daß statt den  $W_1, W_2, W_3$  die Zusatzkräfte  $M_0, H_0, G$  erschienen, bei welchen der Einfluß der Nebenkkräfte schon berechnet war. Der eigentlichen Rechnung ging eine Proberechnung mit der üblichen Gleichung

$$E d = \int_1^2 n_1 \frac{N ds}{F} + \int_1^2 m_1 \frac{M ds}{J}$$

voraus, welche jedoch erheblich mehr Rechenarbeit erforderte, als die noch die Querkraft enthaltende Gleichung 13 oder 14. Um nämlich  $E \cdot d$  für die 9 Lastlagen  $a_0$ — $a_8$  zu finden, mußten je 8 Zustandslinien der M, N, für jede Lastlage eine, gerechnet werden. Die Werte  $m_1, n_1$  wurden den Zustandslinien für  $a = \frac{l}{2}$  entnommen. Nach Gleichung 2 ist für

$$a = \frac{l}{2}, \quad m_1 = -8,6457 - 1,0257 y + \frac{1}{2} \left( \frac{l}{2} + x \right), \quad n_1 = 1,0257 \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi.$$

Die Rechnung wurde mit dem Rechenschieber durchgeführt und das Ergebnis in Liste 10 zusammengestellt. Positive Werte bedeuten eine Senkung, negative eine Hebung des Scheitels.

Liste 10. Genäherte Einflußlinie der Scheitelsenkung, für lotrechte Last.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\int_1^2 n_1 \frac{N ds}{F}$	0,49	1,47	2,88	4,55	6,29	7,82	8,84	9,26
$\int_1^2 m_1 \frac{M ds}{J}$	-2,35	-7,42	-12,40	-13,17	-5,42	+9,69	+26,30	+37,24
E d, genähert . .	-1,86	-5,95	-9,52	-8,62	+0,87	+17,51	+35,14	+46,47

Die Hauptrechnung erfolgte wieder logarithmisch mit Bezug von N, Q nach der auf Gleichung 13 fußenden Gleichung:

$$E d = \alpha_1 M_0 + \alpha_2 H_0 + \alpha_3 G + \alpha_4 \cdot \frac{a}{l} + \frac{1}{2} \int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{F} + \frac{1}{2} \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}$$

$$\alpha_1 = \int_1^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J} = -149,8201, \quad \alpha_2 = - \int_1^{\frac{l}{2}} x y \frac{ds}{J} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F}$$

$$= -342,530 - 2,404 = -344,934$$

$$\alpha_3 = - \int_1^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{ds}{J} = -2779,434, \quad \alpha_4 = \int_1^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{ds}{J} - \frac{l}{2} \int_1^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J} = -1793,520.$$

In Liste 11 sind die Einzelwerte, die von N, Q stammenden Beträge und die Endwerte aufgezählt. Die Übereinstimmung der genauen mit der genäherten Rechnung genügt.

Liste 11.  
Genauere Einflußlinie der Scheitelsenkung, für lotrechte Last.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\alpha_1 M_0$	210,881	431,488	650,976	856,994	1036,290	1175,930	1264,781	1295,310
$\alpha_2 H_0$	— 9,873 —	— 40,342 —	— 90,780 —	— 156,251 —	— 227,481 —	— 292,137 —	— 337,469 —	— 353,789
$\alpha_3 G$	— 117,740 —	— 216,857 —	— 285,035 —	— 312,040 —	— 292,122 —	— 226,287 —	— 123,475 —	0
$\alpha_4 \frac{a}{l}$	— 85,215 —	— 180,815 —	— 285,575 —	— 398,157 —	— 517,114 —	— 640,933 —	— 768,022 —	— 896,760
$+ \frac{1}{2} \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}$	0,223	0,537	0,955	1,485	2,125	2,865	3,678	4,532
$\frac{1}{2} \int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{F}$	0,096	0,182	0,254	0,308	0,346	0,369	0,374	0,375
<b>E d genau</b>	<b>— 1,629 —</b>	<b>— 5,807 —</b>	<b>— 9,205 —</b>	<b>— 7,661 +</b>	<b>— 2,044 +</b>	<b>— 19,807 +</b>	<b>— 39,866 +</b>	<b>— 49,668</b>
$\int_1^2 n_1 N \frac{ds}{F}$	0,481	1,414	2,770	4,430	6,183	7,730	8,794	9,207
$\int_1^2 q_1 Q \frac{ds}{\alpha F}$	— 0,267 —	— 0,442 —	— 0,490 —	— 0,369 —	— 0,076 +	— 0,426 +	— 1,076 +	— 1,883

Als Grundlage für die Beurteilung des Einflusses von N, Q wurde die Fläche der genauen Einflußlinie, der von N und der von Q herrührende Flächenteil berechnet.

$$\int_0^{\frac{l}{2}} E d da = 286,378, \quad \int_0^{\frac{l}{2}} E d_n da = 150,817, \quad \int_0^{\frac{l}{2}} E d_q da = 4,784.$$

Es findet sich der gemittelte Einfluß von N auf die Scheitelsenkung zu

$$P_n = 100 \cdot \frac{150,817}{286,378} = + 52,65 \%$$

und der Querkraft zu

$$P_q = 100 \cdot \frac{4,784}{286,378} = + 1,67 \%$$

Die Querkraft hat somit nur eine geringe Wirkung, aber die Normalkraft bewirkt die Hälfte der Scheitelsenkung.

Die Möglichkeit einer Scheitelhebung, wie sie Abb. 22 zeigt, leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, daß die Einflußlinie der Scheitelsenkung zugleich Biegelinie des Bogens für eine im Scheitel hängende Last ist. Nach Abb. 22 liegen die Wendepunkte  $J_1'$  und  $J_2'$  der Biegelinie senkrecht unter den beiden Schnittpunkten  $J_1, J_2$  des Kämpferdruckes  $R$  mit der Bogenachse.

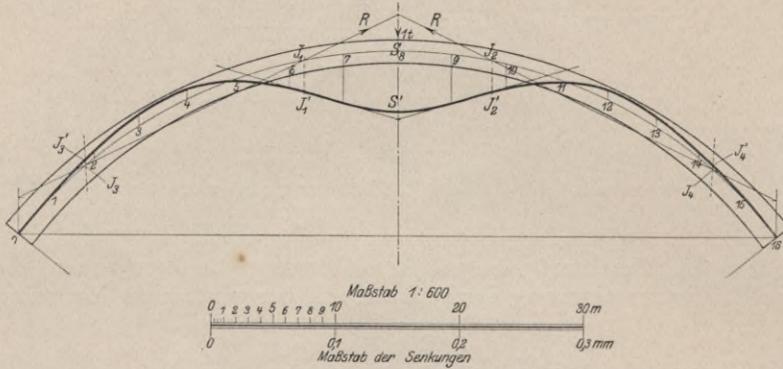


Abb. 22. Die Einflußlinie der Scheitelsenkung für lotrechte Last und zugleich Biegelinie für im Scheitel hängende Last.

Nach Ausweis der Liste 11 bewirkt  $N$  für alle Lastlagen eine Scheitelsenkung, während  $Q$  und  $M$  bis zur Lastlage  $a_5$  den Scheitel heben.

**7. Die ruhende Last.** Zwischen der symmetrisch verteilten Bogeneigenlast und der durch die Bahnsteigung 1 : 45 unsymmetrischen Last der Bogenübermauerung wird in der Rechnung scharf unterschieden. Die Spannung durch die Eigenlast ist  $e\sigma$ , durch die Übermauerung  $\ddot{u}\sigma$  und durch beide zusammen, also durch die gesamte ruhende Last  $r\sigma = e\sigma + \ddot{u}\sigma$ .

Die Eigenlast des Bogens. Das spezifische Gewicht des Baustoffes wird zu 2,4 t/m<sup>3</sup> genommen, da der Bogen aus Granitquadern besteht. Die Eigenlastspannung ist von der Gewölbbebreite unabhängig. Der Bogen wurde neuerdings so geteilt, daß der Schwerpunkt eines jeden Teiles mit einer der früheren Lastlagen zusammenfiel, also mit den Punkten 1—8; daß also ein Teil von 2'—3' (Abb. 18 S. 26) u. s. f. reicht. Wegen der Symmetrie wird nur die linke Brückenhälfte berechnet.

Es werden nun die Linien gesucht, welche für jeden Punkt der oberen und unteren Leibung des Bogens das zugehörige  $e\sigma$  angeben. Man kann von ihnen ebenso viele Punkte finden, als Einflußlinien  $\sigma$  berechnet worden sind. Es ist  $e\sigma = \sum_0^{16} 2,4 F \Delta s \delta$ , wobei  $\delta$  der zum Schwerpunkt des Bogenteiles gehörige Wert der Einflußlinie  $\sigma$  ist. Die Werte  $e\sigma_0, e\sigma_u$  sind in Liste 24 und 25 enthalten und auf Abb. 23 als Ordinaten aufgetragen. Beide Linien sind insofern voneinander abhängig, als dem Wachsen der Werte der einen Linie ein Fallen der anderen entspricht. Die größte Spannung von 12,67 kg/cm<sup>2</sup> Druck ist in der oberen Faser des Scheitels und dementsprechend die kleinste mit 4,53 kg/cm<sup>2</sup> dort in der unteren Faser.

Die Last der Übermauerung. Einzig und allein durch die Übermauerung, welche der Bahnneigung angepaßt ist, kommt in den Kräfteverlauf die Unsymmetrie, und daher müssen nur die Spannungen  $\ddot{u}\sigma$  für die ganze Spannweite berechnet werden. Als spezifisches Gewicht wurde für Mauerwerk 2,4 t/m<sup>3</sup> und für Auspackung und Schotter 2,2 t/m<sup>3</sup> genommen.

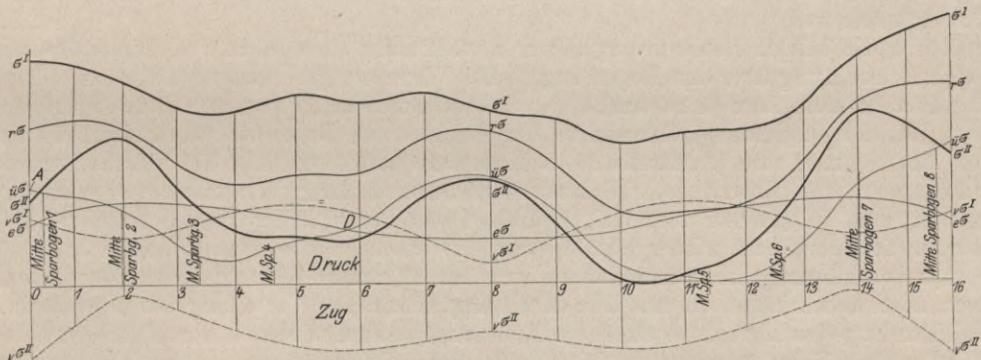
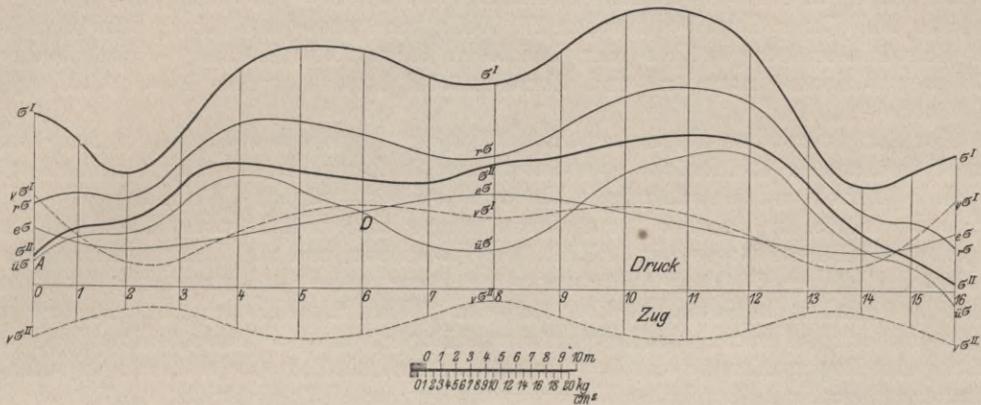
Liste 12.

Die Teillasten der Übermauerung, für lotrechte Last.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Übermauerung . . t.	264	191	151	87	91	62	57	71	105	93	161	201	278

Die Fahrbahn ruht in Brückenmitte unmittelbar auf dem Bogen auf, während sie sich gegen den Kämpfer zu mit 4 Sparbögen von 3,90 m Lichtweite und 3 Pfeilern auf den Bogen stützt. Sie ist so geteilt worden, daß jede Pfeilermitte in der Schwerlinie eines jeden Teiles liegt, in Brückenmitte schließt sich die Teilung an die frühere Bogenteilung an. Die so entstandenen 13 Lastteile, welche in der Richtung Langenbrand-Forbach bezeichnet sind, enthält die Liste 12, die durch sie verursachten Spannungen der oberen und unteren Faser der Querschnitte 0—16 enthält die Liste 24 und 25.

Die Spannung in der oberen Leibung des Bogens.



Die Spannung in der unteren Leibung des Bogens.

Abb. 23.

Wenn man den Ausdruck  $\Sigma P \delta$  als statisches Moment der wagerecht gedachten Kräfte  $P$ , jede im Abstände des zugehörigen  $\delta$  von der Achse wirkend, betrachtet und mit dem Polabstande  $h = 1$  ein Seilpolygon zeichnet, so kann man nach Abb. 21, das den Querschnitt 5 als Beispiel nimmt, den Wert  $\bar{u}_0$  wie jeden anderen Spannungswert leicht zeichnerisch ermitteln. Das Ergebnis ist jedoch zu ungenau und das Verfahren daher nicht vortheilhaft.

Wenn auch die Linie der  $\bar{u}_0$  Wendepunkte hat, so läßt sich doch eine Regelmäßigkeit erkennen. Den Größtwerten bei Punkt 4 und 12 der oberen Faser entsprechen die Kleinstwerte in der unteren Faser an der gleichen Stelle; bei 6 und 10 erscheinen nochmals relative Größt- und Kleinstwerte. Auf der rechtsuferigen Brückenhälfte ist die Auflast größer und erzeugt in der oberen Faser durchschnittlich höhere Spannungen als in der linken Hälfte. Entsprechend der abnehmenden Bogenquerschnittsfläche wird der Abstand der annähernd gleichlaufenden Linien gegen den Scheitel größer. Der weniger regelmäßige Verlauf von A nach D rührt von den Sparbögen her, von denen jeder einen Wendepunkt verursacht.

Die Spannungen  $\sigma_0$  durch die gesamte ruhende Last sind in Liste 24, 25 enthalten und ihre Linien oben gezeichnet. Ihr Größtwert ist 27 kg/cm<sup>2</sup> und 9 kg/cm<sup>2</sup> Druck.

**8. Die Scheitelsenkung durch die ruhende Last und Berechnung des Elastizitätsmoduls  $E$ .** Der spannungs- und gewichtslose Bogen senkt sich um das Maß  $ed$  im Scheitel, wenn ihm

sein Eigengewicht aufgelastet wird, und um  $rd = ed + \ddot{u}d$ , wenn hierzu noch die Übermauerung kommt. Aus der früher gefundenen Einflußlinie in Liste 11 und Abb. 22 wurde berechnet:

$$Erd = 9042,50 + 5942,95 = + 14967,45 \text{ t/m.}$$

Der Elastizitätsmodul des Gewölbestoffes, welcher gewöhnlich in  $\text{kg/cm}^2$  ausgedrückt wird, wechselt mit der Stoffart und innerhalb gleichen Stoffes mit der Pressung so, daß er sich mit zunehmender Spannung verkleinert. Die gemittelten Werte für die verschiedenen Steinarten weichen schon voneinander ab und beim Mauerwerk kommt noch der Einfluß des Mörtels hinzu. Ritter gibt für Bruchsteinmauerwerk  $E = 80\,000 \text{ kg/cm}^2$ , Weyrauch fand aus den Wiener Gewölbeversuchen  $175\,000 \text{ kg/cm}^2$ . Aus der Senkung beim Ausrüsten des Schwädeholzdobelgewölbes der badischen Bahnstrecke Freiburg—Donaueschingen, welches aus Sandsteinquadern und Zementmörtel besteht, wurde  $E = 70\,000 \text{ kg/cm}^2$  berechnet.

Der Langenbrandner Bogen besteht aus Quadern, welche aus dem sehr guten Granite der Raumünzacher Steinbrüche gearbeitet und in Zementmörtel aus 1 R.T. Zement und 3 R.T. grob und scharfkörnigem Murgsand versetzt wurden. Wenn irgend möglich, wurde der Mörtel in die etwa 2 cm starken Fugen eingestampft, sonst aber dünnflüssig eingegossen. Da der Bogen am 3. XII. 1908 geschlossen und am 8. II. 1909 ausgerüstet worden ist, blieben 67 Tage Erhärtungszeit bis zur vollen Beanspruchung des Mörtels durch die Eigenlast des Gewölbes. Vom Tage des Wölbschlusses bis kurz vor der Ausrüstung wurde eine Scheitelsenkung am Lehrgerüst und Bogen von  $a_1 = 3 \text{ mm}$ , während der Ausrüstung eine Bogensenkung von  $a_2 = 7 \text{ mm}$  gemessen. Am Tage des Wölbschlusses und der Ausrüstung herrschte gleich kaltes Wetter, so daß ein beträchtlicher Einfluß der Wärme nicht wahrscheinlich ist.

Bevor die beiden Beobachtungen zur Bestimmung eines Wertes  $E$  benutzt werden, sei eine Betrachtung über den Bogen angestellt. Wenn der geschlossene eingerüstete Bogen sich mit samt dem Lehrgerüst senkt, so wird während der Bewegung das Lehrgerüst von einem Teil der Bogenlast entlastet und der Bogen einen Bruchteil seines Eigengewichtes selbst übernehmen und unmittelbar den Kämpfern zuführen. Ein Teil der Senkung des noch eingerüsteten Bogens ist als elastische Scheitelsenkung zu betrachten. Wenn dann das Lehrgerüst in üblicher vorsichtiger Weise in mehreren Stufen vom Scheitel gegen die Kämpfer fortschreitend niedergelassen wird, so wachsen die etwa schon vorhandenen Fugenpressungen langsam vom Scheitel bis zu den Kämpfern bis zu den der Bogenlast entsprechenden Spannungen  $e\sigma$  an. Der durch ungleichmäßige Verteilung des Mörtels innerhalb einer Fuge bedingte unregelmäßige Spannungszustand wird sich durch eine verhältnismäßig größere Formänderung des Mörtels in einen gleichmäßigen verwandeln; es bedarf eines gewissen Weges und einer gewissen Zeit, bis der Bogen seine Gleichgewichtslage einnimmt; eines größeren Weges, als wenn von vornherein der Mörtel in allen Fugen gleich verteilt wäre. Ein Bruchteil der Formänderung wird also durch nicht rein elastische Arbeiten verursacht. Der beim Ausrüsten entstehende Spannungszuwachs im Bogen verursacht darum eine elastische Scheitelsenkung, welche wahrscheinlich etwas kleiner als die beobachtete ist. Hält man dies mit dem Anfange der Betrachtung zusammen, so ergibt sich, daß die gesamte elastische Scheitelsenkung  $a$  durch die Eigenlast des Bogens aus einem kleinen Teil des zwischen Wölbschluß und Ausrüstung beobachteten Weges  $a_1$  und aus dem Hauptteile des während der Ausrüstung gemessenen Weges  $a_2$  sich zusammensetzt.

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2.$$

Beiden Umständen wurde Rechnung getragen, indem Wert  $\alpha_2$  etwas zu groß, nämlich = 1, und Wert  $\alpha_1$  etwas zu klein, nämlich =  $\frac{1}{2}$ , angenommen wurde.

$$a = 0,5 a_1 + a_2 = 1,5 + 7 = 8,5 \text{ mm,}$$

daraus findet sich  $E$ :

$$Erd = E 0,0085 = + 9042,50 \text{ t/m}$$

und

$$E = 106\,382 \text{ kg/cm}^2, \text{ rund } 100\,000.$$

Wollte man nur die Senkung während des Ausrüstens zugrunde legen, so würde  $E = 129\,178 \text{ kg/cm}^2$ ; und nimmt man  $a = a_1 + a_2 = 10 \text{ mm}$ , so ist  $E = 90\,425 \text{ kg/cm}^2$ .

Die Scheitelsenkung durch die Übermauerung berechnet sich für  $E = 100\,000$  zu 5,9 mm und jene durch die gesamte ruhende Last zu 15,0 mm. Die tatsächliche Senkung unter dem Einfluß der gesamten ruhenden Last wurde nicht beachtet, da mittlerweile die Wärme einen bedeutenden Einfluß gewonnen hatte und das Gewölbe mit seiner Übermauerung einem versteiften Bogen ähnlich wirken mußte.

**9. Die Verkehrslast.** Nach den badischen Vorschriften für die Anordnung und Berechnung eiserner Brücken wurde der Lastenzug in Rechnung gestellt, der in Abb. 24 gezeichnet ist. Bei der großen Stützweite des Trägers kamen vor allem Lokomotiven in Betracht, welche unter Umständen Brust an Brust gestellt wurden. Wegen der Symmetrie des Bogens brauchten die ungünstigsten Beanspruchungen durch die Verkehrslast  $v\sigma$  nur für die 9 Querschnitte der linken Hälfte berechnet werden. In dem mittleren Brückenteil überträgt sich die Last unmittelbar durch die Auspackung auf den Bogen; über den Sparbögen wird sie ihm durch Pfeiler zugeführt. Somit verläuft die Einflußlinie jeder Kantenpressung gegen den Kämpfer als Streckenzug A B C D, E F G H (Abb. 21 bei  $\sigma_n$  Seite 36).

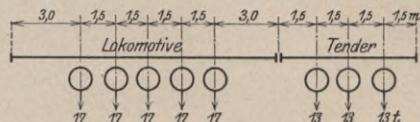


Abb. 24. Schema der Verkehrslast.

An den Punkten 0 und 16 tritt nicht der Wert 0 auf, da der äußerste Kämpfer des letzten Sparbogens außerhalb der Spannweite liegt. In jedem Querschnitte sind 4 Fälle zu beachten, denn jede der beiden äußeren Fasern hat eine größte und eine kleinste Beanspruchung durch die Verkehrslast. Der größte Druck heißt  $v\sigma^I$ , der größte Zug  $v\sigma^{II}$ . Es sind somit für jeden Querschnitt 4 verschiedene Laststellungen maßgebend. Das Ergebnis der Untersuchung ist in Liste 24, 25 und auf Abb. 23 S. 39 zusammengestellt. Die Linie des größten Druckes verläuft jener des größten Zuges ähnlich und beide haben beim ersten Pfeiler und im Scheitel Kleinstwerte, weil Zugtrennungen nicht zulässig sind. Die auftretende größte Spannung ist bei Druck 12,05 und bei Zug 9,54 kg/cm<sup>2</sup>.

**10. Die Formänderung der Widerlager unter der ruhenden Last.** Die Kräfte an den beiden Kämpfern sind:

durch die Übermauerung:

$$\begin{aligned} \text{links } \ddot{u} A &= 890 \text{ t, } \ddot{u} H = + 733 \text{ t, } \ddot{u} M_1 = - 283 \text{ tm,} \\ \text{rechts } \ddot{u} B &= 933 \text{ t, } \ddot{u} H = - 733 \text{ t, } \ddot{u} M_2 = + 562 \text{ tm.} \end{aligned}$$

durch die Eigenlast des Bogens:

$$\begin{aligned} e A &= 810 \text{ t, } e H = + 678 \text{ t, } e M_1 = - 13 \text{ tm,} \\ e B &= 810 \text{ t, } e H = - 678 \text{ t, } e M_2 = + 13 \text{ tm.} \end{aligned}$$

Durch die ganze ruhende Last:

$$\begin{aligned} A &= 1700 \text{ t, } H = + 1411 \text{ t, } M_1 = - 296 \text{ tm,} \\ B &= 1743 \text{ t, } H = - 1411 \text{ t, } M_2 = + 575 \text{ tm.} \end{aligned}$$

Zunächst wird die Formänderung der beiden Widerlager, deren in Rechnung gestellte Abmessungen Abb. 25 zeigt, mit Hilfe der Gleichungen 15, 16, 17 gesucht.  $\Delta l_0$ ,  $\Delta h$ ,  $\Delta \varphi$  sind die 3 Größen, welche die Lage der Kämpferfugen nach der Formänderung bestimmen.

Linkes Widerlager:

$$h_2 = 9,00, h_1 = 2,60, b = 5,40, l_0 = 4,50 \text{ m.}$$

Die Normal- und Querkraft im Kämpfer ist:

$$P_1 = A \sin \varphi_1 + H \cos \varphi_1 = 2208 \text{ t, } Q_1 = A \cos \varphi_1 - H \sin \varphi_1 = - 60 \text{ t, } M_1 = + 296 \text{ tm.}$$

Nun sind die 3 Kräfte P, Q, M der Gleichungen 15—17 gegeben, welche die Form des Widerlagers verändern. Den Gleichungen liegen die Krafrichtungen der Abb. 25 zugrunde.

$$E \Delta l_0 = 2208 \frac{4,5}{5,4 \cdot 6,4} l_n \left( \frac{9}{2,6} \right) = 357 \text{ t/m, } E \Delta h' = - 29,1 \text{ t/m}$$

$$E \Delta h'' = - 145,6 \text{ t/m, } E \Delta \varphi_1 = + 31,35 \text{ t/m}^2.$$

$$E \Delta d' = K L = K M \sin \varphi_1 - M K_1 \cos \varphi_1 = 172,98 \text{ t/m}$$

$$E \Delta l' = K^1 L = K_1 M \sin \varphi_1 + M K \cos \varphi_1 = 357,83 \text{ t/m.}$$

Die neue Lage der linken Kämpferfuge entspricht Abb. 25.

Rechtes Widerlager:

$$h_2 = 8,00, h_1 = 2,60, b = 5,40, l_0 = 7,50 \text{ m.}$$

Normal-, Querkraft und Moment in der rechten Kämpferfuge sind durch die ruhende Last:

$$P_2 = 2241 \text{ t, } Q_2 = -34 \text{ t, } M_2 = -575 \text{ tm.}$$

$$E \Delta l_0 = 648,2, E \Delta h' = -29, E \Delta h'' = -259, E \Delta h = -288 \text{ t/m, } E \Delta \varphi_2 = -117,4 \text{ t/m}^2$$

$$E \Delta l'' = O N_1 = N P \cos \varphi_2 + P N_1 \sin \varphi_2 = 626,74 \text{ t/m}$$

$$E \Delta d'' = N O = N P \sin \varphi_2 - P N_1 \cos \varphi_2 = 332,11 \text{ t/m.}$$

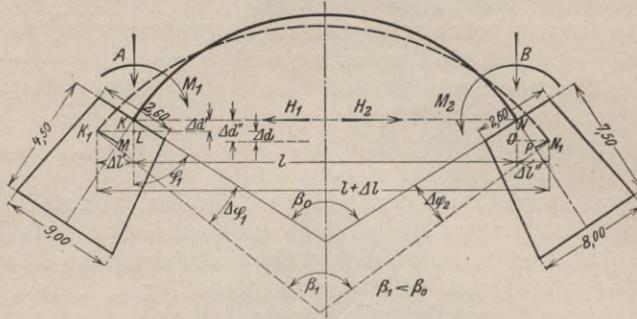


Abb. 25. Veränderung der Kämpferlage bei elastischen Widerlagern.

Die neue Lage der rechten Kämpferfuge entspricht Abb. 25.

Die Änderung der Lagerkräfte ergibt sich aus den nun bekannten Änderungen der Spannweite und der Höhen der Kämpfer.

$$E \Delta l = E \Delta l' + E \Delta l'' = 984,57, \quad E \Delta d = E \Delta d'' - E \Delta d' = 159,13 \text{ t/m.}$$

Die vorher gleichhohen Kämpfer haben ungleiche Höhenlagen erhalten und ihr lot-rechter Höhenunterschied beträgt  $\Delta d$ .

Nach Gleichung 17 berechnet sich nun

$$\Delta M_0 = +6,57 \text{ tm, } \Delta H_0 = +2,08 \text{ t, } \Delta G = +0,50 \text{ t.}$$

Um diese Beträge ändern sich die Zusatzkräfte des linken Kämpfers, welche im Achsursprung angreifen. Die Änderungen am rechten Kämpfer sind ihnen entgegengesetzt gleich, denn vor wie nach der Deformation herrscht zwischen den äußeren Kräften Gleichgewicht. Die Änderung des linken Kämpfermomentes ist

$$\Delta M_1 = +14,87 \text{ tm,}$$

jene des rechten Momentes

$$\Delta M_2 = -45,39 \text{ tm.}$$

Die Änderung der Kantenpressungen ist durch  $\Delta \sigma = -\frac{\Delta N}{F} \mp \frac{\Delta M}{W}$  gegeben. Es genügt jedoch, die Momentenänderung zu berechnen und die unbedeutende Veränderung der Normalkraft darf vernachlässigt werden.

$$\Delta M = \Delta M_0 - y \Delta H_0 + x \Delta G = 6,57 - 2,08 y + 0,50 x,$$

Linker Kämpfer

$$\Delta \sigma_0 = -0,25, \quad \Delta \sigma_u = +0,25 \text{ kg/cm}^2,$$

Rechter Kämpfer

$$\Delta \sigma_0 = -0,76, \quad \Delta \sigma_u = +0,76 \text{ kg/cm}^2,$$

Querschnitt 11

$$\Delta \sigma_0 = -0,45, \quad \Delta \sigma_u = +0,45 \text{ kg/cm}^2.$$

#### D. Die wagrechten Längsbelastungen: Die Bremskraft.

Die Bremskraft hat in der Brückenmitte von der Kämpferlinie den lotrechten Abstand  $t = 14,845 + 2,000 + 2,100 = 18,945 \text{ m}$ . Obwohl die Fahrbahn mit  $1 : 45$  steigt, wurde der Mittelwert  $t = 18,95 \text{ m}$  in die Rechnung eingesetzt. Nach den Vorschriften hat die Bremskraft die Größe  $B = 0,057 L + 0,069 T = 0,97 + 0,90 \text{ Tonnen}$ .

1. Die Einflußlinien von  $M_0, H_0, G$  und  $W_1, W_2, W_3$ . Die Gruppe 18 (S. 13) dient zur Berechnung der Einflußlinien, da der Einfluß der Nebenkräfte gesucht wird, und nicht Gruppe 19.

Wie früher werden wieder die Glieder von M, N, Q durch die ganze Rechnung getrennt geführt, so daß ihr Einfluß auf das Ergebnis bestimmt werden kann. Die Nenner  $N_1, N_2, N_3$  haben die früheren Werte:

$$\begin{aligned} N_1 &= 22,6465, & t &= 18,950, & c &= 35,284 \text{ m} \\ N_2 &= 337,4697, & \frac{t}{l} &= 0,310, & l+r-f &= 85,000 \text{ m} \\ N_3 &= 5576,997, & t-k &= 7,621, & \frac{t}{2} \int_1^2 \frac{ds}{J} &= 214,5285 \cdot 1/\text{m}^2 \end{aligned}$$

Bei den Integralen kommt kein Wert vor, der nicht schon in der bisherigen Untersuchung ausgerechnet worden wäre, und es bedarf zur Ermittlung der Zählerwerte der Gruppe 18 nur weniger Rechenarbeit. Die Werte  $M_0, H_0, G$  wurden nur für die Lastlagen der linken Brückenhälfte gesucht; für jene der rechten Hälfte galten die Gleichungen:

$$M_{0,l-a} = -M_{0,a} + 11,3212, \quad H_{0,l-a} = -H_{0,a} - 0,99007, \quad G_{l-a} = +G_a.$$

Als Grenzwerte für die Lastlage an den Kämpfern und in Brückenmitte ergaben sich die Beträge:

$$\begin{aligned} a &= 0, & M_0 &= 9,4797, & H_0 &= +0,0160, & G &= -0,3100, \\ a &= \frac{l}{2}, & M_0 &= 5,6611, & H_0 &= -0,4950, & G &= -0,0432, \\ a &= l, & M_0 &= 1,8369, & H_0 &= -1,0060, & G &= -0,3100. \end{aligned}$$

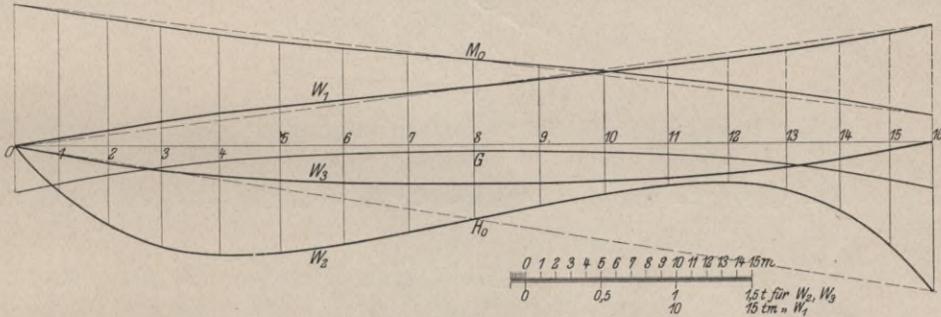


Abb. 26. Die Einflußlinien der zusätzlichen Lagerkräfte  $M_0, H_0, G$  und der Grundwerte  $W_1, W_2, W_3$  für wagrechte Längslast.

Die Einflußlinien der  $M_0, H_0, G$  und der Grundwerte  $W_1, W_2, W_3$  sind auf Abb. 26 gezeichnet und in den Listen 13, 14, 15 enthalten.

Liste 13.  
Einflußlinie  $M_0$ , für wagrechte Längslast.

	1	2	3	4	5	6	6	8
$(t-k) \int_1^a \frac{ds}{J}$	0	4,9493	11,2998	19,3244	29,2500	41,1718	54,9577	86,2754
$-\int_1^a y \frac{ds}{J}$	6,2610	11,6921	15,6519	17,4852	16,6843	13,1141	7,1941	0,0888
$-\frac{l}{2} \int_1^2 \frac{ds}{Fr_2} - (l+r-f) \int_1^a \frac{ds}{Fr^2}$	0,1373	0,1122	0,0884	0,0623	0,0339	0,0036	0,0278	0,0600
$Z_1$	-203,4514	-191,6488	-179,6405	-167,8555	-156,7063	-146,4602	-137,0995	-128,2819
$M_0$ genau	<b>8,9838</b>	<b>8,4626</b>	<b>7,9323</b>	<b>7,4119</b>	<b>6,9197</b>	<b>6,4672</b>	<b>6,0538</b>	<b>5,6645</b>
$M_0$ genähert	8,9800	8,4598	7,9306	7,4113	6,9202	6,4962	6,0572	5,6650

$$\int_0^{\frac{l}{2}} z da = -1,491, \quad \int_0^{\frac{l}{2}} Z_1 da = -5107,60.$$

*Handwritten note:*  $9,4797 - \frac{22,6465}{22,6465} = 6,2610$

Liste 14.

Einflußlinie  $H_0$ , für wagrechte Längslast.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$(t-k) \int_1^a y \frac{ds}{J}$	- 47,7186	- 8,91056	- 119,2833	- 133,2546	- 127,1508	- 99,9430	- 54,8259	+ 0,6766
$-\int_1^a y^2 \frac{ds}{J}$	- 60,3699	- 96,7619	- 110,6536	- 113,2341	- 113,6444	- 120,6904	- 138,2055	- 163,3624
$+ c \left[ \frac{l^2}{2} \int_1^a \frac{ds}{Fr^2} - (l+r-f) \int_1^a \frac{ds}{Fr^2} \right]$	+ 4,7186	+ 3,9605	+ 3,1198	+ 2,1969	+ 1,1972	+ 0,1324	- 0,9801	- 2,1180
$-\int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}$	- 0,1919	- 0,3633	- 0,5067	- 0,6168	- 0,6915	- 0,7332	- 0,7491	- 0,7519
$Z_2$	- 103,5618	- 181,2703	- 227,3238	- 244,9086	- 240,2895	- 221,2342	- 194,7606	- 165,5547
$H_0$ genau	- <b>0,306 88</b>	- <b>0,537 15</b>	- <b>0,673 61</b>	- <b>0,725 72</b>	- <b>0,712 03</b>	- <b>0,655 67</b>	- <b>0,577 12</b>	- <b>0,497 50</b>
$H_0$ genähert	- 0,321 29	- 0,547 81	- 0,681 36	- 0,730 40	- 0,713 54	- 0,653 79	- 0,574 64	- 0,500 00
	$\int_0^{\frac{l}{2}} z'' da = - 17,027.$		$\int_0^{\frac{l}{2}} Z_2 da = - 5882,80.$					

Liste 15.

Einflußlinie G für wagrechte Längslast.

$(t-k) \int_1^a x \frac{ds}{J}$	- 144,013	- 309,358	- 490,892	- 678,664	- 857,136	- 1006,485	- 1100,130	- 1141,708
$-\int_1^a x y \frac{ds}{J}$	182,328	323,725	413,303	447,983	435,990	397,318	358,511	342,530
$-\int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F}$	- 0,507	- 1,075	- 1,675	- 2,266	- 2,802	- 3,232	- 3,511	- 3,608
$Z_3$	1401,422	1094,722	823,010	599,967	432,952	321,845	266,728	241,034
G genau	- <b>0,251 29</b>	- <b>0,196 29</b>	- <b>0,147 57</b>	- <b>0,107 58</b>	- <b>0,077 63</b>	- <b>0,05 770</b>	- <b>0,047 82</b>	- <b>0,043 22</b>
G genähert	- 0,251 48	- 0,195 48	- 0,146 87	- 0,106 98	- 0,077 13	- 0,057 28	- 0,047 48	- 0,043 85
	$\int_0^{\frac{l}{2}} Z_3 da = 21 279,9.$							

Liste 16.

Die Werte  $M_0$ ,  $H_0$ , G der rechten Brückenhälfte, für wagrechte Längslast.

	16	15	14	13	12	11	10	9	8
$M_0$	1,8416	2,3374	2,8586	3,3889	3,9093	4,4015	4,8540	5,2674	5,6645
$H_0$	-0,99 807	-0,68 319	-0,45 292	-0,31 646	-0,26 435	-0,27 804	-0,33 440	-0,41 295	-0,49 750
G	-0,31 000	-0,25 129	-0,19 629	-0,14 757	-0,10 758	-0,07 763	-0,05 770	-0,04 782	-0,04 322

2. Der Einfluß der Quer- und Normalkraft auf  $M_0$ ,  $H_0$ , G. In Anlehnung an die frühere Untersuchung für die lotrechte Last wurde der gemittelte Einfluß  $p_2$  der Nebenkraft durch

Vergleich der Einflußflächen bestimmt. In der Gleichung für  $M_0$  ist nur  $N$  im Zähler und Nenner vertreten.

$$z_1 = -\frac{1}{r^2} \left[ \frac{l}{2} \int_1^2 \frac{ds}{F} - (l+r-f) \int_1^a \frac{ds}{F} \right], \quad \frac{n}{B} = +0,000221.$$

In der Gleichung für  $H_0$  sind  $N$  und  $Q$  vorhanden.

$$z_2' = +\frac{c}{r^2} \left[ \frac{l}{2} \int_1^2 \frac{ds}{F} - (l+r-f) \int_1^a \frac{ds}{F} \right] = -c z_1, \quad \frac{n'}{B'} = 0,018837$$

$$z_2'' = -\int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}, \quad \frac{n''}{B''} = 0,013532.$$

In der Gleichung für  $G$  ist nur  $Q$  enthalten.

$$z_3 = -\int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} - \frac{t}{l} \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F}, \quad \frac{n}{B} = 0,003261.$$

Die Fläche der Zählerwerte  $Z_1, Z_2, Z_3$  ist in den Listen 13, 14, 15 ausgerechnet, die Flächen der  $z_1$  in Liste 13, jene der  $z_2''$  in Liste 14. Die Fläche der  $z_2'$  ist leicht aus der von  $z_1$  zu finden, denn:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} z_2' da = -c \int_0^{\frac{l}{2}} z_1 \cdot da.$$

In Liste 4 ist bereits früher die Fläche der

$$\int_0^{\frac{l}{2}} da \left[ \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right] = -68,919$$

gerechnet worden, und so ist die Fläche:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} z_3 da = -68,919 - \frac{t}{l} \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} \frac{l}{2} = -240,458.$$

Mit Benutzung dieser Werte wird der gemittelte Einfluß  $p_2$  der Normalkraft auf  $M_0$  bestimmt:

$$100 p_2 = 100 \left[ \frac{-1,491}{-5107,60} - 0,000221 \right] = +0,006 \%$$

Wesentlich mehr und doch immer noch bescheiden hängt  $H_0$  von der Normalkraft ab.

$$100 p_2 = 100 \left[ \frac{1,491 \cdot 35,28}{-5882,8} - 0,018837 \right] = -2,779 \%$$

Die Querkraft hat etwa die Hälfte dieses Einflusses bei  $H_0$

$$100 p_2 = 100 \left[ \frac{-17,027}{-5882,8} - 0,013532 \right] = -1,063 \%$$

und ist noch um die Hälfte bedeutender bei  $G$ .

$$100 p_2 = 100 \left[ \frac{-240,458}{21279,9} - 0,003261 \right] = -1,455 \%$$

Wenn auch die Querkraft bei der wagerechten Last größeren Einfluß hat als bei der lotrechten, so bleibt er rechnerisch doch ohne Bedeutung. Die Normalkraft macht sich wie dort nur bei  $H_0$  mit etwa 3 % bemerkbar. Als Ergebnis zeigt sich dieses Bild

$$M_0 = + \frac{t}{2} - \frac{(t-k) \int_1^a \frac{ds}{J} - \int_1^a y \frac{ds}{J}}{\int_1^2 \frac{ds}{J}} = + \frac{t}{2} - W_1 \text{ ist um } 0,06\% \text{ zu klein.}$$

$$H_0 = \frac{(t-k) \int_1^a y \frac{ds}{J} - \int_1^a y^2 \frac{ds}{J}}{\int_1^2 y^2 \frac{ds}{J}} = + W_2 \text{ ist um } 3,8\% \text{ zu groß.}$$

$$G = - \frac{t}{l} + \frac{(t-k) \int_1^a x \frac{ds}{J} - \int_1^a x y \frac{ds}{J}}{\int_1^2 x^2 \frac{ds}{J}} = = \frac{t}{l} + W_3 \text{ ist um } 1,5\% \text{ zu groß.}$$

Den Hauptbeitrag zu diesen Fehlern liefern die für alle Lastlagen gleichen Nenner. Vernachlässigt man daher die Nebenkräfte und behält nur den genauen Nennerwert von  $H_0$  bzw.  $W_2$  bei, so ergibt sich die für die Rechnung geeignete Gleichungsgruppe:

$$W_1 = \frac{(t-k) \int_1^a \frac{ds}{J} - \int_1^a y \frac{ds}{J}}{\int_1^2 \frac{ds}{J}}, \quad M_0 \text{ ist um } 0,06\% \text{ zu klein.}$$

$$W_2 = \frac{(t-k) \int_1^a y \frac{ds}{J} - \int_1^a y^2 \frac{ds}{J}}{\int_1^2 y^2 \frac{ds}{J} + c^2 \int_1^2 \frac{ds}{Fr^2}}, \quad H_0 \text{ ist um } 1,9\% \text{ zu groß.}$$

$$W_3 = \frac{(t-k) \int_1^a x \frac{ds}{J} - \int_1^a x y \frac{ds}{J}}{\int_1^2 x^2 \frac{ds}{J}}, \quad G \text{ ist um } 1,5\% \text{ zu groß.}$$

**3. Die Kämpferdrucksehnitt- und Umhüllungslinien.** Die Linien sind für die Anwendung ohne Wert, weil hier insbesondere die Verkehrslast mit ihren Lastscheiden schon durch die 1. Untersuchung für lotrechte Last festgelegt ist, und bieten nur mathematisches Inter-

esse. Für ihre Berechnung wurden die genäherten Werte  $M_0, H_0, G$  nach Gleichung 19 in Liste 13, 14, 15 benutzt.

$$M_1 = M_0 + 11,329 H_0 - 30,532 G, \quad A = 0,31 + G, \quad H_1 = 1 + H_0.$$

In Liste 17 wurde der Wert  $\frac{M_1}{A}$  und  $t \frac{H_1}{A}$  für alle 16 Lastlagen gebildet und dabei berücksichtigt, daß nun  $M_{1, l-a} = M_{1, a} - G_a l$ .

$$H_{l-a} = 1 - H_a \text{ und } A_{l-a} = A_a, \text{ also auch } t \frac{H_{l-a}}{A_{l-a}} = \frac{t}{A_a} - t \frac{H_a}{A_a}.$$

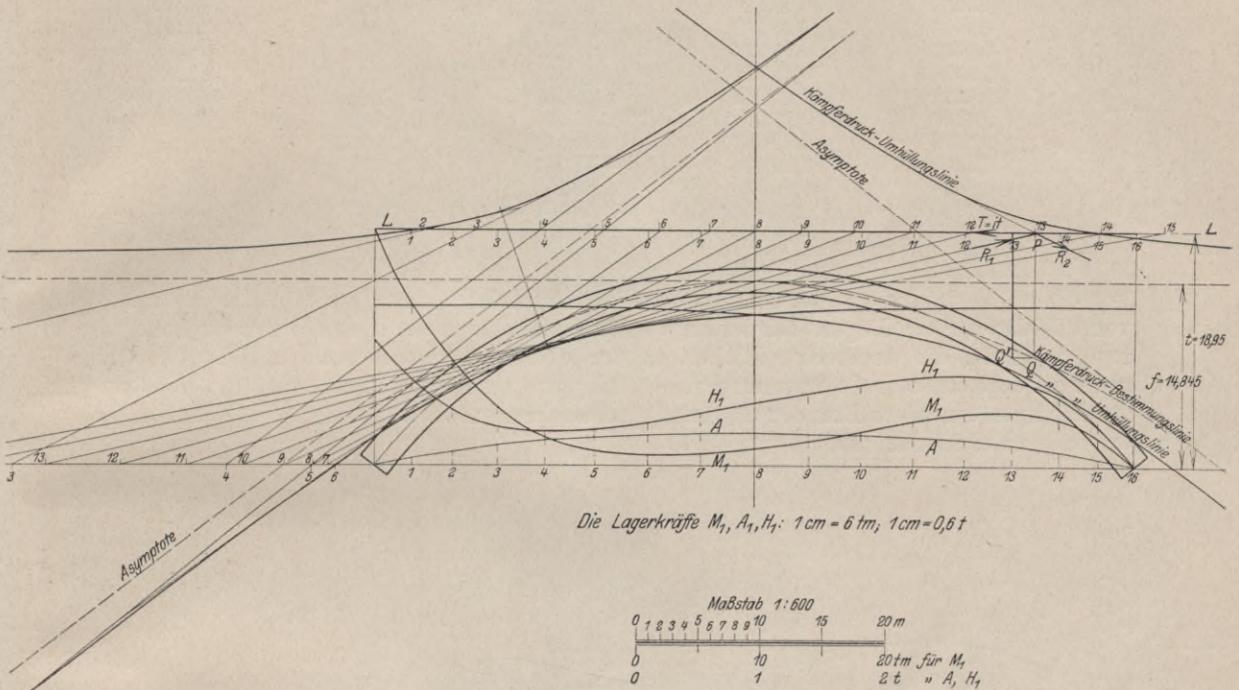


Abb. 27. Die Einflußlinien der Kräfte  $M_1, A, H_1$  am linken Kämpfer für wagrechte Längslast und die Kämpferdruck-Schnitt- und Umhüllungslinien.

Die Umhüllungslinien des linken Kämpfers bestehen aus 2 hyperbelähnlichen Ästen, welche als eine Asymptote eine Parallele zur Kämpferlinie haben. Die Kämpferdrücke der Lastlagen 0—5 berühren an dem nach oben gerichteten Ast, alle anderen von 8—16 an den innerhalb des Kreisbogens gelegenen. (Abb. 27) Kämpferdruckschnittlinie ist die Angriffslinie der Kraft. Das gleiche Bild enthält die Einflußlinien der linken Kämpferkräfte  $M_1, A, H_1$ .

Die Schnittpunkte P, P' der zu symmetrischen Lastlagen gehörigen Kämpferdrücke liegen symmetrisch zur Brückenmitte. Der Schnittpunkt P fällt im allgemeinen nicht mit der Lastlage a zusammen. Um ihn zu finden, ist eine weitere Linie nötig. In der Lastlage a zieht man die Senkrechte bis zur Bogenachse und durch den Schnittpunkt Q' eine Wagerechte bis zu dieser Linie und legt durch diesen neuen Schnitt Q eine Lotrechte bis zur Angriffslinie L, L. Von dem so erhaltenen Punkte P zieht man die Tangenten an die Umhüllungsline eines jeden Kämpfers, welche in Lage und Richtung mit den gesuchten Kämpferdrücken zusammenfallen.

**4. Die Einflußlinien der Kantenpressung.** Nach dem nun schon gewonnenen Überblick sind die beiden gefährdeten Stellen im Bogen der Querschnitt 11 und der rechtsufrige Kämpfer. Für sie beide wurden die Einflußlinien bestimmt (Abb. 28). Wenn die Kräfte in der Richtung Forbach-Langenbrand wirken, hat die obere Faser des rechten Kämpfers stets Zug und die untere stets Druck. Die Absolutgrößen sind im Vergleich zu jenen der

Liste 17.

Die Kämpferkräfte mit Schnitt- und Umhüllungslinien, für wagrechte Längslast.

	$M_1$	A	$H_1$	$\frac{M_1}{A}$	$t \frac{H_1}{A}$
0	18,9500	0	1	$\infty$	$\infty$
1	12,9957	0,05 952	0,67 971	218,30	216,417
2	8,2199	0,11 452	0,45 219	71,79	74,839
3	4,6937	0,16 313	0,31 864	28,78	37,021
4	2,4015	0,20 302	0,26 960	11,83	25,167
5	1,1902	0,23 287	0,28 646	5,11	23,313
6	0,8098	0,25 272	0,34 621	3,25	25,960
7	0,9952	0,26 255	0,42 536	3,79	30,697
8	1,3384	0,26 615	0,50 000	5,03	35,601
9	1,9012	0,26 255	0,57 464	7,24	41,463
10	2,6166	0,25 272	0,65 379	10,63	49,030
11	3,5178	0,23 287	0,71 354	15,10	58,052
12	4,1297	0,20 302	0,73 040	20,34	68,173
13	4,2731	0,16 313	0,68 136	26,20	79,166
14	3,7135	0,11 452	0,54 781	32,43	90,683
15	2,2937	0,05 952	0,32 029	38,54	101,964
16	0	0	0	—	—

lotrechten Lasteneinheit groß. Die lotrechte Lasteneinheit erzeugt die größte Spannung von 0,14 kg/cm<sup>2</sup> des Bogens bei der Lage in Brückenmitte in der oberen Faser der Scheitelfuge, während die wagerechte Einheit in der oberen Faser des rechten Kämpfers eine mehr als doppelt so große Spannung von 0,31 kg/cm<sup>2</sup> verursacht. Trotzdem sind die Beanspruchungen durch die Bremskraft gering und erreichen nicht 1 kg/cm<sup>2</sup>, weil die Bremslast an und für sich klein ist.

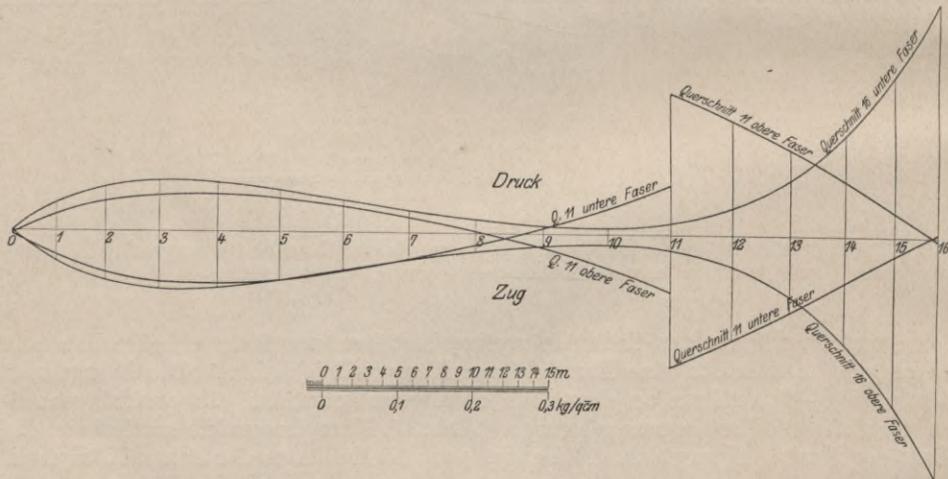


Abb. 28. Die Einflußlinien der Normalspannungen in den Querschnitten 11 und 16 für wagerechte Längslast.

5. Die Beanspruchungen in Querschnitt 11 und 16. Der Lastenzug wurde bei Querschnitt 11 und 16 gerade so gestellt wie früher bei der Ermittlung der Spannung  $\nu\sigma$  durch die lotrechten Lasten. Zwischen den Sparbogenpfeilern wurde ein geradliniger Verlauf der Einflußlinie angenommen. Außerhalb der beiden äußersten Pfeiler müssen sie wagerechte Gerade sein, weil die Bremskraft sich durch eben diese Pfeiler auf den Bogen überträgt. Wegen der Temperaturfugen in den beiden äußeren Sparbogen kann sie nicht unmittelbar auf die beiden Kämpfer wirken. In Wirklichkeit wird wohl die gesamte Bremskraft im Bogenscheitel durch die Übermauerung dem Gewölbe zugeführt, da die Pfeiler sie kaum durch ihre Biegungsfestigkeit nach unten ableiten können.

Querschnitt:      11                                      16  
 $\sigma_0 = -0,260, \quad \sigma_0 = + 0,979 \text{ kg/cm}^2.$

## E. Die wagrechten Querbelastungen: Der Wind.

Die Bahn liegt auf der ganzen Brücke in der Geraden, so daß Fliehkräfte als wagrechte Querlast nicht auftreten. Die einzige Kraft, welche das Gewölbe senkrecht zur Trägerebene beansprucht, ist der Wind. Bei der ungünstigen Beanspruchung  $v \sigma^I$ ,  $v \sigma^{II}$  durch die Verkehrslast ist die Brücke durch einen Lokomotivzug in bestimmter Stellung belastet, und die gleiche Stellung gilt für die Ermittlung der Spannungen durch Bremslast und Wind in dem gleichen Querschnitt. Nach den Bad. Vorschriften für die Berechnung eiserner Brücken ist eine Last von 0,1 t für 1 qm getroffene Windfläche anzunehmen, wenn der Verkehr noch aufrecht erhalten wird. Die Stirnfläche der Brücke hat 346 qm und empfängt einen Winddruck von 34,6 t. Abweichend von den tatsächlichen Verhältnissen wird zur Vereinfachung der Rechnung angenommen, daß sich die Last auf die ganze Spannweite gleichmäßig verteilt und somit auf 1 m Brücke  $p = 0,57$  t entfällt. Auf 1 m des Lokomotivzuges entfällt der Winddruck  $p' = 0,27$  t. Die Annahme ergibt etwas zu ungünstige Zahlen.

### a) Die genaue Rechnung.

1. Die Lage des Achsursprungs. Nach Seite 16 nimmt man ein Hilfskreuz an, das als Y'-Achse die Symmetrieachse des Bogens hat und dessen wagrechte X'-Achse in der Trägerebene liegt und durch den Kreismittelpunkt geht. Der gesuchte Abstand des richtigen Achsenkreuzes X, Y liegt um c über dem Mittelpunkt und wird aus Gleichung 23 Seite 17 gefunden:

$$\int_1^2 y' \frac{ds}{J} = 2 \cdot 476,813, \quad \int_1^2 \frac{ds}{J} = 2 \cdot 13,5321, \quad \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} = 2 \cdot 1,8463,$$

$$c = \frac{476,813}{13,5321 - 1,8463} = 40,803 \text{ m.}$$

Der Ursprung liegt außerhalb der Kreisfläche und 2,003 m über dem Bogenseitel,  
 $k = c - (r - f) = 16,848$ ,  $k - f = 2,003$  m.

Liste 18. Grundlage der Rechnung für wagerechte Querlast.  
Die Größen gehören zu den Teilmitten.

	y	$\frac{\Delta s}{J_2}$	$\frac{\Delta s}{J_3}$	$\frac{\Delta s}{J_2} + \frac{\Delta s}{J_3} = \frac{\Delta s}{J}$
1'	— 15,161	0,154 91	0,649 43	0,804 34
2'	— 12,036	0,187 97	0,833 29	1,021 26
3'	— 9,280	0,224 92	1,052 95	1,277 87
4'	— 6,927	0,264 09	1,302 41	1,566 50
5'	— 5,007	0,302 73	1,564 33	1,867 06
6'	— 3,546	0,336 94	1,808 94	2,145 88
7'	— 2,561	0,362 92	2,000 97	2,363 89
8'	— 2,065	0,376 97	2,108 41	2,485 38

Die Einzelwerte der neuen  $y$ ,  $\frac{ds}{J}$ ,  $\frac{ds}{J_2}$ ,  $\frac{ds}{J_3}$  sind in Liste 18 enthalten und dürfen nicht mit denen der Untersuchung für lotrechte Last verwechselt werden. Die Winkelfunktionen sind jedoch die früheren.

2. Die Einflußlinien  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ . Um die Rechnung tunlichst zu vereinfachen wird angenommen, daß die über die Sichtfläche der Brücke gleichmäßig verteilte Windlast in einer Parallelen zur Kämpferlinie angreift, welche durch den Bogenseitel geht. Die Abweichung von der Wirklichkeit ist nicht groß und wird das Rechenergebnis nicht wesentlich beeinflussen.

$$t = f = 14,845, \quad k - t = 2 \text{ m.}$$

Die 3 Nenner der Gruppe 25 Seite 19 werden aus Liste 18 gerechnet.

$$N_1 = \int_1^2 \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} - \int_1^2 \frac{ds}{J} = 2 \cdot (1,8463 - 13,5321) = -23,3716$$

$$N_2 = \int_1^2 \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} - \int_1^2 \frac{ds}{J} = 2 \cdot (9,4743 - 13,5321) = -8,1156$$

$$N_3 = \int_1^2 (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \frac{ds}{J_3} - \int_1^2 (x^2 + y^2) \frac{ds}{J} - 3,2 \int_1^2 \frac{ds}{F} = 2 \cdot (3074,18 - 3990,46 - 12,05) \\ = -1656,6$$

Vor Ausrechnung der Einflußlinien wird nachgeprüft, ob die Lage des Achsursprunges nun der Gleichung genügt:

$$-\int_1^{\frac{l}{2}} y \frac{ds}{J} + \int_1^{\frac{l}{2}} y \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} + \int_1^{\frac{l}{2}} x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} = 0 \text{ (Seite 16)} \\ + 75,335 - 17,351 - 57,976 = -0,002 .$$

Die Bedingung wird somit gut erfüllt.

Die Grundlagen für die Einflußlinienberechnung sind in der Liste 18 gegeben, während die eigentliche Ausrechnung und das Ergebnis in den Listen 19, 20, 21 enthalten ist. Liste 22 gibt die Werte für  $W_1, W_2, W_3$  bei den Lastlagen auf der rechten Trägerhälfte. Auf Abb. 29 sind die 3 Einflußlinien gezeichnet. Der Verlauf von  $W_2$  und  $W_3$  ähnelt jenem der Einflußlinien von  $W_1$  und  $W_3$  der lotrechten Last auf Abb. 19.

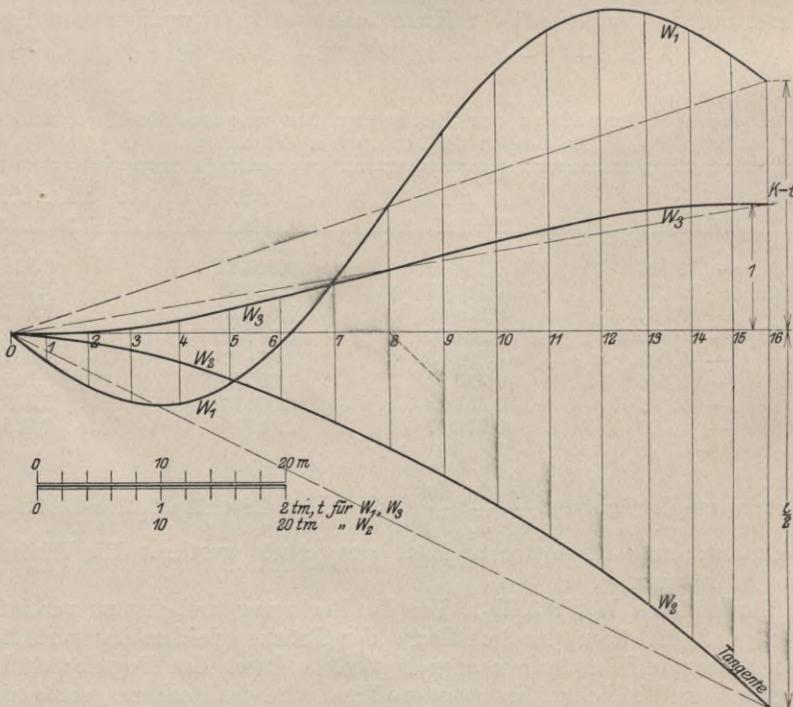


Abb. 29. Die Einflußlinien der Grundwerte  $W_1, W_2, W_3$  für wagrechte Querlast.

Liste 19.  
Einflußlinie  $W_1$  für wagrechte Querlast.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3}$	8,897	17,952	25,703	30,376	29,634	24,656	13,867	0
$(k - t) \int_1^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3}$	0,731	1,482	2,198	2,817	3,283	3,565	3,679	3,693
$\int_1^a y \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3}$	- 5,546	- 10,065	- 13,385	- 15,530	- 16,696	- 17,196	- 17,342	- 17,356
$\int_1^a x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3}$	- 9,379	- 20,174	- 31,457	- 41,945	- 50,281	- 55,534	- 57,718	- 57,976
$-(k - t) \int_1^a \frac{ds}{J}$	- 1,609	- 3,651	- 6,207	- 9,340	- 13,074	- 17,366	- 22,093	- 27,064
$-\int_1^a y \frac{ds}{J}$	12,195	24,482	36,341	47,192	56,540	64,149	70,203	75,335
$Z_1$	5,289	10,029	13,195	13,572	9,408	2,276	- 9,402	- 23,368
$W_1$	- 0,2263	- 0,4291	- 0,5517	- 0,5807	- 0,4025	- 0,0974	+ 0,4023	+ 1,0000

Liste 20.  
Einflußlinie  $W_2$  für wagrechte Querlast.

$\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3}$	7,834	18,075	29,887	41,232	48,599	47,272	32,306	0
$(k - t) \int_1^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3}$	0,644	1,473	2,471	3,580	4,693	5,663	6,330	6,568
$\int_1^a x \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3}$	- 8,259	- 20,185	- 35,908	- 54,689	- 74,621	- 92,688	- 105,430	- 110,041
$-\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a \frac{ds}{J}$	- 22,218	- 44,488	- 64,560	- 79,254	- 84,472	- 75,607	- 48,404	0
$-\int_1^a x \frac{ds}{J}$	23,422	50,012	78,920	108,553	136,504	159,751	175,248	180,702
$Z_2$	1,423	4,887	10,810	19,422	30,703	44,391	60,050	77,229
$W_2$	- 0,1750	- 0,6022	- 1,3321	- 2,3930	- 3,7832	- 5,4700	- 7,3994	- 9,5162

Liste 21.  
Einflußlinie  $W_3$  für wagrechte Querlast.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\int_1^a x \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3}$	- 8,26	- 20,19	- 35,91	- 54,69	- 74,62	- 92,69	- 105,43	- 110,04
$\int_1^a y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3}$	- 4,88	- 9,87	- 14,50	- 18,34	- 21,13	- 22,85	- 23,70	- 23,95

1\*

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\left(\frac{l}{2} - a\right) \left[ \int_1^a x \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} + \int_1^a y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} \right]$	- 362,98	- 732,37	- 1048,60	- 1239,34	- 1237,26	- 1006,09	- 565,82	0
$(k - t) \left[ \int_1^a x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} + \int_1^a y \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} \right]$	- 29,85	- 60,47	- 89,68	- 114,95	- 133,95	- 145,46	- 150,12	- 150,67
$\int_1^a (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \frac{ds}{J_3}$	608,96	1233,56	1829,48	2345,48	2733,09	2967,85	3062,95	3074,18
$-\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_1^a x \frac{ds}{J}$	646,99	1218,74	1641,77	1842,17	1763,84	1391,04	767,90	0
$-(k - t) \int_1^a y \frac{ds}{J}$	24,39	48,96	72,68	94,38	113,08	128,30	140,41	150,67
$-\int_1^a (x^2 + y^2) \frac{ds}{J}$	- 866,92	- 1707,06	- 2471,08	- 3106,82	- 3572,05	- 3850,80	- 3967,89	- 3990,46
$- 3,2 \int_1^a \frac{ds}{F}$	- 1,09	- 2,30	- 3,66	- 5,13	- 6,78	- 8,44	- 10,21	- 12,05
$Z_3$	+ 19,50	- 0,94	- 69,09	- 184,21	- 340,03	- 523,60	- 722,78	- 928,33
$W_3$	- 0,0105	+ 0,0005	+ 0,0372	+ 0,0992	+ 0,1831	+ 0,2820	+ 0,3893	+ 0,5000

Liste 22.

Die Werte  $W_1, W_2, W_3$  der rechten Brückenhälfte, für wagrechte Querlast.

	16	15	14	13	12	11	10	9	8
$W_1$	2	2,2263	2,4291	2,5517	2,5807	2,4025	2,0974	1,5977	1
$W_2$	- 30,523	- 27,7973	- 24,9706	- 22,1348	- 19,3638	- 16,7051	- 14,1775	- 11,7812	- 9,5162
$W_3$	1	1,0105	0,9995	0,9628	0,9008	0,8169	0,7180	0,6107	0,5000

Von allen Gliedern, welche in der Rechnung enthalten sind, kann höchstens das Glied mit  $\frac{ds}{F}$  als Faktor bei  $W_3$  vernachlässigt werden.

Die Kräfte am linken Lager sind durch Gruppe 27 Seite 20 gegeben, wenn man darin  $x = -\frac{l}{2}$  und  $y = -k$  setzt.

$$K_3 = -W_3 + 1$$

$$M_1 = -W_1 \cos \varphi_1 + W_2 \sin \varphi_1 + W_3 \left( -\frac{l}{2} \sin \varphi_1 + k \cos \varphi_1 \right) + a \sin \varphi_1 - t \cos \varphi_1$$

$$M_2 = +W_1 \sin \varphi_1 + W_2 \cos \varphi_1 + W_3 \left( -\frac{l}{2} \cos \varphi_1 - k \sin \varphi_1 \right) + a \cos \varphi_1 + t \sin \varphi_1.$$

**3. Die Einflußlinien der Randspannungen.** Für die gefährdeten Querschnitte des rechten Kämpfers und der Fuge 11 bzw. für die dazu symmetrischen Querschnitte 0 und 5 wurden die Einflußlinien der größten Normalspannung  $\nu$ , der durch  $M_1$  erzeugten Schubspannung  $\tau$  und der durch  $K_3$  und  $M_1$  erzeugten Spannungen  $\tau_1', \tau_2'$  berechnet.

$$\nu = \mp 6 \frac{M_2}{b^2 h}, \quad \tau = \mp 4,5 \frac{M_1}{b^2 h}, \quad \tau_1' = -4,5 \frac{M_1}{b h^2} + 1,5 \frac{K_3}{b h},$$

$$\tau_2' = + 4,5 \frac{M_1}{b h^2} + 1,5 \frac{K_3}{b h}. \quad (\text{Gr. 29, S. 21})$$

Die Querschnittskräfte  $M_1, M_2, K_3$  sind in Gruppe 27 Seite 20 als Abhängige von den Grundwerten  $W_1, W_2, W_3$  gegeben:

Querschnitt 0.

$$b = 5,250, \quad h = 2,600 \text{ m}, \quad \frac{1,5}{F} = 0,11, \quad \frac{4,5}{b^2 h} = 0,0628, \quad \frac{4,5}{b h^2} = 0,128$$

$$(k - t + y) \cos \varphi = -t \cos \varphi_1 = -9,168, \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = -32,09$$

$$(k - t + y) \sin \varphi = -t \sin \varphi_1 = -11,681, \quad x \sin \varphi - y \cos \varphi = -13,61$$

$$\left(\frac{l}{2} + x\right) \cos \varphi = 0, \quad \left(\frac{l}{2} + x\right) \sin \varphi = 0.$$

Die Einflußlinien sind auf Abb. 30 gezeichnet. Die Normalspannungen von der wagerechten Lasteinheit bei der Lage in Brückenmitte sind 1,4 mal größer als jene der lotrechten Lasteinheit in gleicher Stellung und in der oberen Faser des gleichen Querschnittes.

Querschnitt 5.

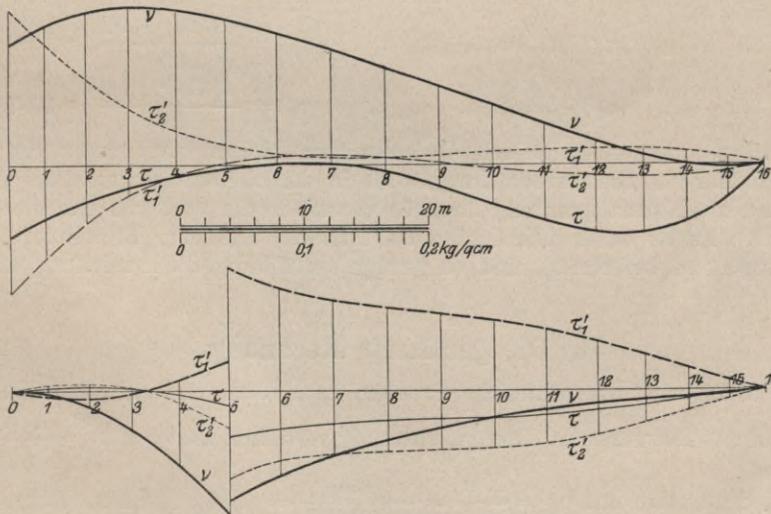
$$b = 4,408, \quad h = 1,913, \quad \frac{1,5}{F} = 0,177, \quad \frac{4,5}{b^2 h} = 0,121, \quad \frac{4,5}{b h^2} = 0,280$$

$$(k - t + y) \cos \varphi = -2,091, \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = -13,589$$

$$(k - t + y) \sin \varphi = -0,739, \quad x \sin \varphi - y \cos \varphi = -0,326$$

$$\left(\frac{l}{2} + x\right) \cos \varphi = 16,596, \quad \left(\frac{l}{2} + x\right) \sin \varphi = 5,862.$$

Querschnitt 0.



Querschnitt 5.

Abb. 30. Die Einflußlinien der Normal- und Tangentialspannungen für wagerechte Querlast.

Jede Einflußlinie macht im Querschnitt einen Sprung, hat aber sonst einen steten Verlauf.

#### 4. Die Spannungen der Querschnitte 11 und 16 bzw. 0 und 5.

Querschnitt 0 (16). Der ganze Inhalt der Einflußlinie der Normalspannung  $\nu$  ist  $43,6 \text{ t/m}^2$ . Da der Winddruck auf einen Laufmeter Brücke  $0,57 \text{ t}$  beträgt, so entsteht durch den Wind auf das Bauwerk im Querschnitt eine größte Normalspannung

von  $\frac{43,6 \cdot 0,57}{10} = 2,49 \text{ kg/cm}^2$  in der vorderen und hinteren Faser. Dazu kommt noch die

Wirkung des Windes auf die Fahrzeuge, welche seinerzeit bei der Ermittlung von  $\nu \sigma^{\text{II}}$  die Strecke vom Kämpfer bis 22 m rechts davon einnahmen. Die hierdurch erzeugte

Spannung ist  $\nu = 0,27 \cdot 2,48 = 0,64 \text{ kg/cm}^2$  somit ist die gesamte Normalspannung durch Wind  $2,49 + 0,64 = 3,13 \text{ kg/cm}^2 = \nu = \nu_e + \nu$ .

Bei der Ermittlung der Schubspannungen kann angenommen werden, daß der Verkehr eingestellt ist, und der Wind eine Stärke von 0,2 t auf 1 qm Fläche erreicht hat, so daß auf 1 m Brücke eine wagrechte Last von 1,14 t kommt. Die Annahme ist zulässig, da die Schubspannung nicht in Verbindung mit jener durch wagrechte Längslast oder lotrechte Last gebracht wird.

$$\begin{aligned} \text{Inhalt der Fläche } \tau & 14,8 \text{ t/m}^2, \text{ Schubspannung } \tau = \frac{14,8 \cdot 1,14}{10} = 1,69 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{,, ,, ,, } \tau_1' & 15,1 \text{ ,, ,, } \tau_1' = \frac{15,1 \cdot 1,14}{10} = 1,72 \text{ ,,} \\ \text{,, ,, ,, } \tau_2' & 7,3 \text{ ,, ,, } \tau_2' = \frac{7,3 \cdot 1,14}{10} = 0,83 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Querschnitt 5 (11). Der Inhalt der gesamten  $\nu$ -Linie beträgt 18,48 t/m<sup>2</sup>. Es entsteht also durch den Wind auf das Bauwerk die Normalspannung  $\nu_e = \frac{18,48 \cdot 0,57}{10} = 1,05 \text{ kg/cm}^2$

Der Wind auf die Fahrzeuge, welche wie bei  $\nu \sigma^I$  auf der Strecke vom Kämpfer bis 27 m rechts davon stehen, erhöht die Spannung um  $1,24 \cdot 0,27 = 0,32 \text{ kg/cm}^2 = \nu$ .

Im ganzen entsteht in den zwei senkrechten äußeren Fasern des Querschnittes durch den Wind auf Brücke und Verkehrslast eine Normalspannung von  $1,05 + 0,32 = 1,37 \text{ kg/cm}^2$ . Für den Schub wird wieder Verkehrsstille und ein Wind von 0,2 t auf den Quadratmeter angenommen.

$$\begin{aligned} \text{Inhalt der Fläche } \tau & 8,28 \text{ t/m}^2, \text{ Spannung } \tau = \frac{8,28 \cdot 1,14}{10} = 0,94 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{,, ,, ,, } \tau_1' & 17,16 \text{ ,, ,, } \tau_1' = \frac{1,716 \cdot 1,14}{10} = 1,96 \text{ ,,} \\ \text{,, ,, ,, } \tau_2'' & 23,40 \text{ ,, ,, } \tau_2' = \frac{23,40 \cdot 1,14}{10} = 2,67 \text{ ,,} \end{aligned}$$

Die Schubspannungen in beiden Querschnitten bleiben weit unter der Festigkeit von Stein und Mörtel. Sie werden am größten in der oberen oder unteren wagrechten Faser, während die Normalspannung ihren Größtwert in der vorderen und hinteren Stirnkante erreicht. Es ist daher überflüssig, bei Brücken ähnlicher Breitenverhältnisse die Schubspannungen zu berechnen, und es genügt vollständig die Ermittlung der Einflußlinie für  $\nu$ .

### b) Die genäherte Rechnung.

Nach Seite 21 wird das räumliche Problem in 2 ebene zerlegt, von denen das erste beim Wind auf das Bauwerk mit einer gleichförmig verteilten Last von  $p_1 = \frac{\Sigma W}{l} = \frac{34,6}{61,045} = 0,57 \text{ t}$  und das zweite mit  $p_2 = \frac{\Sigma W}{2f} = \frac{34,6}{2 \cdot 14,845} = 1,16 \text{ t}$  rechnet. Durch den Wind auf die Verkehrslast ändern sich diese Zahlen in  $2,7 \cdot 0,1 = 0,27 \text{ t}$  und

$$\frac{0,27 \cdot l}{2f} = \frac{0,27 \cdot 61,045}{29,690} = 0,56 \text{ t,}$$

da die Fahrzeuge nach Annahme der bad. Vorschriften dem Winde auf 1 m Länge 2,7 qm Fläche darbieten. Als Spannweite ist nun die Länge der Bogenachse mit 70,26 m beim ersten Problem einzuführen.

**1. Der Wind auf der Brücke.** Querschnitt 0. Das Einspannungsmoment am Kämpfer ist  $M_1' = p_1 \frac{l^2}{12} = \frac{0,57 \cdot 70,26^2}{12} = 235 \text{ tm}$ . Das Widerstandsmoment um die senkrechte Schwerachse ist  $12,41 \text{ m}^3$ . Somit ist die Windspannung im ersten Kräfteplane  $\nu_1 = \frac{M_1'}{12,41} = 1,89 \text{ kg/cm}^2$ . Im zweiten Kräfteplane ist  $M_1' = p_2 \frac{f^2}{2} = \frac{1,16 \cdot 14,85^2}{2}$

$= 128 \text{ tm}$ ,  $v_2 = \frac{M'_1}{12,41} = 1,03 \text{ kg/cm}^2$ . Beide Pläne zusammen geben die Spannung, welche durch den Wind auf die Brückenfläche verursacht wird.

$$v = v_1 + v_2 = 1,89 + 1,03 = 2,92 \text{ kg/cm}^2.$$

Querschnitt 5. Für diesen Querschnitt ist  $a = \frac{70,26 \cdot 17,63}{61,045} = 1,15 \cdot 17,63 = 20,22 \text{ m}$  und  $a' = 12,63 \text{ m}$ . Im ersten Kräfteplane ist nach Gleichung 30 Seite 21

$$M' = \frac{0,57}{12} [6 \cdot 20,22 (70,26 - 20,22) - 70,26^2] = 54,7 \text{ tm}.$$

Das erzeugt eine Spannung von  $v_1 = \frac{54,7}{6,44} = 0,85 \text{ kg/cm}^2$ , weil das Widerstandsmoment  $6,44 \text{ m}^3$  hat. Im zweiten Plane hingegen ist

$$M'' = \frac{1,16}{2} (14,85 - 12,63)^2 = 2,85 \text{ tm}.$$

Die Spannung ist  $v_2 = \frac{2,85}{6,44 \cdot 10} = 0,04 \text{ kg/cm}^2$ . Damit findet sich die eigentliche Spannung durch den Wind auf die Brücke zu

$$v = v_1 + v_2 = 0,85 + 0,04 = 0,89 \text{ kg/cm}^2.$$

**2. Der Wind auf die Verkehrslast.** Querschnitt 0. Die Last bedeckt eigentlich die Strecke vom Kämpfer bis 22 m rechts davon, aber das Maß vergrößert sich infolge des Ausstreckens des Bogens nach Seite 21 zu

$$s = \frac{70,26}{61,05} 22 = 25,4 \text{ m}, \frac{s}{l} = \frac{25,4}{70,26} = 0,36.$$

Im ersten Kräfteplane ist nach Gleichung 31 das Moment:

$$M' = \frac{0,27 \cdot 25,4^2}{12} [6 - 8 \cdot 0,36 + 3 \cdot 0,36^2] = 50,9 \text{ tm}.$$

Die Spannung ist

$$v_1 = \frac{50,9}{10 \cdot 12,41} = 0,41 \text{ kg/cm}^2.$$

Im zweiten Kräfteplan ist

$$s' = 13,85 \text{ m}, M'' = \frac{0,56 \cdot 13,85^2}{2} = 53,3 \text{ tm}$$

und die Spannung

$$v_2 = \frac{53,3}{10 \cdot 12,41} = 0,43 \text{ kg/cm}^2.$$

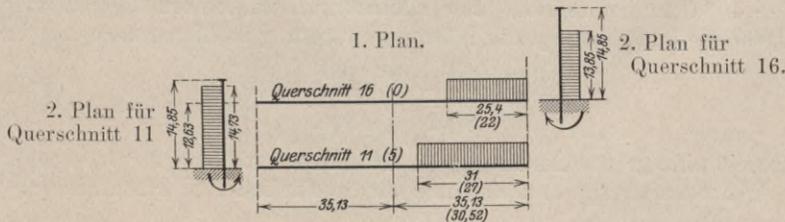


Abb. 31.

Somit ist die Spannung, welche der Wind auf die Verkehrslast erzeugt,

$$v = v_1 + v_2 = 0,41 + 0,43 = 0,84 \text{ kg/cm}^2.$$

Querschnitt 5. Bei der für  $v \sigma^I$  seinerzeit maßgebenden Laststellung war die Brücke vom benachbarten Kämpfer aus auf 27 m von den Fahrzeugen bedeckt.

$$s = 1,15 \cdot 27 = 31 \text{ m}, \quad \frac{s}{l} = \frac{31}{70,26} = 0,44, \quad a = 20,24, \quad \frac{a}{l} = 0,288, \quad \frac{l-a}{l} = 0,712.$$

Aus dem ersten Kräfteplane ist nach Gleichung 31

$$\begin{aligned} M_1 &= -66,1, \quad M_2 = +25,6, \quad M = +75,8 \text{ tm} \\ M' &= +25,6 \cdot 0,288 - 66,1 \cdot 0,712 + 75,8 = +36,1 \text{ tm} \\ v_1 &= \frac{36,1}{10 \cdot 6,44} = 0,56 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

In dem zweiten Kräfteplane ist  $s' = 14,73$ ,  $a' = 12,63$ ,  $s' - a' = 2,10 \text{ m}$ ,

$$M'' = \frac{0,56 \cdot 2,1^2}{2} = 1,23 \text{ tm}, \quad v_2 = \frac{M''}{6,44} = 0,02 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Spannung durch den Wind auf die Verkehrslast ist die Summe der Spannungen aus beiden Kräfteplänen:

3. Die Gesamtspannungen. Querschnitt.	0	5
Spannung durch Wind auf Brücke . . . . .	2,92	0,89 kg/cm <sup>2</sup>
„ „ „ „ Verkehrslast . . . . .	0,84	0,58 „
zusammen Windspannung . . . . .	3,76	1,47 „

Diese Zahlen werden mit den Spannungen verglichen, welche bei der genauen Rechnung gefunden worden sind.

Liste 23.

Wind auf	Querschnitt			Querschnitt 5		
	Brücke	Verkehr	Zusammen	Brücke	Verkehr	Zusammen
Genäherte Rechnung . . . . .	2,92	0,84	3,76	0,89	0,58	1,47 kg/cm <sup>2</sup>
Genau „ „ . . . . .	2,49	0,64	3,13	1,05	0,32	1,37 „
Unterschied . . . . .	0,43	0,20	0,63	-0,16	0,26	0,10 „
Prozent	17	31	20	-15	80	7 %

Die genäherte Rechnung gibt für die Spannung durch den Wind auf Brücke und Verkehrslast Werte, welche um 20 und 7 % größer als die genau gerechneten Werte in den beiden Querschnitten 0 und 5 sind. Obwohl die Abweichung bedeutend ist, darf die rohe Annäherungsrechnung unbedenklich im allgemeinen an die Stelle der genauen Untersuchung treten. Denn ihre Spannungen sind größer als die genauen, also ist das Ergebnis ungünstiger, und die Gültigkeit der genauen Untersuchung ist zweifelhaft, da bei den großen Brückenbreiten kaum mehr die Bedingung eines Ebenbleibens der Querschnitte und

das Elastizitätsgesetz  $\frac{\sigma}{\epsilon} = E$  erfüllt werden wird.

## F. Der Einfluß der Wärme.

1. Die gleichmäßige Erwärmung. Es wird eine Schwankung  $T$  der Luftwärme zwischen  $-20$  und  $+40^\circ \text{C}$  angenommen. Nach Messungen im Innern einer Stauwand (Beton und Eisen 1909, Heft 14), beträgt die Wärmeschwankung im Mauerwerk von der Stärke  $2 \text{ d}$ :

$$R = \frac{T}{3 \sqrt{d}} = \frac{60}{3 \sqrt{1}} = 20^\circ.$$

Es wurde somit eine größte Änderung der Gewölbewärme von  $20^\circ$  in Rechnung gestellt.

Durch Wärmeänderung entsteht nur ein zusätzlicher Horizontalschub im Achsprung.  $H_0 = \frac{E}{N_2} \omega t l$  nach Gleichung 34. Seite 22  $t = \pm 10^\circ$ ,  $\omega = 0,000\,008\,3$ ,  $E = 1\,000\,000 \text{ t/m}^2$ ,  $E \omega t l = 507 \text{ t}^\circ \text{ t/m}$ . Allgemein wird beim vorliegenden Bogen durch eine Wärmeänderung von  $t^\circ$  ein Schub erzeugt:

$$H_0 = +1,51 \text{ t}^\circ \text{ t}; \text{ für } t = 10^\circ, \text{ ist } H_0 = 15,1 \text{ Tonnen.}$$

Im Querschnitt x, y entsteht

$$M = -15,1 y \text{ und } N = 15,1 \cos \varphi, \quad \sigma = -15,1 \left( \frac{\cos \varphi}{F} \pm \frac{y}{W} \right) t/m^2$$

Die Wärmespannungen bei 10° Änderung sind in Liste 24, 25 enthalten und erreichen in der oberen Faser des Kämpfers ihren Höchstwert mit 2,95 kg/cm² Druck bei Erwärmung.

**2. Die ungleichmäßige Erwärmung.** Die ungleichmäßige Erwärmung eines Gewölbes erzeugt bedeutende Spannungen. Nach Gleichung 35 Seite 23

$$M_0 = \frac{-E \omega \Delta t}{N_1} \int_1^2 \frac{ds}{h}, \quad H_0 = + \frac{E \omega \Delta t}{N_2} \int_1^2 y \frac{ds}{h}, \quad G = 0.$$

Angenähert ist:

$$\int_1^2 \frac{ds}{h} = b_m \int_1^2 \frac{ds}{F} = 34,69 \quad b_m = \frac{\sum b}{n} = \frac{36,783}{8} = 4,598 \text{ m}$$

Beträgt der Wärmeunterschied der unteren und oberen Faser 1° C, so wird

$$M_0 = -8,3 \frac{34,69}{22,65} = -13,05 \text{ tm}, \quad H_0 = +8,3 \frac{-37,86}{337,47} = -0,925 \text{ t}, \quad G = 0.$$

Allgemein ist  $M_0 = -13,05 \Delta t$ ,  $H_0 = -0,925 \Delta t$ , wenn die obere Faser wärmer ist als die untere. Am linken Kämpfer ist  $M_1 = -23,5 \Delta t$  und herrscht die Spannung von  $\sigma = \mp 0,4 \Delta t \text{ kg/cm}^2$ .

**3. Der Einfluß der Wärme auf die Scheitellage.** Aus Gleichung 36 Seite 24 kann die Scheitelhebung gefunden werden, wenn der Bogen sich gleichmäßig um 1° erwärmt.  $H_0 = 1,51 \text{ t}$

$$E d = -H_0 \left[ \int_1^{\frac{l}{2}} x y \frac{ds}{J} + \int_1^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right] = -1,51 (342,530 + 3,606) = -527 \text{ t/m},$$

$$d = -0,527 \text{ mm}.$$

Solange der Bogen nur sein Eigengewicht zu tragen hat, hebt sich der Scheitel bei jedem Grad Wärmezunahme um rund einen halben Millimeter.

## G. Die größten Beanspruchungen des Hauptbogens.

Bisher wurde bei allen 17 Querschnitten ermittelt:

Die Spannung durch die Eigenlast des Bogens . . . . .	$e \sigma$
„ „ „ die Übermauerung . . . . .	$\ddot{u} \sigma$
„ „ „ beide zugleich . . . . .	$r \sigma$
Die größte Zugspannung durch den Verkehr . . . . .	$v \sigma^I$
„ „ Druckspannung „ „ „ . . . . .	$v \sigma^{II}$

Diese Werte sind in den Listen 24, 25 zusammengestellt, hier finden sich auch die sogenannten Hauptspannungen:

$$\sigma^I = r \sigma + v \sigma^I, \quad \sigma^{II} = r \sigma + v \sigma^{II},$$

welche jedoch nicht mit den Hauptspannungen der Festigkeitslehre verwechselt werden dürfen.

In den Listen 24, 25 wurden ferner die nebensächlichen Spannungen  $t \sigma$ , durch Wärmeänderung um 10°, aufgezählt.

Durch Vergleich der Linien  $\sigma^I$ ,  $\sigma^{II}$  auf Abb. 23 S. 39 zeigte sich, daß der größte Druck im Querschnitt 11, der größte Zug oder kleinste Druck im rechten Kämpfer — beidesmal in der oberen Faser — auftritt.

Liste 24.  
Die Spannungen der oberen Faser durch lotrechte Lasten und Wärme.

	$e\sigma$	$\ddot{u}\sigma$	$r\sigma$	$v\sigma^I$	$v\sigma^{II}$	$\sigma^I$	$\sigma^{II}$	$t\sigma$
0	— 7,70	— 3,20	— 10,90	— 12,05	+ 6,94	— 22,95	— 3,96	2,95
1	— 5,84	— 6,73	— 12,57	— 6,65	+ 4,77	— 19,22	— 7,80	2,56
2	— 4,98	— 6,82	— 11,80	— 3,21	+ 3,05	— 15,01	— 8,75	1,99
3	— 5,59	— 10,85	— 16,44	— 3,75	+ 2,93	— 20,19	— 13,51	1,14
4	— 6,96	— 14,95	— 21,91	— 7,41	+ 5,36	— 29,32	— 16,55	0,34
5	— 8,93	— 13,20	— 22,13	— 10,08	+ 6,57	— 32,21	— 15,56	0,55
6	— 10,31	— 10,20	— 20,51	— 11,10	+ 6,02	— 31,61	— 14,47	1,36
7	— 11,97	— 5,70	— 17,67	— 10,44	+ 3,68	— 28,11	— 13,99	1,90
8	— 12,67	— 5,37	— 18,04	— 9,52	+ 1,47	— 27,56	— 16,57	2,11
9	— 11,97	— 9,40	— 21,37	— 10,44	+ 3,68	— 31,81	— 17,69	1,90
10	— 10,31	— 15,40	— 25,71	— 11,10	+ 6,02	— 36,81	— 19,69	1,36
11	— 8,93	— 18,00	— 26,93	— 10,08	+ 6,57	— 36,93	— 20,36	0,55
12	— 6,96	— 17,98	— 24,94	— 7,41	+ 5,36	— 32,35	— 19,58	0,34
13	— 5,59	— 11,28	— 16,87	— 3,75	+ 2,93	— 20,62	— 13,94	1,14
14	— 4,93	— 5,52	— 10,50	— 3,21	+ 3,05	— 13,70	— 7,45	1,99
15	— 5,84	— 3,24	— 9,08	— 6,65	+ 4,77	— 15,73	— 4,31	2,56
16	— 7,70	+ 1,75	— 5,95	— 12,05	+ 6,94	— 18,00	+ 0,99	2,95

Die Zahlen sind  $\text{kg/cm}^2$ . Druck —, Zug +.

Liste 25.  
Die Spannungen der unteren Faser durch lotrechte Lasten und Wärme.

	$e\sigma$	$\ddot{u}\sigma$	$r\sigma$	$v\sigma^I$	$v\sigma^{II}$	$\sigma^I$	$\sigma^{II}$	$t\sigma$
0	— 8,02	— 12,80	— 20,82	— 9,01	+ 9,54	— 29,83	— 11,28	2,82
1	— 10,22	— 11,73	— 21,95	— 7,20	+ 5,28	— 29,15	— 16,67	2,39
2	— 10,90	— 9,83	— 20,73	— 6,18	+ 1,36	— 26,91	— 19,37	1,76
3	— 10,80	— 5,27	— 16,07	— 7,40	+ 3,33	— 23,47	— 12,74	0,97
4	— 9,89	— 3,30	— 13,19	— 9,73	+ 6,08	— 22,92	— 7,11	0,06
5	— 8,67	— 5,79	— 14,46	— 10,53	+ 8,19	— 24,99	— 6,27	0,90
6	— 6,85	— 7,83	— 14,68	— 9,23	+ 8,76	— 23,91	— 5,92	1,73
7	— 6,03	— 13,30	— 19,33	— 6,04	+ 7,67	— 25,37	— 11,66	2,31
8	— 5,94	— 14,04	— 19,98	— 2,73	+ 6,36	— 22,71	— 13,62	2,50
9	— 6,03	— 9,53	— 15,56	— 6,04	+ 7,67	— 21,60	— 7,89	2,31
10	— 6,85	— 2,24	— 9,09	— 9,23	+ 8,76	— 18,32	— 0,33	1,73
11	— 8,67	— 0,49	— 9,16	— 10,53	+ 8,19	— 19,69	— 0,97	0,90
12	— 9,89	— 0,46	— 10,35	— 9,73	+ 6,08	— 20,08	— 4,27	0,06
13	— 10,80	— 5,14	— 15,94	— 7,40	+ 3,33	— 23,34	— 12,61	0,97
14	— 10,90	— 12,78	— 23,68	— 6,18	+ 1,36	— 29,86	— 22,32	1,76
15	— 10,22	— 15,67	— 25,89	— 7,20	+ 5,28	— 33,09	— 20,61	2,39
16	— 8,02	— 18,27	— 26,29	— 9,01	+ 9,54	— 35,30	— 16,75	2,82

Für diese beiden Querschnitte wurde schon vorhin auf S. 48, 53, 54, 42 die Wirkung der Bremskraft und des Winddrucks und der elastischen Formänderung festgestellt. Als obere und untere Grenzwerte der Spannung im Bogen ergeben sich somit:

Liste 26.

Querschnitt 11		Querschnitt 16	
Obere Faser		Obere Faser	Untere Faser
<b>Hauptspannungen:</b>			
$r\sigma = -26,93 \text{ kg/cm}^2$	$r\sigma' = -27,38 \text{ ,,}$	$r\sigma = -5,95 \text{ kg/cm}^2$	$r\sigma' = -26,29 \text{ kg/cm}^2$
$\sigma^I = -37,46 \text{ ,,}$		$r\sigma' = -6,71 \text{ ,,}$	$r\sigma' = -25,53 \text{ ,,}$
		$\sigma^{II} = +0,23 \text{ ,,}$	$\sigma^I = -34,54 \text{ ,,}$
<b>Zusatzspannungen:</b>			
$t\sigma = -0,55 \text{ ,,}$	$b\sigma = -0,26 \text{ ,,}$	$w\sigma = -1,37 \text{ ,,}$	
		$t\sigma = +2,95 \text{ kg/cm}^2$	$t\sigma = -2,82 \text{ ,,}$
		$b\sigma = +0,98 \text{ ,,}$	$b\sigma = -0,98 \text{ ,,}$
		$w\sigma = +3,13 \text{ ,,}$	$w\sigma = -3,13 \text{ ,,}$
<b>Größte Spannungen:</b>			
$\sigma_0 = -37,46 - 2,18$	$\sigma_0 = -39,64 \text{ kg/cm}^2$	$\sigma_0 = +0,23 + 7,06 =$	$\sigma_0 = -34,54 - 6,93 =$
		$= +7,29 \text{ kg/cm}^2$	$= -41,47 \text{ kg/cm}^2$

Wenn Verkehrslast, Wind und Wärme wirklich einmal in der vorausgesetzten ungünstigen Weise auf den Bogen wirken, so entsteht eine Druckspannung von fast 42 und eine Zugspannung von wenig über 7 kg/cm<sup>2</sup>. Der größte Zug entsteht in einem Eckpunkte

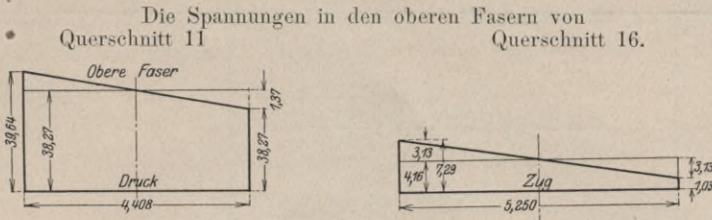


Abb. 32.

des rechten Kämpfers. Ohne Einwirkung von Wärme, Wind und Bremskraft entsteht nirgends im Bogen eine Zugspannung von Bedeutung. Für den Fall, daß der Mörtel keine Zugfestigkeit besitzt und eine Zugspannung nicht entstehen kann, erhöht sich im Kämpfer der Druck — wenn man vom Wind absieht — von 38 auf 39 kg/cm<sup>2</sup> nach Abb. 33 fügt der Wind an einer Ecke noch 3 kg/cm<sup>2</sup> hinzu, so übertrifft die im Kämpfer auftretende Druckspannung von 42 kg/cm<sup>2</sup> jene der Fuge 11 mit 40. Aber auch mit diesem Drucke von 42 kg/cm<sup>2</sup> ist weder die Festigkeit des Mörtels noch des Granites erschöpft. Engesser berechnet in einem Aufsätze über weitgespannte Brücken (Z. f. Arch. u. Ing. W. Hannover 1910, H. 7) die Fugenfestigkeit eines Quadergewölbes zu  $K = \frac{1}{3} K_1 + \frac{2}{3} K_2$ . Da die Granitfestigkeit  $K_1 = 2100$  und die Mörtelfestigkeit (in eingespanntem Zustande)  $K_2 = 450$  kg/cm<sup>2</sup> ist, so wäre die Fugenfestigkeit  $K = 1000$  kg/cm<sup>2</sup> 24 mal größer als die größte Druckspannung des Bogens.

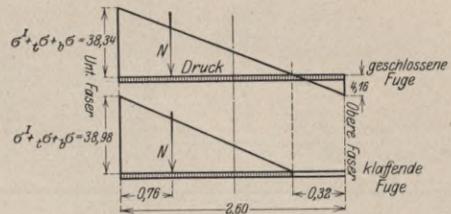


Abb. 33. Die Spannungen in der Fuge des rechten Kämpfers.

## H. Die Standfestigkeit des Ganzen.

Der Winddruck beträgt in dieser Gegend nach allgemeiner Annahme höchstens 0,2 t/m<sup>2</sup>. Nach Seite 53 entsteht hierbei im Kämpfer eine Zugspannung von 4,98 kg/cm<sup>2</sup>. Da aber die Druckspannung ebenda durch die ruhende Last 6,71 kg/cm<sup>2</sup> beträgt, so ist eine genügende Standfestigkeit des Bogens in seiner Gesamtheit vorhanden.

## J. Zusammenfassung.

### 1. Die allgemeine Untersuchung.

Die Untersuchung des eingespannten Bogens zerfällt in 3 Teile. Der erste enthält die lotrechten Kräfte, den Einfluß der Wärme und der Formänderung der Widerlager und bildet die Hauptaufgabe, der zweite die wagrechten Kräfte in der Trägerebene, und der dritte befaßt sich mit den wagrechten Querbelastungen, welche senkrecht zur Trägerebene stehen. Bei großen Spannweiten sollten alle drei Teile durchgeführt werden. Die irgendeiner Belastung zugehörige Beanspruchung wird durch die Einflußlinie der größten Spannung im Querschnitt gefunden. Diesen wie allen anderen Einflußlinien liegen die Grundwerte  $W_1 = \frac{Z_1}{N_1}$ ,  $W_2 = \frac{Z_2}{N_2}$ ,  $W_3 = \frac{Z_3}{N_3}$  zugrunde.  $Z_1, Z_2, Z_3$  sind die mit der Lastlage wechselnden Zähler.  $N_1, N_2, N_3$  sind die konstanten Nenner und haben bei den beiden ersten Untersuchungen die Werte:

$$N_1 = \int_0^l \frac{ds}{J}, \quad N_2 = \int_0^l y^2 \frac{ds}{J} + c^2 \int_0^l \frac{ds}{F r^2}, \quad N_3 = \int_0^l x^2 \frac{ds}{J}$$

	Lotrechte Last A		Wagrechte Längslast B			
$Z_1 =$	$\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_0^a \frac{ds}{J} + \int_0^a x \frac{ds}{J}$		$(t-k) \int_0^a \frac{ds}{J} - \int_0^a y \frac{ds}{J}$			
$Z_2 =$	$\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_0^a y \frac{ds}{J} + \int_0^a xy \frac{ds}{J}$		$(t-k) \int_0^a y \frac{ds}{J} - \int_0^a y^2 \frac{ds}{J}$			
$Z_3 =$	$\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_0^a x \frac{ds}{J} + \int_0^a x^2 \frac{ds}{J}$		$(t-k) \int_0^a x \frac{ds}{J} - \int_0^a xy \frac{ds}{J}$			
$W_{1,l-a} =$	$+ W_{1,a} - \left(\frac{l}{2} - a\right)$		$- W_{1,a} + t - k$			
$W_{2,l-a} =$	$+ W_{2,a}$		$- W_{2,a} - 1$			
$W_{3,l-a} =$	$- W_{3,a} + 1$		$+ W_{3,a}$			
$a = 0$	$0$	$\frac{l}{2}$	$l$	$0$	$\frac{l}{2}$	$l$
$W_1 = 0$	$0$	$w_1 = \frac{1}{N_1} \int_0^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J}$	$-\frac{l}{2}$	$0$	$\frac{t-k}{2}$	$t-k$
$W_2 = 0$	$0$	$w_2 = \frac{1}{N_2} \int_0^{\frac{l}{2}} xy \frac{ds}{J}$	$0$	$0$	$\infty - \frac{1}{2}$	$-1$
$W_3 = 0$	$0$	$w_3 = \frac{1}{2}$	$+1$	$0$	$\frac{1}{N_3} \left[ (t-k) \int_0^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J} - \int_0^{\frac{l}{2}} xy \frac{ds}{J} \right]$	$0$
$a < \frac{l}{2} + x, M =$	$- W_1 - W_2 y - W_3 x$		$- W_1 - W_2 y - W_3 x$			
$a > \frac{l}{2} + x, M =$	$- W_1 - W_2 y - W_3 x + \frac{l}{2} - a + x$		$- W_1 - W_2 y - W_3 x + t - a'$			
$a < \frac{l}{2} + x, N =$	$+ W_2 \cos \varphi - W_3 \sin \varphi$		$+ W_2 \cos \varphi - W_3 \sin \varphi$			
$a > \frac{l}{2} + x, N =$	$+ W_2 \cos \varphi - W_3 \sin \varphi + \sin \varphi$		$+ W_2 \cos \varphi - W_3 \sin \varphi + \cos \varphi$			

	Wagrechte Querlast C	
	$\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_0^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} + (k-t) \int_0^a \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} + \int_0^a y \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} +$ $+ \int_0^a x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} - (k-t) \int_0^a \frac{ds}{J} - \int_0^a y \frac{ds}{J}$	
	$\left(\frac{l}{2} - a\right) \int_0^a \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} + (k-t) \int_0^a \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} + \int_0^a x \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} - \int_0^a x \frac{ds}{J} - \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_0^a \frac{ds}{J}$	
	$\left(\frac{l}{2} - a\right) \left[ \int_0^a x \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} + \int_0^a y \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} \right] + (k-t) \left[ \int_0^a x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} + \int_0^a y \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} \right] +$ $+ \int_0^a (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \frac{ds}{J_3} - \int_0^a (x^2 + y^2) \frac{ds}{J} - \left(\frac{l}{2} - a\right) \int_0^a x \frac{ds}{J} - (k-t) \int_0^a y \frac{ds}{J} - 3,2 \int_0^a \frac{ds}{F}$	
	$- W_{1,a} + k - t$	
	$+ W_{2,a} - \left(\frac{l}{2} - a\right)$	
	$- W_{3,a} + 1$	
$0$	$0$	$\frac{l}{2}$
$0$	$0$	$+ \frac{k-t}{2}$
$0$	$0$	$\frac{1}{N_2} \cdot \left[ (k-t) \int_0^{\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3} + \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} - \int_0^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J} \right]$
$0$	$0$	$+ \frac{1}{2}$
$K_3 =$	$- W_3$	
$K_3 =$	$- W_3 + 1$	
$M_1 =$	$- W_1 \cos \varphi + W_2 \sin \varphi + W_3 (x \sin \varphi - y \cos \varphi)$	
$M_1 =$	$- W_1 \cos \varphi + W_2 \sin \varphi + W_3 (x \sin \varphi - y \cos \varphi) + (k-t+y) \cos \varphi - \left(\frac{l}{2} - a + x\right) \sin \varphi$	

Liste 27 (Fortsetzung).

Liste

	Lotrechte Last A	Wagrechte Längslast B
$a < \frac{l}{2} + x, Q =$	$-W_2 \sin \varphi - W_3 \cos \varphi$	$-W_2 \sin \varphi - W_3 \cos \varphi$
$a > \frac{l}{2} + x, Q =$	$-W_2 \sin \varphi - W_3 \cos \varphi + \cos \varphi$	$-W_2 \sin \varphi - W_3 \cos \varphi - \sin \varphi$
$M_{l-a} =$	$-l + 2a - W_{1,a} - W_{2,a}y + W_{3,a}x$	$+W_{1,a} + W_{2,a}y - W_{3,a}x$
$N_{l-a} =$	$+W_{2,a} \cos \varphi + W_{3,a} \sin \varphi$	$-W_{2,a} \cos \varphi - W_{3,a} \sin \varphi$
$Q_{l-a} =$	$-W_{2,a} \sin \varphi + W_{3,a} \cos \varphi$	$+W_{2,a} \sin \varphi - W_{3,a} \cos \varphi$

und bei der dritten Untersuchung die Werte:

$$N_1 = \int_0^l \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} - \int_0^l \frac{ds}{J}, \quad N_2 = \int_0^l \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_3} - \int_0^l \frac{ds}{J}$$

$$N_3 = \int_0^l (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \frac{ds}{J_3} - \int_0^l (x^2 + y^2) \frac{ds}{J}$$

In der Liste 27 sind die Grundwerte in ihrer tunlichst vereinfachten Gestalt für alle drei Untersuchungen zusammengestellt, die Beziehung zwischen den Werten bei symmetrischen Lastlagen und die drei Grenzwerte angegeben und endlich die Querschnittskräfte M, N, Q als Abhängige der Grundwerte gezeigt.

Die Berechnung der Spannung durch wagrechte Querlast (Wind) darf im allgemeinen angenähert erfolgen, indem man sie aus zwei Kräfteplänen ermittelt. Im 1. Plan gilt der Träger als beiderseits eingespannt mit einer geraden Achse, deren Länge  $l$  gleich der Bogenabwicklung  $S$  ist; im zweiten Plane zerlegt er sich in 2 gerade Kragträger, deren senkrechte Kraglänge gleich der Pfeilhöhe ist und jeweils die Hälfte der Windlast aufnimmt. Das Moment im Querschnitte  $a, a'$  ist bei gleichförmig verteilter Last  $p$

auf der Strecke  $s$ , wenn  $a < s$

$$1. \text{ Plan } M' = M_2 \frac{a}{l} + M_1 \frac{l-a}{l} + \mathfrak{M}$$

$$M_1 = p_1 \frac{s^2}{12} \left[ 6 - 8 \frac{s}{l} + 3 \left( \frac{s}{l} \right)^2 \right]$$

$$M_2 = -\frac{p_1}{12} \left( \frac{s}{l} \right)^2 (4l - 3s)$$

$$\mathfrak{M} = p_1 \frac{s}{l} \left( l - \frac{s}{2} \right) a - p_1 \frac{a^2}{2}$$

$$2. \text{ Plan } M'' = p_2 \frac{(s' - a')^2}{2}, \quad a' < s'$$

$$\text{Die Spannung ist } \nu = 6 \frac{M' + M''}{h b^2}$$

auf dem ganzen Träger

$$M' = \frac{p_1}{12} [6a(l-a) - l^2]$$

$$p_1 = \frac{\Sigma W}{l}, \quad p_2 = \frac{\Sigma W}{2f}$$

$$M'' = p_2 \frac{(f - a')^2}{2}$$

**Der Einfluß der Wärme:** Gleichmäßige Erwärmung um  $t^0, M_0 = 0, H_0 = 8,3 \frac{lt}{N_2}, G = 0$ .  
Ungleichmäßige Erwärmung mit einem Wärmeunterschied der äußeren Fasern um  $\Delta t^0$ :

27.

Liste 27.

	Wagrechte Querlast C
$M_2 =$	$+W_1 \sin \varphi + W_2 \cos \varphi + W_3 (x \cos \varphi + y \sin \varphi)$
$M_2 =$	$+W_1 \sin \varphi + W_2 \cos \varphi + W_3 (x \cos \varphi + y \sin \varphi) - (k - t + y) \sin \varphi - \left( \frac{l}{2} - a + x \right) \cos \varphi$
$K_{3,l-a} =$	$+W_{3,a}$
$M_{1,l-a} =$	$+W_{1,a} \cos \varphi + W_{2,a} \sin \varphi - W_{3,a} (x \sin \varphi - y \cos \varphi)$
$M_{2,l-a} =$	$-W_{1,a} \sin \varphi + W_{2,a} \cos \varphi - W_{3,a} (x \cos \varphi + y \sin \varphi)$

$$M_0 = -\frac{8,3 \Delta t}{N_1} \int_0^l \frac{ds}{h}, \quad H_0 = \frac{8,3 \Delta t}{N_2} \int_0^l y \frac{ds}{h}, \quad G = 0$$

$N_1, N_2$  haben die Werte der 1. Untersuchung.

**Die Scheitelbewegung,**

durch lotrechte Last:

$$1000000 d = -W_1 \int_0^{\frac{l}{2}} x \frac{ds}{J} - W_2 \int_0^{\frac{l}{2}} x y \frac{ds}{J} + W_3 \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{ds}{J}$$

durch Wärme:

$$1000000 d = -\frac{8,3 lt}{N_2} \int_0^{\frac{l}{2}} x y \frac{ds}{J}$$

Die Werte  $x, y$  gehören bei den ersten beiden Untersuchungen einem Achskreuz an, dessen senkrechte Y-Achse in der Symmetrielinie des Bogens liegt und dessen wagrechte X-Achse ungefähr durch den Schwerpunkt der elastischen Gewichte  $\frac{ds}{J}$  geht und von der Kämpferlinie um  $k$  absteht.

$$k = \frac{\int_0^l y' \frac{ds}{J}}{\int_0^l \frac{ds}{J} + \int_0^l \frac{ds}{F r^2}}$$

Bei der dritten Untersuchung liegt die X-Achse um  $k$  über der Kämpferlinie:

$$k = \frac{\int_0^l y' \frac{ds}{J} - \int_0^l y' \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3} - \int_0^l x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_3}}{\int_0^l \frac{ds}{J} - \int_0^l \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_3}}, \quad J_2 = \frac{b^3 h}{12}, \quad J_3 = \frac{b h^3}{12},$$

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_2} + \frac{J}{J_3}$$

Die Werte  $Z$  und  $W$  werden für eine genügende Anzahl Querschnitte der einen Trägerhälfte mit den Ausdrücken der Spalte A, B und, wenn nötig, auch C des Verzeichnisses er-

mittelt, deren Form die geringste Rechenarbeit erfordert. Durch sie ist eine gleichgroße Zahl von Einflußlinien der Querschnittskräfte  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  und sind durch die Beziehung

$$\sigma = -\frac{N}{F} \mp \frac{M}{W}, \quad \nu = \mp 6 \frac{M_2}{b^2 h}$$

ebensoviele Einflußlinien der Spannungsgrößtwerte gegeben. Die Gleichungen gelten für jeden symmetrischen Bogen, nur muß bei einem Korbbogen für den in  $N_2$  vorkommenden Halbmesser  $r$  ein Mittelwert genommen werden. Sie enthalten alle für eine genaue Rechnung nötigen Glieder und eignen sich insbesondere für logarithmische Durchführung. Alle Größen sind in  $m$  und  $t$  auszudrücken, so daß sich die Spannung zum Schluß in  $t/m^2$  ergibt. Für den Elastizitätsmodul  $E$  wurde auf Grund der Beobachtung  $E = 1\,000\,000\ t/m^2$  gesetzt. Die früher auf Seite 2 und 15 festgesetzten Richtungen sind positiv.

## 2. Die rechnerische Untersuchung.

### I. Der Einfluß der Normal- und Querkraft.

a) auf die Lagerkräfte. Es wurden die Flächen einmal der mit und das andere Mal der ohne Nebenkraft berechneten Einflußlinien der  $M_0$ ,  $H_0$ ,  $G$  ermittelt und der Inhalt verglichen. Die Abweichung von dem genauen Wert ist in Prozenten des letzteren angegeben. Das — Zeichen bedeutet, daß ohne die Nebenkraft sich zu große absolute Werte ergeben.

Liste 28.

	Lotrechte Last	Wagrechte Längslast
Einfl. d. Normalkraft bei	$M_0$	+ 0,02 %
	$H_0$	— 2,09 „
	$G$	0 „
Einfl. d. Querkraft bei	$M_0$	0 „
	$H_0$	— 0,08 „
	$G$	— 0,16 „

Die Querkraft ist im allgemeinen fast wirkungslos und kann ohne Schaden vernachlässigt werden. Die Normalkraft ist beim Horizontalschub  $H_0$  wichtig, es genügt jedoch, sie beim konstanten Nenner  $N_2$  einzuführen.

### b) auf die Spannungen.

Liste 29.

Lotrechte Last	Linker Kämpfer	Scheitel	Querschnitt 11	Linker Kämpfer	Scheitel	Querschnitt 11	
Einfl. d. Normalkraft bei	$\sigma_0$	+ 18,6 %	— 2,2 %	— 5,3 %	— 9,6 %	— 3,0 %	+ 1,4 %
	$\sigma_u$	+ 17,7 „	+ 214 „	+ 13,7 „	— 5,7 „	+ 214 „	+ 1,6 „
Einfl. d. Querkraft bei	$\sigma_0$	+ 0,5 „	— 0,6 „	0 „	— 0,3 „	— 0,6 „	— 0,1 „
	$\sigma_u$	+ 6,9 „	— 6,8 „	0 „	— 0,2 „	— 6,8 „	+ 0,1 „

Liste 30.

	Ganzer Träger belastet			Linke Hälfte belastet			
Einfl. d. Normalkraft bei	$\sigma_0$	+ 13,3 %	— 2,0 %	— 1,5 %	— 5,4 %	— 1,0 %	+ 1,0 %
	$\sigma_u$	+ 12,9 „	+ 18,8 „	+ 4,5 „	— 5,1 „	+ 7,2 „	+ 1,5 „
Einfl. d. Querkraft bei	$\sigma_0$	+ 0,5 „	— 0,6 „	0 „	— 0,2 „	— 0,2 „	— 0,1 „
	$\sigma_u$	+ 0,5 „	— 0,6 „	0 „	— 0,2 „	— 0,2 „	+ 0,1 „

In der Liste 29 ist der Beitrag der Nebenkraft verglichen mit der genauen Spannung, welche in dem betreffenden Querschnitt bei Belastung über den ganzen und halben Träger auftritt. In der Liste 30 ist der Beitrag jedoch mit der in dem einen ungünstigsten Querschnitt auftretenden Maximalspannung, welche bei der ganzen Belastung mit  $p = 1t$

10 kg/cm<sup>2</sup> und bei der Belastung auf der einen Trägerhälfte 13 kg/cm<sup>2</sup> ist, verglichen und in Hundertteilen ausgedrückt worden. Die Absolutgröße der Last scheidet beim Vergleiche aus, darum wurde  $p = 1 t$  gesetzt. Die Zahlen sind wieder Prozente und das Minuszeichen bedeutet einen zu großen absoluten Wert der Spannung ohne Nebenkraft. Die Listen beweisen, daß die Querkraft ohne Bedeutung ist. Die Normalkraft macht sich hingegen bemerkbar und muß daher im Nenner von  $W_2$  enthalten sein.

## II. Die elastische Änderung der Widerlager.

Das elastische Formändern der Widerlager ist beim Talübergang bei Langenbrand von keinem großen Einfluß auf die Spannungen. Die größte Spannungsänderung ist nur 0,76 kg/cm<sup>2</sup>.

Liste 31.

	Rechter Kämpfer	Scheitel	Querschnitt
$\sigma_0$	+ 12,7 %	- 0,2 %	+ 1,7 %
$\sigma_u$	- 3,4 „	+ 0,2 „	- 4,9 „

Vergleich mit  $\sigma$ .

## III. Zusatzspannungen.

Die Spannungen durch Wind und Wärme sind hier wie bei allen größeren Spannweiten wichtig. Der Einfluß der Bremskraft wächst und jener der Wärme wird kleiner mit zunehmender Pfeilhöhe. Alle drei Einflüsse — Wind, Wärme und Bremskraft — begünstigen das Auftreten von Zugspannungen im Bogen.

## K. Die vereinfachte Untersuchung für lotrechte Last.

Eine zuverlässige Berechnung der Festigkeit eines Gewölbes und ein genaues Ergebnis, das dem Bedürfnis einer verantwortlichen Tätigkeit genügt, kann nur auf dem rechnerischen Wege erhalten werden. Da eine vollständige Untersuchung umfangreiche Rechenarbeit verlangt, so wurde gezeigt, wie man sie durch zweckmäßigen Ausbau der Gleichungen und Fortlassen der rechnerisch einflußlosen Werte auf ein Mindestmaß beschränken kann. Zeichenverfahren werden meist nur noch zur Nachprüfung der grundlegenden Werte benutzt. Ihre elegante Lösung und fast mühelose Durchführung wird dabei freilich als eine angenehme Abwechslung und Erleichterung empfunden.

Die bei diesem und anderen Entwürfen durchgeführte rechnerische Untersuchung von Gewölben, deren Achse ein Kreisbogen oder einem solchen ähnlich war, zeigte eine so einfache Gestalt der Kämpferdruckschnitt- und Umhüllungslinien für lotrechte Last, daß die Einflußlinien der drei Kämpferkräfte sich leicht zeichnerisch ermitteln ließen. Das hier entwickelte Zeichenverfahren zur Nachprüfung der berechneten Werte bringt gegenüber den sonstigen genauen und genäherten Konstruktionen eine erhebliche Erleichterung und ermöglicht eine solche Genauigkeit, daß das Ergebnis sich fast vollkommen mit jenem der Rechnung deckt.

### 1. Die Gestalt der Schnitt- und Umhüllungslinien.

Vom symmetrischen Parabelbogen ist bekannt, daß seine Kämpferdruckschnittlinie annähernd eine wagrechte Gerade ist und daß seine Umhüllungslinien Hyperbeln sind, deren eine Asymptote die zugehörige Kämpferlotrechte und deren andere eine schwachgeneigte Gerade ist. An den folgenden Beispielen wird nachgewiesen, daß beim symmetrischen Kreisbogen die Umhüllungslinien als Hyperbeln angesehen werden können, deren eine Asymptote wieder die zugehörige Kämpferlotrechte ist, während die andere wagrecht liegt und den Abstand zwischen dem Schwerpunkt der elastischen Gewichte  $\frac{ds}{J}$  und der wagrechten Schnittlinie halbiert.

**Erstes Beispiel.** Der Talübergang bei Langenbrand Abb. 20 S. 35.

$$l = 61,05, f = 14,85 \text{ m}, \frac{f}{l} = 0,243.$$

Der symmetrische Kreisbogen wurde im vorhergehenden rechnerisch mit Berücksichtigung aller Nebenkräfte untersucht. Die Schnittlinie ist fast genau eine Wagrechte, und die Umhüllungslinien sind genau Hyperbeln mit den vorhin erwähnten rechtwinkligen Asymptoten. Die nach dem noch abzuleitenden Verfahren gezeichneten Werte der  $M_1$ ,  $A$ ,  $H_1$  stimmen mit den gerechneten überein.

**Zweites Beispiel.** Schwändeholzobelbrücke.

$$l = 59,08, f = 14,37 \text{ m}, \frac{f}{l} = 0,243$$

Bei diesem auf der Bahnstrecke Freiburg-Donaueschingen gelegenen symmetrischen Kreisbogen ist in der Rechnung die Normalkraft berücksichtigt und es ergibt sich das gleiche wie beim ersten Beispiel.

**Drittes Beispiel.** Talübergang bei Forbach, zweiter Entw.

$$l = 41,77, f = 13,68 \text{ m}, \frac{f}{l} = 0,328.$$

Bei diesem symmetrischen Kreisbogen ist in der Rechnung keine Nebenkraft berücksichtigt, weshalb sich auch  $H_1$  und  $M_1$  auf der positiven Seite zu groß berechneten. Für die vorhin erwähnte Lage von Schnittlinie und Asymptoten ergibt die zeichnerische Bestimmung solche Werte von  $H_1$ ,  $A$ ,  $M_1$ , welche mit den gerechneten Werten von  $A$ ,  $H_1$  zusammenfallen und bei  $M_1$  richtiger Weise nach der negativen Seite etwas größer sind.

**Viertes Beispiel.**

$$l = 67,48, f = 8,44 \text{ m}, \frac{f}{l} = 0,125.$$

Das Pfeilverhältnis  $\frac{1}{8}$  dieses symmetrisch angenommenen Kreisbogens nähert sich der untersten Grenze der Anwendung. Die mit allen Nebenkräften durchgeführte Berechnung zeigt, daß die Schnittlinie sehr schwach gegen die Wagrechte beiderseits nach oben genau so geneigt ist, wie die zweite Asymptote jeder Umhüllungslinie, welche wieder eine Hyperbel mit der Kämpferlotrechten als 1. Asymptote ist. Mit wagrechter Schnittlinie und wagrechter Asymptote, welche wie die genaue, geneigte Asymptote in der Mitte zwischen Achsursprung und Schnittlinie liegt, zeichnen sich Werte von  $M_1$ , welche im ersten und dritten Bogenviertel nach der positiven Seite um wenig größer als die gerechneten  $M_1$  Werte sind.

Die gezeichneten  $H_1$ ,  $A$  Werte sind ebenfalls im Bogenviertel sehr wenig kleiner als die genauen gerechneten. Die Berechtigung der gesagten Annahme von Kämpferdruckschnitt- und Umhüllungslinie besteht somit auch bei diesem Grenzfall der Kreisbogenform, wenn auch bei  $M_1$  nicht in dem gleichen Maße wie bei Bögen mit  $\frac{f}{l} > \frac{1}{8}$ .

**Fünftes Beispiel.** Talübergang bei Forbach, erster Entw. Abb. 36, S. 70.

$$l = 41,41, f = 13,30 \text{ m}, \frac{f}{l} = 0,322.$$

Auch bei diesem unsymmetrischen Kreisbogen sind in der Rechnung keine Nebenkräfte enthalten. Es ergeben sich richtige Werte  $M_1$ ,  $A$ ,  $H_1$  für eine gerade, der geneigten X-Achse parallele Schnittlinie und für zwei Asymptoten, welche den Abstand des Schwerpunktes der elastischen Gewichte von der Schnittlinie halbieren. Die Asymptote am höheren Kämpfer ist der X-Achse parallel, die andere Asymptote hat die entgegengesetzt gleiche Neigung.

**Sechstes Beispiel.** Talübergang bei Forbach, dritter Entw.

$$l = 41,60, f = 13,30 \text{ m}, \frac{f}{l} = 0,320.$$



punkten. Mit der Strecke  $f_0 = \frac{1}{w_2} (w_1 + \frac{l}{4}) - k$  sind die beiden Kämpferdrücke für die Lastlage in Brückenmitte nach Größe, Lage und Richtung gegeben. Dienen beiden Umhüllungslinien gemeinsame Asymptote liegt in der Mitte zwischen Achsursprung und Schnittlinie, also um  $\frac{v+k}{2} = k - \frac{w_1}{2w_2}$  über den Kämpfern. Da die beiden Lagerdrücke Tangenten an die gesuchten Hyperbeln sind, halbiert man die Strecke BC zwischen den Asymptoten und hat in P den Berührungspunkt. Um weitere Punkte P' der Hyperbel zu finden, zieht man durch P die beliebige Sehne LP und macht LP = L'P'. Für die beliebige Lastlage a werden die 3 Kräfte am linken Lager gefunden, indem man vom zugehörigen Punkt D der Schnittlinie an die beiden Umhüllungslinien die Tangenten und durch die Enden F, F<sub>1</sub> der Einheit die Parallelen FH und F<sub>1</sub>H zieht. Die wagerechte Strecke HE ist der Horizontalschub H<sub>1</sub>, und EF<sub>1</sub> ist der Lagerdruck A. Für das Spannungsmoment M<sub>1</sub> trägt man die Einheit AK nach außen wagerecht an, verlängert die Tangente aus D bis zum Schnitte J und zieht durch Punkt H die Parallele HG zu KJ.

$$EG = EH \frac{AJ}{AK} = H_1 \frac{f}{1} = M_1$$

Mit wechselnder Lastlage a beschreiben die Punkte E, G, H die gesuchten 3 Einflußlinien von A, M<sub>1</sub>, H<sub>1</sub>.

b) **Das Rechenverfahren.** Die einfachen geometrischen Beziehungen geben auch einfache Gleichungen für die Lagerkräfte, welche zur Vollständigkeit angegeben werden.

Der Kämpferdruck für  $a = \frac{l}{2}$  schneidet auf den beiden linken Asymptoten die Strecken ab A'B = p, A'C = q. Nimmt man beide Asymptoten als X', Y'-Achsen, so lauten die Gleichungen der Umhüllungslinien:  $x' y' = \frac{p q}{4}$ . Es ist leicht einzusehen, daß

$$p = \frac{l}{2} + w_1, \quad q = \frac{p}{2w_2} = \frac{w_1 + \frac{l}{2}}{2w_2} \text{ ist;}$$

also ist

$$\frac{p q}{4} = \frac{\left(w_1 + \frac{l}{2}\right)^2}{2w_2}.$$

Auf dieses Achsenkreuz bezogen hat der Punkt D der Schnittlinie die Koordinaten a und  $c = -\frac{v-k}{2} = -\frac{w_1}{2w_2}$ . Die Tangente von D an die linke Hyperbel hat den Berührungspunkt T, dessen Koordinaten x', y' sind.

$$x' = \frac{p q}{4c} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4ac}{p q}} \right], \quad y' = \frac{p q}{4a} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4ac}{p q}} \right].$$

Sie bildet mit der wagerechten Asymptote den Winkel  $\varphi_1$  und die zugehörige Tangente an die rechtsseitige Hyperbel hat den Winkel  $\varphi_2$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{c}{a} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4ac}{p q}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4ac}{p q}}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{c}{b} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4bc}{p q}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4bc}{p q}}}, \quad b = l - a.$$

Mit diesen beiden Winkelwerten finden sich die gesuchten Lagerkräfte.

$$M_1 = -\frac{v + a \operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}, \quad H_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}, \quad A = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}.$$

Die früher nach den genauen Gleichungen logarithmisch berechneten Werte  $M_1$ ,  $A$ ,  $H_1$  des Hauptbogens bei Langenbrand wurden zum Vergleich nochmals logarithmisch mit den eben abgeleiteten Gleichungen ermittelt. Es wurde damit auch rechnerisch nachgeprüft, inwieweit das einfache Zeichenverfahren sich den richtigen Werten nähert.

Bei diesem Hauptbogen war:

$$p = 23,907, \quad q = 11,666, \quad v = 17,800, \quad c = -3,236 \text{ m.}$$

Liste 32.

Lastlage:	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$M_1$ Genau . . . . .	0	-2,376	-3,936	-4,494	-4,015	-2,653	-0,739	+1,286	+2,974
Genähert . . . . .	0	-2,385	-3,941	-4,491	-4,013	-2,653	-0,739	+1,283	+2,974
$A$ Genau . . . . .	1	0,9946	0,9772	0,9433	0,8903	0,8168	0,7241	0,6163	0,5000
Genähert . . . . .	1	0,9950	0,9776	0,9438	0,8910	0,8175	0,7249	0,6167	0,5000
$H_1$ Genau . . . . .	0	0,0286	0,1169	0,2632	0,4530	0,6595	0,8469	0,9784	1,0257
Genähert . . . . .	0	0,0282	0,1166	0,2631	0,4529	0,6594	0,8457	0,9766	1,0257

Die Liste 32 zeigt unzweideutig, daß die Annahme der Kämpferdruckschnittlinie als Gerade und der Umhüllungslinien als Hyperbeln mit rechtwinkligen Asymptoten so genaue Werte ergibt, daß sich für die Anwendung beide Ergebnisse decken. Das sehr einfache Zeichenverfahren ist genauer als jedes andere bekannte graphische Verfahren. Zum Schlusse seien noch die Ausdrücke für die Grundwerte  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  der lotrechten Belastung abgeleitet:

$$W_1 = \frac{v - k + \left(\frac{l}{2} - a\right) \operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}, \quad W_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}, \quad W_3 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}$$

### 3. Der Kreisbogen mit $\frac{f}{l} = \frac{1}{4}$ .

Für den Sonderfall des Kreisbogens mit dem Pfeilverhältnis  $\frac{1}{4}$  ist es näherungsweise erlaubt, bei der Last  $1 \text{ t}$  in Brückenmitte den Horizontalschub  $H_0 = 1 \text{ t}$  anzunehmen, wie der Bogen der Langenbrandner und Schwändeholzdobelbrücke zeigt. Aus den Abständen  $d$ ,  $k$  des Schwerpunktes der elastischen Gewichte einer Bogenhälfte von der Symmetrieachse und der Kämpferlinie hat

man die Lage der Schnittlinie  $v = k + \frac{d}{2}$  und die wagerechte Asymptote mit  $k + \frac{d}{4}$  über der Verbindungslinie der Kämpfer und damit auch die Umhüllungslien selbst; denn es ist für  $a = \frac{l}{2}$  der

Lagerdruck  $A = \frac{1}{2}$  und der Schub  $H_1 = 1 \text{ t}$ . (Abb. 35.)

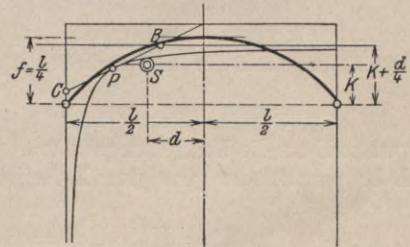


Abb. 35.

### 4. Der unsymmetrische Kreisbogen.

Im Anschluß hieran möge kurz die ähnliche Konstruktion beim Kreisbogen mit ungleich hohen Kämpfern als dem allgemeineren Falle gezeigt werden. (Abb. 36, S. 70.)

Der Achsursprung liegt im Schwerpunkt der elastischen Gewichte. Die X-Achse bildet mit der Wagrechten den Winkel  $\beta$ , der sich aus der Gleichung bestimmt:

$$\int_0^l xy \frac{ds}{J} = 0, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\int_0^l x y' \frac{ds}{J}}{\int_0^l x^2 \frac{ds}{J}}$$

Ihr parallel ist die Schnittlinie, und die Umhüllungslinien sind nach Beispiel 5 auf S. 66 Hyperbeln, deren eine Asymptote immer die Kämpferlotrechte ist, deren andere den Abstand zwischen Schnittlinie und Ursprung halbiert und mit der Wagrechten den Winkel  $+\beta$  und  $-\beta$  bildet. Zerlegt nach den Achsen X und Y gibt die Kämpferkraft den Lagerdruck A und den um  $\beta$  geneigten Schub  $H_1$ . Aus den Umhüllungs- und Schnittlinien finden sich  $M_1$ , A,  $H_1$  wie früher.  $F_1 H$  und  $F H$  sind parallel den beiden Tangenten vom Schnitt-

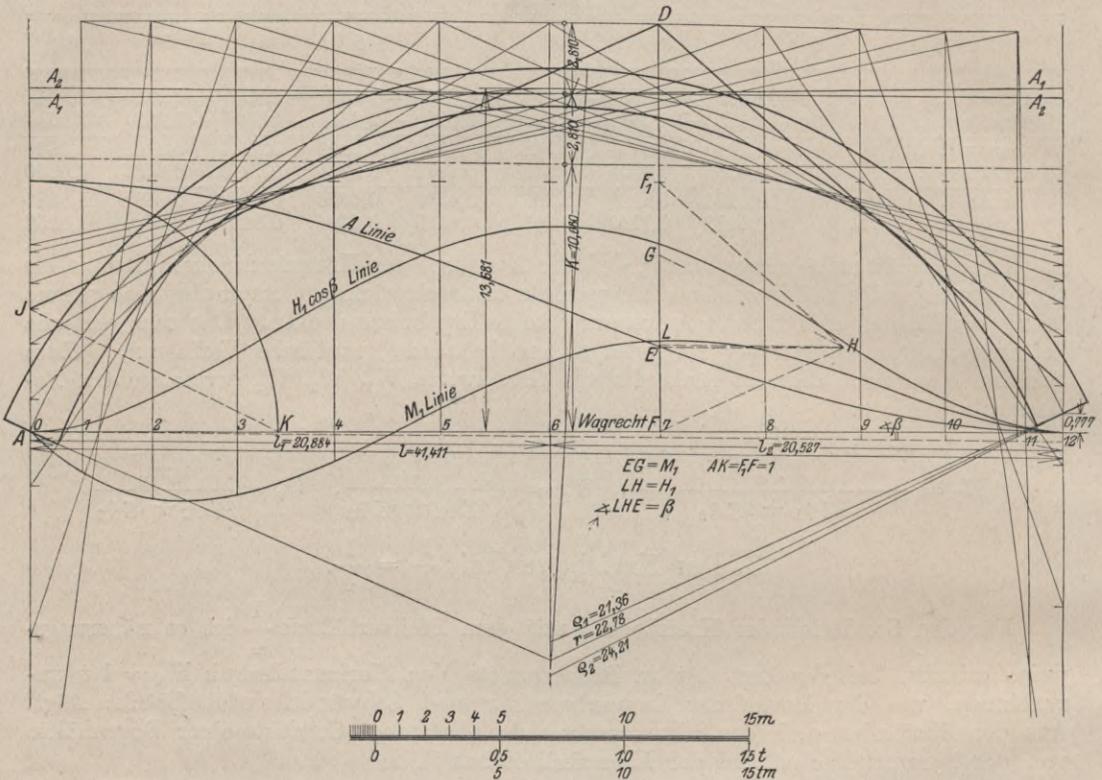


Abb. 36 Der Hauptbogen des Talüberganges bei Forbach. Erster Entwurf. Die Einflußlinien der Kämpferkräfte  $M_1$ , A,  $H_1$  und die Kämpferdruck-Schnitt- und Umhüllungslinien für lotrechte Last.

punkt D an die Umhüllungslinien.  $F F_1$  und  $A K$  sind gleich der Einheit.  $E H$  ist wagrecht,  $L H'$  parallel der geneigten X-Achse und  $G H$  parallel  $J K$ . Dann ist:

$$L H' = H_1, \quad E F = A, \quad \frac{E G}{E H} = \frac{A J}{A K}, \quad E G = \frac{H_1 \cos \beta A J}{1} = M_1.$$

### 5. Der kreisähnliche Korbbogen.

Je mehr sich die Achse eines symmetrischen Korb Bogens einem Kreisbogen nähert, desto eher ist man berechtigt, die gezeigte einfache Ermittlung der Lagerkräfte anzuwenden, zumal das Ergebnis bei Zugspannungen zu ungünstig wird; je willkürlicher seine Gestalt jedoch ist, desto mehr werden seine Umhüllungslinien von der Hyperbel abweichen. Deshalb beschränkt sich das gezeigte Zeichenverfahren auf symmetrische Kreisbögen und ihnen sehr ähnliche Formen, deren Pfeilverhältnis jenem der Beispiele sich nähert.

## II. Die Bauausführung des Talüberganges bei Langenbrand.

**A. Der Bauvorgang.** Die Baustelle lag etwa 15 m tiefer als die auf dem rechten Ufer talaufwärts führende Landstraße und an einer solchen Flußstrecke, wo sich beiderseits am Ufer Wiesenhänge hinziehen, und das Tal noch breit und offen ist. Das rechte Ufer ist flach und sumpfig, das linke, etwas mehr geneigt, hat nur geringe Überlagerung auf dem Fels, der im Flußbett bald zu Tage tritt und bald von grobem Geschiebe bedeckt ist. Ein schmaler Karrenweg auf dem linken Ufer, etwa in Bahnhöhe, konnte wegen seiner schlechten Linienführung und seines Zustandes nur ausnahmsweise zur Befuhr von Baustoffen benutzt



Abb. 37. Der Talübergang bei Langenbrand. Blick flußabwärts.

werden, und man war vor allem auf die Landstraße angewiesen, von welcher die Lasten durch einen zweigleisigen Bremsberg mit 3 t Nutzlast oder in Rutschen aus starken Dielen zu den Lagerplätzen hinunter befördert wurden. Fast der größte Teil vom Sand wurde rechtsuferig 100 m oberhalb hinter einem Wehre gewonnen, wo er sich bei jeder Murganschwellung in reinem Zustande und recht grobkörnig ablagerte. Der Rest wurde mit der Bahn aus einer Grube in der Rheinebene bei Durmersheim bezogen, war aber für den Granit etwas fein und mußte unter großen Kosten etwa 4 km mit Wagen beigefahren werden, da es nicht gelang, das Baugleis rasch genug bis zur Baustelle vorzustrecken. Weniger wichtig war die Verbindung mit der oberhalb gelegenen Strecke, da im Flußbett und 200 m oberhalb auf dem linken Ufer gesunder und leicht zu stoßender Fels anstand, der schöne Steine für die Hintermauerung, Sichtfläche und die Nebengewölbe lieferte. Nur ein kleiner Teil wurde von Forbach her im Taltransport angefahren; den gleichen Weg hatten die Quader für den Hauptbogen, welche aus Brüchen am Eckkopf bei Forbach oder noch 4 km weiter oberhalb im Raumünzachtale geliefert und wie die Abdeckplatten, welche meistens aus der Rappenschlucht kamen, am Baugleis im neuen Bahnhof Langenbrand gelagert wurden. Den Steinlagerplatz bestrich ein hölzerner Kran mit fahrbarer Winde.

Um wenigstens beide Ufer zu verbinden, wurden die 3 im Flußbett erstellten Lehrgerüstpfeiler flußabwärts um 3 m verlängert und ein hochwasserfreier Holzsteg für Plattwagen darüber aufgeschlagen. Am Fuße des Bremsberges wurde der Zement und Sand

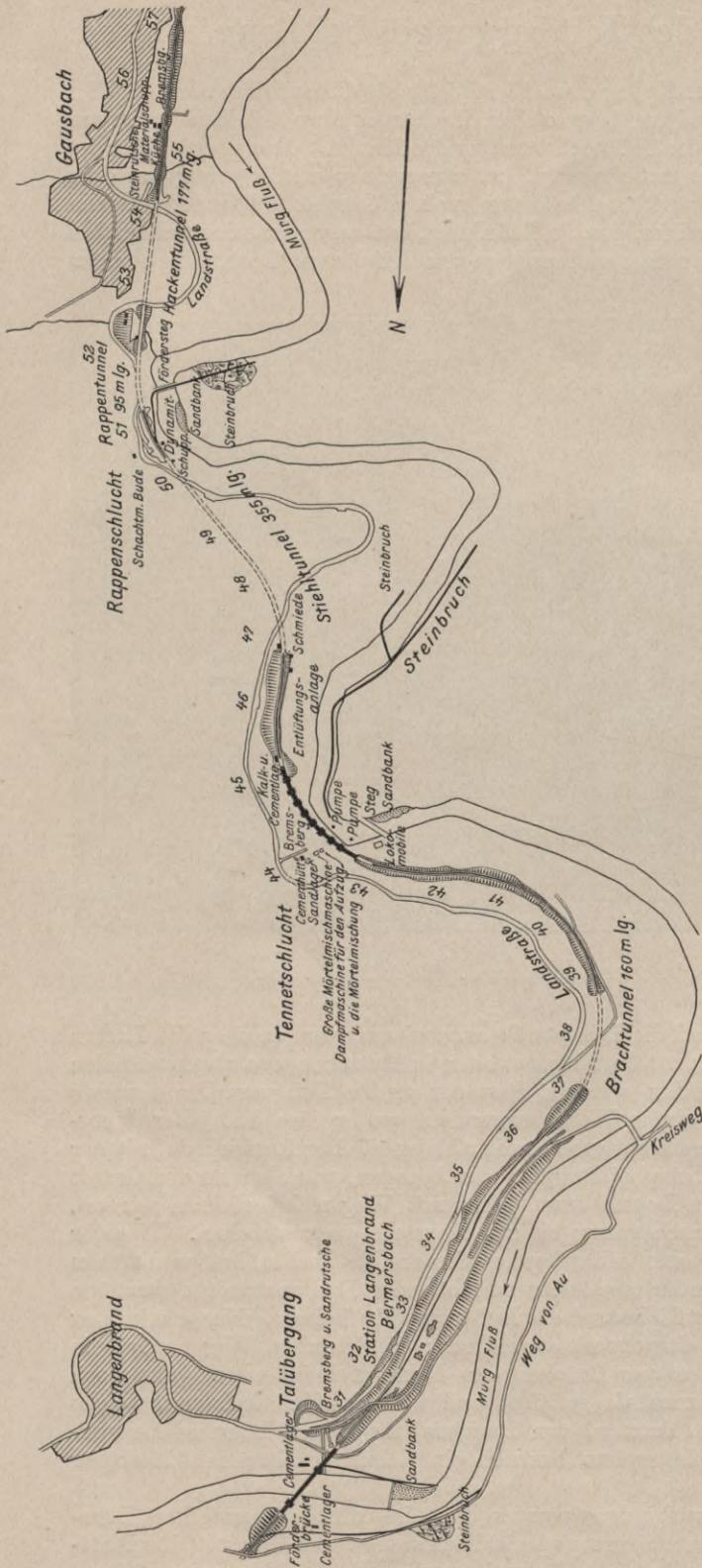


Abb. 38. Lageplan der Baustellen der drei Steinbrücken.

gelagert, die Mörtelpritsche angelegt und die schwach ausreichende Mörtelmischmaschine mit Handbedienung aufgestellt. Eine handbediente Winde förderte in einem fünfstöckigen hölzernen Aufzugsturm den Mörtel und Bruchstein zur Verwendungsstelle. Der Mangel an Maschinenkraft machte sich auf dieser Baustelle zum Nachteil der Unternehmung recht bemerkbar. Die anfänglich fehlende großzügige Arbeitseinteilung veranlaßte die Bauverwaltung, zunächst sämtliche Lehrgerüste selbst zu entwerfen und für den zweiten großen Kunstbau ein genaues Arbeitsprogramm aufzustellen.

Im September 1907 wurde mit Ausheben der Baugruben bis auf den Fels für die Widerlager des großen Bogens und im Oktober mit der Mauerung des linksufrigen begonnenen. Nachdem beiderseits das Mauerwerk die Kämpferhöhe erreicht hatte — die Schichten wurden etwa senkrecht zur Drucklinie gesetzt —, wurden die aufsitzenden Endpfeiler der Nebenbögen gleichzeitig mit den anderen Pfeilern im Frühjahr 1908 bis zur Kämpferhöhe der Nebenbögen hochgemauert, indem für jeden Pfeiler ein einseitiges einfaches Arbeitsgerüst hergestellt wurde. Es wäre vorteilhafter gewesen, wie in der Tennetschlucht, für die Pfeilergruppe eines Ufers jeweils ein durchgehendes einseitiges Versetzgerüst aus mehreren, entsprechend dem Baufortschritt aufgesetzten Stockwerken und mit einem Maschinenaufzuge zu erstellen.

Der Mörtel bestand aus 1 R. T.-Zement und 3 R. T.-Sand, die Sichtfläche aus

beliebig hohen, hammerrecht bearbeiteten Schichtsteinen von Granit und die Hintermauerung ebenfalls aus granitnem Bruchstein.

Aus den Pfeilerschäften ragten etwa in Höhe des Bogenmittelpunktes in jede Öffnung 4 Kragsteine hervor, über welchen die Lehrgerüste aufgestellt wurden. Die Lehrgerüste der Nebenbögen waren ähnlich jenen der Tennetschluchtbrücke und werden dort näher beschrieben. Zur Wölbung des einen Bogens am linken Ufer wurden 5, zum anderen 7 Tage gebraucht. Die aus hammerrechten Schichtsteinen bestehenden Wölbsteine wurden von den Kämpfern aus gleichmäßig ohne besondere Vorsichtsmaßnahme versetzt. Aus diesem Grunde und weil die aufgebrachte Scheitelbelastung zu klein war, zeigten sich gegen Wölbschluß und beim Ausrüsten im unteren Bogenviertel Fugenrisse; sie wurden nachträglich ausgegossen. Zwei Wochen nach Gewölbeschluß wurden die Lehrgerüste abgelassen, abgeschlagen und zwischen den rechtsufrigen Pfeilern aufgestellt. Der dritte Bogen hat hier ungleich hohe Kämpfer und erhielt ein besonderes Gerüst. Ende Juli waren auch diese Nebenöffnungen geschlossen, wobei an einem Bogen 5 Tage gewölbt wurde. Die 60 mm überhöhten Lehrgerüstscheitel senkten sich während der Wölbung im Mittel um 20 mm und die Bogenscheitel beim Ausrüsten um 2 mm. Während die Zimmerleute an den Gerüsten für den Hauptbogen arbeiteten, wurden die Stirnmauern auf den Nebenbögen hochgemauert.

Auf einer ebenen Wiese, bei der das Holz liefernden Säge in Wiesenbach, hatte man inzwischen das große Lehrgerüst für den Hauptbogen abgebunden. Am 10. August begann das Aufschlagen und am 28. September stand Lehr- und Versetzgerüst fertig da. Die größte Mühe machte das Aufstellen des aus 30 und 40 cm starken Hölzern bestehenden Unterstockes, wozu zunächst von Pfeiler zu Pfeiler des Lehrgerüstes ein Arbeitsboden hergerichtet werden mußte; aber die Rüstarbeit verlief ohne Unfall.

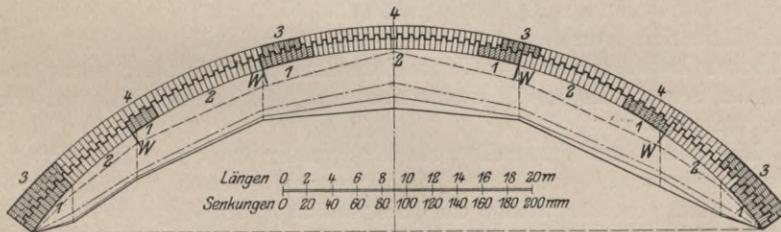


Abb. 39. Darstellung des Wölbvorganges und der Lehrgerüstsenkungen am Hauptbogen bei Langenbrand.

Am 1. Oktober konnte mit der Mauerung des Hauptbogens begonnen werden. Die durchgehenden Läufer und Binderschichten waren im Kämpfer 3 und im Scheitel 2 Steine stark. Der tatsächliche Wölbvorgang ist auf Abb. 39 dargestellt. Von den beiden Kämpfern und den 4 künstlichen Widerlagern W aus konnten die Bogenteile 1 des inneren Ringes versetzt und so eine zweckmäßig verteilte Belastung des Lehrgerüstes erzielt werden. Im zweiten Arbeitsabschnitte wurden die Bogenteile 2 gleichzeitig aufgebracht und schließlich der Ring im Scheitel geschlossen. Aus den auf dem gleichen Bilde aufgezeichneten Senkungen des Lehrgerüstes unter der Auflast der Bogenteile 1 und des ganzen inneren Ringes konnte man deutlich ersehen, daß das Lehrgerüst gegen Bogenmitte stärker belastet werden mußte, um die Lehrgerüstsenkungen im Scheitel zu vergrößern und in ein richtiges Verhältnis zu den Senkungen rechts und links davon zu bringen. Die künstlichen Widerlager hätten etwas mehr gegen Brückenmitte angelegt werden sollen. Diesem Umstande wurde Rechnung getragen, indem das Wölben des äußeren Ringes nur von den Kämpfern und zwei weiteren Stellen aus begonnen wurde, welche über den oberen Bogenteilen 1 lagen. Die Belastung durch diese Bogenteile 3 brachte einen besseren Verlauf der Senkungslinie. Die Auflast der Bogenteile 4 vermehrte die Senkungen nur noch um weniges.

Das Abb. 39 zeigt ferner deutlich, daß das Lehrgerüst durch den geschlossenen inneren Bogenring wesentlich entlastet worden ist. Der Senkungszuwachs beim Zustand 3 und 4 ist an allen 7 Beobachtungspunkten des Lehrgerüstes bedeutend kleiner als der Zuwachs durch die Bogenteile 2.

Die im Bahnhof Langenbrand lagernden Quader für den inneren Ring wurden mit dem Holzkran auf Plattwagen geladen und auf der 60 cm breiten Rollbahn auf das Versetzgerüst über die Verwendungsstelle gefahren; hier wurden sie mit einem der 3 Portalkrane aus Holz auf das Lehrgerüst hinuntergelassen und von den Maurern gleich richtig, aber trocken unter Verwendung von Holzleisten in den Fugen der inneren Leibung und von Keilen in den Fugen der Rückenflächen auf den Schalhölzern versetzt. Zur Erleichterung war die Schichtteilung vom Kämpfer und Scheitel aus auf den Kranzhölzern aufgerissen worden. Eine Scheitellast wurde auf das Lehrgerüst nicht aufgebracht. Nach dem Schluß des 1. Ringes wurde der mit der Maschine gemischte Zementmörtel 1 : 3 in nicht zu feuchtem Zustande in die Fugen eingestampft. Mit Rücksicht auf die vorgerückte Jahreszeit wurden die Quader des äußeren Ringes von den Kämpfern und den oberen künstlichen Widerlagern aus gleichzeitig und sofort in Mörtel versetzt. Da am 3. Dezember der Schlußstein gesetzt wurde, waren 9 Wochen zur ganzen Wölbung gebraucht worden. Wohl kaum die Hälfte dieser Zeit wäre nötig gewesen, wenn man mit der Wölbung eines Ringes nicht eher begonnen hätte, als bis all seine Quader an der Baustelle angeliefert gewesen wären. Bereits am 8. Februar 1909, also vor den jedes Frühjahr eintreffenden Murganschwellungen, wurde das Lehrgerüst abgelassen. Zunächst wurden die Spindeln unter dem Mittelteil vom Scheitel nach beiden Seiten fortschreitend heruntergeschraubt und dann erst die Reststrecken gegen die Kämpfer zu langsam gesenkt. Beim Ausrüsten wie beim Wölben zeigten sich keine Fugenrisse; der Bogenscheitel senkte sich hierbei um 7 mm.

Im April 1909 wurden nach Eintritt warmer Witterung über dem Hauptbogen die Pfeiler und im Mai die Sparbögen vom Versetzgerüst aus hergestellt. Bis Mitte Juli waren auch die Stirnmauern fertig, welche an den äußeren Kämpfern der letzten Sparbögen jeweils eine lotrechte und nach oben durchgehende Trennungsfuge erhielten, weil man hier ein Reißen bei der Bogenscheitelbewegung unter dem Einfluß der Wärme befürchten mußte. In der zweiten Julihälfte 1909 wurden sämtliche Rückflächen des Bauwerks mit einem Zementmörtelglatzstrich versehen und mit Asphaltfilzplatten gedichtet. Gleichzeitig wurden die Abdeckplatten versetzt und das obere Ende der Dichtung darunter geschoben. Zum Schutze der Asphaltfilzplatten wurde zunächst eine Sandschicht und dann erst die Steinbeugung aufgebracht.

Nach 23 Monaten Bauzeit war die Brücke gegen Ende August 1909 fertig. Es waren 1023 cbm Baugrubenaushub und 4354 cbm Mauerwerk geleistet worden; die Kosten einschließlich der Rüstungen, für welche die Unternehmung im Angebot den unzulänglichen Betrag von 6000 M. verlangt hatte, betragen nach der Abrechnung 206 000 M., so daß für einen Kubikmeter Mauerwerk mit allen Nebenkosten 47,52 M., 2,6 mal dem Preise für gewöhnliches Bruchsteinmauerwerk, mit 18,50 M. pro cbm, bezahlt wurde.

**B. 1. Entwurf für das große Lehrgerüst (Abb. 40).** In dem von der Bauverwaltung der Unternehmung vorgeschlagenen ersten Entwurf wurden 4 Binder mit einem Achsabstand von 1,50 m angenommen, von denen jeder aus einem Unter-, Mittel- und Oberstock bestand. Als Stützpunkte waren außer den Kragsteinen an jedem Hauptwiderlager 3 Pfeiler im Murgbett vorgesehen, welchen die Ständer und Streben der einzelnen Stockwerke die Last auf kürzestem Wege zuleiten sollten. Der Unterstock wurde aus 2 großen Mittel- und 2 kleinen Seitensprengwerken gebildet, deren Streben nicht zu flach geneigt wurden und deren wagerechter Stab mit der durchgehenden Längsschwelle verschraubt und verdübelt und nach oben aufgehängt wurde. Auf der Längsschwelle standen die Ausrüstungsspindeln von  $46 + 20 = 66$  cm Höhe. Auf einer zweiten Längsschwelle erhob sich der Mittelstock und über dessen oberer Ausgleichsschwelle der Oberstock. Jeder Binder war ein in sich abgeschlossenes Tragwerk, das durch ausreichenden Querverband mit den anderen die nötige Seitensteifigkeit erhielt, aber mit Rücksicht auf leichtes Rüsten und die unvermeidlichen kleinen Höhenunterschiede kein Tragglied mit den andern Bindern gemeinsam hatte. Die Streben und Ständer stützten mit besonderen Sattelhölzern die Kranzhölzer, welche mit ihnen verschraubt und verdübelt waren. Zu jedem Dübel gehören zwei Schrauben, welche in der Abb. 40 nicht angedeutet sind.

Für die Berechnung wurde dem Lehrgerüst die ganze Gewölbelaast, mit Rücksicht auf Stoßwirkung sogar noch um  $\frac{1}{4}$  erhöht, zugemutet, obwohl durch den zuerst geschlossenen inneren Quadering eine Entlastung zu erwarten war. Jedem Ständer und jeder Strebe des Oberstockes wurde die ihm natürlicher Weise zukommende Last, wenn nötig nach dem

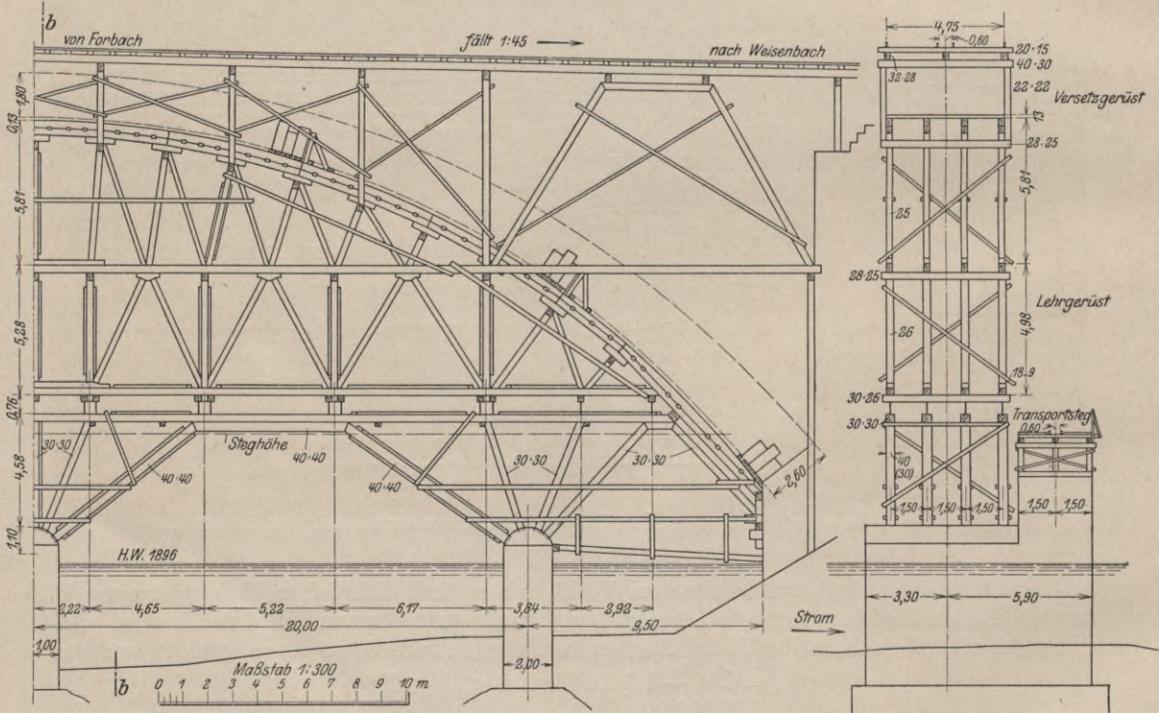


Schalholz . . . . .	13 · 13 cm
Kranzholz . . . . .	20 · 45 „
Oberstock . . . . .	20 · 20 „
Mittelstock . . . . .	25 · 25 „
Unterstock . . . . .	30 · 30 u. 40 · 40 cm
Zangen, Kreuze . . . . .	2 · 20 · 10 „

Hiernach berechnet sich ein Zeugaufwand für den ersten Entwurf des Lehrgerütes:

Schalholz . . . . .	27,04 cbm
Kantholz . . . . .	196,50 „
Hartholz . . . . .	14,98 „
Zusammen Holz . . . . .	<u>238,52 „</u>
Eisen ohne Spindeln . . . . .	5280 kg

Für spätere Vergleiche wurde der Aufwand für folgende Einheiten berechnet: des überwölbten Raumes, der überwölbten Grundfläche, des Gewölbeinhaltes, des Produktes aus Grundfläche mal Spannweite und endlich des Produktes aus Grundfläche mal Spannweite mal Höhe. Die 3 ersten Einheiten sind die üblichen; die 4. und 5. tragen dem Umstand Rechnung, daß der Zeugaufwand etwa mit dem Quadrate der Spannweite eines Bogens wächst. Der Raum wurde nur soweit gemessen, als er über den Kämpfern liegt. Die einzelnen Werte sind 2914 m<sup>3</sup>, 321 m<sup>2</sup>, 760 m<sup>3</sup>, 18 915 m<sup>3</sup>, 278 996 m<sup>4</sup>; die Einheitsaufwendungen sind in der Liste 39 enthalten.



Ansicht. Querschnitt b—b.  
 Abb. 41. Lehr- und Versatzgerüst für den Hauptbogen bei Langenbrand. Ausführungsentwurf.

**C. Ausführungsentwurf für das große Lehrgerüst (Abb. 41, 42).** Im Laufe von Verhandlungen reichte die Unternehmung eine Abänderung ein, welche die Stellung der Pfeiler, Anzahl der Binder und Einteilung der Stockwerke beibehielt, aber die Feldweiten im Binder verkleinerte und vor allem das Kranzholz mit Pfetten stützte, welche über alle vier Binder gingen. Sämtliche Streben wurden nach dem Mittelpunkt gerichtet und erhielten Hilfsstreben. Die Hauptstreben der unteren Sprengwerke lagen sehr flach; die rechnerische

Nachprüfung ergab aber noch eine genügende Standsicherheit, und das Gerüst wurde zur Ausführung genehmigt und hat sich bewährt.

Das Kranzholz lagerte auf eichenen Sattelhölzern auf und war mit ihnen verschraubt. Die darunterliegenden Pfetten waren soweit verlängert worden, daß sie noch beiderseits einen Ständer des Versetzgerüsts über dem Bogen tragen konnten. Weil sie über alle vier Binder hindurch liefen, mußte beim Rüsten auf genaue Höhenlage geachtet werden, und es war nicht möglich, die unvermeidlichen kleinen Höhenfehler der Binder erst kurz vor dem Wölben am Schalholz auszugleichen, sondern man mußte sie mit vieler Mühe sofort beim Rüsten zu beseitigen versuchen. Die mittleren 3 Ständer saßen im Ober- und Mittelstock auf je einer Eichenschwelle auf, welche mit dem Längsbalken verschraubt war. Ähnlich dem ersten Entwurf waren Hilfszangen zur Verkürzung der Knicklängen eingezogen und ein starker Querverband aus Doppelzangen angeordnet worden. Auch der einseitige Schub wurde durch Druckstreben dem Hauptwiderlager zugeleitet.

Über jedem Ständer des Mittelstockes wurde ein Paar Schraubenspindeln von 30 t Tragkraft vorgesehen, welche bei 20 cm Hubhöhe in niedergeschraubtem Zustande 46 cm hoch waren und auf 56 cm eingestellt wurden. Dem Lehrgerüstscheitel wurden 15 cm Überhöhung gegeben, welche parabolisch nach den Kämpfern abnahm.

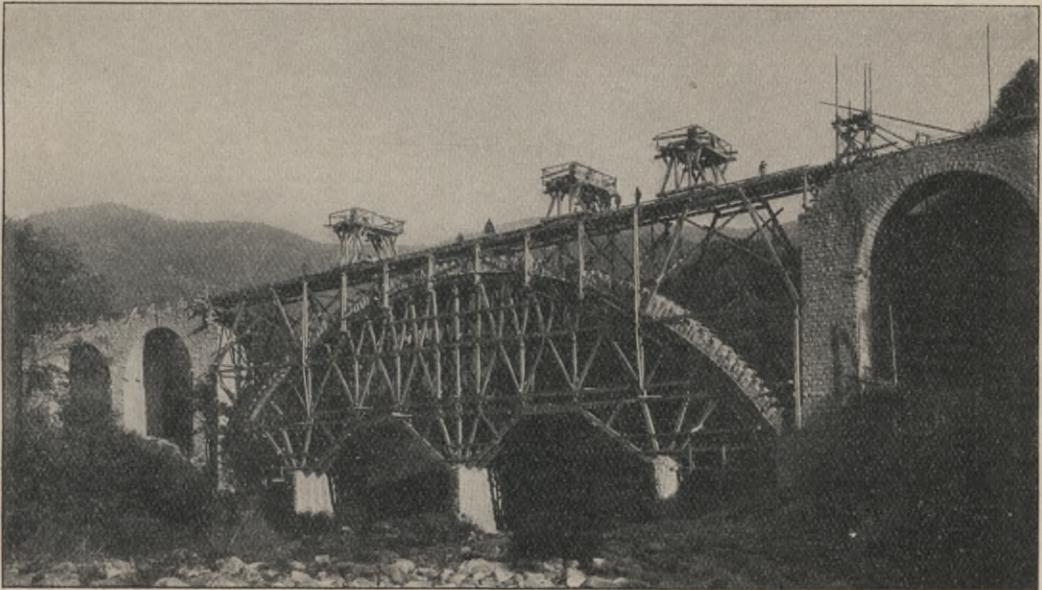


Abb. 42. Der Talübergang bei Langenbrand nach dem Schluß des ersten Ringes. Blick flußaufwärts.

Die Festigkeitsberechnung hatte bei gleicher Grundlage den gleichen Gang wie beim ersten Entwurf und ergab folgende Abmessungen:

Schalholz . . . . .	13 · 13 cm
Kranzholz . . . . .	26 · 56 und 26 · 65 cm
Tragstreben im Oberstock . . . . .	25 · 20, 25 · 25, 25 · 28 cm
Hilfsstreben im „ . . . . .	25 · 20 cm
Längsschwelle „ „ . . . . .	26 · 30 „
Streben im Mittelstock . . . . .	26 · 26, 26 · 24 cm
Längsschwelle „ „ . . . . .	26 · 30 cm
„ „ Unterstock . . . . .	40 · 40 „
Ständer „ „ . . . . .	30 · 30 „
Streben „ „ . . . . .	30 · 30, 40 · 40 cm
Hilfszangen und Kreuze . . . . .	2 · 9 · 18 cm

Die größte Traglast eines Spindelpaares betrug 45 t, die größte Druckspannung im Außenpfeiler 9,6 und im mittleren 6,2 kg/cm<sup>2</sup>; die größte Bodenpressung in den Außenpfeilern, die auf Fels standen, war 4,8 und im Mittelpfeiler, der auf Geröll stand, 3,8 kg/cm<sup>2</sup>. Die Standsicherheit gegen Wind von 250 kg/qm wurde sowohl für den beweglichen Ober- teil, von dessen voller umrüsteter Sichtfläche 31,2% Windfläche ist, als auch für das ganze Gerüst über den Pfeilern, von dessen ganzer umrüsteter Fläche nur 18,5% vom Wind getroffen werden, nachgewiesen und beim unbelasteten Zustande eine Sicherheit von 2,2 und 1,5 berechnet.

Bei dem zweiten Entwurf ergab sich folgender Aufwand:

Schalholz . . . . .	27,04 cbm
Kantholz . . . . .	238,54 „
Hartholz . . . . .	18,61 „
Zusammen Holz . . . . .	<u>284,19 cbm</u>
Eisen ohne Spindeln . . . . .	5090 kg

Es wurden 45 cbm oder 18% mehr Holz als beim ersten Entwurf gebraucht. Der Mehraufwand erklärt sich hauptsächlich aus dem Einziehen überflüssiger Hilfsstreben. Der Aufwand für die früheren Einheiten steht in Liste 39. Da die Sicherheit in hohem Maße von den guten Zustand der Schrauben abhing, wurde jeder einzelne Schraubenkopf vor dem Einziehen der Schrauben geprüft und jede Schraubenmutter vor dem Wölben nachgezogen.

An Arbeit wurde im ganzen verwendet für:

Abbinden . . . . .	450 Tagschichten
Aufstellen . . . . .	390 „
Abrüsten . . . . .	200 „
Zusammen . . . . .	<u>1040 Tagschichten</u>

Der auf die Einheiten bezogene Arbeitsaufwand ist in Liste 36 enthalten. Eine Tag- schicht umfaßt ein für allemal 11 Stunden, worin eine Stunde Mittagspause und je ½ Stunde Frühstück und Vesperpause enthalten ist.

**D. Das Versetzgerüst.** Das Versetzgerüst hatte in Höhe der künftigen Bahn ein 60 cm breites Gleis für die Rollbahn und ein 475 cm breites für den Kran zu tragen. Die 20 · 15 cm starken Gleisschwellen lagen auf 3 Längsbalken 28 · 32 und diese wieder auf Querschwellen 30 · 30 bzw. 30 · 40, welche beiderseits mit einem Ständer 22 · 22 bzw. 22 · 24 cm auf die auskragenden Pfetten des Lehrgerüsts abgestützt waren. In Kämpfernähe wurde die Fahr- bahn von einem 13 m weit gespannten Sprengwerk getragen, dessen Streben 25 · 30 cm stark waren (Abb. 41, S. 76).

Die einfache Berechnung nahm eine bewegliche Last von 4 mit je einem 1,6 t schweren Wölbquader beladenen Plattwagen von 1,75 m Länge und eines Kranes von 3,3 t an.

Dem Holz wurde eine Druckspannung bis zu 80 kg/cm<sup>2</sup> zugemutet. Das Gerüst wurde ganz aus Kantholz hergestellt und verbrauchte 68,4 cbm Holz und 360 kg Eisen. Jeder Aufbau der 3 Portalkrane verschlang 5,2 cbm Holz und 28 kg Eisen. Das Versetzgerüst wurde in 16 Arbeitstagen aufgeschlagen und erforderte folgenden Arbeitsaufwand:

Abbinden . . . . .	62 Tagschichten
Aufstellen . . . . .	132 „
Abrüsten . . . . .	55 „
Zusammen . . . . .	<u>249 Tagschichten</u>

Der auf verschiedene Einheiten bezogene Aufwand ist in Liste 40, S. 99 enthalten.

### 3. Die Tennetschluchtbrücke.

#### I. Die Bauausführung mit Bauprogramm.

Etwa 1,5 km oberhalb des Talüberganges bei Langenbrand übersetzt die Bahnlinie die Tennetschlucht in einem Bogen von 220 m Halbmesser und in der Steigung 1 : 53 mit steinerner Brücke, die aus 9 Bögen von je 16 m Spannweite besteht, eine Gesamtlänge von 183,30 m besitzt und mit ihrer Fahrbahn 27 m über die Murgsohle ansteigt. Die Pfeiler des Bauwerkes haben auf der dem Mittelpunkte abgewendeten Bergseite einen Anzug von 15 : 1, auf den 3 anderen Seiten einen solchen von 20 : 1 bis zum Beginn der Bogenwölbung,



Abb. 43. Die Tennetschluchtbrücke. Blick flußaufwärts.

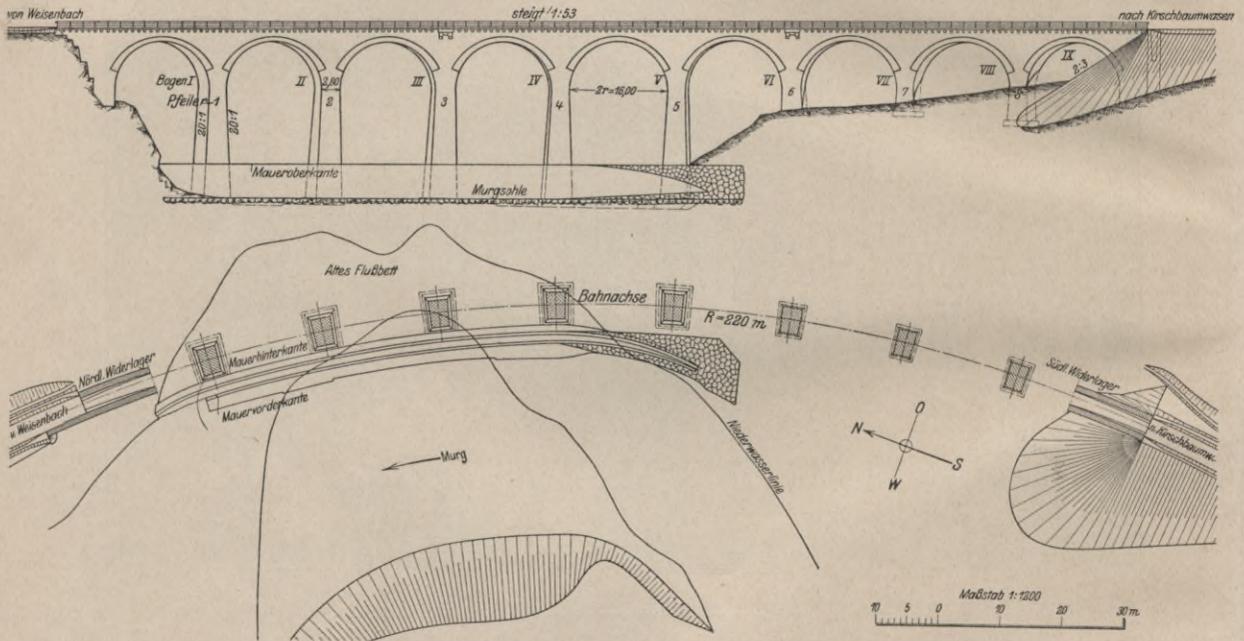
von wo die beiden Stirnflächen senkrecht sind und einen gegenseitigen Abstand von 4,40 m halten. Die geringste Pfeilerstärke mißt in der Brückenrichtung 2,80 m. Alle Pfeiler und die beiden Endwiderlager sind auf gesunden Fels gegründet. Das Pfeilermauerwerk besteht aus Granitbruchsteinen, die in Zementmörtel 1 : 3 gebettet wurden. Das Gewölbe, dessen innere Leibung nach einem Kreisbogen von 8,00 m Halbmesser gekrümmt und aus dem gleichen Bruchsteinmauerwerk wie die Pfeiler gebildet ist, ist am Scheitel 0,80 m, an den Kämpfern 1,28 und 1,25 m stark. Die Kämpfer liegen der Bahnneigung entsprechend verschieden hoch, 2,92 und 3,20 m über dem Kreismittelpunkt.

Die abgeschlossene Lage der Baustelle in der steilen von der Murg durchfluteten Schlucht, 40 m unterhalb der auf dem rechten Ufer liegenden Landstraße gestaltete die Bauausführung schwierig (Abb. 38). Schon die Absteckung der Pfeilerachspunkte war nicht einfach, da Längenmessungen in der Bahnachse durch die steile Felswand am Nordende unmöglich waren und durch eine Triangulation ersetzt werden mußten, welche 2 geschickt das Gelände des flachen linken Ufers ausnützende Basen zur Grundlage hatte.

Begünstigt durch den niederen Wasserstand der Murg gelang es, ohne große Kosten den Fluß gegen das Innenufer zu verlegen und mitten im alten Flußbett die neue Ufermauer — zeitweilig unter Verwendung einer Lokomobile zur Wasserhaltung — herzustellen. Hinter ihr konnten die Arbeitsplätze sicher angelegt und auch die Pfeilerbaugruben bis auf

den Fels ausgeschachtet werden, ohne von den plötzlich eintretenden Anschwellungen gefährdet zu sein. Die Versorgung der Baustelle mit Baustoffen wurde dadurch etwas erleichtert, daß ein Teil des Sandes aus dem Flußbett und ein großer Teil der Bruchsteine und Quader aus den dort liegenden Granitwacken oder aus Brüchen gewonnen werden konnte, welche wenig oberhalb besonders auf dem linken Ufer angelegt wurden. Der Zement und ein Teil des Sandes wurde zwei Stunden weit von Weisenbach auf der Landstraße heraufgeschafft, da die Dienstbahn noch nicht bis hierher vorgestreckt werden konnte. Was an Steinen noch fehlte, wurde auf der Landstraße von den Brüchen bei Forbach her befördert. Ein zweigleisiger Bremsberg beförderte in 2 Minuten Fahrzeit 3 t Nutzlast von der Landstraße zu dem Lagerplatz am Fuß der Pfeiler auf einer 78 m langen Fahrbahn mit 82% Gefälle. An seinem Endpunkte war das Sandlager und die Zementbude angelegt und die Mörtelmischmaschine aufgestellt, welche mit Dampfkraft betrieben wurde und gute Dienste leistete. Die Maschinenkraft reichte gerade noch für den nahe dabei gelegenen Aufzug am Versetzgerüst und eine Pumpe aus, welche das Mörtelwasser aus der Murg schöpfte. (Abb. 45, S. 81.)

## Ansicht.



## Grundriß.

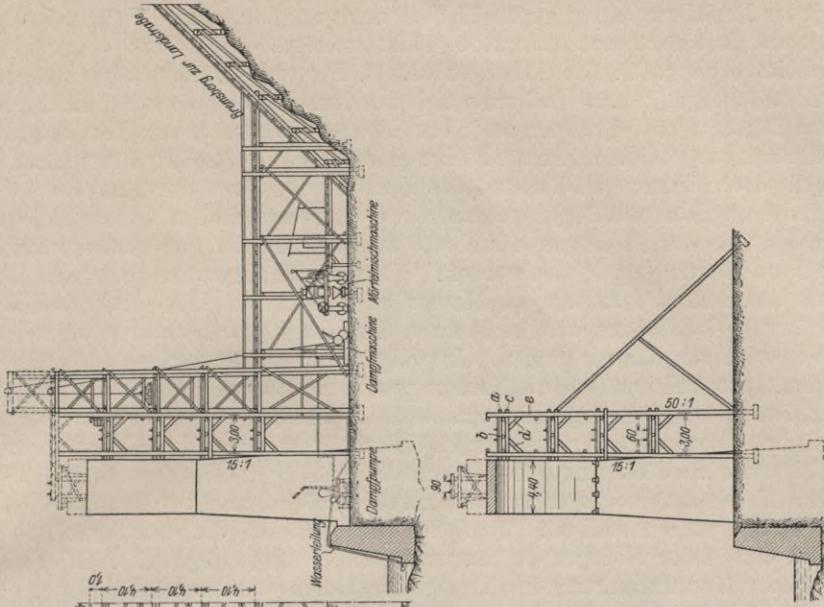
Abb. 44. Die Tennetschluchtbrücke.

Zur Befuhr der Steine und des Mörtels für Pfeiler und Gewölbe ist ein Versetzgerüst einfachster Art, das aus vier Stockwerken gebildet war, auf der Bergseite des Bauwerks aufgestellt worden. Zwei Reihen, etwa 300 cm voneinander abstehende Ständer mit Beiständern stellen das Haupttragelement dar. Zu ihrer Verbindung und als Auflager für drei Längsträger mit den daraufliegenden Schwellen *a* waren die Querträger *c* eingezogen. Auf die Schwellen sind die Schienen des Gleises und Gedeckdielen aufgenagelt worden. Auf jedem Stockwerk war ein Gleis von 60 cm Spurweite, das durch eine Drehscheibe mit dem Aufzug in Verbindung stand, im untersten Stockwerk außerdem Anschluß an den Bremsberg und im obersten an das Baugleis der freien Strecke hatte.

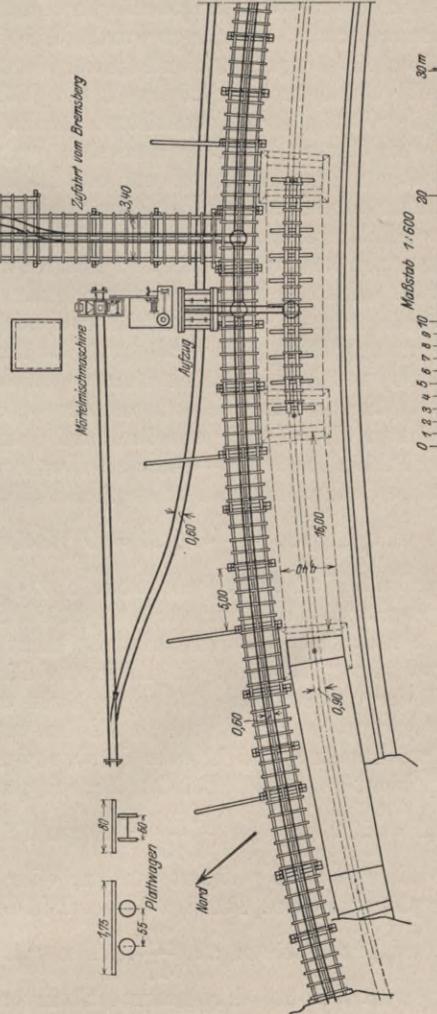
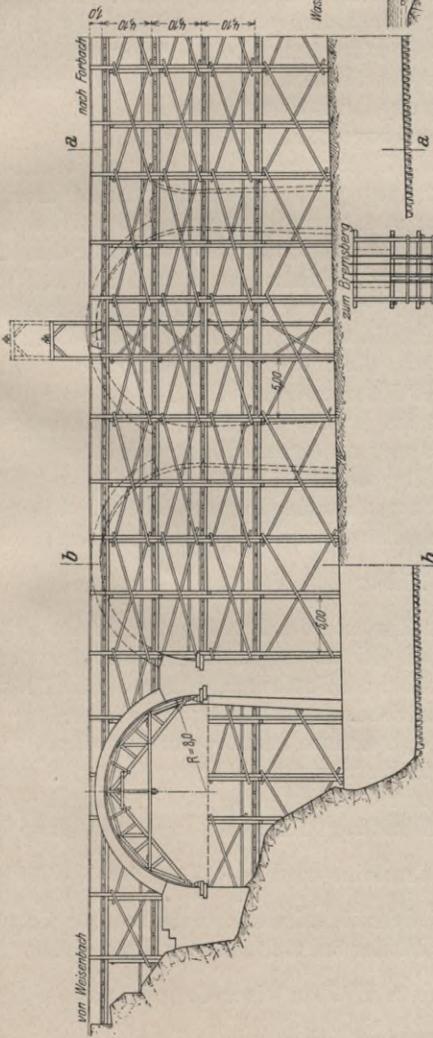
Die Lehrgerüste sollten über den in Höhe des Bogenmittelpunktes in den Pfeilerschäften eingemauerten Kragsteinen über die 16 m jeder Öffnung freitragend aufgestellt werden.

Als die Maurerarbeit schon einige Zeit im Gange war, wurde mit der Unternehmung ein Bauprogramm vereinbart, das einen planmäßigen und raschen Arbeitsfortgang im Bau dieser, wegen ihrer Anlage und der Geländebeschaffenheit schwierigen Brücke gewährleisten

Querschnitt a—a.



Ansicht.



Querschnitt b—b.

Draufsicht.  
Abb. 45. Die Baueinrichtung an der Tennetschluchtbrücke.

sollte und in jeder Beziehung einen guten Einfluß auch ausgeübt hat. Es wurde dreierlei darin festgelegt und in einer besonderen Abb. 46 zeichnerisch dargestellt:

1. Der Arbeitsvorgang. 2. Die Arbeiterzahl. 3. Der wöchentliche Steinbedarf.

Für den Arbeitsvorgang entschloß man sich zur Anschaffung von drei Lehrgerüsten, so daß die neun Bögen in drei Gruppen zu je drei Bögen gewölbt werden konnten und nur einer der gleich stark ausgebildeten, hohen Pfeiler einen einseitigen Schub auszuhalten hatte. Zuerst sollten die drei niederen Pfeiler und das Endwiderlager auf der Südseite und ohne Unterbrechung die zugehörigen Bögen gemauert werden. Inzwischen konnten die bereits begonnenen Baugruben der Pfeiler im Flußbette ausgehoben und der umfangreiche Felsabtrag für das Nordwiderlager geleistet werden. Während die Zimmerleute auf der Südseite die Lehrgerüste aufstellten, konnten die Maurer am nördlichen Widerlager und an den drei hohen Pfeilern 1—3 arbeiten, welche die zweite Arbeitsgruppe bildeten und wohin nach Schluß der Südgruppe alle Maurer gingen. Im allgemeinen sollte immer an drei Pfeilern gearbeitet werden. Erst nachdem auch die Nordgruppe bis zur Kämpferhöhe fertig war, wurden die Pfeiler 4 und 5 auch hochgetrieben, deren unterer Teil zu Anfang wegen der rasch beendigten Baugrube schon hatte gemauert werden können. Hierbei trat jedoch eine Unterbrechung dadurch ein, daß inzwischen die Lehrgerüste in den drei südlichen Öffnungen ausgerüstet und über den drei nördlichen aufgeschlagen werden und sämtliche Maurer auf ihnen die drei Nordbögen I—III rasch wölben sollten. Zum Schlusse wurden die mittleren Bögen IV, V, VI mit Hilfe der in der Nordgruppe ausgerüsteten Gerüste hergestellt. Hierbei ergab sich ein zwingender Zusammenhang in der Arbeit, indem angenommen wurde, daß ein Lehrgerüst in einer Woche aufgeschlagen und ein Gewölbe in 2 Wochen fertig werden konnte, und indem andererseits verlangt wurde, daß ein Gewölbe im allgemeinen erst vier Wochen nach Wölbschluß ausgerüstet und an der Nordgruppe erst drei Wochen nach Fertigstellung des einseitig beanspruchten Pfeilers 3 mit Wölben begonnen werden durfte.

Um die richtige Arbeiterzahl und daraus den Zeitaufwand für die verschiedenen Bauabschnitte zu finden, brauchte man sich nur zu vergegenwärtigen, daß die Maurer wegen des einseitigen Versetzgerüstes auf den Pfeilern stehen mußten, und daß auf etwa 2 qm Querschnittfläche ein Maurer noch ungehindert arbeiten konnte. So waren für den unteren Teil eines Pfeilers 8 und für die Kämpfergegend etwa 6 Maurer zu rechnen, welche ständig Steine versetzen konnten, während 2 Maurer ab und zu gingen, um Steine auszusuchen und zuzurichten. Aus der Summe der gleichzeitig in Mauerung stehenden Pfeilerquerschnitte war hiernach leicht die Maurerzahl und auch die Zahl der Hilfsarbeiter zu bestimmen, da erfahrungsgemäß bei einem solchen Bau für 10 Maurer ebensoviele Handlanger und etwa 6 Steinhauer, welche die Schichtsteine entweder im Bruch oder am Lagerplatz bearbeiten, gebraucht werden. Als wöchentliche Arbeitsleistung an einem Pfeiler wurden 60 cbm angesetzt, entsprechend einer durchschnittlichen Tagesleistung von 1 cbm für den Maurer. Ein hoher Pfeiler hatte 430—440 cbm Mauerwerk und konnte in neun Arbeitswochen hochgetrieben werden, wenn man einen Sicherheitszuschlag von 25% für schlechte Witterung,

Feiertage u. dgl. gab.  $\frac{435}{60} \cdot 1,25 = 9$  Wochen. Für das Versetzen der 85 cbm Gewölbesteine wurden 2 Wochen angenommen. Aus dem Zustand des Bauwerks z. Z. des Entwurfs des Bauprogramms, aus der vorhin geschilderten Gliederung in drei Arbeitsgruppen, aus der eben berechneten Arbeiterzahl und dem zugehörigen Fortschritte konnte das Programm zeichnerisch festgelegt und die Linie des Maurerbedarfs aufgetragen werden.

Auch der wöchentliche Bedarf an Stein u. dgl. konnte leicht vorausberechnet werden. Nach der geometrischen Form der Pfeiler waren im unteren Teil für 24 cbm Mauerwerk 7 cbm Schichtsteine und 17 cbm Bruchsteine zur Ausmauerung nötig. Bei 10% Abfall bei den Schicht- und 25% bei den Bruchsteinen mußten für einen Pfeiler in einer Woche  $\frac{60}{24} \cdot 7 \cdot 1,1 = 20$  cbm oder  $\frac{20}{0,45} = 44$  qm Schichtsteine und  $\frac{60}{24} \cdot 17 \cdot 1,25 = 53$  cbm Bruchsteine an die Baustelle geliefert werden, oder jederzeit mindestens ein solcher Vorrat auf den Lagerplätzen liegen. Für den oberen Teil der Pfeiler änderte sich das Verhältnis zwischen Schicht- und Bruchsteinen zu  $\frac{25}{47}$ . Ehe mit dem Wölben einer Gruppe von drei Bögen begonnen wurde, sollte der gesamte Steinvorrat angeliefert sein. Somit konnte endlich



auch die Linie gezeichnet werden, welche den jederzeit auf der Baustelle lagernden Steinvorrat anzeigt.

Wurden nach Ausweis des Programms bei der Arbeit an Pfeiler oder Gewölbe Maurer und Handlanger entbehrlich, so konnten sie bei der Aufmauerung über den Gewölben zuerst der Süd- und dann der Nordgruppe verwendet werden, so daß der durch den Höchstbedarf sich ergebende Arbeiterstand auch längere Zeit beim Bauwerk beschäftigt werden konnte.

Ende März war mit der Mauerung begonnen worden, und nach dem Programm hätten sämtliche Bögen Ende Oktober geschlossen sein sollen. Nur vom Schluß der Gewölbe hing das Verlegen des durchgehenden Baugleises und damit der Fortgang der anderen Bauarbeiten ab, und es wurde für die Übermauerung der Gewölbe daher nichts weiter bestimmt, als daß sie bis zum Vertragstermin beendet sein sollte.

Es war nun interessant, während des Baues an jedem Wochenende die Meereshöhe der Pfeiler und die tatsächliche Leistung festzustellen und in das Programm einzutragen (Abb. 46); es zeigte sich hierdurch sofort ein etwaiger Vorsprung oder Rückstand der Arbeit. Auch wurden genaue Aufzeichnungen in Abb. 46 über die Arbeiterzahl und den Mörtelverbrauch gemacht und so ermittelt, daß von 3846 Maurerschichten 3617 cbm Gesamtmauerwerk, also, ziemlich entsprechend der Annahme, von einem Maurer 0,94 cbm im Tag geleistet wurden. Die Arbeitseinteilung und vor allem der Endtermin für die letzte Gewölbegruppe wurde tatsächlich eingehalten; innerhalb jeder Gruppe ergaben sich Verschiebungen, welche im Abb. 46 mit dünnen Linien eingezeichnet sind.

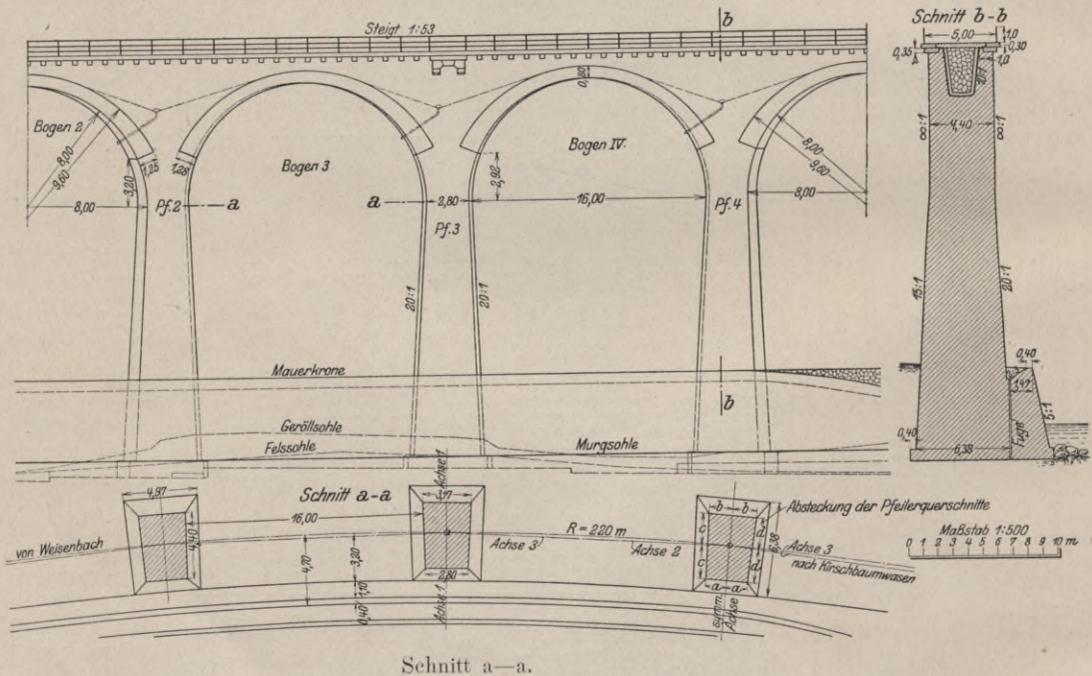


Abb. 47. Ansicht der drei höchsten Pfeiler der Tennetschluchtbrücke.

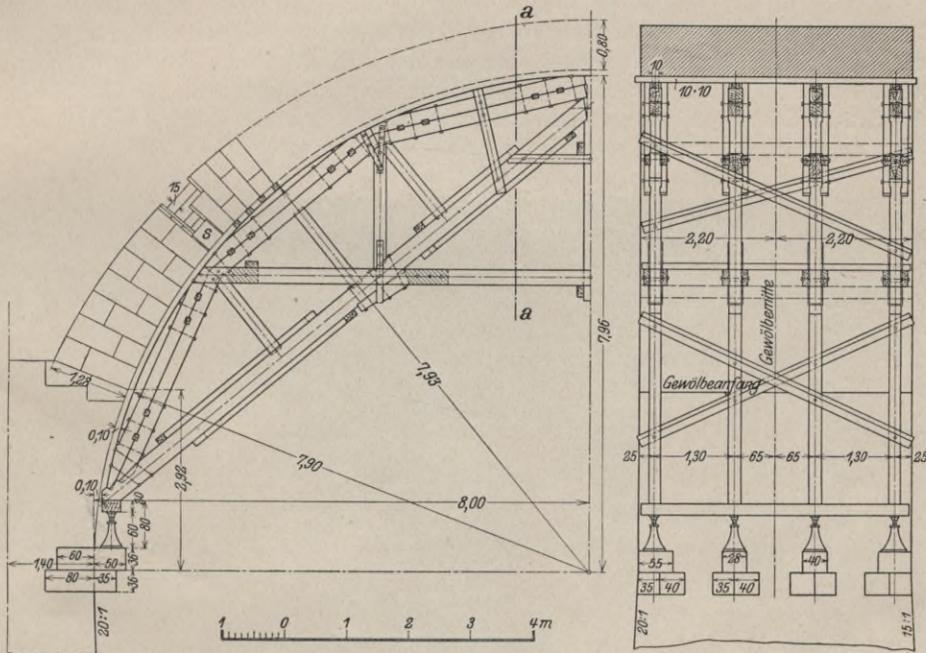
Um die im Querschnitt trapezförmigen Pfeiler mit den verschiedenen Stirnneigungen richtig hochzubringen, wurden auf dem flachen linken Ufer für jeden Pfeiler 2 mit dem Pfeilerachspunkt auf dem gleichen Kreishalbmesser liegende Punkte geschlagen und am Pfeilerfuß die Richtung deutlich im Mauerwerk eingespißt. Der Theodolit wurde auf dem hintersten Punkte aufgestellt und sodann die Symmetriachse 1 am obersten Schichtenkranz frisch angegeben (Abb. 47, Grundriß). Um richtige Querabmessungen zu erhalten, mußten bei 2 benachbarten Pfeilern immer auf dem einen Pfeiler der Achspunkt und beim anderen möglichst hoch oben auf der zugewendeten Sichtfläche ein Einrieb vorhanden sein, wodurch die Verbindungslinie 2, 3 der Achspunkte bestimmt war. Für jeden Meter Höhe

wurden die Maße a, b, c, d einer Liste entnommen und von den drei Achsen 1, 2, 3 eines Pfeilers aus wagrecht angetragen und darnach die Ecken frisch angesetzt. Für einen Pfeiler wurden 8—9 Wochen wirkliche Arbeitszeit gebraucht.

Das Aufschlagen eines Lehrgerüsts erforderte im Mittel 5 Tage und wurde durch die Kragsteine wesentlich erleichtert, da man über gegenüberliegende Kragsteine einer Öffnung vom Pfeilerhaupte Streckbalken legen und mit Dielen einen Arbeitsboden schaffen konnte. Darauf wurden die beiderseitigen Bogenschwellen gelegt und vorübergehend abgestützt; dann die 4 Paare Hauptstreben samt Hängesäule und wagerechter Doppelzange aufgestellt, wobei man mit dem flußseitigen Binder begann und vom Pfeilerhaupt und Arbeitsboden aus arbeitete. Zwischen die unteren Strebenstirnen und das Mauerwerk wurden Keile und Eisenbleche eingezogen, welche das Ausrüsten erleichterten. Die Streben erhielten sogleich ihren Querverband und trugen mit ihren wagerechten Doppelzangen einen zweiten Arbeitsboden, von dem aus die Kranzhölzer u. s. f. eingebaut werden konnten. Beim Abrüsten wurden die gleichen Hilfsböden benutzt. Nachdem die Schraubenspindeln aufgestellt waren, wurden die Binder kurz vor dem Wölben in ihre richtige Höhenlage gebracht; bei 6 cm Überhöhung des Binderscheitels waren die Spindeln mit 20 cm Hubhöhe auf 60 cm Gesamthöhe eingestellt. Um die Seitensteifigkeit des Gerüsts zu erhöhen, wurden zuerst am

Ansicht. Darstellung des Wölbvorganges.

Querschnitt a—a.



Die trocken versetzte Schicht ist mit S bezeichnet.

Abb. 48. Das Lehrgerüst der Tennetschluchtbrücke.

Kämpfer 4 Schichten versetzt und erst dann im Scheitel 2—3 Lagen Wölbsteine als Auflast aufgebracht. Nach weiteren 3 Schichten wurde die 8. Schicht trocken und nur in einer Steinstärke versetzt (vgl. Abb. 48). In rascher Folge wurde hierauf gegen den Scheitel weitergewölbt, wobei die dort lagernden Wölbsteine verwendet, und dadurch die Scheitellasten allmählich verkleinert wurden. Gegen Wölbschluß wurden die Holzstempel, welche die vollversetzte 10. Schicht trugen, spannungslos und konnten entfernt werden. Nach Versetzung des Schlußsteines wurden die leeren Lagerfugen der 8. Schicht mit Mörtel vollgestampft und beiderseits die Gewölbücken geschlossen. Der Zementmörtel 1 : 3 wurde so steif angemacht, daß er sich in die Fugen einstampfen ließ, und wurde durch das Schalholz unter der Lager- und das Fugenholz unter der Stoßfuge vor dem Auslaufen bewahrt. Das frische Mauerwerk wurde abgedeckt und viermal im Tag begossen, um ein rasches Ver-

denken des Mörtelwassers zu verhindern und ein langsames Abbinden und damit eine große Festigkeit des Mörtels zu erzielen.

Die südliche Gewölbegruppe war wie bei Langenbrand ohne die trockene Schicht hergestellt worden, und es wurden während und nach der Mauerung bei allen 3 Bögen 1—2 m über dem Kämpfer Risse im Fugenmörtel beobachtet; die 6 anderen Gewölbe blieben jedoch ohne Fehler. Um die Scheitelbewegungen zu beobachten, wurde an jedem Morgen die Meereshöhe eines jeden Binders und der Bogenschwelle gemessen, und aus dem Unterschied beider Änderungen die Zusammenpressung des Lehrgerüsts gefunden. Diese Verkleinerung des Bogenpfalles, welche zum Teil eine Folge des festeren Schlusses der Holzverbindungen unter der Einwirkung der wachsenden Auflast, zum Teil aber auch elastischer Natur war, wird in der Reihenfolge, in der sie gefunden wurde, in Millimeter angegeben.

Liste 33.

Bogen	9	8	7	1	2	3	4	5	6
Binder 1 . . . . .	20	39	10	38	16	7	59	23	16
„ 2 . . . . .	16	48	3	42	22	14	32	22	15
„ 3 . . . . .	22	64	0	42	26	16	34	19	18
„ 4 . . . . .	23	73	—7	44	16	11	29	17	13
Mittel aus 1—4 . . . . .	20	56	2	42	20	12	39	18	16

Das Mittel der 36 Beobachtungen der Scheitelsenkung eines Lehrgerüstbinders ist 25 mm. Ungleichmäßige Bewegungen der einzelnen Binder eines Bogens waren nur in Scheitelnähe von Einfluß und wurden am Schalholz leicht ausgeglichen. Die Gewölbe hatten beim Ausrüsten, das wegen des vorzüglich erhärteten Mörtels bereits nach 3 Wochen erfolgte, keine Scheitelsenkung; nur einmal wurden 2 mm beobachtet.



Abb. 49. Ansicht der Tennetschluchtbrücke während der Arbeit an der zweiten Wölbgruppe nach Schluß der Scheitel aber vor Schluß der achten Schichten. Die Arbeitsbögen für die Lehrgerüste liegen noch auf den Kragsteinen.

Der tatsächliche Aufwand an Arbeit und Mörtel für den Kubikmeter Gewölbemauerwerk beträgt als Mittel der hier in Liste 34 wiedergegebenen neun Beobachtungen 0,93 Maurerschicht, 0,265 cbm Zementmörtel oder 121 kg Zement.

Liste 34.

Bogen	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Maurerschicht . . . . .	0,85	0,90	0,78	1,09	0,97	1,21	0,79	0,80	1,00
Mörtel cbm . . . . .	0,240	0,236	0,240	0,256	0,256	0,256	0,275	0,313	0,315
Zement kg . . . . .	114	113	114	112	112	112	125	142	144

An dem hohen Pfeiler 3, der während der Arbeit an der nördlichen Bogengruppe einseitigen Schub auszuhalten hatte, waren die Spannungen unter der Last des eingerüsteten Bogens III zu 7,5 Druck und 0,4 kg/cm<sup>2</sup> Zug berechnet worden. Die Bewegung des Pfeilerhauptes wurde sorgfältig gemessen, und da man ein Mitgehen der Pfeiler 1 und 2 vermutete, hatte man auch bei ihnen oben mitten in der flußseitigen wagrechten Kante einen wagrechten Maßstab angebracht und mit einem Theodolit, der jeweils auf dem zugehörigen linksufrigen Punkte der Pfeilerachse stand, den Ausschlag gemessen. Die sorgfältigen Messungen ergaben deutlich eine Bewegung der Pfeilerköpfe, welche mit dem Fortschritt der Gewölbemauerung zunahm; sie stehen als Millimeter in Liste 35.

Liste 35.

	Tag	Ausschlag von Pfeiler		
		1	2	3
Lehrgerüst ohne Scheitellast, 0 Schichten versetzt . . . .	3. IX.	0	0	0
„ mit teilweiser Scheitellast, 4 Schichten versetzt	7. IX.	1	1	4
„ „ ganzer „ 8 „ . .	8. IX.	1	1	5
„ „ teilweiser „ 12 „ . .	9. IX.	1	1	5
Gewölbe geschlossen . . . . .	14. IX.	1,5	1	5
Bogen I und II ausgerüstet . . . . .	3. X.	2,5	—	5
„ III „ . . . . .	10. X.	2,5	—	6

Ehe man den Bogen III ausrüstete, hatte man Bogen I und II schon ausgerüstet, die Gerüste in Bogen IV und V aufgestellt und den Scheitel von V belastet. Durch diese Maßnahme wurde die Pfeilerbewegung beim Ausrüsten im Bogen III auf 1 mm heruntergedrückt. Das Mauerwerk hatte inzwischen neun Wochen Zeit zum Erhärten gehabt.

Da die Maßstäbe inzwischen versehentlich von den Maurern wie schon früher bei Pfeiler 2 entfernt worden waren, konnte nicht festgestellt werden, ob der Ausschlag sich nach Schluß der 3 noch fehlenden Bögen IV—VI vermindert hat. Die Pfeilerbewegungen waren wohl rein elastische; bei dem guten Steine und Mörtel und der tadellosen Maurerarbeit wurden sofort und auch später beim Ausfügen nirgends Fugenrisse gefunden.

Nach Schluß aller Bögen wurden die Bogenzwickel und Stirnmauern von der Brücke selbst aus gemauert und dabei durch Ausrunden der Stirnmauern im Grundriß und verschieden weites Vorsetzen der Kragsteine und Abdeckplatten der polygonale Zug der Gewölbe nach oben in eine gleichmäßige Krümmung übergeführt. Die Abdichtung geschah im Sommer 1909 wie bei Langenbrand mit einem Zementglatzstrich der Innenflächen, der alle Ecken und Kanten ausrundete und auf den eine Lage von Asphaltfilzplatten aufgeklebt wurde. Gleichen Schritt damit hielt das Einbringen der Schutzschichte aus Sand und der Auspackung aus Granit sowie das Versetzen der Abdeckplatten, unter welchen der Asphaltfilz oben endigte. Statt Wassernasen anzubringen, wurden die Abdeckplatten nach außen geneigt, so daß das Wasser rasch abfließt und nicht an den Stirnmauern herunterläuft. Die Entwässerung hat sich bis jetzt bewährt. Nach dem Ausfügen der Sichtflächen bildete das Anbringen eines Geländers aus Winkeleisen 50/50/7, welches mit Fußwinkeln an den Platten abnehmbar befestigt ist, den Abschluß der Arbeit. Weder beim Rüsten noch beim Mauern ereignete sich ein schwerer Unfall; nur beim Abladen von Sand am Fuß des Bremsbergs verlor ein Arbeiter sein Leben.

Für das ganze Bauwerk mit Ufermauer wurden während 21 Monaten Bauzeit 1740 cbm Baugrubenaushub und 6250 cbm Mauerwerk ausgeführt. Nach der Abrechnung wurden mit Rüstung und Wasserhaltung 217 000 M. ausbezahlt, so daß 1 cbm Mauerwerk mit allen Nebenleistungen 34,70 M. kostet oder 1,9 mal dem Einheitspreis für gewöhnliches Bruchsteinmauerwerk.

## II. Das Versetzgerüst.

Auf dem 60 cm weiten Gleis des Versetzgerüsts verkehren Plattwagen folgender Art, die von Hand verschoben werden und die auf Abb. 45 gezeichneten Abmessungen haben.

Eigengewicht des Wagens . . . . .	200 kg
Auflast $1,75 \cdot 0,80 \cdot 0,55 \cdot 2,4$ . . . . .	1800 „
Gesamtlast . . . . .	2000 „
Achsdruck . . . . .	1000 „
Raddruck . . . . .	500 „
Spez. Gewicht des Holzes . . . . .	0,7

Als größte Zug- und Druckspannung des Holzes wird  $80 \text{ kg/cm}^2$ , als mindeste Knicksicherheit eine fünffache zugelassen. Die Verkehrslast wird mit ihrem einfachen Betrag eingeführt. Zwecks einfacherer Rechnung wurden sämtliche Hölzer freiauflegend angenommen, auch wenn sie auf mehreren Stützen lagerten.

Für die nur aus Rundholz bestehenden Tragglieder ergeben sich hiermit folgende Stärken (Abb. 45 Querschnitt b—b S. 81):

	$\Phi$	$\sigma$	Knicksicherheit
Schwelle a . . . . .	15 cm	$\mp 49$	$\text{kg/cm}^2$
Längsträger b . . . . .	30 „	$\mp 66$	„
Querträger c . . . . .	32 „	$\mp 80$	„
Strebe d . . . . .	12 „	+ 10	„ 15
Ständer e . . . . .	20 „	+ 20	„ 6

Jeder Ständer besteht aus zwei Rundhölzern, wovon abwechselnd eines den Querträger trägt und das andere als Beiständer zur Stoßdeckung durchgeht. Sie sind durch Stricke und in regelmäßigem Strebenszug eingeschlagene Klammern zu einem einheitlichen Tragglied verbunden. Jede Ständerwand wird durch schräg über 2 Felder reichende Rundstangen unverschieblich gemacht. In den beiden oberen Stockwerken werden um einige Ständer, welche neben den Pfeilern stehen, Rundeisen geschlungen, die eingemauert werden; sie sichern im Verein mit einigen Schubstangen die Standfestigkeit in der Quere.

## III. Das Lehrgerüst.

Das Lehrgerüst wurde für anderthalbfache äußere Last unter Vernachlässigung des Eigengewichtes als Zweigelenkfachwerkbogen berechnet und entsprechend ausgebildet.

### a) Das Schalholz.

Einheitsgewicht des Mauerwerks . . . . .	2,4
Binderentfernung . . . . .	130 cm
Zulässige Zug- und Druckspannung des Holzes . . . . .	$\pm 80 \text{ kg/cm}^2$
„ Schubspannung längs der Faser . . . . .	20 „
„ Beanspruchung des Eisens auf Zug und Druck . . . . .	1200 „
„ „ „ „ „ Schub . . . . .	800 „

Das Schalholz wurde für einfache Last gerechnet und wie bei diesem Bau üblich  $10/10 \text{ cm}$  stark angenommen. Auch in den Tunnels wurden die gleichen Schalhölzer verwendet, so daß sie vielseitig gebraucht und richtig ausgenutzt werden konnten.

Die größte zulässige Entfernung  $x$  zweier Schalhölzer wurde zu  $33 \text{ cm}$  berechnet.

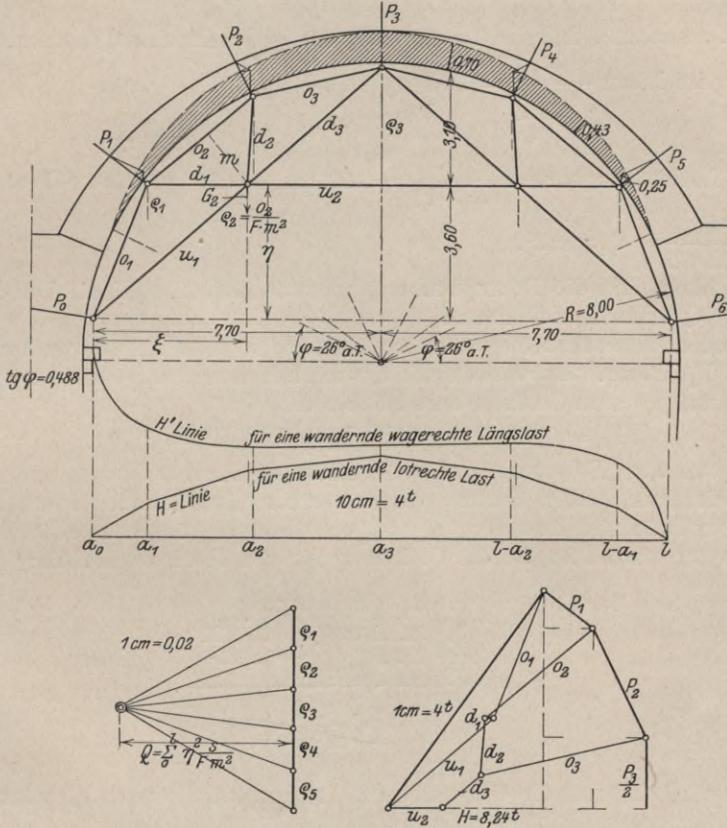
Gegen den Kämpfer durfte  $x$  in umgekehrtem Verhältnis zu dem abnehmenden Druck der Auflast auf das Schalholz größer werden.

b) Die Kranzhölzer. Der radiale Druck der Wölbsteine auf die Kranzhölzer wurde auf Abb. 50 nach bekannter Art für  $t g \varphi = 0,488$  gezeichnet. Die Belastungshöhen sind in ihrem einfachen Betrag ebenda dargestellt, wurden aber wegen der Erschütterung um die Hälfte vermehrt in die Rechnung eingesetzt.

Das Kranzholz besteht aus 2 Balken 22 · 20 und 20 · 20 cm, welche durch je 4 Dübel 8 · 12 und 6 Schrauben mit  $\Phi$  2 cm zu einem vollen Tragglied verbunden sind. Die Bogenkrümmung wird durch ein Futterholz hergestellt (Abb. 51 S. 92).

Stab . . . . .	$o_1$	$o_2$	$o_3$	
Spannung ohne Hilfsständer	3,5	46,7	72,3	kg/cm <sup>2</sup>
„ mit „	—	15,9	21,7	„

Gerüstnetz und Lastenfläche.



Der Kräfteplan der elastischen Gewichte.

Ermittlung der Stabkräfte des Fachwerkes.

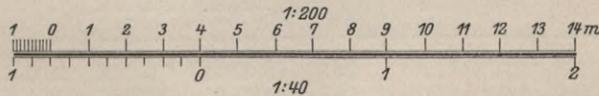


Abb. 50. Das Lehrgerüst der Tennetschluchtbrücke.

Die Beanspruchung der Schrauben und Dübel ist am größten bei Stab  $o_3$  (Abb. 50, 51). Die Trennungsfuge der beiden Balken hat von der Schwerachse den Abstand  $v = 1$  cm und in der Entfernung  $x$  vom linken Lager die Schubspannung

$$\tau = Q \frac{1,5 h^2 - 6 v^2}{b h^3}$$

Die Summe der Schubspannungen der einen Trägerhälfte ist

$$S = \int_0^{\frac{l}{2}} \tau b dx = A \frac{l}{4} \frac{1,5 h^2 - 6 v^2}{h^3}$$

Für den Stab  $o_3$  wird  $S = 1,51 \cdot A = 7920$  kg.

Für die 1. Annahme, daß die Schrauben unwirksam bleiben, berechnet sich folgende Beanspruchung der Dübel:

$$\text{Stirndruck } \sigma = \frac{S}{2 \cdot 20 \cdot 4} = 50 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{Scherbeanspruchung } \tau = \frac{S}{2 \cdot 20 \cdot 12} = 17 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\text{Scherbeanspruchung des Kranzholzes } \frac{S}{2 \cdot 30 \cdot 20} = 6,6 \text{ kg/cm}^2.$$

Für die 2. Annahme, daß die 3 Bolzen allein die Querkraft aufnehmen, ist die Scherbeanspruchung im Eisen  $\frac{S}{3 \cdot \pi \cdot \frac{3^2}{4}} = 373 \text{ kg/cm}^2$ ,

der größte Lochleibungsdruck  $\frac{S}{3 \cdot 3 \cdot 17} = 52$  und die größte Scherbeanspruchung des Holzes  $\frac{S}{3 \cdot 22 \cdot 22} = 6 \text{ kg/cm}^2$ .

In Wirklichkeit sind die Beanspruchungen etwas kleiner, weil die Dübel und Bolzen zusammen die Querkraft aufnehmen.

**e) Der Binder.** Nach Abb. 50 greifen an den verschiedenen Knotenpunkten die radialen Kräfte  $P_0, P_1, P_2, P_3$  an. Sie werden mit ihrem einfachen Betrage eingesetzt und die gefundenen Spannungen zum Schlusse mit 1,5 vervielfacht.

$$P_0 = 0,09, P_1 = 3,22, P_2 = 6,42, P_3 = 7,64 \text{ t.}$$

Bei symmetrischer Belastung des symmetrischen Fachwerkbogens ist der lotrechte Lagerdruck gleich der halben Summe der lotrechten Kraftkomponenten,  $A = 11,50 \text{ t}$ .

1. Die Einflußlinie des Horizontalschubes  $H$  für lotrechte Last. Da der Träger völlig symmetrisch ist, ist die Gleichung für den Horizontalschub:

$$H = \frac{\sum_0^a \frac{\xi \eta s}{F m^2} + a \sum_a^{\frac{l}{2}} \frac{\eta s}{F m^2}}{\sum_0^l \frac{\eta^2 s}{F m^2}}.$$

In der Liste 36 sind nur die Gurtstäbe des Trägers enthalten, da die elastischen Werte der Streben erfahrungsgemäß sehr klein sind.

Liste 36.

	s	$\xi$	$\eta$	m	F	$\frac{\eta s}{F m^2}$	$\xi \frac{\eta s}{F m^2}$	$\frac{\eta^2 s}{F m^2}$	a	H
$o_1$	3,90	4,10	3,60	2,50	840	0,002 75	0,011 28	0,009 90	0	0
$o_2$	3,70	4,10	3,60	1,70	840	0,005 48	0,022 47	0,019 73	1,40	0,200
$o_3$	3,50	4,10	3,60	2,25	840	0,002 96	0,012 14	0,010 66	4,20	0,365
$u_1$	5,50	1,40	3,60	1,75	600	0,010 78	0,015 09	0,038 81	7,70	0,442
$u_2$	7,20	7,70	6,70	3,10	500	0,010 04	0,077 31	0,067 27		

Bei der zeichnerischen Ermittlung von  $H$  auf Abb. 50 denkt man sich für jeden Gurtstab sein elastisches Gewicht  $\rho = \frac{\eta \cdot s}{F m^2}$  in seinem Gegenpunkte lotrecht wirken. Zu dem

Kräfteplane der  $\rho$  zieht man mit dem Polabstande  $Q = \sum_0^l \eta^2 \frac{s}{F m^2}$  ein Seilpolygon, dessen Ordinaten von der Schlußlinie aus gemessen die Werte der gesuchten Einflußlinie sind.

Die lotrechten Komponenten der Kräfte  $P$  erzeugen den Horizontalschub  $H_1 = 8,50 \text{ t}$ .

2. Die Einflußlinie des Horizontalschubs  $H'$  für wagrechte Längslast  $T$ . Die Last  $T$  liegt um  $t$  über den Kämpferlinien und um  $a$  vom linken Lager entfernt. Die allgemeine für jeden Fachwerkbogen mit zwei Gelenken gültige Gleichung für  $H'$  ist:

$$H' = \frac{\sum_0^l \mathfrak{M} \eta \frac{s}{F m^2}}{\sum_0^l \eta^2 \frac{s}{F m^2}}; \quad \zeta < a \mathfrak{M} = -\frac{t}{l} \cdot \zeta, \quad \zeta > a \mathfrak{M} = -\frac{t}{l} \cdot \zeta - (\eta - t).$$

Damit findet sich der Horizontalschub bei wagrechter Längslast für den symmetrischen Fachwerkbogen:

$$H' = \frac{t \sum_a^{\frac{l}{2}} \frac{\eta s}{F m^2} + \sum_0^a \eta^2 \frac{s}{F m^2}}{\sum_0^l \eta^2 \frac{s}{F m^2}} - 1.$$

Aus der Liste 36 können alle Summenglieder gebildet werden.

a = 0	1,40	4,20	7,70 m.
t = 0	3,60	6,00	6,70 m.
1 + H' = 0	0,431	0,516	0,500 t.

Die zugehörigen symmetrischen Werte ergänzen sich zu -1 (Abb. 50). Die Horizontal-komponenten T von P<sub>4</sub>, P<sub>5</sub> sind 2,6 und 2,9 t. Sie erzeugen einen ihnen entgegengesetzten Schub am linken Lager von -2,88 t. Die Horizontalkomponenten von P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> erzeugen am linken Lager den ihnen entgegengesetzten Schub von +2,62 t. Somit erzeugen die äußeren Kräfte am linken Lager den Schub H<sub>2</sub> = -0,26 t. Aus dem Horizontalschub H<sub>1</sub> der lotrechten und H<sub>2</sub> der wagrechten Komponenten setzt sich der endgültige Schub H = H<sub>1</sub> + H<sub>2</sub> = 8,50 - 0,26 = 8,24 t. zusammen. Die Untersuchung zeigt, daß es bei einem steifen Lehrgerüst genügt, nur für die lotrechten Lasten den Schub zu bestimmen.

3. Die inneren Kräfte. Im Abb. 50 wurden die einzelnen Stabkräfte durch einen Kräfteplan nach Cremona gefunden. Die Liste 37 gibt die einzelnen Stabquerschnitte und die Stabspannungen.

Liste 37.

	o <sub>1</sub>	o <sub>2</sub>	o <sub>3</sub>	u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>
Stabkraft, t . . . . .	7,3	7,5	9,0	7,3	2,9	- 0,4	3,1	2,7
Querschnitt, cm <sup>2</sup> . . . . .	840	840	840	600	500	500	400	600
Spannung σ, kg/cm <sup>2</sup> . . . . .	- 8,7	- 8,9	- 10,7	- 12,1	- 5,8	+ 0,8	- 7,8	- 4,5
1,5 σ, „ . . . . .	- 13,1	- 13,4	- 16,1	- 18,2	- 8,7	+ 1,2	- 11,7	- 6,8

(- Druck, + Zug.)

Die Obergurtstäbe haben als Kranzhölzer auch Biegungsspannung, welche zu der achsialen Spannung zu addieren ist. Ohne die Hilfsständer hätten sie zu kleine Sicherheit gegen Ausknicken. Die Liste 38 gibt eine Übersicht über die tatsächlichen Spannungen im Fachwerk.

Liste 38.

		Größte Druckspannung kg/cm <sup>2</sup>	Knick- sicherheit
Ohne Hilfsständer . . . . .	o <sub>1</sub>	- 16,6	11
Mit „ . . . . .	o <sub>1</sub>	—	—
Ohne „ . . . . .	o <sub>2</sub>	- 60,1	3
Mit „ . . . . .	o <sub>2</sub>	- 29,3	6
Ohne „ . . . . .	o <sub>3</sub>	- 88,4	2
Mit „ . . . . .	o <sub>3</sub>	- 37,8	5
	u <sub>1</sub>	- 18,2	7
	u <sub>2</sub>	- 8,7	11
	d <sub>1</sub>	+ 1,2	—
	d <sub>2</sub>	- 11,7	20
	d <sub>3</sub>	- 6,8	23

4. Die Berechnung der Knotenpunkte (Abb. 51). Die Wirkung der Verzapfung usw. wurde in der Rechnung nicht berücksichtigt.

Als Beispiel der Berechnung eines Knotenpunktes werde zunächst jene des linken Lagers durchgeführt.  $O_1 = + 11\ 000\text{ kg}$ ,  $U_1 = + 11\ 000\text{ kg}$ ,  $H = 1,5 \cdot 8240 = 12\ 360\text{ kg}$ ,  $A = 1,5 \cdot 11\ 500 = 17\ 250\text{ kg}$ . Durch die Übertragung von  $H$  entsteht die Druckspannung  $\frac{12\ 360}{15 \cdot 20} = - 41,2$ , jene von  $A$  verursacht  $\frac{17\ 250}{30 \cdot 20} = - 28,8\text{ kg/cm}^2$ . Die Stirnflächen des Stabes  $O_1$  haben eine Beanspruchung von  $\frac{11\ 000}{25 \cdot 20} = - 55\text{ kg/cm}^2$ .  $O_1$  verursacht eine Scherspannung an  $U_1$  in der Größe von  $\frac{U_1}{2 \cdot 20 \cdot 20} = \frac{11\ 000}{800} = 14\text{ kg/cm}^2$ . Die Beanspruchung von  $U_1$  ist tatsächlich aber kleiner, da an der Kraftübertragung auch die beiden Bolzen teilnehmen.

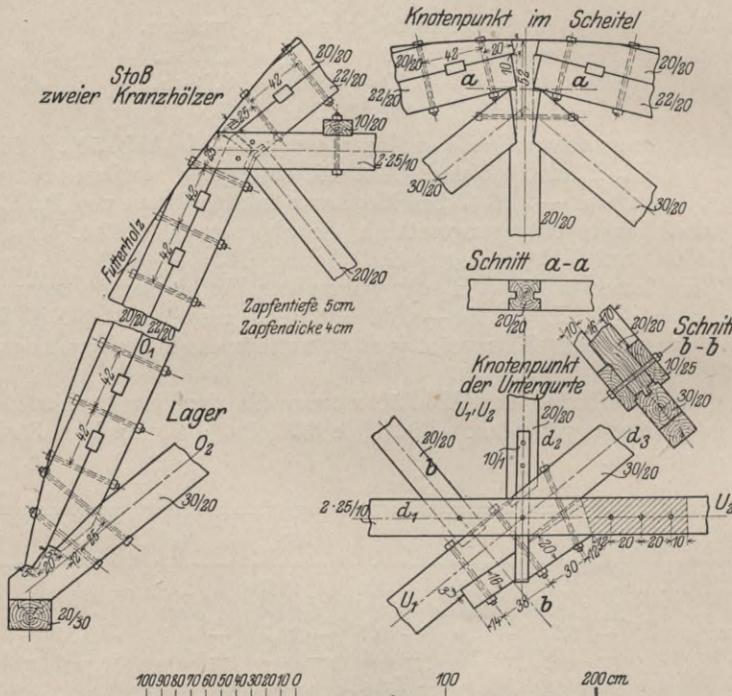


Abb. 51. Einzelheiten vom Lehrgerüst der Tennetschluchtbrücke.

Knotenpunkt der Untergurte  $U_1, U_2$ .  $U_1 = + 11\ 000$ ,  $D_1 = - 600$ ,  $D_2 = + 4700$ ,  $D_3 = + 4100$ ,  $U_2 = + 4400\text{ kg}$ . Der Zug von  $D_1$  geht durch einen zweischnittigen Bolzen  $\Phi = 3\text{ cm}$  nach  $U_1$  über,  $\frac{600}{2 \cdot 7,07} = 42\text{ kg/cm}^2$ ; der Lochleibungsdruck ist  $\frac{600}{3 \cdot 20} = 10\text{ kg/cm}^2$ .

Die Scherspannung von  $U_1$  durch den Zugbolzen ist  $\frac{600}{20 \cdot 22} = 1,4\text{ kg/cm}^2$ .  $U_2$  geht durch die drei zweischnittigen Bolzen in das Futterholz und dann durch reine Druckübertragung nach  $U_1$  über. Die Scherspannung der drei Bolzen ist  $\frac{4400}{3 \cdot 2 \cdot 7,07} = 104\text{ kg/cm}^2$ ,

der Lochleibungsdruck ist  $\frac{4400}{3 \cdot 20 \cdot 3} = 25\text{ kg/cm}^2$ . Der am meisten links gelegene Bolzen

beansprucht die Scherfestigkeit des Futterholzes auf  $\frac{4400}{3 \cdot 17 \cdot 20} = 4,3\text{ kg/cm}^2$ . Von  $U_2$  gehen  $2200\text{ kg}$  durch die 3 langen Bolzen und die  $3\text{ cm}$  tiefe Einkerbung nach  $U_1$

über. Wirkt nur die Einkerbung, so entsteht dort ein Druck von  $\frac{2200}{3 \cdot 20} = 37$  und wirken allein die drei Schrauben, so entsteht in ihnen eine Schubspannung von  $\frac{2200}{3 \cdot 7,07} = 101 \text{ kg/cm}^2$  mit einem Lochleibungsdruck von  $\frac{2200}{3 \cdot 16 \cdot 3} = 15,3 \text{ kg/cm}^2$ .

Im Knotenholz entsteht am oberen Ende die größte Scherspannung von  $\frac{2200}{3 \cdot 20 \cdot 12} = 3 \text{ kg/cm}^2$ . Wenn  $D_2$  seinen Druck durch einen Bolzen an  $U_1$  abgibt, so wird in diesem die Schubspannung von  $42 \text{ kg/cm}^2$  erhöht um  $\frac{4700}{2 \cdot 7,07} = 333$  zu insgesamt  $375 \text{ kg/cm}^2$ . Der Lochleibungsdruck dieses Bolzens würde sich erhöhen auf  $\frac{4700}{3 \cdot 20} = 79 \text{ kg/cm}^2$ . Der Lochleibungsdruck im 1 cm starken Flacheisen würde betragen  $\frac{4700}{2 \cdot 1 \cdot 3} = 790 \text{ kg/cm}^2$ . In Wirklichkeit soll so gearbeitet sein, daß die ganze Kraft von  $D_2$  durch die Holzstirn unmittelbar nach  $U_1$  geht.

d) Die Belastung einer Stockwinde.

Gewicht vom Holz	$\frac{24,45 \cdot 0,7}{8}$	=	2,14 t
„ „ Eisen	$\frac{1,560}{8}$	=	0,20 t
„ „ Gewölbe	$1,5 \cdot 11,5$	=	17,26 t
Belastung der Schraubenspindel			19,60 t.

Die zulässige Tragkraft der verwendeten Schraubenspindeln betrug 30 t.

e) Die Standfestigkeit gegen Wind. Die breite Auflagerung bei geringer Höhe sowie der starke Querverband aus einem doppelten Strebenkreuz und 4 Doppelzangen verbürgten die Sicherheit des ganzen Lehrgerüsts auch nach der Quere.

## IV. Der Zeug- und Arbeitsaufwand.

**Das Versetzgerüst.** Zeugaufwand. Für 1 lfm eines Stockwerkes mit vollem Bohlenbelage sind erforderlich: Schwellen 0,39, Bohlen 0,88, zusammen 1,27 cbm Holz.

Für ein Gerüstfeld von 5 m Breite, 20 m Höhe und 3 m mittlerer Tiefe wird gebraucht: Holz 10,81 cbm, Eisen 50 kg (Klammern mit  $\phi = 20 \text{ mm}$ ).

Für 1 qm Ansicht der Rüstung wird gebraucht: Holz 0,108 cbm, Eisen 0,50 kg.

Für 1 cbm des Rüstraumes ist nötig: Holz 0,036 cbm, Eisen 0,17 kg.

Bei einer Gesamtansichtsfläche des Versetzgerüsts von 2540 qm beläuft sich der Zeugaufwand: Holz 275 cbm, Eisen 1270 kg. Bei der Sichtfläche und beim Aufwand sind der Aufzug und die Zufahrt zum Bremsberg mitgerechnet.

**Arbeitsaufwand.** Am 1. Stockwerk wurde von 10 Mann 5 Wochen lang, am 2. von 10 Mann 3 Wochen, am 3. von 10 Mann 4 Wochen und am 4. Stockwerk von 10 Mann 6 Wochen lang gearbeitet. Mit dem viermaligen Legen des Gleises auf dem Versetzgerüste und dem Verbringen des Holzes von der Landstraße auf die Baustelle wurden insgesamt 1530 Tagschichten auf die ganze Rüstung verwendet.

**Das Lehrgerüst.** Zeugaufwand. Es wird der Holzbedarf für ein Lehrgerüst, der der Bestellung zugrunde lag, angegeben.

Schalholz . . . . .	3,25 cbm
Kantholz . . . . .	21,52 „
Hartholz . . . . .	0,08 „
Zusammen Holz . . . . .	<u>24,85 cbm</u>
Eisen ohne Spindeln . . . . .	1044 kg

**Arbeitsaufwand.** Ein Lehrgerüst erforderte im Mittel an Tagschichten für Abbinden 80, Aufstellen 32, Abrüsten 11 Tagschichten. Beim Aufstellen des Gerüsts ist die Befuhr von Holz und Eisen zur Baustelle und das Aufbringen der Schalhölzer nicht eingerechnet. Die Schalhölzer wurden erst kurz vor Beginn des Wölbens von den Maurern aufgebracht. Auch die Wegfuhr von Holz und Eisen nach dem Abrüsten blieb außer Betracht. Da jedes Lehrgerüst 3 mal verwendet wurde, beträgt der auf ein Gewölbe bezogene Arbeitsaufwand: Abbinden 27, Aufrüsten 32, Abrüsten 11 Tagschichten. Die beste Leistung, die beim Ab- und Aufrüsten eines Lehrgerüsts von den Zimmerleuten erzielt wurde, betrug  $10 \cdot 3 = 30$  Schichten in einem Zeitraum von 3 Tagen.

## V. Der Einheitsaufwand.

**Das Versetzgerüst.** Von dem Versetzgerüst aus wurden die Pfeiler und Endwiderlager, die Gewölbe und Hintermauerung ausgeführt und der größere Teil der Stirnmauern hochgetrieben, zusammen 4720 cbm Mauerwerk. Das Gesamtmauerwerk der Brücke ohne Ufermauer beträgt jedoch 5150 cbm, und diese Masse ist den Einheitsberechnungen zugrunde gelegt in Liste 40, Seite 99.

**Das Lehrgerüst.** Der Zeug- und Arbeitsaufwand wird auf die früheren Einheiten bezogen und als Spannweite 16 m, als Höhe jene über dem Kreismittelpunkt mit 8 m angesetzt. Die Einzelzahlen sind in Liste 39 enthalten. Beim Arbeitsaufwand ist die 3 malige Verwendung des Lehrgerüsts insofern berücksichtigt, als die Arbeitszeit für das Abbinden mit ihrem dritten Teile eingesetzt ist.

## 4. Die Rappenschluchtbrücke.

### I. Die Bauausführung.

Gleich 500 m oberhalb der Tennetschlucht liegt eine zweite Schlucht, durch welche die Murg noch im schärferen Bogen und größeren Gefälle braust (Abb. 38, S. 72). Die im Bogen von 220 m und einer Steigung von 1 : 53 liegende Bahn übersetzt sie mit der Rappenschluchtbrücke. Der innere Winkel der Schlucht war mit Geröll angefüllt, welches zum Teil von der 18 m oberhalb liegenden Landstraßenverlegung stammte und für kurze Zeit wohl das Lehrgerüst, aber nicht die Bahn tragen konnte. Während in der Tennetschlucht das Lehrgerüst auf 2, bei Langenbrand das Lehrgerüst auf 5 Stützpunkten ruhte, konnte hier ein auf der ganzen Länge auf dem Untergrund lagerndes Lehrgerüst verwendet werden, welches an und für sich einfach und nur wegen seiner durch das Gelände bedingten Ausbildung erwähnungswert ist.

Das Gewölbe, das in seiner inneren Leibung nach einem Kreisbogen von 10,60 m Halbmesser gekrümmt ist und 18 m Lichtweite mit 5 m Pfeil bei einer Stärke im Scheitel von 1,00 und im Kämpfer von 1,50 m hat, besteht aus hammerrecht bearbeiteten Schichtsteinen aus Granit und Zementmörtel 1 : 3. Auf der Südseite verkürzt es sich erheblich, da hier guter Fels schräg gegen das Bauwerk ansteigt. Wegen der starken Krümmung der Bahn hat der Scheitel eine Breite von 5,70 m und jede Seite einen Anzug 20 : 1. Die Baustelle lag so unzugänglich und abgeschlossen, daß zunächst ein Fußpfad in dem Fels herausgeschossen werden mußte. Mit dem Bau der Brücke wurde zugewartet, bis die beiden sie begrenzenden Tunnels das Vorstrecken des Baugleises ermöglichten und bis sämtliche anderen Arbeiten in der Schlucht, die Verlegung der Landstraße, Unterfangung einer großen Trockenmauer usw., beendet waren. Da am gegenüberliegenden flachen Ufer große Sandbänke lagen und 100 m oberhalb aus dem Felsen der Flußsohle und einer Felswand gute Bruchsteine und Quader gestoßen werden konnten, so schlug man einen bei kleineren Anschwellungen gerade noch benutzbaren Holzsteg über die Murg und legte in dem Geröllhänge eine steile Rampe für ein Baugleis an, auf dem die mit Stein oder Sand beladenen Wagen durch ein Drahtseil von einer auf dem durchgehenden Baugleis fahrenden Lokomotive hochgezogen wurden. Was sonst noch zur Mauerung nötig wurde, lieferte

das Baugleis oder konnte auf der Landstraße angefahren und in einer Rutsche auf das Bahnplanum heruntergebracht werden. Nachdem an beiden Kämpfern der Fels freigelegt worden war, konnte man die Ausbildung der Lager festlegen und ihre Flächen aussprengen. Einige Schwierigkeit bereitete das Auflagern der Bodenschwellen der hinteren 2 Lehrgerüstbinder, da sie zum Teil auf das frisch geschaffene Planum des Schuttkegels und zum Teil in die schräg ansteigende Felswand gelegt werden mußten. Mit schwachen Schüssen brach man für sie 2 Stufen aus und stellte mit Mauerwerk die richtige Höhe her.



Abb. 52. Das Lehrgerüst der Rappenschluchtbrücke.  
Oben die Landstraße und deren neue Trockenmauerunterlangung.

Das breite Gewölbe wurde von 6 Kranzholzbögen unterstützt, von welchen jedoch nur die 4 mittleren auf richtigen Bindern und die 2 äußeren auf auskragenden Pfetten lagen. Die Pfetten waren bei den Bindern, welche 1,40 m voneinander abstanden, zwischen Kranzholz und der radial gerichteten Strebe eingezogen, kragten beiderseits bis zur Gewölbstirne aus und wurden durch Druckstreben unterstützt. Die Binderstreben waren in einem verdübelten Längsbalken eingezapft, der den beweglichen Oberteil abschloß. Zwischen ihm und der Grundschwelle wurden Ausrüstungskeile angeordnet, da Schraubenspindeln nur auf kurze Zeit zum Einstellen des Gerüsts verfügbar waren. Der Gerüstscheitel wurde 6 cm überhöht.

Beim Wölben wurden wieder die 4 Kämpferschichten versetzt, die Scheitellast aufgebracht und die Schichte s (Abb. 53) ohne Mörtel in den Lagerfugen gelassen. Durch diese Maßregel wurden die Risse in der Bruchfuge wieder vermieden. Die 140 cbm Wölbsteine wurden von einem hölzernen Aufzuge in Brückenmitte mit fahrbarer Winde in 12 Tagen versetzt. Dazu wurden 130 Tagschichten Maurer, 34,7 cbm Zementmörtel 1 : 3 oder 16 150 kg Zement gebraucht, also für 1 cbm Gewölbe 0,93 Maurerschicht, 0,245 cbm Mörtel, 115 kg Zement.

Die Arbeit wurde dadurch erschwert, daß das Baugleis über dem Gewölbe im Betrieb bleiben und seine Absprievung wiederholt ausgewechselt werden mußte. Unter dem Geröll in der Runse rieselte immer so viel Wasser, als zum Mauern gebraucht wurde.

Das außergewöhnlich leichte Lehrgerüst hat sich gut bewährt. Die Binderscheitel hatten während der Wölbung folgende Senkungen:

Binder	1	2	3
Senkung	21	12	13 mm.

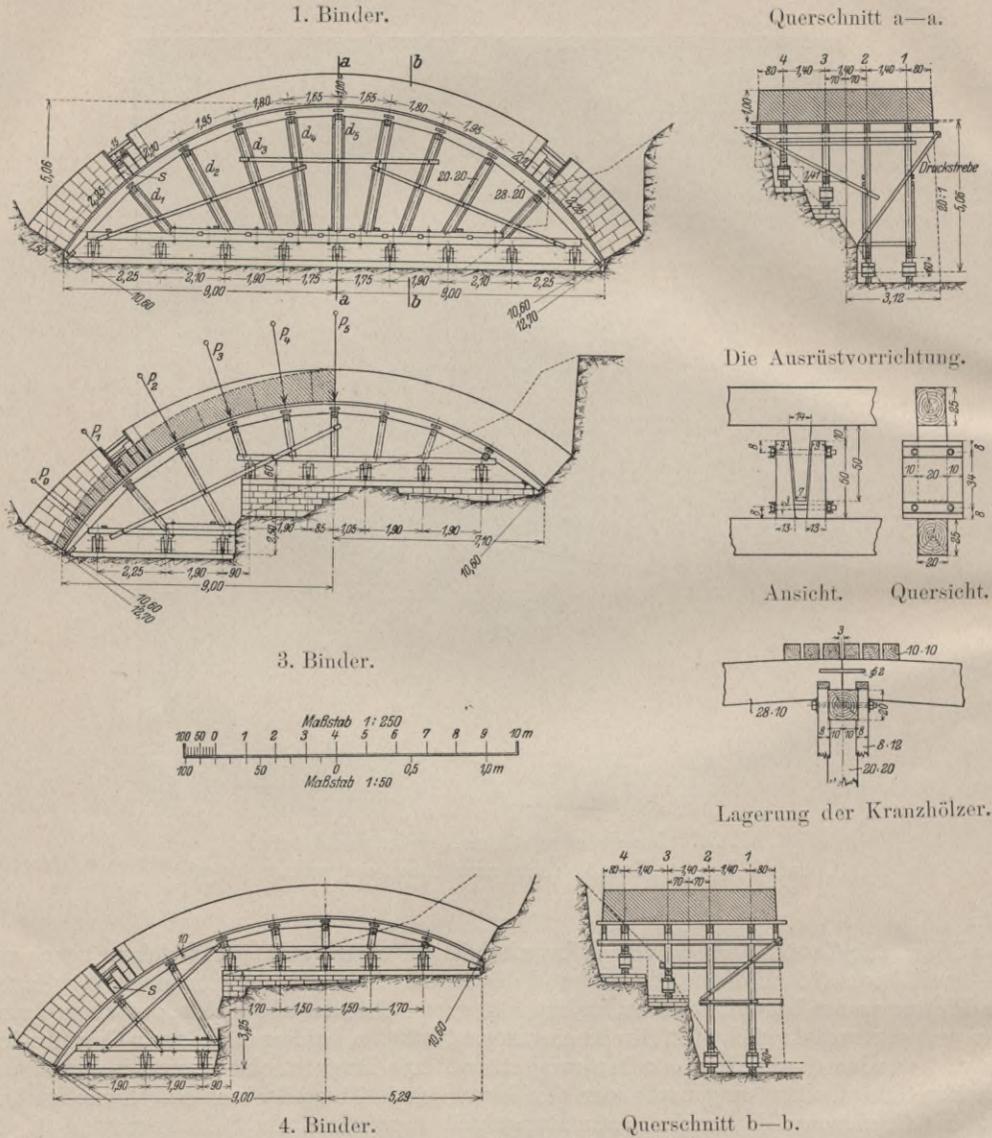


Abb. 53. Das Lehrgerüst der Rappenschluchtbrücke.

Vorspringende Felsen verhinderten die Messung am 4. Binder. Die Ausrüstung erfolgte 4 Wochen nach Wölbschluß mit den Keilen ohne Anstände und ergab auf der Flußseite bei 18 m Spannweite nur 2 mm und auf der Bergseite bei 14 m Spannweite gar keine Scheitel-senkung.

Der Gewölbrücken wurde wieder mit Asphaltfilzplatten gedichtet und über jedem Kämpfer durch einen Querschlitz mit Wasserspeier nach der Murg entwässert. Ent-

sprechend der Felsgegend wurden die Stirnmauern im rauhen Vieleckverband gemauert und erhielten keine Abdeckung.

Für das Bauwerk mit 425 cbm meist im Fels zu leistenden Baugrubenaushub und 311 cbm Mauerwerk wurden 17 000 M. bezahlt, so daß 1 cbm Mauerwerk mit Aushub und allen Nebenleistungen sich auf 55 M. stellte, also 3 mal dem gewöhnlichen Mauerwerkspreis.

## II. Das Lehrgerüst.

Spezifisches Gewicht des Mauerwerks . . . . .	2,4
Zulässige Druckspannung des Holzes . . . . .	80 kg/cm <sup>2</sup>
„ Schubspannung „ „ . . . . .	20 „
Geringste Knicksicherheit . . . . .	5
Binderentfernung . . . . .	1,40 m
Schalholz . . . . .	10 · 10 cm

Die im Scheitel zulässige Entfernung  $x$  zweier Schalhölzer wird für einfache Auflast zu 24 cm. Gegen den Kämpfer darf  $x$  wachsen, da die Last abnimmt.

Kranzholz 28 · 20 cm.

Im folgenden wird die Auflast mit Rücksicht auf die Stoßwirkung um die Hälfte erhöht.

In Bogenmitte ist:

$$p = \frac{0,24}{100} \cdot 150 \cdot 140 \cdot 1 = 50,4 \text{ kg}, \quad M = 50,4 \cdot \frac{165^2}{8} = 171\,000 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad W = 2613 \text{ cm}^3,$$

$\sigma = \mp 65,5 \text{ kg/cm}^2$ . Der Auflagerdruck von  $p \cdot \frac{l}{2} = 4830 \text{ kg}$  beansprucht das Auflager

an der Pfette mit  $\frac{4830}{20 \cdot 10} = 24 \text{ kg/cm}^2$ ; die Schubspannung ebenda ist  $\frac{4830}{20 \cdot 20} = 12 \text{ kg/cm}^2$ .

Am Kämpfer ist:

$$p = 29,3 \text{ kg}, \quad M = 29,3 \cdot \frac{210^2}{8} = 162\,000 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad W = 2613 \text{ cm}^3, \quad \sigma = \mp 61,5 \text{ kg/cm}^2.$$

Strebe 20 · 20 cm.

Von allen gleichstarken Streben hat  $d_5$  die größte Auflast und Knicklänge:

$$P_5 = 1,5 \cdot 5744 = 8620 \text{ kg}, \quad F = 400 \text{ cm}^2, \quad \sigma = -21,6 \text{ kg/cm}^2, \quad n = \frac{k_0}{\sigma} = \frac{175}{21,6} = 8.$$

Pfette 20 · 20 cm.

Am stärksten ist die Pfette am Scheitel beansprucht. Wenn die Druckstrebe nicht trägt, so ist die größte Biegungsspannung in der Pfette bei einfacher Auflast:

$$P = 2,4 \cdot 0,39 \cdot 1,60 \cdot 1 \cdot 1000 = 1490 \text{ kg}, \quad M = 1490 \cdot 70 = 104\,300 \text{ kg} \cdot \text{cm}, \quad W = 1333 \text{ cm}^3, \\ \sigma = \mp 78 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei anderthalbfacher Auflast und 80 kg/cm<sup>2</sup> Biegungsspannung darf von der Last  $1,5 \cdot P = 2230 \text{ kg}$  nur der Teil  $P'$  von der Pfette aufgenommen werden, während der Rest durch die Druckstrebe abzuleiten ist.  $W \cdot 80 = 1333 \cdot 80 = P' \cdot 70$ ,  $P' = 1070 \text{ kg}$ ,  $P - P' = 1160 \text{ kg}$ . Der Strebendruck ist dann  $S = 1500 \text{ kg}$ , der Strebenquerschnitt

$$F = 2 \cdot 8 \cdot 12 = 192 \text{ cm}^2, \quad \sigma = -\frac{1500}{192} = -8 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Beanspruchung des Pfettenbolzens mit  $\Phi 3 \text{ cm}$  ist:  $\sigma = \frac{1500}{2 \pi \frac{d^2}{4}} = 1070 \text{ kg/cm}^2$ .

Er ist durch die unmittelbare Druckübertragung der Hölzer entlastet.

Längsschwelle 20 · 20, 25 · 20 cm

Die Summe der wagrechten Teilkräfte der Streben tritt in der Mitte der unteren wagrechten Längsschwelle, die aus den verdübelten Balken 20 · 20 und 25 · 20 besteht, als

Druckkraft auf. Sie ist im einfachen Betrag 8300 kg,  $\sigma = -\frac{1,5 \cdot 8300}{45 \cdot 20} = -14 \text{ kg/cm}^2$ . Auch wenn nur das obere Holz 20 · 20 den Druck aufnehmen müßte, so wäre es nicht zu stark beansprucht mit:  $\sigma = -\frac{1,5 \cdot 8300}{20 \cdot 20} = -31 \text{ kg/cm}^2$ .

Die Standsicherheit gegen Wind. So weit es irgend möglich war, wurden Doppelzangen 8 · 12 cm eingezogen und dadurch ein guter Querverband und genügend Sicherheit gegen Wind erreicht.

### III. Der Zeug- und Arbeitsaufwand für das Lehrgerüst.

#### Zeugaufwand.

Schalholz . . . . .	3,81 cbm
Kantholz . . . . .	18,18 „
Hartholz . . . . .	0,04 „
Gesamtholz . . . . .	<u>22,03 cbm</u>
Eisen . . . . .	450 kg

**Arbeitsaufwand.** Die Anfertigung, Aufstellung und Beseitigung des Gerüsts erforderte folgende Arbeitsleistungen: Abbinden 40, Aufrüsten 12, Abrüsten 8 Tagschichten, zusammen 60 Tagschichten.

**Einheitsaufwand.** Für 1 cbm Holz des ausgeführten Gerüsts war nötig an Eisen 20,5 kg, Arbeit 2,72 Tagschichten. Für 1 cbm ausgeführtes Gewölbmauerwerk — 139,98 cbm Gesamtmenge — war nötig 0,158 cbm Holz, 3,23 kg Eisen, 0,428 Tagschichten Arbeit. Siehe Liste 39.

Wenn der südliche Kämpfer des Gewölbes ganz und nicht verkürzt ausgebildet worden wäre, so hätte sich ergeben ein Gewölbmauerwerk von 156,94 cbm und ein Zeugaufwand von 28,14 cbm Holz, und 500 kg Eisen. Dem entspräche der Aufwand für die Einheiten, welcher in Liste 39 enthalten ist.

## 5. Schluß.

Die bei den einzelnen Brücken angegebenen Aufwendungen und Beobachtungen mögen zum Schlusse übersichtlich zusammengestellt und mit anderen Angaben verglichen werden. Die Arbeit ist in Tagschichten, Holz in Kubikmeter und Eisen in Kilogramm angegeben. Eine Tagschicht enthält 11 Stunden, wovon 9 reine Arbeitstunden sind.

Aus dem Buche von Dr. Schönhöfer über Haupt-, Neben- und Hilfsgerüste konnte für 6 Gewölbe der Aufwand zusammengestellt und das Mittel, welches in der 8. Zeile steht, gebildet werden.

Nach den Listen ist die 2. Einheit der überwölbten Grundfläche untauglich zum Vergleich, da sie den besonderen Verhältnissen eines Gewölbes nicht gerecht wird. Den besten Maßstab gibt wohl die 4. Einheit, bezogen auf das Produkt aus Grundfläche mal Spannweite.

Nach Ausweis der Mittelwerte waren sämtliche Lehrgerüste bei den drei Murgtalbrücken, vielleicht mit Ausnahme jener für die Nebenbögen in Langenbrand, sparsam im Holzverbrauch. Die Rappenschluchtbrücke schneidet am besten ab, an sie reiht sich die Tenneschluchtbrücke und der erste Entwurf für das Hauptgerüst in Langenbrand an.

Liste 39.  
Zusammenstellung der Lehrgerüstaufwendungen.

Nr.	Die Lehrgerüste enthalten:		Gesamtmenge	1	2	3	4	5	6
				auf 1 m <sup>3</sup> Raum	auf 1 m <sup>2</sup> Grundfl.	auf 1 m <sup>3</sup> Gewölbe	auf 1 m <sup>2</sup> Grundfl. ∠ Spannw.	auf 1 m <sup>4</sup> Grundfl. ∠ Höhe	auf 1 m <sup>3</sup> Holz
1	Hauptbogen bei Langenbr. 1. Entw. $f = 14,75, l = 59$ m	Holz Eisen	238,52 5280	0,0822 1,811	0,746 16,449	0,315 6,948	0,0126 0,279	0,00 086 0,01 88	1 22,04
2	Hauptbogen bei Langenbr. 2. Ausführungsentw. $f = 14,75, l = 59$ m	Holz Eisen Arbeit	284,19 5090 1040	0,0978 1,748 0,355	0,888 15,920 3,230	0,375 6,720 1,362	0,0150 0,269 0,0547	0,00 102 0,01 83 0,00 38	1 41,40 3,77
3	Nebenbogen bei Langenbr. $f = 6, l = 12$ m	Holz Eisen Arbeit	19,41 805 70	0,0793 3,240 0,273	0,234 9,710 0,788	0,390 16,150 1,394	0,0195 0,808 0,0698	0,00 325 0,13 50 0,01 16	1 41,40 3,58
4	Tennetschluchtbrücke $f = 8, l = 16$ m	Holz Eisen Arbeit	24,85 1044 70	0,0562 2,360 0,159	0,353 11,850 0,995	0,294 12,330 0,829	0,0220 1,285 0,0620	0,00 276 0,11 60 0,00 78	1 40,20 2,82
5	Rappenschluchtbrücke $f = 5, l_1 = 18$ m $l_2 = 14$ m	Holz Eisen Arbeit	22,03 450 60	— — —	— — —	0,158 3,230 0,428	— — —	— — —	1 20,50 2,72
6	Rappenschluchtbrücke symm. Bogen, $f = 5, l = 18$ m	Holz Eisen	28,14 500	0,0740 1,320	0,262 4,650	0,179 3,190	0,0154 0,273	0,00 308 0,05 46	1 17,80
7	Mittelwerte von 1—6	Holz Eisen Arbeit		0,0779 2,096 0,262	0,497 11,716 1,640	0,285 8,095 1,003	0,0169 0,583 0,0602	0,00 219 0,06 85 0,00 77	1 33,11 3,30
8	Mittelwerte aus „Hilfsgerüste“	Holz Eisen		— —	0,35 15,99	0,50 32,13	0,0061 0,213	0,00 059 0,00 83	1 51
9	desgl. a. Handbch d. Ing. Wiss.	Holz		—	—	0,33	0,020	—	—

Nun möge noch der Aufwand für die Versetzgerüste über dem Hauptbogen in Langenbrand und bei der Tennetschluchtbrücke, welche hier zum Versetzen des gesamten Mauerwerks und dort zum Versetzen von Hauptbogen und Übermauerung dienten, verglichen werden.

Als Einheit dient der Kubikmeter des versetzten Mauerwerks, der Quadratmeter der umschlossenen Ansichtsfläche des Gerüsts und der Kubikmeter des umrüsteten Raumes. Die Gesamtmengen waren beim Talübergang bei Langenbrand 1100 cbm, 536 qm und 2893 cbm; bei der Tennetschluchtbrücke 5150 cbm, 2540 qm und 7630 cbm.

Liste 40.  
Zusammenstellung der Versetzgerüstaufwendungen.

Versetzgerüste		1	2	3	4	5
		1 qm Sicht- fläche	1 cbm Rüstraum	1 cbm Mauerwk.	1 cbm Holz	Menge
a) Hauptbogen bei Langenbrand.	Holz Eisen Arbeit	0,127 0,659 0,464	0,024 0,122 0,086	0,0619 0,323 0,227	1 5,20 3,66	68 cbm 353 kg 249 T.-Sch.
b) Tennetschluchtbrücke . . . . .	Holz Eisen Arbeit	0,108 0,500 0,600	0,036 0,167 0,200	0,0534 0,247 0,237	1 4,63 5,56	275 cbm 1270 kg 1530 T. Sch.
Mittel aus a und b . . . . .	Holz Eisen Arbeit	0,118 0,580 0,532	0,030 0,145 0,143	0,0577 0,285 0,232	1 4,92 4,61	— — —

Zum Schlusse werden noch die bei dem Wölben der 16 Bögen an den 3 Bauwerken angestellten Beobachtungen nebeneinander gestellt, um auch hier einen bequemen Vergleich zu ermöglichen, und die Zahlen für allgemeinen Gebrauch nutzbar zu machen.

Liste 41.

## Zusammenstellung von Überhöhung und Senkung der Lehrgerüste.

	$l =$	Hauptbogen bei Langenbr.	Nebenbogen bei Langenbr.	Mittel aus 9 Bögen Tennetschl.	Bogen der Rappenschlucht
		59	12	16	18
Lehrgerüst	Überhöhung $\frac{h}{l}$	150 0,0025	60 0,0050	60 0,0038	60 mm 0,0033
	Senkung $\frac{d}{l}$	52 0,00 088	20 0,00 167	25 0,00 156	15 mm 0,00 084

Liste 42.

Aufwand für 1 cbm Gewölbe an . . . . .	Maurer Tagschichten	0,93	0,93
	Mörtel cbm	0,265	0,245
	Zement kg	121	115

## 6. Anhang zur allgemeinen Untersuchung des eingespannten Bogens.

### Die Grundlagen für den ebenen Bogen ohne Gelenke.

Die Gleichung 3 Seite 2 für die Normalspannung  $\sigma$  leitet man auf folgende Art ab. Nach Seite 2, Abb. 2 entspricht der Achslänge  $ds$  des Stabteiles eine Länge  $ds_v$  im Abstände  $v$  von der neutralen Achse.

$$ds_v = ds - v d\varphi$$

$$\Delta ds_v = \Delta ds - v \Delta d\varphi; \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds_v}{ds_v} = (\Delta ds - v \Delta d\varphi) : (ds - v d\varphi) = \varepsilon_0 - \frac{v}{r + v} \left( \varepsilon_0 + r \cdot \frac{\Delta d\varphi}{ds} \right), \quad \sigma = E \cdot \varepsilon.$$

Die inneren Spannungen halten den äußeren Lasten Gleichgewicht:

$$M = - \int v \cdot \sigma \cdot dF, \quad N = - \int \sigma dF, \quad Q = \int \tau dF,$$

Daraus folgert:

$$M = E \left[ \varepsilon_0 + r \frac{\Delta d\varphi}{ds} \right] \frac{Y}{r},$$

$$N = - E \left[ \varepsilon_0 \cdot F + \left( \varepsilon_0 + r \frac{\Delta d\varphi}{ds} \right) \frac{Y}{r^2} \right].$$

$$Y = \int v^2 dF \cdot \frac{r}{r + v} \text{ ist angenähert das Trägheitsmoment } J = \int v^2 dF.$$

Aus  $M, N$  berechnet sich  $\Delta d\varphi$  und  $\varepsilon_0$  und dadurch ist auch  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  bekannt.

$$\Delta d\varphi = \frac{1}{E} \left[ N \frac{ds}{Fr} + M \frac{ds}{Y} + M \frac{ds}{Fr^2} \right], \quad \varepsilon_0 = - \frac{1}{E} \left[ \frac{N}{F} + \frac{M}{Fr} \right],$$

$$\sigma = - \frac{N}{F} - \frac{M}{Fr} - \frac{M}{Y} \cdot v \cdot \frac{r}{r + v}. \quad \text{Gl. 3. Seite 2}$$

Die Schubspannung ist bekanntlich in der Faser  $v$  mit der Breite  $b$ .  $\tau = Q \frac{\int_v^e v dF}{b \cdot J}$  und im

$$\text{Rechteck: } \tau = Q \cdot \frac{e^2 - v^2}{2J}.$$

Um die Änderung in der gegenseitigen Lage der beiden Kämpfer durch die äußeren Lasten zu finden, betrachtet man die Veränderung in der gegenseitigen Lage der beiden Querschnitte A, B eines Bogenteils  $ds$ , wenn am rechten Querschnitte B die Kräftesummen  $M, N, Q$  angreifen und der linke Schnitt vorerst unbeweglich ist. Im Ruhezustande ist die Lage von Querschnitt B zu A durch  $dx, dy, d\varphi$  gegeben.

$d\varphi$  ändert sich nur durch  $M$ , nicht durch  $N$  oder  $Q$ .

$dx, dy$  ändern sich durch  $M, N, Q$  um  $\Delta dx', \Delta dx'', \Delta dx'''$  bzw.  $\Delta dy', \Delta dy'', \Delta dy'''$ .

Die Änderungen durch  
das Moment, die Normalkraft, die Querkraft.

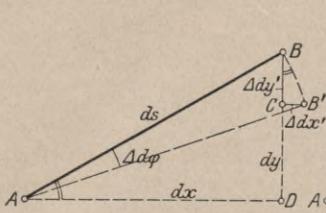


Abb. 54 a.

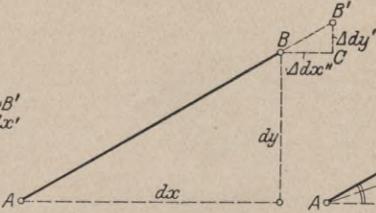


Abb. 54 b.

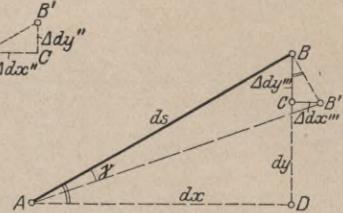


Abb. 54 c.

$$\Delta dx' = C B' = B B' \cdot \frac{D B}{A B} = - dy \cdot \Delta d\varphi, \quad B B' = - A B \Delta d\varphi, \quad \text{Abb. 54 a.}$$

$$\Delta dy' = - C B = - B B' \cdot \frac{A D}{A B} = + dx \Delta d\varphi, \quad \text{Abb. 54 a.}$$

$$\Delta dx'' = B C = \epsilon_0 dx, \quad \text{Abb. 54 b.}$$

$$\Delta dy'' = C B' = \epsilon_0 dy, \quad \text{Abb. 54 b.}$$

$$\Delta dx''' = C B' = B B' \cdot \frac{B D}{A B} = + \gamma \cdot dy, \quad B B' = A B \cdot \gamma, \quad \text{Abb. 54 c.}$$

$$\Delta dy''' = - C B = - B B' \cdot \frac{A D}{A B} = - \gamma dx, \quad \text{Abb. 54 c.}$$

Die gesamte Koordinatenänderung durch M, N, Q ist:

$$\Delta dx = \Delta dx' + \Delta dx'' + \Delta dx''' = \epsilon_0 dx + (\gamma - \Delta d\varphi) dy,$$

$$\Delta dy = \Delta dy' + \Delta dy'' + \Delta dy''' = \epsilon_0 dy - (\gamma - \Delta d\varphi) dx.$$

Wenn nun der Reihe nach alle Querschnitte des Bogens unter der Einwirkung der entsprechenden M, N, Q sich verschieben und verdrehen, wobei auch der linke Kämpfer sich um  $\Delta\varphi_1$  dreht, ergibt sich folgende Änderung in der Lage der beiden Kämpfer:

$$\Delta (\varphi_2 - \varphi_1) = \int \Delta d\varphi$$

$$\Delta (x_2 - x_1) = \int \epsilon_0 dx + \int (\gamma - \Delta d\varphi) dy - (y_2 - y_1) \Delta\varphi_1$$

$$\Delta (y_2 - y_1) = \int \epsilon_0 dy - \int (\gamma - \Delta d\varphi) dx + (x_2 - x_1) \Delta\varphi_1.$$

Man setzt nun die vorigen Werte von  $\epsilon_0$  und  $\Delta d\varphi$  hierein und findet so die drei Gleichungen der Gruppe 4, Seite 3.

Nennt man  $\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha$ ,  $x_2 - x_1 = l$  und  $y_2 - y_1 = d$  und setzt den Wert von  $\Delta\alpha$  in die beiden anderen Gleichungen der Gruppe 4, so ergeben sich folgende Gleichungen für die gesuchten Lagerkräfte  $M_0$ ,  $H_0$ ,  $G$ .

$$E\Delta\alpha = M_0 \int \left( \frac{ds}{Y} + \frac{ds}{Fr^2} \right) - H_0 \int \left( y \frac{ds}{Y} - c \frac{ds}{Fr^2} \right) + \int \mathfrak{M} \left( \frac{ds}{Y} + \frac{ds}{Fr^2} \right) + \int \mathfrak{N} \frac{ds}{Fr},$$

$$E [\Delta l - k\Delta\alpha] = - H_0 \int \left( y^2 \frac{ds}{Y} + c^2 \frac{ds}{Fr^2} + \sin^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right)$$

$$+ G \int \left( x y \frac{ds}{Y} + \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right) + \int \mathfrak{M} \left( y \frac{ds}{Y} - c \frac{ds}{Fr^2} \right)$$

$$- \int \mathfrak{N} c \frac{ds}{Fr} + \int \mathfrak{Q} \sin \varphi \frac{ds}{\alpha F},$$

$$E[-\Delta d + x_2 \Delta(\varphi_1 + \varphi_2)] = M_0 \int x \frac{ds}{Y} - H_0 \int \left( x y \frac{ds}{Y} + \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right) \\ + G \int \left( x^2 \frac{ds}{Y} + \cos^2 \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right) + \int \mathfrak{M} x \frac{ds}{Y} + \int \mathfrak{N} \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F}.$$

Dabei ist  $c$  ein Mittelwert:  $\frac{c}{r} = -\frac{y}{r} + \cos \varphi$ , siehe Abb. 3, Seite 4.

Wählt man nun das bisher beliebige Achsenkreuz  $X Y$  so, daß folgende Koeffizienten der 3 Gleichungen verschwinden, so ergeben sich sofort die Gleichungen der Gruppe 6, Seite 4 für die gesuchten Lagerkräfte.

$$\int_1^2 \left( y \frac{ds}{Y} - c \frac{ds}{F r^2} \right) = 0, \\ \int_1^2 \left( x y \frac{ds}{Y} + \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{\alpha F} \right) = 0, \\ \int_1^2 x \frac{ds}{Y} = 0.$$

Bei symmetrischen Trägern ist die 2. und 3. Bedingung erfüllt, wenn man die Symmetrieachse zur  $Y$ -Achse nimmt. Aus der 1. Gleichung berechnet sich die Lage des Achsursprunges nach Seite 4 und die Lage der wagerechten  $X$ -Achse. Bei unsymmetrischen Bögen ist durch obige Gleichungen Ursprung und Neigung der Achsen gegeben. Man nimmt ein Hilfskreuz  $X', Y'$  an, drückt allgemein  $x, y$  durch  $x', y'$  und die 3 Bestimmungsgrößen des gesuchten Achsenkreuzes aus und findet die Größen durch die 3 Gleichungen.

#### Die Grundlagen für den räumlichen Bogen ohne Gelenke.

Um die unbekanntenen Lagerkräfte zu finden, berechnet man die von den äußeren Lasten verursachten Änderungen in der gegenseitigen Lage der beiden Kämpfer und erhält die sechs statisch unbekanntenen Größen, indem man diese Änderungen an sechs Bedingungen bindet. Nach dem Vorbild des ebenen Problems betrachtet man zunächst die Formänderung eines  $ds$  langen Bogenteiles, an dessen rechtem Querschnitte im Schwerpunkte  $B$  die drei Momente  $M_1, M_2, M_3$  und die Kräfte  $K_1, K_2, K_3$  angreifen. Abb. 11, Seite 15. Die gegenseitige Lage der beiden Querschnitte ist durch  $dx, dy, dz, d\varphi, d\chi, d\psi$  bekannt. Es ist üblich und zweckmäßig, ein Moment oder eine Winkeländerung durch eine auf der Drehebene senkrecht stehende Strecke darzustellen. In diesem Sinne kann man sagen, daß die den Achsen 1, 2, 3 parallelen Momente zunächst den Achsen parallele Winkeländerungen und sodann im Verein mit den Kräften  $K$  auch Verschiebungen in den Achsrichtungen erzeugen. Nach Seite 16 und Abb. 11 ist die Achse 1 die Tangente an den Bogen im Punkte  $B$  und die Achse 2 die Normale, mit  $ds$  in der senkrechten Ebene liegend, während die Achse 3 zur Ebene 1—2 senkrecht steht. Da dieses Achsenkreuz von der Lage des zufällig gewählten Querschnittes  $B$  abhängt, wird sodann ein zweites Achsenkreuz  $X, Y, Z$  genommen, dessen  $Y$ -Achse mit der beliebig geneigten  $X$ -Achse in der alten Ebene 1—2 liegt, während die  $Z$ -Achse wieder dazu senkrecht steht. Die Lage des Achsursprunges und die Neigung der  $X$ -Achse bleiben zunächst unbestimmt.

#### Die Formänderungen bezogen auf das Achsenkreuz 1—2—3:

Durch $K_1$ die Verschiebung	$B B' = \epsilon_1 ds = -\frac{K_1}{E F} ds,$	Abb. 55,
„ $K_2$ „ „	$B B'' = \epsilon_2 ds = -\frac{K_2}{\alpha E F} ds,$	„ 55,
„ $K_3$ „ „	$B B''' = \epsilon_3 ds = -\frac{K_3}{\alpha E F} ds,$	„ 55.

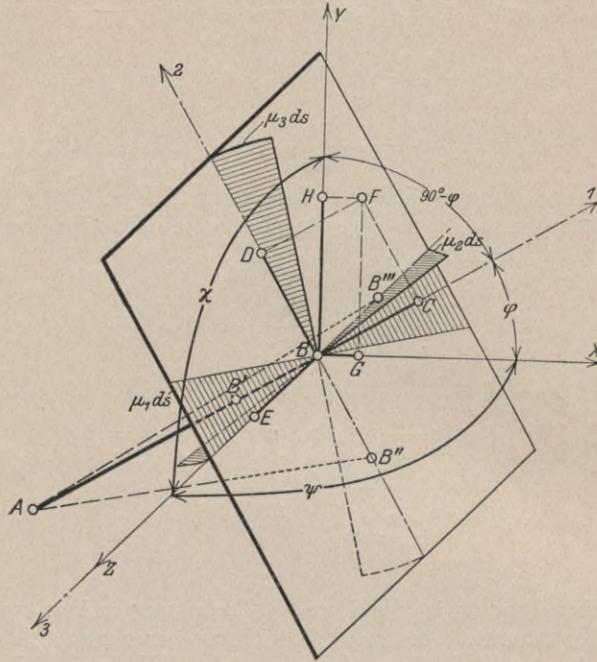


Abb. 55. Die Längen- und Winkeländerungen am Bogenteil AB = ds.

Durch  $M_1$  die Winkeländerung  $\mu_1 ds = -\frac{M_1 ds}{G J_1}$ , Abb. 55,

„  $M_2$  „ „  $\mu_2 ds = -\frac{M_2 ds}{E J_2}$ , „ 55,

„  $M_3$  „ „  $\mu_3 ds = -\frac{M_3 ds}{E J_3}$ , „ 55.

$\mu_1 ds$  in der Ebene 2—3 liegend, dargestellt durch Strecke BC auf Achse 1,  
 $\mu_2 ds$  „ „ „ 1—3 „ „ „ „ BD „ „ 2,  
 $\mu_3 ds$  „ „ „ 1—2 „ „ „ „ BE „ „ 3.

**Die Formänderungen bezogen auf das Achsenkreuz X, Y, Z.**

Die Drehungen BC und BD geben die resultierende Drehung BF, welche parallel der X- und Y-Achse die Komponenten BG und BH hat.  $\sphericalangle 1BX = \varphi$ ,  $\sphericalangle ZBY = \chi$ ,  $\sphericalangle ZBX = \psi$ . Im unbelasteten Zustande sei  $\sphericalangle \chi = \sphericalangle \psi = 90^\circ$ , d. h. die Mittellinie des Bogens ist im Grundriß eine Gerade.

$BG = \mu_1 ds \cos \varphi - \mu_2 ds \sin \varphi = \Delta d\chi$ , Abb. 55,

$BH = \mu_1 ds \sin \varphi + \mu_2 ds \cos \varphi = \Delta d\psi$ , „ 55.

$\Delta d\chi = -M_1 \cos \varphi \frac{ds}{G J_1} + M_2 \sin \varphi \frac{ds}{E J_2}$ ,

$\Delta d\psi = -M_1 \sin \varphi \frac{ds}{G J_1} - M_2 \cos \varphi \frac{ds}{E J_2}$ ,

$\Delta d\varphi = -M_3 \frac{ds}{E J_3}$ .

Wie sich bei der Zerlegung des räumlichen Achsenkreuzes in die drei ebenen Projektionen leicht einsehen läßt, bewirken die Momente  $M$  auch Änderungen der Koordinaten des Punktes  $B$ .

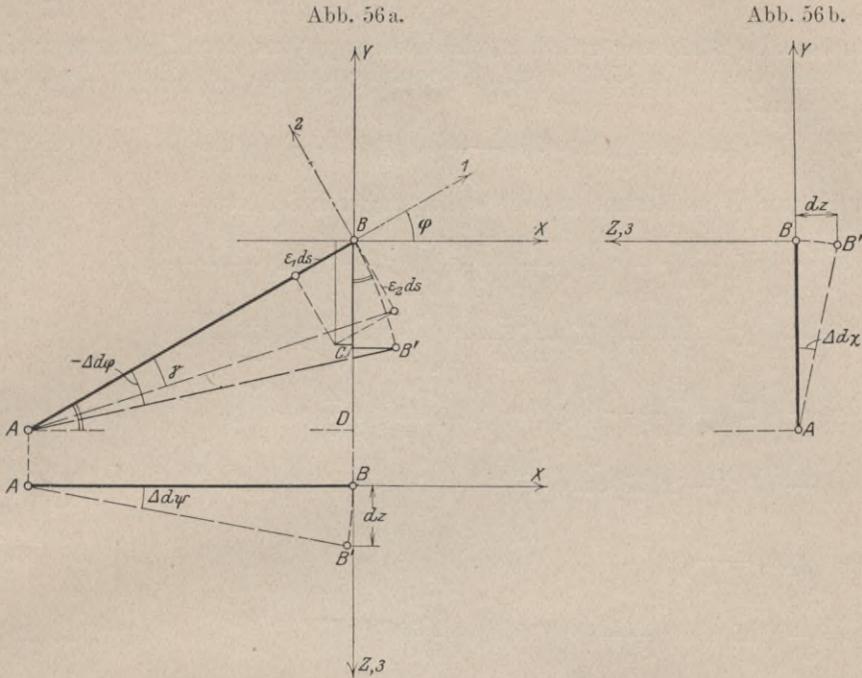


Abb 56 c.

Die Projektionen der Längen- und Winkeländerungen des Stabteiles  $AB = ds$  auf die drei Achsebenen.

$$\Delta dx = CB' = BB' \cdot \frac{BD}{AB} = dy \cdot \Delta d\varphi, \quad \text{Abb. 56 a,}$$

$$\Delta dy = -BC = -BB' \cdot \frac{AD}{AB} = -dx \Delta d\varphi, \quad \text{Abb. 56 b,}$$

$$\Delta dz = -BB' = -dy \Delta d\chi, \quad \text{Abb. 56 b,}$$

$$\Delta dz = BB' = dx \Delta d\psi, \quad \text{Abb. 56 c.}$$

Die Verschiebungen von  $B$  durch die Kräfte  $K$  geben folgende Änderungen der Koordinaten:

$$\Delta dx = \varepsilon_1 ds \cos \varphi - \varepsilon_2 ds \sin \varphi, \quad \text{Abb. 56 a,}$$

$$\Delta dy = \varepsilon_1 ds \sin \varphi + \varepsilon_2 ds \cos \varphi, \quad \text{,, 56 a.}$$

Die Summe der Koordinatenänderungen durch  $M$  und  $K$  ist:

$$\Delta dx = dy \Delta d\varphi + \varepsilon_1 ds \cos \varphi - \varepsilon_2 ds \sin \varphi,$$

$$\Delta dy = -dx \Delta d\varphi + \varepsilon_1 ds \sin \varphi + \varepsilon_2 ds \cos \varphi,$$

$$\Delta dz = -dy \Delta d\chi + dx \Delta d\psi.$$

In der Folge haben sämtliche Größen des linken Kämpfers einen und des rechten Kämpfers zwei Beistriche.  $\Delta x'$ ,  $\Delta y'$ ,  $\Delta z'$ ,  $\Delta \chi'$ ,  $\Delta \psi'$ ,  $\Delta \varphi'$  und  $\Delta x''$ ,  $\Delta y''$ ,  $\Delta z''$ ,  $\Delta \chi''$ ,  $\Delta \psi''$ ,  $\Delta z''$  sind daher die Verschiebungen und Verdrehungen der Kämpfer nach den Achsen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Indem nun alle Querschnitte des ganzen Bogens, auch der linke Kämpfer sich der Reihe nach verschieben und verdrehen, ergibt sich die Gesamtänderung der Lage des rechten Kämpfers gegenüber dem linken.

$$\Delta (x'' - x') = \int \varepsilon_1 ds \cos \varphi - \int \varepsilon_2 ds \sin \varphi + \int (y'' - y) \Delta d\varphi - (y'' - y') \Delta \varphi'$$

$$\Delta (y'' - y') = \int \varepsilon_1 ds \sin \varphi + \int \varepsilon_2 ds \cos \varphi - \int (x'' - x) \Delta d\varphi + (x'' - x') \Delta \varphi',$$

$$\begin{aligned}\Delta(z'' - z') &= - \int (y'' - y) \Delta d\chi + \int (x'' - x) \Delta d\psi + (y'' - y') \Delta\chi' - (x'' - x') \Delta\psi' \\ \Delta(\chi'' - \chi') &= - \int \Delta d\chi, \quad \Delta(\psi'' - \psi') = \int \Delta d\psi, \quad \Delta(\varphi'' - \varphi') = - \int \Delta d\varphi.\end{aligned}$$

Nun wird die Beziehung zwischen den Änderungen und den Kraftsummen  $K$  und  $M$  eingeführt und dadurch die Größe der Lageänderungen durch die äußeren Lasten gefunden. Es wird genannt:

$$x'' - x' = l, \quad y'' - y' = d, \quad z'' - z' = c, \quad \varphi'' - \varphi' = \alpha, \quad \chi'' - \chi' = \beta, \quad \psi'' - \psi' = \delta.$$

Der Faktor  $\alpha$  im Nenner hat die Bedeutung von Seite 3.

$$\Delta l = - \int K_1 \frac{dx}{EF} + \int K_2 \frac{dy}{\alpha EF} - \int (y'' - y) M_3 \frac{ds}{E J_3} - d\Delta\varphi',$$

$$\Delta d = - \int K_1 \frac{dy}{EF} - \int K_2 \frac{dx}{\alpha EF} + \int (x'' - x) M_3 \frac{ds}{E J_3} + l\Delta\varphi',$$

$$\begin{aligned}\Delta c &= - \int K_3 \frac{ds}{\alpha EF} - \int (y'' - y) M_2 \sin \varphi \frac{ds}{E J_2} + \int (y'' - y) M_1 \cos \varphi \frac{ds}{G J_1} + \\ &\quad - \int (x'' - x) M_2 \cos \varphi \frac{ds}{E J_2} - \int (x'' - x) M_1 \sin \varphi \frac{ds}{G J_1} - l \Delta\psi' + d\Delta\chi',\end{aligned}$$

$$\Delta\alpha = \int M_3 \frac{ds}{E J_3},$$

$$\Delta\beta = - \int M_2 \sin \varphi \frac{ds}{E J_2} + \int M_1 \cos \varphi \frac{ds}{G J_1},$$

$$\Delta\delta = \int M_2 \cos \varphi \frac{ds}{E J_2} + \int M_1 \sin \varphi \frac{ds}{G J_1}.$$

Indem man die letzten 3 Gleichungen in die ersten einführt, erhält man:

$$\begin{aligned}\Delta l + y'' \Delta\varphi'' - y' \Delta\varphi' &= - \int K_1 \frac{dx}{EF} + \int K_2 \frac{dy}{\alpha EF} + \int M_3 \frac{y ds}{E J_3}, \\ - \Delta d + x'' \Delta\varphi'' - x' \Delta\varphi' &= \int K_1 \frac{dy}{EF} + \int K_2 \frac{dx}{\alpha EF} + \int M_3 \frac{x ds}{E J_3}, \\ \Delta c + x'' \Delta\psi'' - x' \Delta\psi' - y'' \Delta\chi'' + y' \Delta\chi' &= - \int K_3 \frac{ds}{\alpha EF} \\ &\quad + \int M_2 (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \frac{ds}{E J_2} + \int M_1 (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{ds}{G J_1}.\end{aligned}$$

Um nun endlich die Lagerkräfte zu finden, drückt man die  $K$  und  $M$  durch die  $U_I$ ,  $U_{II}$ ,  $U_{III}$  und  $W_I$ ,  $W_{II}$ ,  $W_{III}$  genannten Reaktionen am linken Kämpfer aus, welche zu denen des beliebig gewählten Anfangszustandes infolge der Bogenwirkung hinzutreten. Als Anfangszustand wurde auf Seite 16 der frei aufliegende Träger gewählt, dessen Querschnittskräfte nach Abb. 11, Seite 15  $\mathfrak{R}_1$ ,  $\mathfrak{R}_2$ ,  $\mathfrak{R}_3$  und  $\mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{M}_2$ ,  $\mathfrak{M}_3$  heißen.

$$K_1 = \mathfrak{R}_1 + U_I \cos \varphi + U_{II} \sin \varphi$$

$$K_2 = \mathfrak{R}_2 - U_I \sin \varphi + U_{II} \cos \varphi$$

$$K_3 = \mathfrak{R}_3 + U_{III}$$

$$M_1 = \mathfrak{M}_1 + W_I \cos \varphi + W_{II} \sin \varphi - U_{III} (x \sin \varphi - y \cos \varphi)$$

$$M_2 = \mathfrak{M}_2 - W_I \sin \varphi + W_{II} \cos \varphi - U_{III} (x \cos \varphi + y \sin \varphi)$$

$$M_3 = \mathfrak{M}_3 + W_{III} - U_I \cdot y + U_{II} x.$$

Der Elastizitätsmodul  $G$  für Schub ist etwa  $\frac{2}{5} E - \frac{3}{8} E$ , und der Faktor  $\alpha$  ist für die bei den Bögen überwiegende Querschnittsform eines Rechteckes nach Seite 3

$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3,2}$ . Setzt man nun die obigen Beziehungen zwischen K, M und  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{M}$ , U, W in die Gleichungen zugleich mit  $G = \frac{3}{8} E$  und  $\frac{1}{\alpha} = 3,2$  ein, so erhält man die gesuchten Gleichungen für die 6 unbekanntenen Größen U und W.

$$\begin{aligned}
 E[\Delta I + y'' \Delta \varphi'' - y' \Delta \varphi'] &= - \int \mathfrak{R}_1 \frac{dx}{F} + 3,2 \int \mathfrak{R}_2 \frac{dy}{F} + \int \mathfrak{M}_3 y \frac{ds}{J_3} \\
 + W_{III} \int y \frac{ds}{J_3} - U_I \left( \int y^2 \frac{ds}{J_3} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{F} + 3,2 \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{F} \right) \\
 + U_{II} \left( \int x y \frac{ds}{J_3} - \int \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F} + 3,2 \int \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F} \right), \\
 E[-\Delta d + x'' \Delta \varphi'' - x' \Delta \varphi'] &= \int \mathfrak{R}_1 \frac{dy}{F} + 3,2 \int \mathfrak{R}_2 \frac{dx}{F} + \int \mathfrak{M}_3 x \frac{ds}{J_3} \\
 + W_{III} \int x \frac{ds}{J_3} - U_I \left( \int x y \frac{ds}{J_3} - \int \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F} + 3,2 \int \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F} \right) \\
 + U_{II} \left( \int x^2 \frac{ds}{J_3} + \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{F} + 3,2 \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{F} \right), \\
 E \Delta \alpha &= \int \mathfrak{M}_3 \frac{ds}{J_3} + W_{III} \int \frac{ds}{J_3} - U_I \int y \frac{ds}{J_3} + U_{II} \int x \frac{ds}{J_3}, \\
 E[c + x'' \Delta \psi'' - x' \Delta \psi' - y'' \Delta \chi'' + y' \Delta \chi'] &= - 3,2 \int \mathfrak{R}_3 \frac{ds}{F} \\
 + \int \mathfrak{M}_2 (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int \mathfrak{M}_1 (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{ds}{J_1} + \\
 - W_I \left( \int \sin \varphi (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \frac{ds}{J_2} - \frac{8}{3} \int \cos \varphi (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{ds}{J_1} \right) \\
 + W_{II} \left( \int \cos \varphi (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int \sin \varphi (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{ds}{J_1} \right) + \\
 - U_{III} \left( \int (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int (x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2 \frac{ds}{J_1} + 3,2 \int \frac{ds}{F} \right), \\
 E \Delta \beta &= - \int \mathfrak{M}_2 \sin \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int \mathfrak{M}_1 \cos \varphi \frac{ds}{J_1} \\
 + W_I \left( \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_1} \right) - W_{II} \left( \int \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2} - \frac{8}{3} \int \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1} \right) \\
 + U_{III} \left( \int \sin \varphi (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \frac{ds}{J_2} - \frac{8}{3} \int \cos \varphi (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{ds}{J_1} \right), \\
 E \Delta \delta &= \int \mathfrak{M}_2 \cos \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int \mathfrak{M}_1 \sin \varphi \frac{ds}{J_1} + \\
 - W_I \left( \int \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2} - \frac{8}{3} \int \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1} \right) + W_{II} \left( \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{J_1} \right) + \\
 - U_{III} \left( \int \cos \varphi (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int \sin \varphi (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{ds}{J_1} \right).
 \end{aligned}$$

Die ersten 3 Gleichungen enthalten nur solche Kräfte, welche in der XY-Ebene liegen, und sind die gleichen, wie sie beim ebenen Bogenträger ohne Gelenke auf Seite 101 abge-

leitet wurden.  $U_I, U_{II}, W_{III}$  entsprechen den dortigen  $H_0, G$  und  $M_0$  und  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{M}_3$  sind identisch mit  $\mathfrak{R}, \mathfrak{Q}$  und  $\mathfrak{M}$ . Da der Gang der weiteren Auflösung nach  $U_I, U_{II}, W_{III}$  dort entwickelt ist, brauchen hier nur noch die 3 letzten Gleichungen, welche die Kräfte der YZ- und XZ-Ebene enthalten, betrachtet werden. Die weitere Untersuchung vereinfacht sich nun wie beim ebenen Problem wesentlich durch die Wahl eines besonderen Achsenkreuzes, das allerdings von jenem verschieden ist. Von Anfang an war nur festgelegt, daß die Z-Achse zur XY-Ebene senkrecht steht. Man darf daher die Lage des Ursprunges und die Neigung der X-Achse so wählen, daß folgende Koeffizienten von  $W_I, W_{II}, U_{III}$  verschwinden:

$$\int \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_2} - \frac{8}{3} \int \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{J_1} = 0,$$

$$\int \sin \varphi (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \frac{ds}{J_2} - \frac{8}{3} \int \cos \varphi (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{ds}{J_1} = 0,$$

$$\int \cos (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \frac{ds}{J_2} + \frac{8}{3} \int \sin \varphi (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{ds}{J_1} = 0.$$

Wenn man bei symmetrischen Bögen die YZ-Ebene in die durch den Bogenscheitel gehende Quersymmetrieebene legt, so ist die 1. und 3. Gleichung ohne weiteres erfüllt. Wie man aus der 2. Gleichung die Lage des Achsursprunges findet, zeigt sich durch Gleichung 23 auf Seite 17. Bei diesem gewählten Achsenkreuz ergeben sich ohne weiteres die Werte für die Lagerkräfte  $W_I, W_{II}, U_{III}$  nach Gruppe 21 auf Seite 16, welche durch Kräfte in der YZ- und XZ-Ebene beim räumlichen Bogen ohne Gelenke entstehen. Da dort starre Widerlager angenommen wurden, verschwanden auch dabei die linken Seiten obiger Gleichungen.

Beim unsymmetrischen Bogen nimmt man zunächst ein beliebiges Achsenkreuz an und drückt die gesuchten Koordinaten durch die Hilfskoordinaten aus. Aus obigen 3 Gleichungen findet man dann die beiden Hilfskoordinaten des richtigen, gesuchten Achsursprunges und auch den Winkel der gesuchten X-Achse mit einer der Hilfsachsen.

**Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken.** Eine systematische Darstellung der verschiedenen Arten, ihrer Größe und ihres Einflusses auf die konstruktive Gestaltung der Brücken. Von **Fr. Engesser**, Baurat und Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe.

I. Die Zusatzkräfte. Mit 58 Textabbildungen. Preis M. 3,—.

II. Die Nebenspannungen. Mit 137 Textabbildungen. Preis M. 7,—.

---

**Theorie und Berechnung der Bogenfachwerkträger ohne Scheitelgelenk.** Mit verschiedenen der Praxis entnommenen Zahlenbeispielen. Von **Fr. Engesser**, Baurat und Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe. Mit 2 lithographierten Tafeln. Preis M. 2,—.

---

**Vereinfachte Berechnung eingespannter Gewölbe.** Von Dr.-Ing. **Kögler**, Stadtbaumeister und Privatdozent in Dresden. Mit 8 Textfiguren. Preis M. 2,—.

---

**Grundlagen zur Berechnung von Steifrahmen mit besonderer Rücksicht auf Eisenbeton.** Von Dr.-Ing. **Richard Rossin**. Mit 54 Textfiguren. Preis M. 3,60.

---

**Die Berechnung von Steifrahmen** nebst anderen statisch unbestimmten Systemen. Von Ingenieur **E. Björnstad**, Grünberg. Mit 127 Textfiguren, 19 Tabellen und einer graphischen Anlage. Preis M. 9,—; in Leinwand gebunden M. 10,—.

---

**Studien über strebenlose Raumfachwerke und verwandte Gebilde.** Von Dr.-Ing. **Henri Marcus**. Mit 48 Textabbildungen. Preis M. 5,60.

---

**Studien über mehrfach gestützte Rahmen- und Bogenträger.** Von Dr.-Ing. **Henri Marcus**. Mit 52 Textfiguren. Preis M. 4,—.

---

**Das Kabel im Brückenbau.** Von Dr.-Ing. **F. Hohlfeld**. Preis M. 4,—.

---

**Eisenbahn-Balkenbrücken.** Ihre Konstruktion und Berechnung nebst sechs zahlenmäßig durchgeführten Beispielen. Von Ingenieur **Joh. Schwengler**. Mit 84 Textfiguren und 8 lithographischen Tafeln. Kartoniert Preis M. 4,—.

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

---

**Die Eisenkonstruktionen.** Ein Lehrbuch für bau- und maschinentechnische Fachschulen, zum Selbststudium und zum praktischen Gebrauch. Nebst einem Anhang, enthaltend Zahlentafeln für das Berechnen und Entwerfen eiserner Bauwerke. Von **L. Geusen**, Dipl.-Ing. und Kgl. Oberlehrer in Dortmund. Mit 518 Textfiguren und auf 2 zweifarbigen Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 12,—.

---

**Widerstandsmomente, Trägheitsmomente und Gewichte von Blechträgern** nebst numerisch geordneter Zusammenstellung der Widerstandsmomente von 59 bis 113 930, zahlreichen Berechnungsbeispielen und Hilfstafeln. Bearbeitet von **B. Böhm**, Kgl. Gewerbeberater, Bromberg, und **E. John**, Kgl. Regierungs- und Baurat, Essen. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage.

In Leinwand gebunden Preis M. 12,—.

---

**Eisen im Hochbau.** Ein Taschenbuch mit Zeichnungen, Tabellen und Angaben über die Verwendung von Eisen im Hochbau. Herausgegeben vom Stahlwerks-Verband A.-G., Düsseldorf. Vierte Auflage. Mit zahlreichen Figuren und Tabellen. In Leinwand gebunden Preis M. 3,—, bei gleichzeitigem Bezug von 20 Exemplaren M. 2,75, von 50 Exemplaren M. 2,60, von 100 Exempl. M. 2,50 für das Exemplar.

---

**Berechnung von Behältern** nach neueren analytischen und graphischen Methoden. Für Studierende und Ingenieure und zum Gebrauch im Konstruktionsbureau. Bearbeitet von Dr.-Ing. **Theodor Pöschl**, Dozent an der k. k. Technischen Hochschule in Graz, und Dr.-Ing. **Karl v. Terzaghi**, Ingenieur in San Francisco. Mit 34 Textfiguren.

Preis M. 3,—.

---

**Grundwasserabsenkung bei Fundierungsarbeiten.** Von Dr.-Ing. **Wilh. Kyrieleis**. Mit 81 Textfiguren und Tabellen sowie 3 Tafeln.

Preis M. 6,—.

---

**Die Wasserkräfte, ihr Ausbau und ihre wirtschaftliche Ausnutzung.** Ein technisch-wirtschaftliches Lehr- und Handbuch. Von Dr.-Ing. **Adolf Ludin**, Großherzogl. Bauinspektor. In zwei Bänden. Mit 1087 Abbildungen im Text und auf 11 Tafeln. Preisgekrönt von der Kgl. Akademie des Bauwesens in Berlin.

In Leinwand gebunden Preis M. 60,—.

---

**Die Naßbagger und die Baggereihilfsgeräte.** Ihre Berechnung und ihr Bau. Von **M. Paulmann**, Regierungsbaumeister in Emden, und **R. Blaum**, Regierungsbaumeister in Emden. Mit 485 Textfiguren und 10 Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 22,—.

---

**Die Bestimmung der Querschnitte von Staumauern und Wehren aus dreieckigen Grundformen.** Von **E. Link**, Regierungsbaumeister a. D. Mit 33 Abbildungen.

Preis M. 2,40.

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

---

**Der Wettbewerb um eine feste Straßenbrücke über den Rhein zwischen Ruhrort und Homberg.** Von **Karl Bernhard**, Regierungsbaumeister und Privatdozent in Berlin. Mit 145 Textabbildungen und 2 Textblättern. Preis M. 2,—.

---

**Die Treskow-Brücke zu Oberschöneweide bei Berlin.** Von **Karl Bernhard**, Reg.-Baumeister und Privatdozent in Berlin. Mit 74 Textabbildungen und 1 Textblatt. Preis M. 2,—.

---

**Die Stubenrauch-Brücke über die Oberspree bei Berlin.** Von **Karl Bernhard**, Reg.-Baumeister und Privatdozent in Berlin. Mit 52 Textabbildungen und 1 Textblatt. Preis M. 2,—.

---

**Der Wettbewerb um den Entwurf einer Straßenbrücke über den Neckar bei Mannheim.** Von **Karl Bernhard**, Regierungsbaumeister und Privatdozent in Berlin. Mit 100 Textabbildungen und 1 Textblatt. Preis M. 2,—.

---

**Der Wettbewerb um den Entwurf einer Straßenbrücke über den Rhein bei Köln.** Von **Karl Bernhard**, Regierungsbaumeister a. D., Beratender Ingenieur und Privatdozent in Berlin. Preis M. 4,—.

---

**Die Kaiser-Wilhelm-Brücke** über die Wupper bei Müngsten im Zuge der Eisenbahnlinie Solingen—Remscheid. Mit Genehmigung der Königl. Eisenbahn-Direktion Elberfeld herausgegeben von Vereinigte Maschinenfabrik Augsburg und Maschinenbaugesellschaft Nürnberg, A.-G., Werk Nürnberg. Bearbeitet von **W. Dietz**, Professor an der Königl. Techn. Hochschule in München. Mit 194 Textfiguren und 48 lithographischen Tafeln. Zwei Bände (Text und Tafeln). In Leinwand gebunden Preis M. 50,—.

---

**Die neue Brücke über die Mosel bei Novéant.** Von **H. Schüreh**, Oberingenieur der Firma Ed. Züblin & Cie., Straßburg i. E. Mit 45 Abbildungen. Preis M. 1,60.

---

**Die Theorie der Pfahlgründungen.** Von Ingenieur **Richard Kafka**. Mit 19 Textfiguren. Preis M. 3,—.

---

**Die Berechnung der Tragfähigkeit gerammter Pfähle.** Von Ingenieur **Richard Kafka**, Wien. (Sonderabdruck aus „Armierter Beton“ 1910, Heft 11 u. 12.) Preis M. —,80.

---

**Betonpfahl „System Mast“.** Ein Gründungsverfahren mit „Betonpfählen in verlorener Form“. Von **H. Struif**, ständig. Assistent an der Kgl. Technischen Hochschule Berlin. Zweite, vermehrte Auflage. Mit 75 Textfiguren. Preis M. 1,60.

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

**Taschenbuch für Bauingenieure.** Unter Mitarbeit hervorragender Fachmänner herausgegeben von **Max Foerster**, ord. Professor an der Technischen Hochschule in Dresden. 1927 Seiten mit 2723 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 20,—.  
Ausführlicher Sonderprospekt über dieses Werk steht kostenlos zur Verfügung!

---

**Der Bauingenieur in der Praxis.** Eine Einführung in die wirtschaftlichen und praktischen Aufgaben des Bauingenieurs. Von **Th. Janssen**, Regierungsbaumeister a. D., Privatdozent an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin. Preis M. 6,—; in Leinwand gebunden M. 6,80.

---

**Bauakustik.** Der Schutz gegen Schall und Erschütterungen. Von **Dr. Franz Weisbach**. Mit 31 Figuren im Text. Preis M. 3,60.

---

**Über das Wesen und die wahre Größe des Verbundes zwischen Eisen und Beton.** Von **Dr.-Ing. Adolf Kleinlogel**, Diplomingenieur. Mit 5 Text- und 9 Tafelfiguren. Preis M. 2,40.

---

**Untersuchungen an durchlaufenden Eisenbetonkonstruktionen.** Versuchsvorbereitungen und Ausführungen von Professor **H. Scheit**, Geh. Hofrat, Direktor der Kgl. Sächs. Mechan.-Technischen Versuchsanstalt in Dresden. Versuchsplan, Entwurf, Bearbeitung der Ergebnisse und Schlußfolgerungen von **Dr.-Ing. E. Probst**, Privatdozent an der Kgl. Technischen Hochschule in Berlin. Mit 52 Textfiguren. Preis M. 5,—.

---

**Schubwiderstand und Verbund in Eisenbetonbalken** auf Grund von Versuch und Erfahrung. Von **Dr.-Ing. R. Saliger**, ord. Professor der k. k. Technischen Hochschule in Wien. Mit 25 Tabellen und 139 Abbildungen. Preis M. 5,—.

---

**Eisenbetondecken, Eisensteindecken und Kunststeinstufen.** Bestimmungen und Rechnungsverfahren nebst Zahlentafeln, zahlreichen Berechnungsbeispielen und Belastungsangaben. Zusammengestellt und berechnet von **Carl Weidmann**, Stadtbauingenieur bei der Baupolizeiverwaltung in Stettin. Mit 40 Textfiguren und einer lithographierten Tafel. Kartoniert Preis M. 2,80.

---

**Armierter Beton.** Monatschrift für Theorie und Praxis des gesamten Betonbaues. In Verbindung mit Fachleuten herausgegeben von **Dr.-Ing. E. Probst**, Privatdozent an der Techn. Hochschule zu Berlin, und **M. Foerster**, ord. Professor an der Techn. Hochschule zu Dresden. Erscheint seit 1908. Preis des Jahrgangs M. 20,—.

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.



Verlag von Julius Springer i

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
BIBLIOTEKA GŁÓWNA

III  
L. inw. 36966

Kdn. Zam. 480/55 20.000

---

## Die Zusatzkräfte und Nebenspannungen

**brücken.** Eine systematische Darstellung der Größe und ihres Einflusses auf die konstruktiv

Von Fr. Engesser, Baurat und Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe.

I. Die Zusatzkräfte. Mit 58 Textabbildungen.

Preis M. 3,—.

II. Die Nebenspannungen. Mit 137 Textabbildungen.

Preis M. 7,—.

---

## Theorie und Berechnung der Bogenfachwerkträger ohne Scheitelgelenk.

Mit verschiedenen der Praxis entnommenen Zahlenbeispielen. Von Fr. Engesser, Baurat und Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe. Mit 2 lithographierten Tafeln.

Preis M. 2,—.

---

## Vereinfachte Berechnung eingespannter Gewölbe.

Von Dr.-Ing. Kögler, Stadtbaumeister und Privatdozent in Dresden. Mit 8 Textfiguren.

Preis M. 2,—.

---

## Grundlagen zur Berechnung von Steifrahmen mit besonderer Rücksicht auf Eisenbeton.

Von Dr.-Ing. Richard Rossin. Mit 54 Textfiguren.

Preis M. 3,60.

---

## Die Berechnung von Steifrahmen

nebst anderen statisch unbestimmten Systemen. Von Ingenieur E. Björnstad, Grünberg. Mit 127 Textfiguren, 19 Tabellen und einer graphischen Anlage.

Preis M. 9,—; in Leinwand gebunden M. 10,—.

---

## Studien über strebenlose Raumbauwerke und verwandte Gebilde.

Von Dr.-Ing. Henri Marcus. Mit 48 Textabbildungen.

Preis M. 5,60.

---

## Studien über mehrfach gestützte Rahmen- und Bogenträger.

Von Dr.-Ing. Henri Marcus. Mit 52 Textfiguren.

Preis M. 4,—.

---

## Das Kabel im Brückenbau.

Von Dr.-Ing. F. Hohlfeld. Preis M. 4,—.

---

## Eisenbahn-Balkenbrücken.

Ihre Konstruktion und Berechnung nebst sechs zahlenmäßig durchgeführten Beispielen. Von Ingenieur Joh. Schwengler. Mit 84 Textfiguren und 8 lithographischen Tafeln. Kartoniert Preis M. 4,—.

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.









BIBLIOTEKA GŁÓWNA

III 36 966

PK 349/83 - 100 000 egz.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301195