A MAGYAR MÉRNÖK- ÉS ÉPÍTÉSZ-EGYLET
KÖNYVKIADÓ VÁLLALATA.
Buchunternehmung
— II. CYKLUS. —

Die Graphostatik der Träger

# A TARTÓK GRAFOSZTATIKÁJA.

1. 1.

IRTA

**KHERNDL ANTAL**

OKL. MÉRNÖK, A JÓZSEF-MŰEGYETEM NY. R. TANÁRA, A MAGY. TUD. AKADÉMIA LEV. TAGJA.

Band Heft

25/11 I. KÖTET. 1. FÜZET.

A SZÖVEG KÖZÉ NYOMOTT 172 ÁBRÁVAL.



A II. CYKLUS V. ILLETMÉNYÉNEK RÉSZE.



BUDAPEST, 1893.
KIADJA A MAGYAR MÉRNÖK- ÉS ÉPITÉSZ-EGYLET.

Herrn geh. Baurath Dr. H. Zimmermann
hochachtungsvoll
der Verf.

# A TARTÓK GRAFOSZTATIKÁJA.

# ELŐSZÓ.

Midőn művem első kötetének első füzetét a Magy. Mérnök- és Építész-Egylet kiadványai során ezennel a technikus közönség használatára és a szakavatottak megbirálására bocsátom, kötelességemnek tartom legelőbb is őszintén érzett köszönetemet fejezni ki az Egyesület megtisztelő és nagybecsű támogatásáért, mely nélkül művem közzététele alig lett volna lehetséges.

A tartók grafosztatikája ama tudománynak egyik alkalmazott része, melyet Culmann alig egy negyedszázad előtt alapított meg, *Die Graphische Statik* című alapvető munkájának közzétételével, és részben már előbb, a zürichi műegyetemen tartott előadásaival. Ő maga a következőket mondja e tekintetben, műve francia kiadásának előszavában, melynek e részét ezennel lehetőleg hű fordításban közlöm:

„A grafikai módszerek rendszerszerű alkalmazásai Poncelet-től származnak. Ő adta ugyanis legelőször elő, a metzi katonai mérnökkari akadémián (École d'application du génie et d'artillerie) e módszereket, melyek alapját Monge szép dolgozatai részben megvetették volt, oly hallgatóság előtt, mely tanulmányait a párisi École polytechnique-en végezte, az egyedüli iskolán, melyen akkorában a grafikai tudományokat előadták. Poncelet ismerte föl legelőször, hogy e módszerek nemcsak hogy sokkal gyorsabban vezetnek célhoz, mint az analitikaiak, de a gyakorlatban több mint eléggé pontosak is, mivelhogy bármit tegyünk is, soha sem lesz lehetséges a rajzlapokon megszerkesztett terven nagyobb pontosságot érni el, mint a grafikai erőterven. A boltozatokra és támaszfalakra alkalmazott e módszerek a *Mém. de l'off. du génié*-ben jelentek meg. (12—13-ik) kötet. Az eredők meghatározására azonban Poncelet nem alkalmazta a kötélpoligónt, melynek fölhasználása oly nagy értékű segédeszközöket szolgáltat a grafosztatikának (Varignon tesz róla említést 1687-ben közzétett *Nouvelle mécanique*-jában) s utódjának a metzi iskolán, Michon-nak volt fönntartva először alkalmazni a kötélpoligónt, a boltozatok súlypontjának meghatározására, a *Theorie des voûtes* című művében. (1845-ben véletlenül jutottak kezünkhöz a szerző nevét meg nem említő autografált előadások. Beküldőjük Michon-nak tulajdonítá őket. Ez előadó folyam a boltozatok állósságáról *hat*, a támaszfalakéról *négy* előadásra terjed ki.)"*)

Culmann alakító ereje kellett hozzá, hogy a grafosztatikai tudományt rövid emberélet alatt, — csak első elemeit véve ki, — *megalkossa*. Mert midőn a *Graphische Statik* első kiadása 1866-ban megjelent, valóban meg volt teremtve a grafosztatika módszertanának velejét képező része, valamint az új tudománynak a legfontosabb szilárdsági kérdésekre vonatkozó alkalmazása is.

Redtenbacher F., ki ugyanabban az időben a gépészi mechanikában fejtett ki korszakot alkotó tevékenységet, a melyben Culmann a mérnöki mechanika terén, nem egyszer sajnálattal hangsúlyozta előadásaiban, a mechanika gyakorlati alkalmazásai elterjedésének lassú voltát, mit az analitikai módszreknek, a technikai föladatok megoldásában érezhető ama fogyatkozásnak tulajdonított, hogy az egyes kérdések megoldását a mechanika szempontjából való megérthetőségtől teljesen elvont úton, egyenletek képében, mint kész eredményeket szolgáltatják kézhez. E hiányon az új tudomány teljesen segített, s úgy vélem, hogy nem tévedek abbeli véleményemben, hogy ezzel nemcsak az alkalmazott mechanika elterjedésének tett igen fontos szolgálatot: hanem, hogy a fölmerülő kérdések mechanikai lényegének, a grafikai tárgyalás módjával összekötött megvilágítása útján, nagy része volt valamint az analitikai úgy grafikai szilárdságtan terén a legutóbbi negyedszázad folyamán tapasztalt nagy haladás előkészítésében.

---

*) Lamé és Clapeyron is tárgyalták a kötélpoligónokat. (Mém. sur les polyg. funic. Par Lamé et Clapeyron. *Journ. des voies commun.* St. Pétersbourg, 1826—1827.)

A „Tartók Grafosztatikájában“ — noha egyébiránt a fontosabb föladatok számítás útján való megoldását, ahol megokoltnak találom, szintén megmutatom, — a grafikai módszer ez előnyének teljes értékesítésére törekedtem. A mű terjedelme megnagyobbodott ugyan ennek következtében, de úgy vélem, hogy a tárgyalás módszere, tekintettel az imént mondottakra, helyesen választottnak fog bizonyulni, valamint az egész műre, úgy különösen ez első füzetre nézve is, mely a tartók grafosztatikájának előkészítő részét tartalmazza, tehát nem terjed ki a tartók szilárdságtana sajátképpeni problemáira, s melynek értéke ez okból, — a főbb grafikai módszerek megismertetésén kivül, — csakis a sztatika törvényei alkalmazásának megvilágításában fekhet.

Soká nem tudtam elhatározni, fölvegyem-e művembe e bevezető részt is, és ha igen, ne halaszszam-e közzétételét későbbre. Az Egyesület Könyvkiadó Vállalata intéző köreinek szíves tanácsa következtében azonban mégis arra határoztam el magamat, hogy művem első kötetében a grafosztatika módszertanát tárgyalom, beleértve ebbe a síkbeli tömör és rácsos szerkezetek rugalmas elhajlásának meghatározását. A 2-ik kötet a sztatikailag határozott reakciójú és belső erejű, a 3—4-ik pedig ama tartók elméletét tartalmazza, melyeken vagy a reakciók vagy a belső erők, vagy mind a reakciók, mind a belső erők, sztatikailag határozatlanok.

A sztatika ismeretét művemben, céljára való tekintettel, föltételezem, mi fölöttébb elősegíti az egyes föladatoknak föntebb hangsúlyozott, sztatikai úton való tárgyalását. A projektiv geometria legfontosabb törvényeit szintén föltételezem, s alkalmazásukat akképpen adom elő, hogy a mondandókat azok is megérthessék, kik a geometria e részében kevésbbé jártasak. Nem szenved ugyan kétséget, hogy a grafosztatika módszereit e tételek nélkül is le lehet származtatni. Úgy vélem azonban, hogy mindenki meggyőződhetik művem olvasásából is, hogy a projektiv geometria bevonása igen nagy mértékben előmozdítja mind a tárgyalás egyszerűsítését és világosságát, mind a talált eredményekben uralkodó törvények megvilágítását, aminthogy az sem szenved kétséget, hogy a projektiv geometria, mint ezt már többen kijelentették, a grafosztatika további fejlődésének nemcsak leghatalmasabb fegyvere, de, mondhatni, előzetes föltétele.

Ami a művemben előadott elméletek szerzőit illeti, az ide vonatkozó megjegyzéseket a fontosabb új tételek tárgyalása alkalmával fogom megtenni. Csakis a tartók szilárdságtana fejlődésének történetét legyen szabad, legfőbb vonásaiban, már e helyen jelezni meg vázlatosan, főképp grafikai irányban, az utóbbi negyedszázad folyamán.

Az időszerinti sorban az első fontos haladás a *grafosztatika* terén, Culmann alapvető műve első kiadásának megjelenése után, — Maxwell és Cremona kutatásait a rácsos szerkezetek vetületével geometriai reciprocitásban levő erőtervekről csak érintőlegesen említve meg, — Mohr*) nevéhez van kapcsolva, kinek legelőször sikerült, a deformáció eltorzítása útján, az egyenes tömör rudak elhajlását *megszerkeszteni*, s ki ez úton mint első alapította meg a többtámaszú, tömör gerendatartók grafikai elméletét is. Culmann mind a tömör rudak elhajlásának elméletét,**) mind ennek a többtámaszú gerendatartókra való alkalmazását, — az utóbbit Ritterrel (Zürich) egyetemben, — nagy mértékben általánosította.***) A kéttámaszú tömör ívekre szintén alkalmazta Culmann, művének épp idézett második kiadásában, a rugalmas elhajlás tanának tőle származó módszereit; ívelmélete azonban még nem egészen grafikai, hanem a leszármaztatott egyenletekben szereplő függvények megszerkesztésén alapul.

A *rácsos* tartók deformációjának elméletében, és ezzel a sztatikailag határozatlan reakciójú vagy belső erejű rácsos tartók szilárdságtanában, legfőképp Mohr- és Fränkel-nek 1874—1875-ben közzétett értekezései képeztek fordulópontot. Mohr a virtuális sebesség elve alapján származtatja le elméletét, s megmutatja alkalmazását, valamint a sztatikailag határozatlan reákcióknak; (kéttámaszú íveken és többtámaszú rácsos gerendatartókon,) úgy a sztatikailag határozatlan belső erőknek (többszörös rácsozatú, kéttámaszú gerendatartókon) megállapítására, részben számítás, részben szerkesztés útján, míg az elhajlásokat a kéttámaszú

*) Beitr. z. Theor. d. Holz- und Eisen-Constr. *Hannov. Zeitschr.* 1868. p. 19.

**) *Culmann*, Graf. Stat. 2. Aufl. Bnd. I. 562—598. (Zürich 1875.)

***) *Ritter*, Die elast. Linie und ihre Anw. auf d. contin. Balken. (1. Aufl. Zürich 1871.)

gerendatartón már kötélpoligónnal szerkeszti meg.*) Fränkel a forgás pillanatbeli középpontjából indul ki, s a kéttámaszú ívek reakcióinak meghatározására alkalmazza elméletét, számítás útján.**) Ugyanez útat követte — Fränkel-től függetlenül — Culmann is, a zürichi műegyetemen tartott előadásaiban.***) Williot†) még más módon mutatta meg a rácsos tartók egyes pontjain, a rugalmas deformáció folytán bekövetkező elmozdulások megállapítását, grafikai úton, valódi irányaikban. Winkler E. ellenben számítás útján mutatott egyszerű módot a deformációtól függő erők megmeghatározására, a lapokra támaszkodó rácsos ívekre, és a gyürűalakú rácsos szerkezetekre.††) Az elmozdulások fölcserélhetőségét illető tétel, mely annyira egyszerűsíti a rugalmas elhajlás elméletén alapuló kérdéseknek főképp grafikai megoldását, hogy számos ily föladat megoldása, mondhatjuk csak ez elv értékesítése útján válik gyakorlatilag lehetővé, Maxwell-†††) és Castigliano-tól§) származik; (egyes speciális esetekben azonban, tőlük függetlenül, mások is alkalmazták e törvényt, különböző időben;) a deformációmunka minimumát illető tétel pedig, melyet az analitikai leszármaztatások egyszerűsítésére lehet gyakran sikeresen alkalmazni, szintén Castigliano-tól§§) van.

Önként értődik, hogy az eddig említett műveken kivül mindazokat az egyéb, — a tárgyalás folyamán megnevezett, — irodalmi munkákat és értekezéseket is fölhasználtam, melyeket erre alkalmasnak találtam. Annak megállapítását, hogy mi képezi az előadottakból sajátomat: az e tekintetben illetékes olvasóra bizom.

Végül még csak azt említem meg, hogy az ábrák legnagyobbrészt *léptékszerűen* vannak megszerkesztve, és hogy a használt erő- és hosszléptéket, — hogy a szerkesztéseket a kezdőkre nézve telje-

*) Beitr. z. Theor. d. Bogenfachwerke. *Hannov. Z.* 1874, p. 223 és Beitr. z. Theor. d. Fachw. *Hannov. Z.* 1874, p. 509 és 1875, p. 17.

**) Anw. d. Theor. d. aug. Drehp. auf d. Best. d. Formänd. von Fachw. *Civ.-Ing.* 1875, p. 515.

***) Constr. d. Eisenk. einf. Balkenfachw. *Eisenb.* 1881, p. 130.

†) Nations prat. s. l. Stat. Graph. *Génie Civ.* Oct. 1877.

††) Beitr. z. Theor. d. Bogentr. *Hannov. Z.* 1879, p. 199.

†††) On the calc. of the equil. and stiffness of frames. *Phil. Mag.* 1864, p. 294.

§) Intorno ad una propr. dei sist. elast. *Atti delle Scienzi di Torino.* 1882, p. 705.

§§) Theorie de l'équilibre des syst. élast. Turin, 1879.

sebben megvilágítsam, — rendesen meg is jelöltem. A sokszorosítás műveleténél fogva az ábrák nem tarthatnak ugyan pontosságra számot, épp említett céljuknak azonban, úgy remélem, mégis megfelelnek. A számbeli példákban szereplő hosszak és erők, magától értődőleg, az eredeti rajzlapokon mérettek le.

Az ábrák művem első kötetének jelenleg megjelenő első füzetéhez egyébiránt Beke József, Weil Léon és Zelovich Kornél műegyetemi tanársegéd urak szerkesztették, nagy odaadással és szorgalommal, két egymásután következő év folyamán. Ugyanők számították ki a példákat is. Fölhasználom az alkalmat, hogy nekik, valóban nagy fáradságukért, ezennel őszinte köszönetet mondjak.

Budapest, 1893, április hó.

*Kherndl Antal.*

# TARTALOM.

(Az első kötet első füzetéhez.)

Oldal

Előszó ... I

## ELSŐ RÉSZ.

## A tartók sztatikájában fölmerülő föladatok grafikai megoldásáról.

### ELSŐ FEJEZET.

### A mechanikai és a geometriai mennyiségek grafikai méréséről.

1. §. A grafikai mérés fogalma ... 1
2. §. A sik idomok területének megszerkesztése ... 3
3. §. A testek térfogatának megszerkesztése ... 13

### MÁSODIK FEJEZET.

### Általános megjegyzések a tartókról és a reájuk ható erőkről.

4. §. A külső és a belső erők ... 16
5. §. A tartók osztályozása ... 20
6. §. Az elválasztó csuklók befolyása a külső erőkre ... 21

### HARMADIK FEJEZET.

### A síkbeli erők összetétele és fölbontása.

7. §. Ugyanegy (véges távolságú) ponton átmenő, sikbeli erők összetétele ... 24
8. §. A nem ugyanegy ponton átmenő, sikbeli erők összetétele ... 28
9. §. Az erők felbontása, velük nem párhuzamos, sikbeli összetevőkre ... 31
10. §. Tételek az erő- és a kötélpoligónról ... 35
11. §. A párhuzamos erők kötélpoligónjai ... 48
12. §. Párhuzamos erők összetevői és egyensúlyozó erői ... 54
13. §. A párhuzamos erők nyomatékának, és az algebrai szummációknak megszerkesztése ... 57
14. §. Tetszőleges erők nyomatékainak megszerkesztése ... 63
15. §. A megoszló párhuzamos erők kötélgörbéi ... 67
16. §. Föladatok a kötélpoligónok megszerkesztésére ... 69

NEGYEDIK FEJEZET.

**A térbeli erők összetétele és fölbontása.**


| | Oldal |
|---|---|
| 17. §. Bevezető megjegyzések | 75 |
| 18. §. A térbeli erők grafikai fölbontása | 77 |
| 19. §. Ugyanegy (véges távolságú) ponton átmenő térbeli erők összetétele | 85 |
| 20. §. A párhuzamos erők összetétele a térben | 86 |
| 21. §. A térbeli erőpárok összetétele és fölbontása | 89 |
| 22. §. Tetszőleges erők összetétele a térben | 103 |
| 23. §. A társegyenesek viszonylagos helyzete | 110 |
| 24. §. Új társerők megszerkesztése adott társerőkből | 115 |
| 25. §. Egyensúlyben levő, vagy erőpárt eredményező térbeli erők | 118 |
| 26. §. A térbeli erők nyomatéka | 119 |


ÖTÖDIK FEJEZET.

**A sík idomok súlypontja, tehetetlenségi nyomatéka és belső magja.**


| | |
|---|---|
| 27. §. A sík idomok súlypontja | 125 |
| 28. §. A sík idomok tehetetlenségi nyomatéka | 131 |
| 29. §. A tehetetlenségi ellipszisek, és a centrális ellipszis | 143 |
| 30. §. A centrális ellipszis főbb alkalmazásai | 147 |
| 31. §. A neutrális tengely, a belső mag, és ennek alkalmazásai | 154 |


HATODIK FEJEZET.

**Alapvető tételek a tartókra ható külső erők elmélete köréből, síkbeli erők esetére.**


| | |
|---|---|
| 32. §. Bevezető megjegyzések | 164 |
| 33. §. Az iveken és függő tartókon fölvett átmetszésekre ható külső erők | 168 |
| 34. §. A gerendatartókon fölvett átmetszésekre ható külső erők | 174 |
| 35. §. A nyomatékok és az eredők ábrája a gerendatartók elméletében | 184 |
| 36. §. A két végén egy-egy csuklóra támaszkodó gerendatartó | 192 |
| 37. §. A két végén egy-egy lapra támaszkodó gerendatartó | 202 |
| 38. §. A végein belül két ponton megtámasztott gerendatartó | 203 |
| 39. §. A többtámaszú csuklótlan gerendatartó | 207 |
| 40. §. A csuklós többtámaszú gerendatartó | 210 |
| 41. §. A teher síkbeli átvitele, kéttámaszú gerendatartók által | 212 |
| 42. §. A két végén megtámasztott s átvitt súlyokkal megterhelt gerendatartó | 216 |
| 43. §. A csuklós többtámaszú gerendatartó, átvitt súlyokkal megterhelve | 225 |
| 44. §. A súlyok térbeli átvitele | 228 |

ELSŐ RÉSZ.

# A tartók sztatikájában fölmerülő föladatok grafikai megoldásáról.

ELSŐ FEJEZET.

## A mechanikai és a geometriai mennyiségek grafikai méréséről.

1. §.

### A grafikai mérés fogalma.

*1. Az alap- és a mérő-hosszúságról.* Az $\mathrm{N}_1 \mathrm{N}_2 \mathrm{N}_3 \ldots \mathrm{N}$ geometriai mennyiségeket, ha $n$-ik fokúak, (t. i. ha $n$ hosszúság szorzatából állanak), akképpen mérjük meg grafikai úton, hogy elosztjuk valamennyit ugyanazon $n-1$ hosszúság szorzatával $\mathfrak{N}$-nel, (vagyis ugyanazzal az $n-1$-ik fokú mennyiséggel), s megszerkesztjük a hányadosokat képező $h_1 h_2 h_3 \ldots h$ hosszúságokat. Legyen ugyanis:

$$\frac{\mathrm{N}_1}{\mathfrak{N}} = h_1\,; \quad \frac{\mathrm{N}_2}{\mathfrak{N}} = h_2\,; \ldots . \frac{\mathrm{N}}{\mathfrak{N}} = h,$$

akkor először is önként értődik, hogy, ha az $\mathrm{N}$ mennyiségek $n$-ik fokúak, az $\mathfrak{N}$ állandó osztó pedig, — amint éppen mondottuk, — $n-1$ hosszúság szorzata: a $h_1 h_2 \ldots h$ osztalékok *hosszúságok*. De az is világos, hogy e $h_1 h_2 \ldots h$ hosszúságok oly viszonyban állanak egymáshoz, mint a mérés tárgyát képező $\mathrm{N}_1 \mathrm{N}_2 \ldots \mathrm{N}$ mennyiségek. Ha tehát ismerjük a mondott $h$ hosszúságok léptékét, akkor e hosszúságok közvetetlenül megadják a megmérendő $\mathrm{N}$ mennyiségek nagyságát is. E lépték azonban ismeretes, mert tudjuk, hogy a $h$ hosszúságok az $\mathrm{N}$ mennyiségekből akképpen keletkeztek, hogy e mennyiségeket az $\mathfrak{N}$ állandóval elosztottuk.

*A* $h_1 h_2 \ldots h$ *hosszakat ez okból az* $\mathsf{N}_1 \mathsf{N}_2 \ldots \mathsf{N}$ *mennyiségek m é r ő h o s z s z a i n a k, vagyis m é r t é k e i n e k nevezzük, vonatkozással az állandó* $\mathfrak{N}$ *osztót képező* $n - 1$ *hosszúságra mint alapra. A mérő hosszaikkal meghatározott* $\mathsf{N}$ *mennyiségek számbeli értékeit,* $\mathsf{N}_1 \mathsf{N}_2 \ldots \mathsf{N}$*-et pedig úgy kapjuk meg, hogy mérő hosszúságaikat,* $h_1 h_2 \ldots h$*-t, az alaphosszúságokkal megsokszorozzuk. Az alaphosszúságokat erre való tekintettel mindig akképpen kell választani, hogy* $\mathfrak{N}$ *szorzatuk kerekszám legyen. (pl. 10, 100 stb.) A grafikai mérés tárgyát a mérő hosszúságok megszerkesztése képezi.*

**2. *Sík idomok*** $F_1 F_2 \ldots F$ területeinek mérésére tehát *egy* alaphosszúságot, *a-t*, használunk, s ha megszerkesztjük az

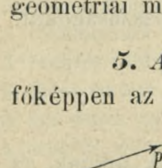
$$f_1 = \frac{F_1}{a};\ f_2 = \frac{F_2}{a} \ldots \ldots f = \frac{F}{a}$$

osztalékokat, (lásd 2-ik §), akkor az ekképpen talált $f$ *hosszúságok az* $F$ *területek mérő hosszúságai, (vagyis mértékei), vonatkozással az a alaphosszúságra. S ha megsokszorozzuk az* $f$ *mérő hosszúságokat az a alaphosszúsággal, akkor az* $F$*-eket területegységekben kifejezve kapjuk meg. Az a alaphosszúság kerekszámban legyen kifejezve,* (pl. $a = 1$ ; 2 ; 5 ; 10 *cm.* vagy *m.* stb.).

**3. *Testek térfogatának megszerkesztése*** céljából *két* hosszúság szorzatával, *ab*-vel, osztjuk el a megmérendő $V_1 V_2 \ldots V$ térfogatokat. (3-ik §.) *A talált* $v_1 v_2 \ldots v$ *hosszúságok a* $V_1 V_2 \ldots V$ *térfogatok mérő hosszúságai, (vagyis mértékei), vonatkozással az ab alaphosszúságokra. A* $V$ *térfogategységek számát úgy kaphatjuk meg, ha a* $v$ *mérő hosszúságokat az ab alaphosszúságokkal megsokszorozzuk. Erre való tekintettel az ab szorzat kerekszám legyen.*

**4. *Sík idomok tehetetlenségi nyomatékainak*** $\Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta$-nek megmérésére *három* alaphosszúságot, *abc*-t, használunk ; (27-ik §) ; ezek szorzata kerekszám legyen, és így tovább, akár hanyadik fokú a megmérendő geometriai mennyiség.

**5. *A mi a mechanikai mennyiségeket illeti,*** ezek közül legfőképpen az *erő* és ennek sztatikai nyomatéka szerepel a szilárdságtanban.



*1-ső ábra.*

Az *erő* mérő hosszúságát akképpen határozzuk meg, hogy a hosszúságok léptékén kivül *erőléptéket* is rajzolunk. A megadott erők m é r ő h o s s z ú s á g a i t ez erőléptéken mérjük le, valamint viszont a végrehajtott szerkesztéssel mérő hosszúságaikban kapott erők számbeli értékeit is ezen olvassuk le.

Minthogy, amint épp mondottuk, a hosszléptéken kivül erőléptéket is szerkesztünk, az erők sztatikai nyomatékait vagy m é r ő h o s s z a i k k a l vagy m é r ő e r ő i k k e l lehet meghatározni. Ha ugyanis $\mathsf{M}_1 \mathsf{M}_2 \ldots \mathsf{M} = Pq$ sztatikai nyomatékokat jelentenek, (1-ső ábra), akkor ezeket vagy az állandó $c$ hosszúsággal oszthatjuk el, vagy a $C$ állandó erővel. Az első esetben, ha:

$$\frac{\mathsf{M}_1}{c} = M_1; \ \frac{\mathsf{M}_2}{c} = M_2 \ldots \ \frac{\mathsf{M}}{c} = \frac{Pq}{c} = M$$

az $M_1 M_2 \ldots$ *erők az* $\mathsf{M}_1 \mathsf{M}_2 \ldots$ *nyomatékok mérő erői, vonatkozással a* $c$ *alaphosszúságra.* A második esetben, ha a hányadosokat

$$\frac{\mathsf{M}_1}{C} = m_1; \ \frac{\mathsf{M}_2}{C} = m_2 \ldots \text{-vel}$$

jelöljük, az $m_1 m_2 \ldots$ *hosszúságok az* $\mathsf{M}_1 \mathsf{M}_2 \ldots$ *nyomatékok mérő hosszúságai, vonatkozással a* $C$ *alaperőre.*

*A megmért nyomatékok számbeli értékeit az első esetben akképpen számíthatjuk ki, ha a mérő erőket a* $c$ *alaphosszúsággal sokszorozzuk; a második esetben pedig akképpen, ha mérő hosszúságaikat a* $C$ *alaperővel sokszorozzuk meg. A nyomatéki alap tehát, vagy mint hosszúság, vagy mint erő, kerekszámban legyen kifejezve.*

Az imént mondottakból az is kitünik, hogy a nyomatékok megmérének éppen említett két módja a végrehajtásban csakis abban különbözik, hogy a nyomatéki alap mint erő vagy mint hosszúság vétetik-e föl kerekszámban.

Világos ugyanis, hogy, ha megmértük valamely erő sztatikai nyomatékát grafikai úton, az alapul fölvett hosszúságot a mérő müvelet befejezése után még mindig akár az erő-, akár a hossz léptékén le lehet mérni, (tehát akár alaperőnek, akár alaphosszúságnak lehet tekinteni), ha csak a másik szorzót a másik léptékről mérjük le.

Az $\frac{\mathsf{M}}{c}$ vagy $\frac{\mathsf{M}}{C}$ osztalékot ez okból röviden az $\mathsf{M}$ nyomaték m é r t é k é n e k is nevezzük, vonatkozással a fölvett n y o m a t é k i a l a p r a, alattomban értve, hogy a nyomatéki mérték és alap közül az egyiket *hosszúságnak*, a másikat *erőnek* kell tekinteni.

A következő két §-ban a grafikai mérés végrehajtásának módját a sík ábrák területére és a testek térfogatára nézve abban a terjedelemben, fogjuk tárgyalni, melyet az e műben fölmerülő föladatok megoldása megkiván. Az erők nyomatékainak mérését a 13- és a 14-ik §-ban fogjuk előadni, a sík ábrák tehetetlenségi nyomatékainak mérését pedig a 28-ik §-ban.

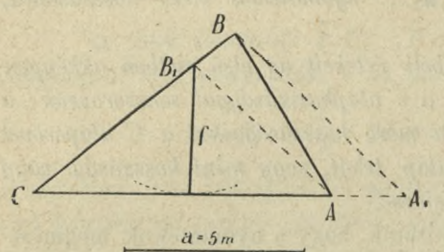
2. §.

## Sík idomok területének megszerkesztése.

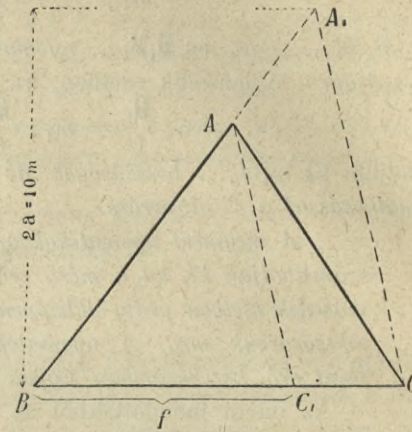
*1.* ***A háromszög*** területét úgy mérjük meg, vonatkozással a fölvett $a$ alaphosszúságra, hogy átváltoztatjuk a föladat tárgyát képező háromszöget vele területre azonos más oly háromszögre, melynek vagy az alapja vagy a magassága $= 2a$.

Önként értődik ugyanis a mérés fogalmából, hogy az adott háromszög területének mérő hosszúságát az első esetben az e szerkesztés útján nyert új háromszög magassága, a második esetben az alapja adja meg.

Ha tehát a 2-ik ábrán $CBA$ az adott háromszög, s ha $CA_1 = 2a$; $AB_1 \parallel A_1B$ és $f \perp CA$, akkor $f$ a keresett mérő hosszúság. Ha pedig a 3-ik ábrán az $A_1$ pont távolsága az adott $BAC$ háromszög $BC$ oldalától $= 2a$, és ha $AC_1 \parallel A_1C$, akkor $BC_1 = f$ az adott $\triangle$ területének mérő hossza. Ha ugyanis az adott háromszög területét $F$-fel jelöljük meg, akkor a szerkesztés útján nyert,




*2-ik ábra. Lépték 1 : 200 ; a = 5 m.*

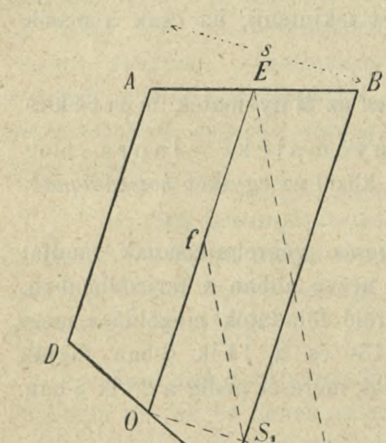



*3-ik ábra. Lépték 1 : 200 ; a = 5 m.*

területre nézve azonos háromszög területe mind a két esetben $= \frac{2a}{2} f = af$. Áll tehát mind a két esetre, hogy

$$af = F.$$

*Példák.* A 2-ik ábrán $a = 5$ m.; $f = 3{\cdot}5$ m.; az $ABC$ háromszög területe tehát $F = 17{\cdot}5$ m$^2$. A harmadik ábrán pedig $a = 5$ m.; $f = 6{\cdot}8$ m; az $ABC$ háromszög területe tehát $F = 34$ m$^2$.




*4-ik ábra. Lépték 1 : 200 ; a 10 m.*

**2. *A trapéz.*** Ha az adott trapéz szélessége $s$, középső magassága $OE = m$, (4-ik ábra,) s a területmérés alaphosszúsága $= a$, akkor a mérő hosszúság

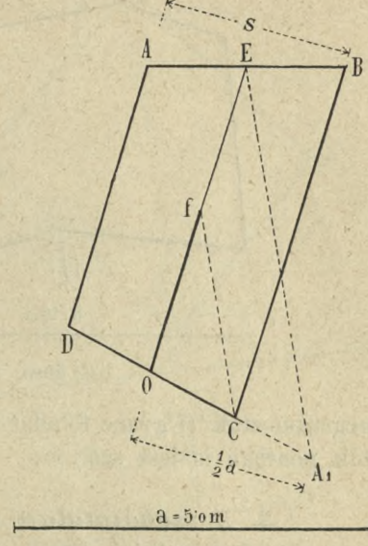
$$f = \frac{sm}{a}$$

A keresett $f$ mérő hosszúságot, amint látjuk, negyedik geometriai arányos megszerkesztésével lehet meghatározni. Ha a 4-ik ábrán $OA_1 \perp OE$; $OA_1 = \frac{1}{2} a$; $fS_1 \parallel EA_1$, akkor tehát $Of$ az adott trapéz területének mérő hosszúsága, vonatkozással $a$-ra mint alaphosszúságra. Ugyanis $OfS_1 \sim OEA_1$ és így:

$$Of = OS_1 \frac{OE}{OA_1} = \frac{sm}{a}$$

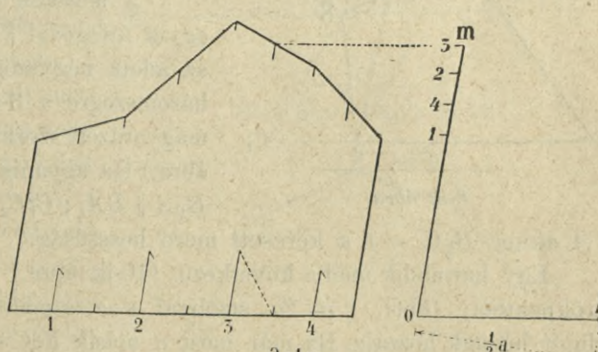
Az $f$ mérő hosszúságot akképpen is meg lehet szerkeszteni, (5-ik ábra,) ha úgy határozzuk meg az $A_1$ pontot a $DC$ oldal meghosszabbításán, hogy e pont távolsága a trapéz $OE$ középvonalától $= \frac{1}{2}\, a$ legyen. Ha ezután $fC \parallel A_1E$-t szerkesztjük meg, akkor $Of = f$. (Ugyanis $OfC \sim OEA_1$ tehát a magasságok úgy viszonylanak egymáshoz mint az alapok.)

*Példák.* A 4-ik ábra esetében $a = 10$ m.; $f = 4{\cdot}8$ m., tehát $F = 48$ m². Az 5-ik ábrán pedig $a = 5{\cdot}0$ m.; $f = 2{\cdot}35$ m. tehát $F = 11{\cdot}75$ m².



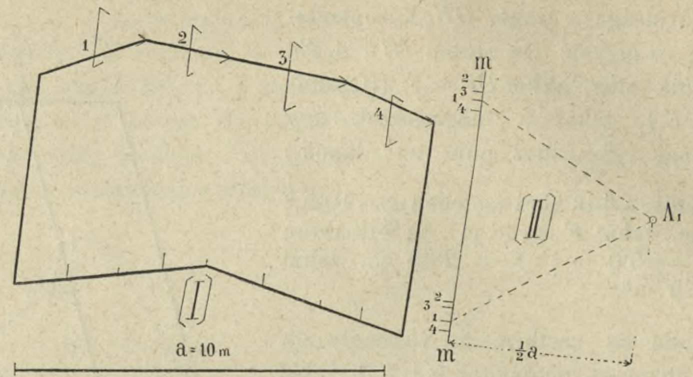

*5-ik ábra. Lépték 1 : 100 ; $a = 5{\cdot}0$ m.*

Abban az esetben, ha valamely sík ábrát párhuzamos vonalakkal az 1, 2, 3. . . -bal számozott trapézekre föl lehet osztani, (6-ik ábra,) ez egyes trapézek területi mérő hosszúságainak megszerkesztése végett célszerűbb azokat a szögeket, melyek csúcspontjait a 4—5-ik ábrán $A_1$-gyel jelöltük, külön ábrán rajzolni meg, együttesen valamennyi trapézre, s csak a párhuzamosakat húzni meg az eredeti ábrán. (Azokat, melyeket a 4—5-ik ábrán $S_1f =$ és $Cf$-fel jelöltünk meg). A 6-ik ábrán e célból az 1, 2, 3, 4-gyel számozott trapézek középmagasságait az $om$ párhuzamosra vetítettük át; az $oA_1$ egyenes párhuzamos a trapézek alapjával; az $A_1$ pont távolsága az $om$ egyenestől $= \frac{1}{2}\, a$. Ha most az egyes trapézek szélein át párhuzamosokat húzunk az $A_1$ sugársor megfelelő sugaraival, akkor az ezekkel, sorban az egyes középvonalakon, levágott hosszúságok az egyes trapézek területi mérő hosszúságai.




*6-ik ábra. Lépték 1 : 200 ; $a = 10$ m.*

A 7. I—II ábra arra az esetre mutatja a szerkesztés menetét, ha a trapézek oldalai nem esnek ugyanabba az egyenesbe. A középső magasságokat az I ábrából a II ábrába, az $mm$ párhuzamosra vetítettük át. Az $A_1$ pont távolsága az $mm$ egyenestől $= \frac{1}{2}\, a$. A párhuzamosakat az egyes középmagasságok végpontjain átmenő $A_1$ sugarakkal, sorban az egyes trapézek jobboldali felső sarokpontjain át szerkesztettük meg. A talált mérő hosszúságokat mind a 7-ik, mind a 6-ik ábrán a középvonalakon kihúztuk és

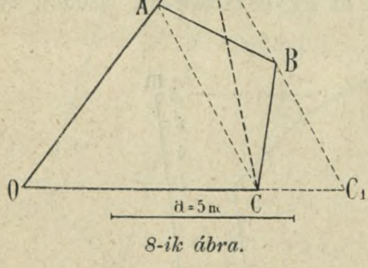



*7-ik ábra. Lépték 1 : 200 ; a = 10 m.*

megszámoztuk. (Ugyane föladat más megoldásáról e §-ban az alább következő 9-ik pontban is lesz szó.)

**3.** ***A szabálytalan négyszög*** területének megmérésére a következő módokat említjük meg.

Az egyik mód abban áll, hogy átalakítjuk az adott $OABC$ négyszöget a területre azonos $OCB_1$ háromszöggé, s ennek területét a föntebb ismertetett módon határozzuk meg. (Lásd a 8-ik ábrát, melyen $B_1C_1 \parallel AC$, s melyen $OCB_1$, valamint $OAC_1$ is, területre nézve azonos az adott $OABC$ négyszöggel.)

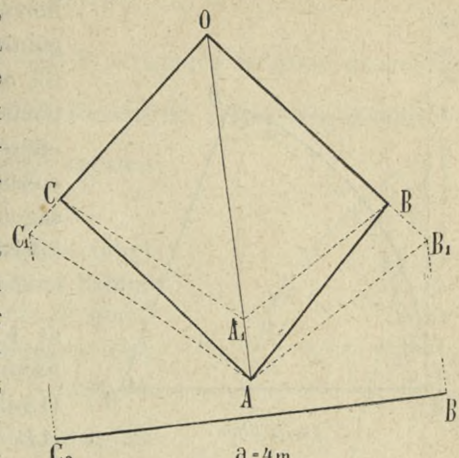



*8-ik ábra.*

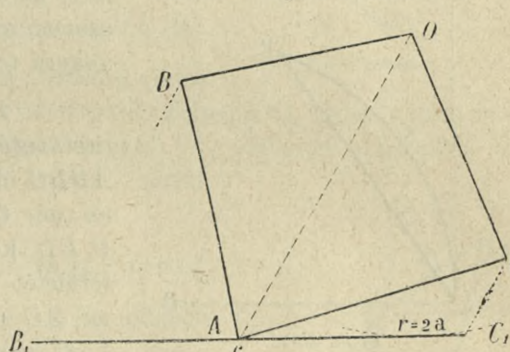
A második mód abban áll, hogy az egyik átfogóval két háromszögre képzeljük az adott négyszöget osztva, s mindegyik háromszögre a 3-ik ábra kapcsán föntebb magyarázott szerkesztést alkalmazzuk. (9-ik ábra.) Ha ugyanis $OA_1 = 2a$; $C_1A \parallel CA_1$; $B_1A \parallel BA_1$; $C_1C_2 \parallel B_1B_2 \parallel OA$ és $B_2C_2 \perp OA$, akkor $B_2C_2 = f$ a keresett mérő hosszúság.

Egy harmadik mód a következő. (10-ik ábra.) Körívet vonunk az egyik sarokpontból, $O$-ból, $r = 2a$ sugárral s a szemközt levő $A$ sarokpontból érintőt húzunk hozzája. Ha már most a másik két sarokpontot $B$-t és $C$-t az $OA$ átlóval párhuzamos irányban ez érintőre a $B_1$ és $C_1$ pontokra vetítjük, akkor a $B_1C_1 = f$ hosszúság az adott négyszög területének mérő hossza. Ugyanis áll, hogy ar. $OB_1A =$ ar. $OBA$; ar. $OC_1A =$ ar. $OCA$, hogy tehát ar. $OB_1C_1 =$ ar. $OBAC$. Az $OB_1C_1$ háromszög magassága azonban $= 2a$, területének mérő hosszúsága az 1-ső pontban mondottak szerint tehát egyenlő a $B_1C_1$ alappal.

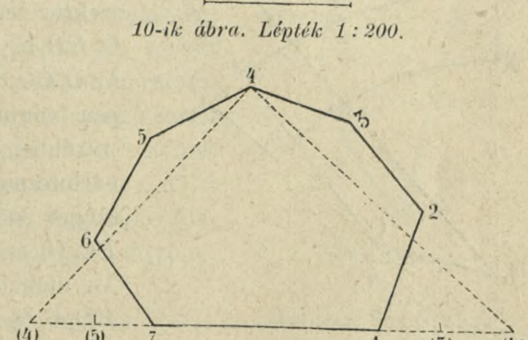
**4. A sokszöget** területre azonos négyszöggé vagy háromszöggé változtatjuk át, s ennek területét az 1-ső vagy a 3-ik pontban tárgyalt módon szerkesztjük meg. E célból az $n$ szöget, a négyszögre nézve imént, a 8-ik ábra kapcsán tárgyalt módon, területre nézve azonos $n$—1 szöggé alakítjuk át, s ezt az eljárást addig ismételjük, míg a területre azonos négyszöget vagy háromszöget megtaláltuk. A 11-ik ábrán látható példában a szerkesztést az idom jobb szélén kezdve, a 4-gyel számozott sarokpontig hajtottuk végre. Hegyesszögű átmetsződések elkerülése végett ezután az idom bal szélén folytattuk a szerkesztést, szintén a 4-gyel számozott sarokpontig. Azok szerint, a miket a 3-ik pontban elmondottunk, a szerkesztés folyama különben abban áll, hogy meghúzva 3,1 ∥ 2, (3)-at, megkapjuk a 7,6,5,4,3,(3) hatszöget, melynek területe ugyanaz, mint az adott hétszögé. Ezután meghúzzuk 4, (3) ∥ 3,(4)-et, mi által az adott hétszöggel területre azonos 7,6,5,4,(4) ötszöget kapjuk, s így tovább, míg a (4)4(4) háromszöget szerkesztettük meg. Az 1, 7 oldal megnyujtásán, a szerkesztés folyamán talált metszéspontokat, amint az épp mondottakból kitünik, sorban azoknak a sarokpontoknak rekeszjelbe irt folyó számaival jelöltük meg, melyeken az e metszéspontokon áthúzható, a területet kiegyenlítő egyenesek átmennek. A kiegyenlítő egyenesek tehát sorban 3,(3); 4,(4); 5,(5); 4,(4).




*9-ik ábra. Lépték 1 : 200.*



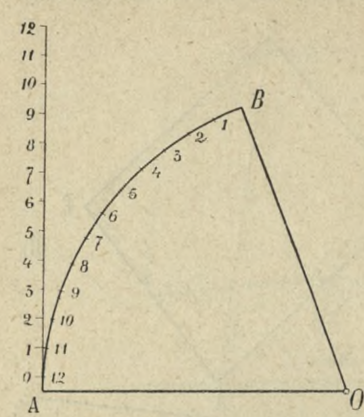

*10-ik ábra. Lépték 1 : 200.*




*11-ik ábra.*

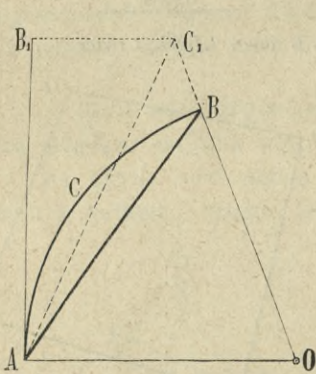
**5. A körszektort** területre azonos háromszögre $OAB_1$-re, (12-ik ábra,) változtatjuk át. E végből lefejtjük az $AB$ körivet az egyik végpontjából,

$A$-ból húzott érintőjére, $AB_1$-re, még pedig legegyszerűbben és legpontosabban akképpen, hogy tetszőleges, de oly kis hosszúságot, melyen a körív és a húr közötti hosszkülönbséget el lehet hanyagolni, körző segítségével annyiszor mérünk föl egymás mellé $B$-től $A$ felé, míg oly $o$ pontra nem jutottunk, melyen az $AB$ körív eltérése az $AB_1$ érintőtől már nem látható; s ezután annyiszor mérjük át ugyane hosszúságot az érintőre $B_1$ felé, ahányszor a köríven $o$ és $B$ között foglaltatott.



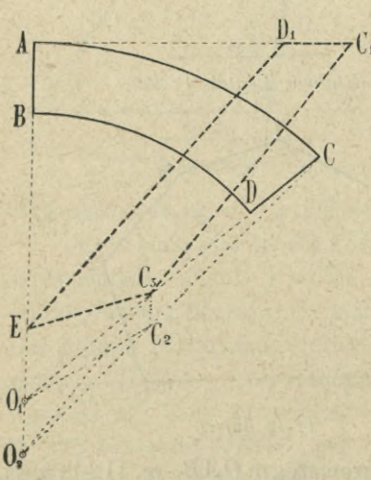
12-ik ábra.

**6. *A körszegmentet*** könnyen át lehet változtatni vele területre azonos háromszöggé. Ha ugyanis az $AB$ körívet, (13-ik ábra,) az $A$ pont érintőjére arc. $AB = AB_1$-re lefejtjük, s $B_1C_1 \parallel OA$-val húzzuk, akkor az $ABC_1$ háromszöget kapjuk, mely az adott $ACB$ körszegmenttel területre azonos, mivel az $OAC_1$ háromszög ugyanakkora területű, mint az $OACB$ körszektor.



13-ik ábra.

**7. *Donga-boltozat keresztmetszetének területe.*** (14-ik ábra.) Az $ABDC$ idom területét úgy kaphatjuk meg, ha az $O_2AC$ körszektor területéből az $O_1BD$ körszektor és az $O_1CO_2$ háromszög területét levonjuk. Fejtsük le e végből az $AC$ és $BD$ köríveket, az éppen említett módon sorban $AC_1$ és $AD_1$-re, és szerkesszük $AE = BO_1$-gyel. A két körszektor területének különbségét akkor az $O_2ED_1C_1$ négyszög területe adja meg. Az $O_1CO_2$ háromszög területét ebből akképpen vonjuk le szerkesztés útján legegyszerűbben, ha az $O_1C_2 \parallel EC$ és $C_2C_3 \parallel O_2A$ párhuzamosakat húzva, az $O_1O_2C$ háromszöget sorban az ugyanakkora területű $EC_2O_2$ és $EC_3O_2$ háromszögekkel pótoljuk. Az utóbbi $EC_3O_2$ háromszög ugyanis az $ED_1C_1O_2$ négyszögből az ábrán önként vonódik ki, s az $EC_3C_1D$ négyszöget eredményezi, mely tehát ugyanakkora területű, mint a föladatban kijelölt boltozat keresztmetszeti idoma.

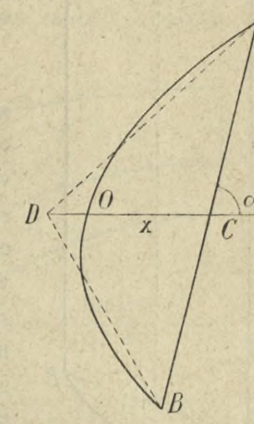


14-ik ábra.

*8. A parabolaszegment területének képlete* (15-ik ábra):

$$F = \frac{4}{3} xy \sin \alpha.$$

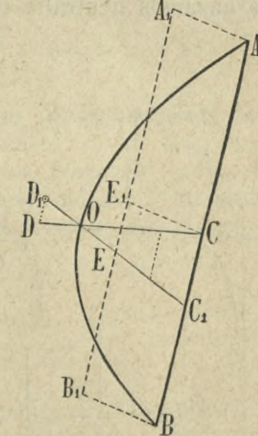
Ha tehát $DC = \frac{4}{3} x$, akkor az $ADB$ háromszög területre azonos az adott $AOB$ parabolaszegmenttel. Az $ADB$ háromszög magassága ugyanis $= \frac{4}{3} x \sin \alpha$, a területe tehát $\frac{4}{3} xy \sin \alpha$, tehát ugyanaz mint a parabolaszegmenté.



15-ik ábra.

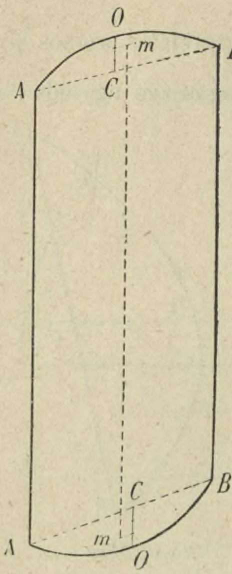
Önként értetődik ezek következtében, hogy a parabolaszegmenttel területre nézve azonos háromszöget akképpen is szerkeszthetünk, (16-ik ábra,) ha az $O$ tetőponton át húzott tetszőleges $OC_1$ ordinátát hosszabbítjuk meg kifelé $^1/_3$-részszel, $C_1 D_1 = \frac{4}{3} C_1 O$-t szerkesztve, a helyett, hogy az $AB$ húr társtengelyének $OC$ ordinátáján szerkesztenők $CD = \frac{4}{3} CO$-t. Minthogy ugyanis $D_1 D \parallel AC$, az $AD_1 B$ háromszög ugyanakkora területű, mint az $ADB$ háromszög, tehát mint az adott parabolaszegment, bármely irányban húzzuk is meg a szerkesztés alapját képező $OC_1$ ordinátát a parabola $O$ tetőpontján át. (Az $O$ tetőpontot az $AB$ húrral párhuzamos érintő meghúzása adja meg.)

Ha továbbá $C_1 E = \frac{2}{3} C_1 O$ és az $E$ ponton át húzott $B_1 A_1 \parallel BA$, az $AA_1$ és $BB_1$ oldalak pedig tetszőleges irányúak, de egymással párhuzamosak, akkor az $ABB_1 A_1$ parallelogramm is ugyanakkora területű, mint az adott $AOB$ parabolaszegment. S ha végre $CE_1$ a $C$ ponton át húzott tetszőleges egyenes és $EE_1 \parallel AB$, akkor területre nézve azonos a szóban forgó parabolaszegmenttel minden oly trapéz, melynek alapja $AB$, melynek párhuzamos oldalait az $A$ és a $B$ pontokon át $CE_1$-el párhuzamosan szerkesztjük, s melynek negyedik oldalát az $E_1$ ponton át, különben tetszőleges irányban, húzzuk meg.



16-ik ábra.

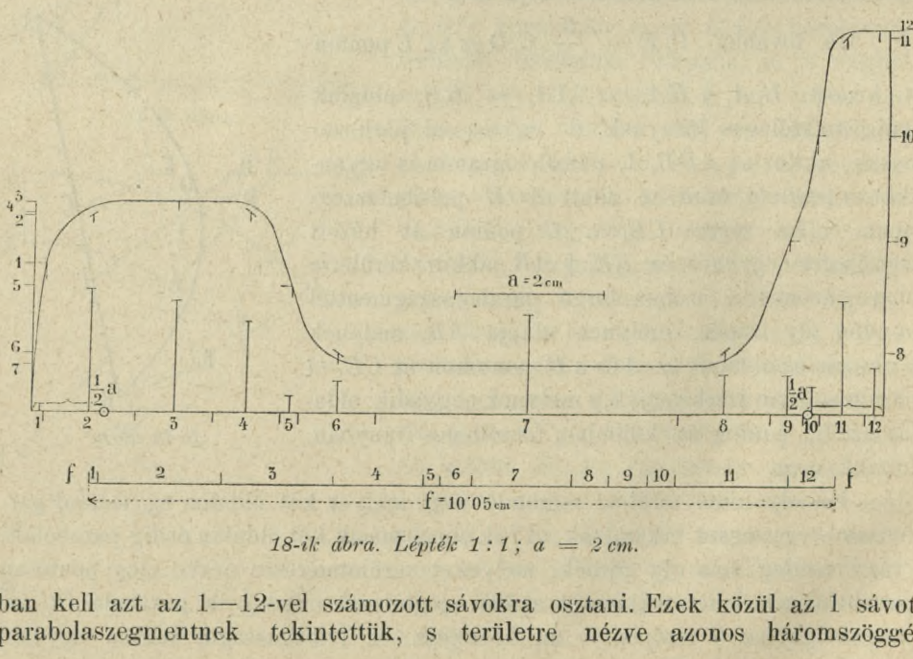
Ha oly idom területe mérendő meg, melyet két oldalon egymással párhuzamos egyenesek határolnak, (17-ik ábra,) másik két oldalán pedig parabolák, (vagy esetleg más oly görbék, melyeket területmérésre nézve elég pontosan paraboláknak lehet tekinteni,) akkor meghúzzuk mindegyik parabola $OC$ ívmagasságát az $O$ tetőponton át, beosztjuk ez ívmagasságot három egyenlő részre, s átvetítjük az $AB$ átfogótól számított második beosztó pontot, ez átfogóval párhuzamos irányban, az idom középvonalára, az $m$ pontra. Az ekképpen talált $mm$ hosszúság akkor, a föntebb mondottak szerint, az adott idommal területre nézve azonos ama trapézek középmagassága, melyek párhuzamos oldalai az $AA$ és $BB$ egyenesekbe esnek.



*17-ik ábra.*

**9. *Sávokra osztott idomok területének megszerkesztéséről.*** Ha a föladat tárgyát képező valamely szabálytalan, részben vagy egészen görbe vonalakkal határolt idomot párhuzamos vonalakkal részekre, sávokra kell osztani, s e részek területeit egyenként is meg kell határozni, akkor rendesen úgy veszszük föl a beosztó vonalakat, hogy a szélső idomrészeket parabolaszegmenteknek tekinthessük, (ha egyenesek határolják az ábra széleit, akkor háromszögeknek vagy trapézeknek,) a középsőket pedig vagy trapézeknek tekinthessük, vagy ilyenekké változtathassuk át, az imént a 17-ik ábra kapcsán magyarázott módon.

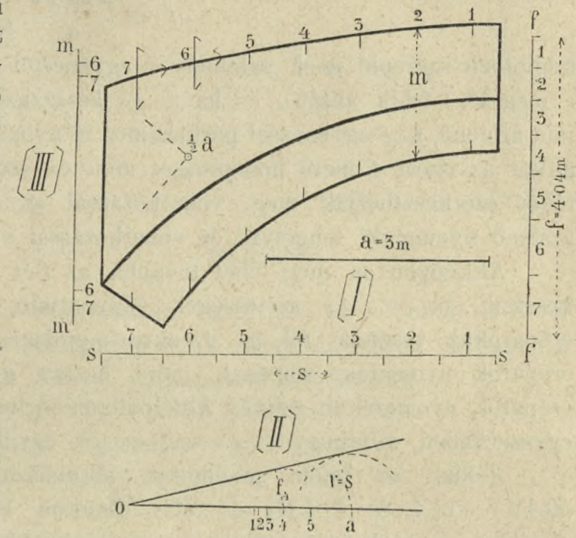
*Első példa.* A 18-ik ábra vasúti sín keresztmetszetének fele részét mutatja. Ha ez idom tehetetlenségi nyomatékát a síntalppal párhuzamos neutrális tengelyre kell megszerkeszteni, akkor ebben az irány-



*18-ik ábra. Lépték 1 : 1 ; a = 2 cm.*

ban kell azt az 1—12-vel számozott sávokra osztani. Ezek közül az 1 sávot parabolaszegmentnek tekintettük, s területre nézve azonos háromszöggé változtattuk át, a 2—12-vel számozott sávokat pedig, az imént említett módon, terület tekintetében egyező trapézekké; a középmagasság a középvonalakon mindenütt meg van jelölve. Az egyes idomrészek területének mérésére a föntebb, a 6-ik ábrán mutatott módszert alkalmaztuk. A középmagasságokat az idom széleinek függőlegeseire vetítettük át. Az alaphosszúságot $a = 2$ cm.-re vettük föl. (A fél alaphosszúság végpontját $^1/_2a$ betüvel és egy-egy kis körrel jelöltük meg, s minden egyéb pontot ugyanazzal a számmal, mint a hozzája tartozó sávot.) A sávok területeinek mérő hosszúságait a középvonalakon sorban megjelöltük, (ugyanúgy mint a 6-ik ábrán,) s az $f$ vízszintesen összeadtuk. Az egész mérő hosszúságot a fél sínre $f = 10·05$ cm.-nek találtuk. A sín keresztmetszeti területe tehát $F = 40·2$ cm$^2$.

*Második példa.* A 19-ik ábra a donga-boltozatok elméletében alkalmazott területmérést mutatja. A boltozat és a fölfalazás keresztmetszeti idomát, függőleges egyenesekkel az 1—7-tel számozott sávokra osztottuk, oly módon, hogy trapézeknek lehessen őket tekinteni. — A trapézek $\varDelta s$ szélességeit a boltozat alatt az $s$ vízszintesen megjelöltük és megszámoztuk. A trapézek $m$ középmagasságainak végpontjait szintén megjelöltük a boltozat vetületében rövid függőleges vonalakkal és folyó számokkal. Az 1—5-tel számozott trapézek szélessége ugyanaz, t. i. $\varDelta s = 0·75$ m. Az utolsó trapéz függőleges oldalai a támaszlap szélein mennek át. Az alaphosszúságot $a = 3$ m.-nek vettük föl. Az egyes sávok területének mérő hosszúsága:




*19-ik ábra. Lépték = 1 : 100; a = 3 m.*

$$f = \frac{m\,\varDelta s}{a}$$

Itt $a$ állandó, az 1—5-tel számozott szalagokra pedig az $\varDelta s$ szélesség is. Az állandó szélességű trapézek területeinek mérő hosszúságait tehát úgy kapjuk meg, ha $m$ középmagasságaikat a $\varDelta s : a$ viszonyszámhoz mérve redukáljuk. Ily redukcióra, valamint a jelen esetben, úgy a későbbi fejezetek hasonló föladataiban is, legcélszerűbben *sin* viszonyszámú szöget használunk, melynek megszerkesztését a 19. II ábra mutatja, melyen az $a$ alaphosszúság végpontja $a$ betüvel van megjelölve, s melyen a redukált középmagasságokat a merőlegesek meghúzása nélkül egyszerűen körzővel mérjük le azon módon, mint a 19. II ábra, a 4-gyel számozott szalagra nézve mutatja. (Az egyes $m$ középmagasságok végpontjait az $o\,a$ szögszáron sorban az egyes sávok folyó számaival jelöltük meg).*) A két utolsó sáv területét a föntebb, a 7-ik ábra kapcsán magyarázott módon mértük meg, (19. I és III ábra), s a mérő hosszúságokat a középvonalak felső végén kihúztuk. Az egyes sávokra külön-külön talált mérő hosszúságokat az $f$ függőlegesen összeadtuk. Az egész ábra területének mérő hosszúságát e módon $f = 4{\cdot}04$ m.-nek, területét tehát $F = 3.\ 4{\cdot}04 = 12{\cdot}12$ m²-nek találtuk.

Az egyes sávok területeinek mérő hosszait, a 13. § 2-ben előadandó módon, kötélpoligón szerkesztése utján is összeadhatjuk. Ha ugyanis az

$$f = \frac{\Sigma m \varDelta s}{a}$$

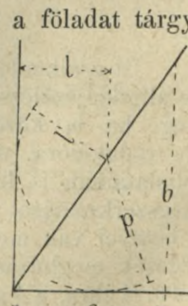
képletben szereplő $m$-ek valamely $e$ egyenestől vannak fölmérve, (mint p. o. a megelőző 18-ik ábrán), és ha a $\varDelta s$ hosszakat az $m$ magasságok végpontjain átmenő, az $e$ egyenessel párhuzamos irányban működő erőknek tekintjük, akkor az egész $f$ mérő hosszúságot mint ez erők nyomatékösszegének mértékét szerkeszthetjük meg, vonatkozással az $e$ egyenes valamely pontján átmenő nyomatéki tengelyre, és vonatkozással $a$-ra mint nyomatéki alapra.

Akképpen is meg lehet továbbá az $f$-et mint nyomatékösszeget szerkeszteni, ha a $\varDelta s$ szélességek végpontjain $\pm m$ mérő hosszúságú erőerőpárokat veszünk föl, a $\varDelta s$-ekre merőleges irányban. Az $f$ ekkor ez erőpárok nyomatékösszegének mérő hossza $a$-ra, mint alapra nézve. S ez erőpárok nyomatékait szintén kötélpoligón segítségével lehet összeadni, annál egyszerűbben, minthogy a $\varDelta s$ szélességek egymás mellé sorakoznak.

Példák az imént mondottak alkalmazására a 28—29-ik §-ban, az 59. IV; 111. I és 118. III és VIII ábrákon láthatók. A 111. I ábrán a $\varDelta s$-eket az $m$-ek végpontjain átmenő vízszintes erőknek tekintettük. Az 59. IV és a 118. III és VIII ábrákon pedig $\pm m$ erőpárokat vettünk föl a $\varDelta s$-ek végpontjain.

Önként értődik, hogy az egyes sávok területi mérő hosszainak föntebb, a 6—7-ik ábrák kapcsán előadott megszerkesztését szintén nyomatékszerkesztésnek lehet tekinteni, ha az $m$-et erőnek, a $^1/_2\,\varDelta s$-t pedig karnak tekintjük; $A_1$ akkor az erőpoligón csúcspontja, az $A_1$ sugarakkal az idomokban vont párhuzamosok pedig az egyes kötélpoligón-oldalakat képezik.

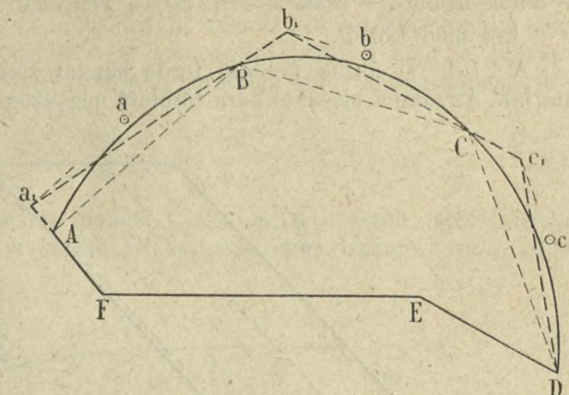
***10. Ha szabálytalan görbe vonalak határolnak valamely idomot részben, vagy egész kerületén,*** s ha a föladat tárgya nem kivánja meg, hogy szalagokra osztás útján határoz-



*19. IV ábra.*

*) Oly esetekben, mikor a tetszőleges $l$ hosszúságokat az 1-nél nagyobb $b : c$ viszonyszámmal kell megsokszorozni, a $bl : c = p$ redukált hosszúságok megszerkesztésére *tang* viszonyszámú szög használtassék, de szintén oly módon, hogy a redukált $p$ hosszúságokat, a merőlegesek megszerkesztése nélkül, megint egyszerűen körzővel lehessen lemérni. (Lásd a 19. IV ábrát.) A következő fejezetekben, a *sin*, valamint a *tang* viszonyszámú szöget is, újabb magyarázat nélkül, ismételve fogjuk alkalmazni, hosszúságok redukálására, valamint esetleg negyedik geometriai arányosok megszerkesztésére is.

tassék meg a terület, ugyanakkora területű sokszögre is át lehet esetleg változtatni az adott idomot. Beosztjuk ugyanis a kerületet képező görbét oly $AB$, $BC$, $CD$... részekre, (20-ik ábra), amelyeket területmérésre nézve paraboláknak lehet tekinteni, meghúzzuk ezek átfogóit, s átváltoztatjuk az ekképpen keletkező parabolaszegmenteket területre nézve azonos háromszögökké. E végből megjelöljük e szegmenteken az $a$, $b$, $c$..... pontokon a $^4/_3$-szoros ívmagasságok végpontjait, s az idom egyik szélén kezdve a további szerkesztést, átvetítjük az $a$ pontot $AB$-vel párhuzamosan $a_1$-re; ezután összekötjük $a_1$-et $B$-vel, átvetítjük ez egyenes meghosszabbítására a $b$ pontot $BC$-vel párhuzamosan $b_1$-re stb.



*20-ik ábra.*

## 3. §.

## A testek térfogatának megszerkesztése.

**1. *A szabályos testek.*** A testek térfogatának képlete vagy

$$V = Fm, \text{ vagy } V = smn$$

itt $F$ a test valamely lapjának területe, $m$, $n$, $s$ pedig egy-egy hosszúságot jelent.

Az első esetben a térfogat mérő hosszúsága $ab$-re mint alapra:

$$v = \frac{Fm}{ab} = \frac{fm}{b}$$

és itt $f = F : a$ az $F$ terület mérő hossza $a$-ra mint alapra. A $v$ mérő hosszúságot tehát úgy kapjuk meg, ha megszerkesztjük az $F$ terület $f$ mérő hosszúságát $a$-ra mint alapra, és ezután az $fm : b$ negyedik geometriai arányost.

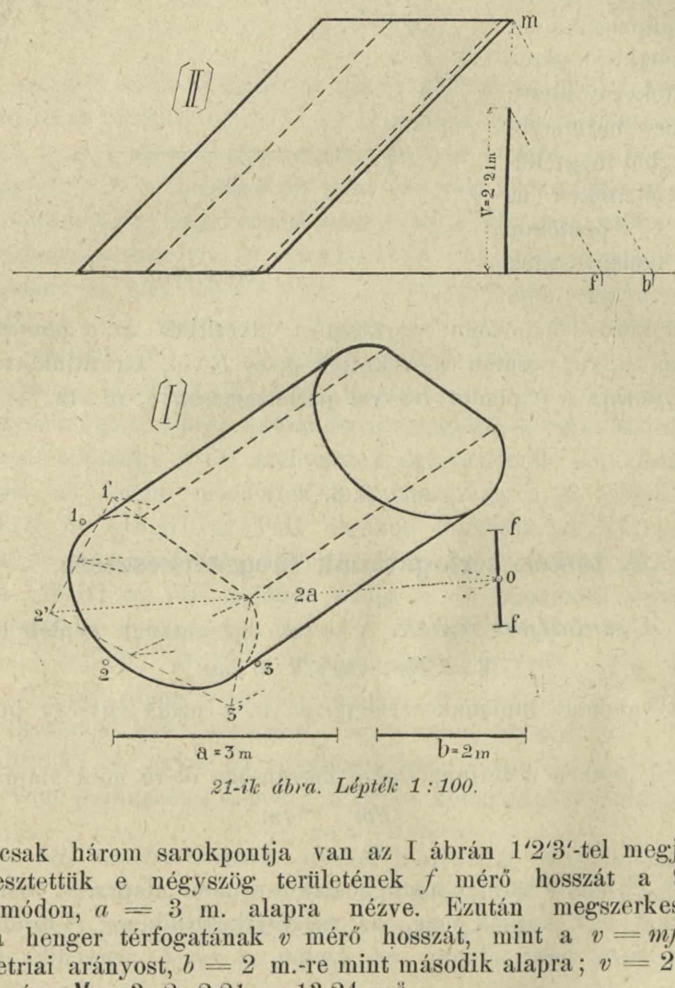
A második esetben:

$$v = \frac{smn}{ab} = \frac{fn}{b}, \text{ és itt } f = \frac{sm}{a}$$

Megszerkesztjük tehát előbb $f$-et, mint az $sm : a$ negyedik geometriai arányost, s ezután a $v$ mérő hosszúságot, ismét mint az $fn : b$ negyedik geometriai arányost.

Megjegyzendő e mellett, hogy az $f = sm:a$ negyedik geometriai arányos az $sm$ terület mérő hosszúsága. Az utóbbi módszer, velejében, az előbbivel tehát azonos, s csak a szerkesztés végrehajtásában van esetleg különbség a két mód között.

A 21. I—II ábrák például ferde henger térfogatának megszerkesztését mutatják. Az alapot ugyanakkora területű négyszöggé változtattuk át, (melynek




*21-ik ábra. Lépték 1 : 100.*

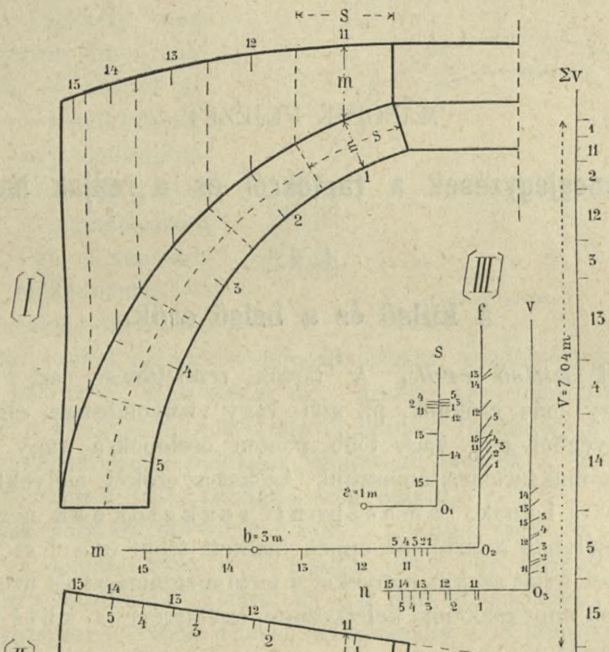
azonban csak három sarokpontja van az I ábrán 1'2'3'-tel megjelölve,) és megszerkesztettük e négyszög területének $f$ mérő hosszát a 9. I ábrán mutatott módon, $a = 3$ m. alapra nézve. Ezután megszerkesztettük a II ábrán a henger térfogatának $v$ mérő hosszát, mint a $v = mf:b$ negyedik geometriai arányost, $b = 2$ m.-re mint második alapra; $v = 2{,}21$ m.-nek találtuk, s így $V = 3 \,.\, 2 \,.\, 2{,}21 = 13{,}24$ m$^3$.

*2. A szabálytalan testeket* alkalmasan választott síkokkal vagy más fölületekkel oly részekre kell osztani, melyekre az 1-ső pontban mondottakat lehet, teljes, vagy esetleg megközelítő pontossággal alkalmazni.

A 22-ik ábra példaképpen a gömbboltozatok elméletében alkalmazott térfogatmérést mutatja. Ez esetben ugyanis keskeny gerezdet vágunk ki a boltozatból, a tengelyen át fölvett, egymással kis szöget képező két függőleges síkkal, s e gerezdet fölosztjuk a belső fölületre merőleges kúpfölületekkel, a fölötte levő falazatot pedig függőleges hengerfölületekkel az I ábrán függőleges vetületben, a II ábrán alaprajzban látható kis részekre, melyeket a boltozaton 1—5, a fölfalazáson 11—15 számokkal jelöltük meg. E boltozatrészek térfogatait megközelítőleg $V = mns$ képletből lehet meghatározni, ezek mérő hosszúságait tehát

$$v = \frac{sm}{a}\frac{n}{b} = \frac{fn}{b}$$

képletből, a föntebb magyarázott módon. (Az $s$, $m$, $n$ hosszak jelentősége az I és II ábrákon az 1 és 11-vel számozott boltozatrészen látható.) Az $s$ széles-




*22-ik ábra. Lépték 1 : 100.*

ségeket a III ábrán $o_1$-től az $s$ függőlegesre mértük rá, az $a$ alaphosszúságot $o_1$-től az $a$ vízszintesre. Az $s$-ek végpontjait sorban az egyes falzömök folyó számaival jelöltük meg, az $a$ hosszúság végpontját pedig $a$ betűvel. Az $a$-ból az $s$-ek végpontjaihoz húzott sugaraknak a vízszintessel képezett szögeiben a *tang* tehát $= s : a$. Ezután fölmértük az $o_2$ pontból a vízszintesre az $m$ magasságokat; ha az e módon talált pontokon át az $a$ sugarakkal párhuzamosakat húzunk, akkor $o_2$ fölött az $f$ függőlegesen az $s\,m : a = f$ negyedik geometriai arányosokat találjuk meg, minek megtörténte után az $fn:b = v$ geometriai arányosokat, épp úgy szerkesztettük meg az $o_2$ és $o_3$ szögeken, mint az $f$-eket az imént $o_1$ és $o_2$ szögeken.*) Rámértük ugyanis $o_2$-től e pont vízszintesére a $b$ alaphosszúságot, (a kapott pontot $b$-vel jelöltük meg, minden egyéb pontot, az egész szerkesztés folyamán, a boltozat és egyéb falrészek folyó számaival), az $o_3$ pontból az $n$ vízszintesre pedig az alaprajzból lemért $n$ szélességeket; az ekképpen talált pontokon át a $b$ sugarakkal párhuzamosakat húzván, a $v$ függőlegesen az $o_3$ pont fölött a keresett $v$ mérő hosszúságokat kaptuk meg. Ezek összegét a $\Sigma v$ függőlegesen szerkesztettük meg. Az egész mérő hosszúságot 7·04 m.-nek találtuk, a térfogat tehát összesen $V = 1 . 3 . 7{\cdot}04 = 21{\cdot}12$ m³-t tesz. (A mérő hosszak megszerkesztését és összeadását kötélpoligónok megrajzolásával lásd a 13. § 2-ban.)

---

MÁSODIK FEJEZET.

# Általános megjegyzések a tartókról és a reájuk ható erőkről.

4. §.

## A külső és a belső erők.

***1. A külső erők.*** A tartók rendeltetése az, hogy terhet tartsanak, vagy más erőknek, pl. szél- vagy víznyomásnak, ellent álljanak. A tartókat e végből egy vagy több ponton oszlopokra vagy más szerkezetekre, esetleg más tartókra támasztjuk. Azokat az erőket, melyekkel e *támaszpontok* a tartókra hatnak, támaszponti reakcióknak nevezzük; ezek tartják egyensúlyban a tartót az éppen említett többi erővel szemben. Mindezeket az erőket, tehát azokat, melyeket a tartó megtámaszt, és azokat, melyek a támaszpontokon mint reakciók keletkeznek, együttvéve a külső erőknek nevezzük.

A reakciók meghatározására első sorban az ezek és a többi külső erő közötti egyensúlyi egyenletek képezik az alapot. Oly reakciót, melynek irányvonala ismeretlen, összetevőivel határozunk meg. Igy pl. abban az esetben, ha a külső erők *térbeliek*, oly helyen, melyen a tartó *lapra* támaszkodik, hat reakcióösszetevő keletkezhet, (tekintve, hogy a térben az erőt általában hat összetevőre föl lehet bontani sztatikailag határozott módon); ha a támaszlap, a maga síkjára eső valamely irányban elmozdulhat, akkor öt, ha két irányban mozdulhat el, akkor négy. Ha térbeliek a külső erők, és ha helytálló *gömbcsuklóra*

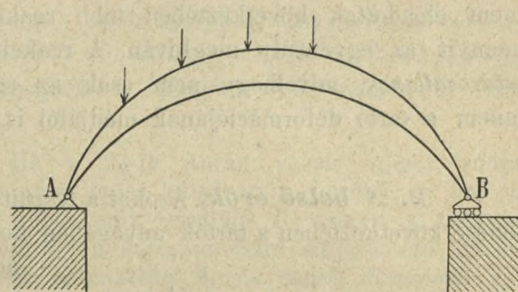
---

*) A negyedik geometriai arányos megszerkesztésének itt használt módját, valamint azt a módot is, melyet föntebb a 6—7 s a 19. II és 19. IV ábrák kapcsán adtunk elő, a következő fejezetekben minden további magyarázat nélkül ismételve fogjuk alkalmazni.

támaszkodik a tartó, akkor három reakció-összetevő keletkezhetik; ha *egy* irányban elmozdulhat a támasztó csukló, akkor kettő; ha *két* irányban mozdulhat el, akkor egy, t. i. ekkor a reakció irányvonala ismeretes, mert a támaszponti csuklón megy át és merőleges arra a síkra, melyet a csukló két elmozdulási egyenese határoz meg.

Ha pedig ugyanabban a síkban hatnak a külső erők a tartóra, akkor oly helyen, hol lapra támaszkodik a tartó, s a megtámasztott lap nem mozdulhat el, három reakció-összetevő keletkezhetik; (mint pl. a lapokra támaszkodó íveken;) ha helytálló csuklóra támaszkodik, akkor *kettő;* (mint pl. a csuklókra támaszkodó íveken;) ha csuklóra támaszkodik, s ha e csukló az erők síkjában elmozdulhat, akkor *egy*.

Az, hogy csakugyan keletkezik-e valamely megtámasztott helyen annyi reakció-összetevő, a mennyi általánosságban keletkezhetik, attól függ, hogy elmozdulnának-e a megtámasztott pontok vagy lapok a megtámasztott irányokban, ha a támasztó erők nem működnének. — Az egyes reakció-összetevők ugyanis épp ezeket az egyes elmozdulásokat akadályozzák meg a megtámasztott helyeken, még pedig úgy azokat az elmozdulásukat, melyek előidézésére a külső erők közvetetlenül hatnak, (minthogy a reakciók nélkül nincsenek egyensúlyban,) valamint azokat is, melyek a tartó deformációja miatt következnének be a támasztó erők nélkül.



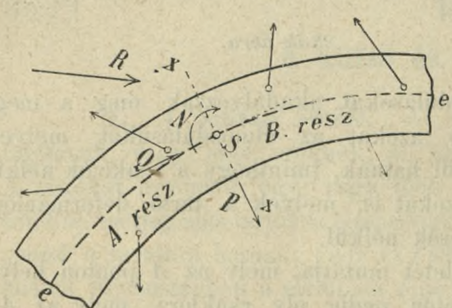
*23-ik ábra.*

A 23-ik ábra pl. oly tartó vetületét mutatja, mely az $A$ ponton helytálló csuklóra támaszkodik, a $B$ ponton pedig oly csuklóra, mely az $AB$ vízszintesben elmozdulhat. A tartó az $AB$ csuklók síkjában működő súlyok kal van megterhelve. Noha a tartó deformációja a $B$ támaszponton vízszintes irányban is okoz elmozdulást, mégis csak függőleges reakció keletkezhet e ponton, tekintetbe véve, hogy a támasztó szerkezet a tartó $B$ pontja vízszintes elmozdulásának nem képes ellentállani. De az $A$ ponton is függőleges lesz ennek következtében a reakció, minthogy a súlyokat és a függőleges $B$ reakciót csak függőleges $A$ reakció tarthatja egyensúlyban, s minthogy másrészt, az a változás, melyet a tartó deformációja az $A$ és $B$ pontok viszonylagos helyzetében vízszintes irányban okoz, a $B$ ponton állhat be, s így semmi sem hat arra, hogy az $A$ támaszponton vízszintes reakció keletkezzék. De ha az $AB$ tartó, súlyokon kívül oly erőkkel is meg volna terhelve, melyek a támaszponti csuklókon átmenő függőleges síkban működnek ugyan, de nem függőlegesek, (pl. a súlyokkal ugyanegy síkban működő szélnyomással,) akkor a $B$ ponton függőleges irányú maradna ugyan a reakció, az $A$ ponton ellenben vízszintes reakció is keletkeznék, a függőlegesen kívül.

Ha pedig a $B$ ponton is helytálló csuklóra támaszkodnék a szóban forgó tartó, akkor mind a két támaszponton keletkeznék, mind függőleges, mind vízszintes reakció, még pedig abban az esetben is, ha csak súlyokkal volna a tartó megterhelve. Vízszintes reakcióknak abból az okból kellene t. i. ez esetben keletkezniök, mert a támaszponti csuklók ellentálló ereje nélkül vízszintesen is elmozdulnának a tartó végei, mind együttesen, mind egymáshoz képest.

Megjegyzendő végre, hogy abban az esetben, ha akképpen van valamely tartó megtámasztva, hogy deformációja is idéz elő reakciókat: az imént előadottak következtében több reakció-összetevő keletkezik, mint a mennyit az egyensúly megkiván. A reakciók ily esetben tehát *sztatikailag határozatlanok*, mivelhogy nem csak az egyensúlyi törvényektől függnek, hanem a tartó deformációjának módjától is.

**2. *A belső erők.*** Azokat a feszültségeket, melyek a külső erők működése következtében a tartók anyagában keletkeznek, a belső erőknek nevezzük. Ha a külső erők mind ismeretesek, akkor a belső erőket, amint a szilárdságtanból tudjuk, a következő módon lehet meghatározni.



*24-ik ábra.*

Azok a pontok, melyeken a belső erők megállapitandók, általánosságban oly $xx$ fölületet, esetleg síkot határoznak meg, melylyel a tartót vagy egyéb szerkezetet két részre, $A$-ra és $B$-re osztva képzelhetjük. (24 és 25-ik ábra.) Magában véve egyik rész sincsen egyensúlyban, mindegyiken odatörekszenek a reá ható külső erők, hogy a másikhoz képest elmozdítsák, s az *egész* szerkezeten akképen jő létre az egyensúly, hogy mindegyik rész kölcsönösen a másikat támasztja meg. Amint ezekből látjuk, a szerkezet mindegyik részére ható külső erők a másik részre nézve oly támasztó reakciót képviselnek, mely mint belső erő a két rész közötti pontokra oszlik meg, azokban az irányokban, melyekben az anyag szilárdsága e pontokon ellentállani képes. Az az erő, mely a szerkezet egyik *részére* nézve a másik rész támasztó reakciója, az *egész* szerkezetben tehát *belső erő*, épp úgy, mint a hogy pl. az az erő, amelylyel a hídfő a hidtartóra hat, az *egész* hídat véve, *belső* erő, a *hídtartóra nézve* pedig *külső* erő, t. i. támaszponti,- vagy támaszlap-reakció.

Az itt szóban forgó $xx$ választófölületet általánosságban átmetszésnek nevezzük, keresztmetszetnek pedig akkor, ha a választófölületet valamely *rúdon* az ú. n. szilárdsági tengelyre merőlegesen fölvett *sík* képezi, szilárdsági tengelynek a keresztmetszetek súlypontjait összekötő vonalat nevezve (Lásd a 24-ik ábrát.) Az $A$, illetőleg $B$ részre ható külső erőket pedig az $A$, illetőleg $B$ oldal felől az átmetszésre ható külső erőknek mondjuk.

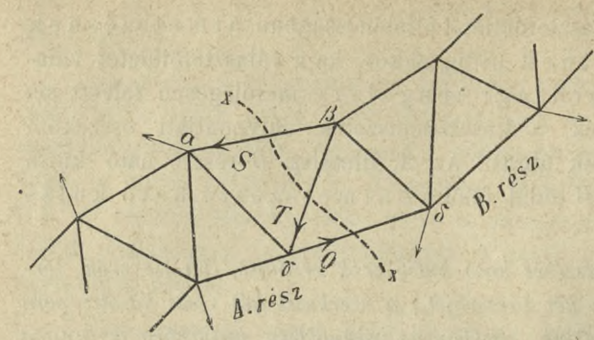
*Ha valamely átmetszésre ható külső erők eredőjét, (ha az erők térbeliek, akkor esetleg ezek két társerőjét,) a szerkezet két része közötti pontokra ható összetevőkre bontjuk, azokban az irányokban, melyekben az anyag ellentáll, akkor az imént mondottak szerint tehát a belső erőket kapjuk meg a szóban forgó pontokon, még pedig akképpen, hogy bármelyik oldalról ható külső erőkre is alkalmazzuk a mondottakat, a talált összetevők mindig azokat az erőket adják meg, melyekkel a fölbontott erejű tartórész a másik részre hat.*

Első alkalmazás. Ha a 24-ik ábrán vázolt tömör rúdra az $ee$ szilárdsági tengely síkjában tetszőleges külső erők hatnak, s ha az $xx$ keresztmetszetre *balról* ható külső erők eredője $R$; ennek a tengely átmetszett elemét érintő összetevője $Q$; a keresztmetszet síkjára eső összetevője $P$; erőpárbeli összetevőjének nyomatéka $\mathsf{N}$, és ennek forgatása az, melyet az $\mathsf{N}$ nyíl mutat, akkor a szóban forgó rúd az $xx$ keresztmetszet helyén a $Q$ erővel *nyomó* szilárdságára van igénybe véve; az $\mathsf{N}$ erőpárral *hajlító* szilárdságára, még pedig akképpen, hogy a hajlító igénybevétel után fölül nyomás, alul húzáskeletkezik; végre a $P$ erővel *nyiró* szilárdságára, (tekintve, hogy ez erő a keresztmetszeti idom súlypontján megy át,) még pedig akképpen, hogy a deformáció következtében, az $xx$-től balra eső rész a jobb oldalihoz képest *lefelé* mozdul el.

Ha térbeliek a külső erők, de az egy $R$ erővel lehet az $x$ keresztmetszetre ható erők eredőjét pótolni, akkor fölbontjuk az $R$ erőt ott, ahol a keresztmetszeti idom síkját átdöfi, a keresztmetszet síkjára merőlegesen álló $Q$, és a keresztmetszet síkjára eső, de általában a keresztmetszeti idom $S$ súlypontján át nem menő $P$ összetevőre, s ezután a $Q$ erőt, áthelyezés útján, az $S$ súlyponton átmenő, tehát a rúd szilárdsági tengelyét érintő $Q$ erőre és a $\pm Q$ erőpárra, a $P$ erőt pedig, szintén áthelyezés útján, az $S$ súlyponton átmenő $P$ erőre és a $\pm P$ erőpárra. Az $S$ súlyponton átmenő $Q$ erő ekkor húzásra vagy nyomásra veszi igénybe a rudat az $x$ keresztmetszet helyén, a $\pm Q$ erőpár hajlításra, az $S$ súlyponton átmenő $P$ erő nyirásra, a $\pm P$ erőpár pedig csavarásra.

Abban az esetben végre, ha az $x$ keresztmetszetre ható külső erőket nem lehet egy erővel pótolni, ezek ama két társerőjét, $R$-t és $\mathsf{M}$-t határozzuk meg, melyek közül $\mathsf{M}$ a keresztmetszet síkjára eső erőpárból áll; (17,- 22- és 24-ik §;) ezután fölbontjuk az $R$ erőt, épp úgy mint előbb, oly $Q$; $\pm Q$; $P$ és $\pm P$ összetevőkre, melyek mindegyike csak egyféle módon veszi az anyag szilárdságát igénybe, s végre összeadjuk az $\mathsf{M}$ erőpárt, mely szintén csavaró szilárdságára veszi igénybe az anyagot, a $\pm P$ erőpárral.

Második alkalmazás. Ha a 25-ik ábrán vázolt rácsos szerkezet csupa egyenes-tengelyű rúdból áll, s ha e rudak végeiken csuklókkal vannak egymással a csomópontokon összekötve, és akképpen vannak elren-




25-ik ábra.

dezve, hogy szilárdsági tengelyeik mind abba a síkba esnek, melyben a külső erők hatnak a szerkezet csomópontjaira; ha továbbá a *balról* az $x\,x$ átmetszésre ható külső erőknek, az átmetszett $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ rudak szilárdsági tengelyeire eső összetevői az $S$, $T$, $Q$ erők, akkor az $\alpha\beta$ rudat az $S$ erő húzó szilárdságára veszi igénybe, a $\beta\gamma$ rudat a $T$ erő szintén húzó szilárdságára, a $\gamma\delta$ rudat pedig a $Q$ erő nyomó szilárdságára.

Ha mindenütt oly átmetszéseket lehet fölvenni, a melyekre ható külső erők csak egyféle módon bonthatók föl a belső erőket képviselő összetevőkre, a belső erők *sztatikailag határozottak*, s az egyensúlyi törvények alapján kiszámíthatók, vagy megszerkeszthetők. Az ellenkező esetben pedig, t. i. akkor, ha nem lehet a tartón oly átmetszéseket fölvenni, melyeken a belső erők meghatározására az egyensúlyi föltételek elégségesek lennének, a belső erők *sztatikailag határozatlanok*, tehát a tartó deformációjától is függnek. A 25-ik ábrán vázolt tartó pl. a belső erőkre nézve sztatikailag határozott, (függetlenül attól, hogy a reakciók szintén sztatikailag határozottak-e vagy sem,) minthogy mindenütt lehet oly átmetszést fölvenni, melyben csak három belső erő szerepel, s minthogy másrészt valamely erő ugyanabban a síkban működő három összetevőre csak egyféle módon bontható föl.

## 5. §.

## A tartók osztályozása.

A tartókat, hogy az elhajlás ellen, lehetőleg kevés anyagból, lehetőleg szilárdak és merevek legyenek, rendesen akképpen gyártják hogy széleiket a többi részeknél erősebb méretű rudak szegélyezik. E rudakat a tartók öveinek nevezzük, s ez övek egymás közötti összeköttetésének módja szerint egyrészt a rácsos, másrészt a tömör tartókat különböztetjük meg. A rácsos tartókon az öveket rácsozat köti össze, (lásd a VII-ik fejezetet,) a tömör tartókon ellenben oly *egész, vagy áttört gerincfal*, mely az övekkel hasonló alkotású, s tőlük rendesen csak vastagság dolgában üt el. A tömör tartók közé tartoznak: a hengerelt I vastartók; a szögecselt vaslemez-tartók különböző alakjai; (melyeken az összeköttetést az övek között vaslemez képezi;) azok az öntöttvas-tartók, melyeken az öveket szintén öntöttvas gerinclemez köti össze; az egyszerű, a fogazott, és az ékelt gerendákból álló fatartók, melyeken azonban, magától érthető okból, nincsenek külön övek stb.

A *szerkezetükön* alapuló, épp említett beosztáson kivül, a *külső erők működésének módja* szerint is osztályozzuk a tartókat, függetlenül szerkezetüktől, míg a szerkezetükből kiinduló osztályozás viszont attól független, hogy mily külső erők hatnak a tartókra. Mindazokat a tartókat ugyanis, melyeken a reakciók az alátámasztás elrendezése következtében párhuzamosak a többi külső erővel, párhuzamos reakciójú tartóknak vagy rövidebben gerendatartóknak nevezzük, még pedig a támaszpontok száma szerint egy-, két- vagy többtámaszú gerendatartóknak, akár tömörek, akár rácsosak, s akármily alakúak. (135—151-ik és 155—166-ik ábrák.) Mindazokat a tartókat pedig, melyeken a reakciók más irányúak mint a többi külső erő, egész általánosságban ferde-reakciójú tartóknak fogjuk nevezni, ismét akár tömörek, akár rácsosak, s bármilyen alakúak is. A ferde-reakciójú tartók között a tömör és a rácsos ívek és függőtartók a legfontosabbak, és ezek között viszont a két támaszúak. Megjegyzendő, hogy a többtámaszú íveken és függő tartókon rendesen csak a két szélső támaszponton, (a hídfőkön,) ferde a reakció, a középső támaszpontokon pedig rendesen függőleges. (Ezeken ugyanis hengereket alkalmaznak a tartók alatt, lásd a 125. I és 126. I ábrát.) Az ívek a külső erők tekintetében abban különböznek a függő tartóktól, hogy a reakció vízszintes összetevője a hidfőkön az ívekre *befelé* hat, (t. i. a hídnyilás felé, lásd a 125. I ábrát,) a függő tartókon pedig kifelé. (126. I ábra.)

Az, hogy mily irányú reakció keletkezik valamely támaszponton, amint föntebb láttuk, (4. §,) a megtámasztás módjától függ. Ettől függ tehát az is, hogy a ferde- vagy a párhuzamos reakciójúak közé tartozik-e valamely tartó.

A szilárdsági tárgyalás szempontjából végre megkülönböztetjük azokat a tartókat, melyeken a reakciók sztatikailag határozottak, azoktól, melyeken határozatlanok; a belső erők tekintetében pedig a sztatikailag határozott és a sztatikailag határozatlan belső erejű tartókat.

## 6. §.

## Az elválasztó csuklók befolyása a külső erőkre.

*1. **Elválasztó csuklónak*** oly szerkezetet nevezünk, mely akképpen választja el a tartót egymástól elkülönitett két részre, hogy ezek csak a mondott csuklóval vannak egymással összekötve, és körülötte foroghatnak. (Az elválasztó csuklók tehát jól megkülönböztetendők az esetleg elrendezett egyéb csuklóktól, pl. a rácsos tartók csomóponti csuklóitól.) Az alább következőkben az elválasztó csuklóknak a külső erőkre gyakorolt befolyását fogjuk tárgyalni, még pedig, tekintettel az építészeti alkalmazásokra, a *síkbeli erők és síkbeli tartók* esetére, megjegyezvén azonban, hogy ha térbeliek az erők, hasonló módon igen könnyen hasonló szabályokat lehet leszármaztatni.

*Könnyen belátható mindenekelőtt, hogy ha egy vagy több helyen elválasztó csuklót rendezünk el valamely tartón, és ha átmetszést veszünk* *föl e csuklók egyikén át, az ez átmetszésre ható külső erők eredőjének e csuklón kell átmennie.*

Valamely átmetszésre ható külső erők eredője ugyanis, amint a 4. § 2-ben láttuk, azt az erőt képviseli, melylyel a tartó mindegyik része a másikat kölcsönösen megtámasztja. Elválasztó csukló helyén azonban csak a csuklóban érintkezik a tartó két része egymással, tehát csakis e csuklóban támaszthatja meg egymást.

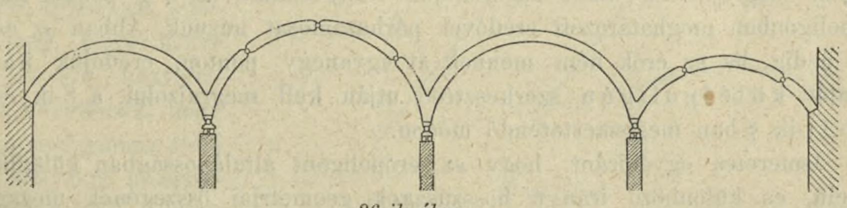
*Ebből azonban az következik viszont továbbá, hogy bármily tartó bármely elválasztó csuklóján át veszünk is föl átmetszést, a reája ható külső erők nyomatékának a csuklóra nézve zérust kell tennie, hogy tehát minden elválasztó csukló egy-egy további egyensúlyi egyenletet határoz meg a tartóra ható reakciók és egyéb külső erők között.*

Elválasztó csuklók alkalmazása utján, amint ezekből látjuk, a reakciók sztatikai határozatlanságát minden tetszőleges tartón el lehet kerülni. Még pedig annyi elválasztó csuklót kell e végből alkalmazni, a mennyivel többet tesz a reakciók száma, (esetleg a reakció-összetevők száma,) mint az egyensúlyi egyenleteké, nem számítva azokat az egyenleteket, melyek éppen az elválasztó csuklók alkalmazása következtében lépnek érvénybe. Ha ennél kevesebb elválasztó csuklót rendezünk el, akkor a reakciók sztatikai határozatlansága nem szünik meg. Ha pedig nagyobb ennél az elválasztó csuklók száma, vagy ha nem helyesen osztják be a csuklókat az egyes hídnyilásokra, (miről az alább következőkben azonnal lesz szó,) akkor mozgás áll be a tartón, kivéve azt az esetet, ha a csuklók mind oly helyeken vannak, melyeken az e pontokon fölvehető átmetszésekre ható eredők különben is átmennek, a mi azonban, magától érthetőleg, csak egy bizonyos, meghatározott terhelésre, és csak addig állhat, míg e megterhelés meg nem változik. Több csuklót, mint a mennyit a reakcióknak sztatikailag határozottá tétele esetleg megkiván, ez okból csakis azokon a láncokon alkalmazunk, melyek önálló függő tartókat képeznek. Ezeken is mozgás áll ugyan be, ha megterhelésük megváltozik, de a mozgásból új egyensúlyi helyzet keletkezik. (Lásd 33. § 3.)

Ami a csuklók beosztását illeti, először is az következik a mondottakból, hogy a tartó egyik vagy másik végétől számított $n$-ik csuklót, a híd ugyanezen oldalán, legalább $n$ reakció-összetevőnek kell megelőznie, minthogy csak ekkor lehet ez $n$ csuklóra nézve fölállított $n$ nyomatéki egyenletnek megfelelni. Ha $m$ az egyensúlyi egyenletek száma, (ferde reakciójú tartókra $m = 3$, gerendatartókra $m = 2$,) akkor ugyanabban az egy hídnyilásban legföljebb $m$ csuklót lehet továbbá elrendezni, azt is csak akkor, ha e hídnyilást a híd egyik vagy másik oldalán éppen $m$ oly reakció-összetevő előzi meg, melyet az esetleg ugyanazon oldalon levő többi elválasztó csukló alkalmazása még nem határoz meg.

Több mint $m$ csuklót ugyanis azért nem lehet ugyanarra a nyilásra beosztani, mert $m$ egyenlet teljesen meghatározza a megelőző reakció-összetevők eredőjét, több mint $m$ egyenletnek tehát nem lehet megfelelni, bármennyi ismeretlen reakció előzi is meg ez $m$ csuklót. Ha pedig $m$ csuklót rendezünk el valamely tartó egyik hídnyílásán, ha továbbá e nyílást a híd egyik vagy másik oldalán $m_1$ további csukló és $r$ reakció-összetevő előzi meg, és ha $m + m_1 = r$, akkor az $m + m_1$ egyenlet éppen elégséges az $r$ reakció-összetevő meghatározására. Ha ellenben $r > m + m_1$ akkor az $m + m_1$ egyenlet erre nem elégséges, s az $m$ egyenlet mégis teljesen meghatározza az $r$ ismeretlen erő eredőjét; világos tehát, hogy ez esetben az $r$ reakció-összetevő sztatikailag határozatlan marad, tekintve, hogy a következő hídnyílások csuklóira vonatkozó egyenletekben az $r$ reakció csak az $m$ egyenlettel meghatározott eredőjével szerepel, nem külön-külön.

A többtámaszú gerendatartókon, ha végeik a támaszponti csuklók körül foroghatnak, a reakciók száma egygyel több mint a hídnyílásoké, az egyensúlyi egyenletek száma kettő. A többtámaszú íveken és a többtámaszú merev függő tartókon, ha végeiket lapokra támasztjuk, a középső oszlopokon pedig hengereken nyugvó támaszponti csuklókat alkalmazunk, (26-ik, továbbá 125. I és 126. I ábra,) a reakció-összetevők száma a szélső támaszpontokon három-három, a középső oszlopokon egy-egy; az egyensúlyi egyenletek száma három. Arra tehát, hogy a reakciók sztatikailag határozottá tétessenek, a többtámaszú gerendatartókon egy elválasztó csuklóval kevesebbet, a többtámaszú íveken és a többtámaszú merev függő tartókon pedig két csuklóval többet kell elrendezni, mint a mennyi a hídnyílások száma, a csuklók beosztását illetőleg pedig mindkét esetben az imént mondottakra kell ügyelni. Lapokra támaszkodó többtámaszú ívet vagy merev függő tartót pl. egy-egy *szélső* hídnyíláson három elválasztó csuklóval lehet fölszerelni tekintve hogy e nyílást három reakció-összetevő előzi meg. (Ha kéttámaszú az ív és ha csuklókra támaszkodik, akkor e három csukló közül a két szélsőből támaszponti csukló lesz.)



*26-ik ábra.*

A 2-ik hídnyílásra azonban csak úgy lehet három csuklót beosztani, (akár mely oldalról számítjuk a hídnyílásokat,) ha az elsőben is van egy. (26-ik ábra.) Mert az ellenkező esetben három csukló nem lenne elégséges arra, hogy a megelőző négy reakció-összetevő sztatikai határozatlanságát megszüntesse, és ezek eredőjét mégis teljesen meghatározná. Abban az esetben továbbá, ha pl. négy csuklót osztunk be az első két hídnyílásra, a legközelebbiben legföljebb egyet lehet elrendezni, mert ha kettőt rendeznénk el, akkor a hatodik csuklót csak öt reakció-összetevő előzné meg, stb. A többtámaszú tartókon, amint ezekből látjuk, a csuklókat sokféle módon lehet a hídnyílásokon beosztani.

HARMADIK FEJEZET.

# A síkbeli erők összetétele és fölbontása.

## 7. §.

## Ugyanegy, (véges távolságú,) ponton átmenő, síkbeli erők összetétele.

*1. Előzetes megjegyzések.* Hogy az erőkkel grafikai műveleteket lehessen végrehajtani, *hosszúságokkal* kell őket kifejeznünk. E hosszúságokat, mint már mondottuk, (1. §,) az erők mérő hosszúságainak nevezzük, s erőlépték szerkesztése útján határozzuk meg. Azt az egyenest, melyben valamely erő működik, ez erő irányvonalának nevezzük, és azt, hogy az erő merre felé hat ez egyenesben, (tehát az erő értelmét,) nyillal jelöljük meg. Ezenkivül folyó számokkal is megjelöljük az erőket, amenynyiben pl. $P_1 P_2 P_3 \ldots$ jelek helyett többnyire csak az 1, 2, 3 ... jelzőket írjuk rá az irányvonalakra vagy a mérő hosszakra.

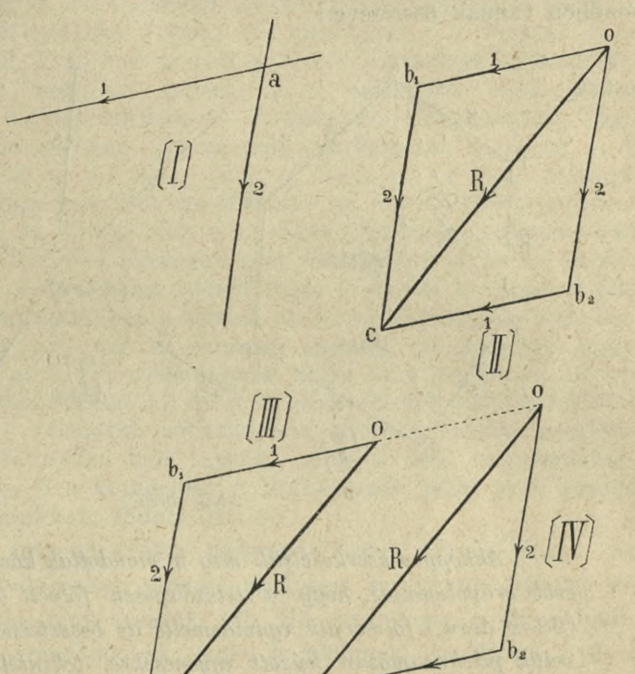
Ha két vagy több erő eredőjét kell meghatározni, akkor rendesen külön ábrán, az úgynevezett erőpoligónban szerkesztjük meg ennek nagyságát, (mérő hosszát,) irányát és értelmét, s külön ábrán irányvonalát. Az erőpoligón akképpen keletkezik ugyanis, hogy az összeteendő erőket magukkal párhuzamosan eltoljuk, és ezután tesszük őket össze. Az erőpoligónban tehát csak irányra, nagyságra és értelemre nézve helyes az eredő, (valamint a többi erő is,) irányvonalra nézve nem. Ha az összeteendő erők mind ugyanazon a $P$ ponton mennek át, akkor úgy találjuk meg, erőpoligónjuk megrajzolása után, az eredőjük irányvonalát, ha a $P$ ponton át az erőpoligónban meghatározott eredővel párhuzamosat húzunk. Abban az esetben pedig, ha az erők nem mennek át ugyanegy ponton, eredőjük irányvonalát kötélpoligón szerkesztése utján kell megrajzolni, a 8-ik és a 10—11-ik §-ban megismertetendő módon.

Ismeretes egyébiránt, hogy az erőpoligónt általánosságban különböző előjelű, és különböző irányú hosszúságok geometriai összegének megszerkesztése utján kapjuk meg. Szükségesnek találjuk azonban ez alapvető műveletet a következő két pontban, sztatikai szempontból is megvilágítani.

*2. Két erő összetétele.* Abban az esetben, ha csak két erő teendő össze, (27. I ábra,) eredőjük irányvonalaik $a$ metszéspontján megy át, s magával párhuzamosan félretolva, az $ob_1cb_2$ erő-parallelogrammal szerkeszthető meg, (27. II ábra,) melyen az összeteendő, (1 és 2-vel számozott,) erők szintén magukkal párhuzamosan félretolva, a tetszőlegesen fölvehető $o$ pontból vannak fölmérve, s melyen $oc = R$ a keresett eredőt adja meg, irányra, nagyságra és értelemre nézve.

Minthogy az erő-parallelogramm az $ob_1c$ és $ob_2c$ háromszögekből áll, s ezek egyike is teljesen meghatározza a keresett eredőt, a parallelogramm helyett mindig erőháromszöget rajzolunk, még pedig akképpen, hogy a tetszőlegesen fölvehető $o$ ponton kezdve a háromszög szerkesztését, (27. III—IV ábra,) ráméгjük egymás mellé az összeteendő erők mérő hosszait az ez erőkkel párhuzamosan húzott $ob_1$ és $b_1c$ vagy $ob_2$ és $b_2c$ egyenesekre, megjegyezvén, *hogy mindegyik erőt értelmére való tekintettel kell a vele párhuzamosan vont egyenesre fölmérni, t. i. arra felé, a merre az erő hat.*

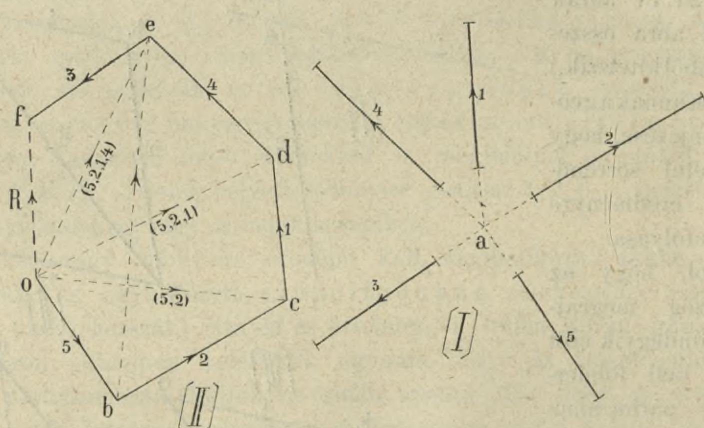
Ha az imént leírt szerkesztést az 1-gyel számozott erővel kezdjük meg, akkor az erő-parallelogramm $ob_1c$ háromszögét kapjuk, az ellenkező esetben az $ob_2c$ háromszöget, (amint a 27. III—27. IV ábrák és a 27. II ábra összehasonlításából kitetszik,) ami pusztán annak a geometriai kifejezése, hogy az összetétel sorrendjének az eredményre nincsen befolyása.



*27-ik ábra.*

Abból, hogy az erőháromszög megrajzolására mindegyik erőt arra felé kell fölmérni a vele párhuzamosan húzott egyenesre, amerre ez erő hat, s másrészt abból, hogy a nyillal éppen azt jelöljük meg, hogy merre hat az erő, közvetetlenül következik, hogy a háromszög amaz oldalain, melyekre az *összeteendő* erőket mértük föl, a nyilak az $o$ kezdőpontból kiinduló, $c$ felé irányuló mozgást mutatnak. Az eredőn a nyilnak az $o$ kezdőpontból kiinduló ugyane mozgást kell mutatnia. Az eredő mérőhossza ez okból az $o$ kezdő pontnak szintén arra az oldalára esik az erőháromszögben, amerre ez eredő hat. Valamint azt is konstatálhatjuk, hogy az eredőre rajzolt nyil, az imént mondottak következtében ellenkező körfolyamot mutat az erőháromszög kerületén, mint az összetevőkre rajzolt nyilak. Mindezek oly tételek, melyek egyrészt az eredő előjelének meghatározására, másrészt a végzett szerkesztés helyességének ellenőrzésére, s ezen kivül az alább következő további tételek levezetésére is szükségesek.

*3. Több erő összetétele.* Tegyük föl, hogy megszerkesztettük az éppen tárgyalt módon, előbb az összeteendő erők kettejének eredőjét, ezután ennek egyik további erővel való eredőjét, és így tovább, addig folytatva az összetételt, míg valamennyi erő eredőjét meg nem találtuk; és rajzoljuk meg az egyes háromszögeket egymásután mind ugyanegy ábrán. Az erő-háromszögek ekkor *erőpoligónná* egyesülnek, melynek kerületét az összetett erők mérő hosszúságai képezik, s melyben az egyes sugarak az egyes *részeredőket* adják meg, az utolsó sugár pedig, t. i. az, mely a kerület végpontját a kezdőponttal köti össze, valamennyi erő eredőjét: az *R végeredőt.* (Lásd a 28. II ábrát, melyen a 28. I ábrából látható erők 5, 2, 1, 4, 3 sorrendben vannak összetéve.)




*28-ik ábra.*

*Akképpen szerkesztjük meg a mondottak következtében az összeteendő erők erőpoligónját, hogy, a tetszőlegesen fölvett o kezdőpontbólkiindulva, (28-ik ábra,) fölmérjük egymásmellé az összeteendő erők mérő hosszait a velük párhuzamosan húzott egyenesekre, tekintettel lévén mindegyik erő értelmére, vagyis arra felé mérve föl mindegyik erő mérő hosszát, amerre felé az erő hat. Az erőpoligón kezdő- és végpontját összekötő sugár a magával párhuzamosan eltolt eredő. Az erőpoligón kerületének minden részét külön erőpoligónnak lehet tekinteni, s ennek következtében az erőpoligón mindegyik sugara és mindegyik átlója az erők egy részének párhuzamosan eltolt eredője, t. i. azoké az erőké, melyek erőpoligónján a végpontot a kezdőponttal összeköti. Az összetétel sorrendje bárminő lehet.*

*Minthogy arra felé kell, a szerkesztés folyamában, mindegyik erőt a vele párhuzamosan húzott egyenesre, az erőpoligón kerületén fölmérni, amerre felé az erő hat, s minthogy másrészt a nyíllal is megint azt jelöljük meg mindegyik erő mérő hosszuságán, hogy merre felé hat ez erő, ennek következtében az erőpoligónokra is áll, hogy a nyilak, az összetevők képezte kerületen, a kezdőponttól a végpont felé haladó folytonos moz-*

*gást mutatnak, amelyből az erők összetételi sorrendjét is le lehet olvasni. A végső sugárral meghatározott végeredőn, s a többi sugarakkal, és az egyes átlókkal meghatározott részeredőkön a nyíl szintén a kezdőponttól a végpont felé mutat, tehát ellenkező körfolyamot jelöl meg az erőpoligón kerületén, mint a többi oldalra, t. i. az összetevőkre rajzolt nyilak. Mind a végeredő, mind az egyes részeredők mindig arra felé hatnak, amerre felé mérőhosszúságaik saját kezdőpontjaikhoz képest az erőpoligónban esnek. A végeredő, és bármely részeredő irányvonalát úgy találjuk meg, ha az összetett erők a metszéspontján át az erőpoligón megfelelő sugarával vagy átlójával párhuzamosat húzunk.*

A 28. II ábra pl. a 28. I ábrából látható erők erőpoligónját mutatja. Amint a kerületre rajzolt nyilakból látjuk, *o* a kezdőpont, *f* a végpont, s az összetétel sorrendje: 5, 2, 1, 4, 3 és nem 3, 4, 1, 2, 5. (Rendesen az összetétel sorrendében számozzuk meg az erőket, s e szabálytól csak akkor térünk el, ha, — mint a jelen esetben, — a tárgyalás általánosítása, vagy valamely más ok kivánja ezt meg.) Ha az erők mérőhosszait $e_1, e_2, e_3 \ldots$-al jelöljük meg, akkor $ob \# e_5$, $bc \# e_2$, $cd \# e_1$ $de \# e_4$, $ef \# e_3$. S mindegyik erő mérő hosszúsága arra felé van fölmérve az erővel húzott párhuzamosra, a merre felé hat. Az *R* végeredőt az *of* sugár adja meg, párhuzamosan félretolt helyzetben; az 5, 2, 1-el számozott erők részeredőjét pl. az *od* sugár; mind a kettőre nézve *o* a kezdőpont, a nyíl tehát *o* ponttól a végpont felé mutat. Az *R* végeredő e szerint, az *a* ponton át *of*-fel párhuzamos irányban *fölfelé* hat, (mivelhogy a nyíl ezt az értelmet mutatja, és tekintve, hogy *of* az *o* pont fölé esik;) az 5, 2, 1 eredő hasonló okból az *a* ponton át, *od*-vel párhuzamos irányban, jobbra felé hat. A 2, 1, 4-gyel számozott erők eredőjét továbbá a *be* átfogó adja meg; (magával párhuzamosan eltolva;) értelme megjelölésére *b*-től *e* felé mutató nyilat kell rajzolni, mert a *bcde* erőpoligónban, amint a nyilakból látjuk, *b* a kezdőpont. A 2, 1, 4 eredő tehát az *a* ponton át, *be*-vel párhuzamos irányban, fölfelé hat stb.

Ugyanegy ponton átmenő erőket akképpen lehet egyensúlyozni, ha metszéspontjukon át, eredőjükkel egyenlő nagyságú és egyenlő irányú, de ellenkező értelmű további erőt veszünk föl. Ha tetszőleges erők erőpoligónját egy oly erővel egészítjük ki, mely a többinek eredőjével, (pl. a 28. II ábrán *of*-el,) egyenlő nagyságú és egyenlő irányú, de ellenkező előjelű, akkor azonban az ekképpen kiegészített erőpoligónban a végpont a kezdőponttal összeesik.

*Ugyanegy ponton átmenő, és egyensúlyban levő erők erőpoligónja tehát oly zárt idomot képez, melyen az egyes erők értelmét megjelölő nyilak folytonos folyamot mutatnak.*

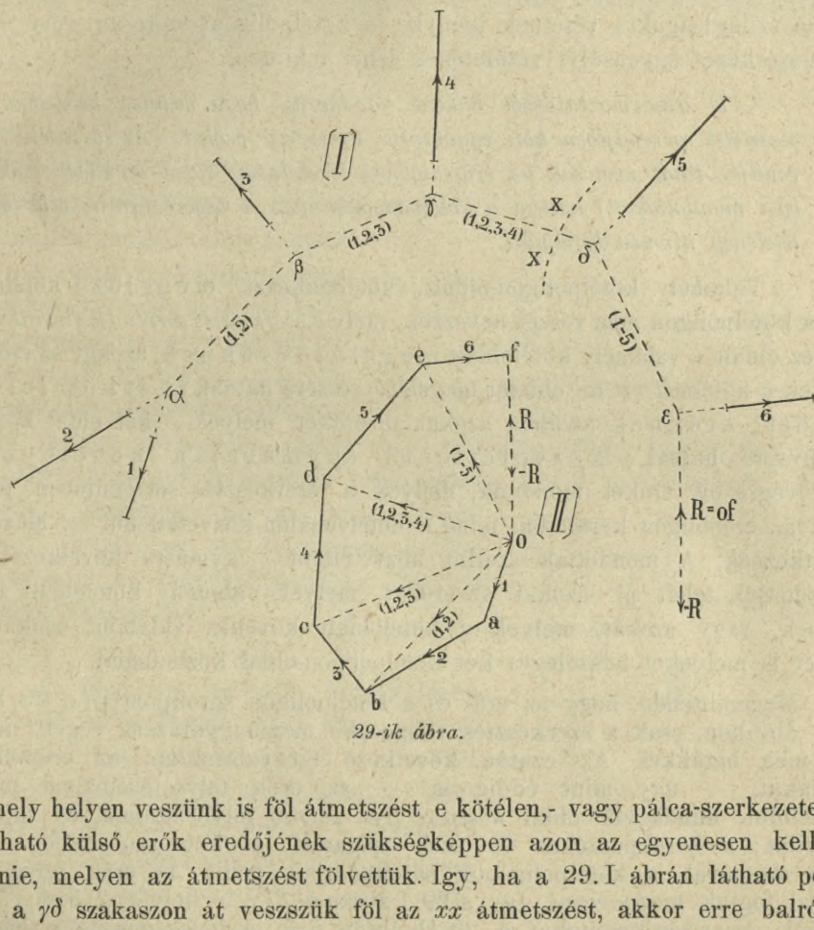
**4. *Összefüggés a síkbeli és a térbeli erők erőpoligónjai között.*** Ha *térbeli* erők hatnak a tetszőleges *a* pontra, akkor a *térben* teljesen ugyanama szabályok szerint szerkeszthetjük meg erőpoligónjukat, melyeket a síkbeli erőkre az imént részletesen előadtunk. Tegyük föl most már, hogy a tetszőleges *a* pontra ható térbeli erők erőpoligonját a térben megszerkesztettük, vetítsük mind az *a* pontra ható erőket, mind ezek erőpoligónját tetszőleges irányban a tetszőleges $\mathfrak{S}$ síkra, s képzeljük az erők vetületeit a vetületi síkban működő erőknek. Világos, hogy a térbeli erők poligónjának vetülete a vetületi síkban fölvett erők poligónját is megadja, tehát viszont a térbeli erők vetületeinek erőpoligónja a térbeli erők poligónjának vetületét. *Térbeli erők erőpoligónjának tetszőleges vetületét tehát úgy találjuk meg, ha úgy rajzoljuk meg az erők vetületeinek erőpoligónját, mintha síkbeli erők volnának. (Ezek bővebb kifejtését és alkalmazását lásd a IV-ik fejezetben.)*

## 8. §.
## A nem ugyanegy ponton átmenő, síkbeli erők összetétele.

Több erő eredőjének megszerkesztését *két* erő összetételére lehet visszavezetni. Megszerkesztjük ugyanis az előbbi § szerint az adott erők közül kettőnek az eredőjét, mind nagyságra mind irányvonalra nézve; ezt az eredőt új erőnek tekintve, megszerkesztjük ennek eredőjét az adott erők egy harmadikával, még pedig szintén nagyságra, valamint irányvonalra nézve is; s addig folytatjuk e módon az összetételt, míg valamennyi erő eredőjének, (a végeredőnek,) mérő hosszát és irányvonalát meg nem találjuk. Amint ezekből kitetszik, a jelen esetben okvetetlenül meg kell szerkeszteni sorban az egyes részeredőket is. Magukkal párhuzamosan eltolva, e részeredőket, valamint a végeredőt is, az előbbeni § útmutatásai szerint, erőpoligón rajzolása útján lehet legegyszerűbben meghatározni, irányvonalaikat pedig ez után párhuzamosak húzásával.

A szerkesztés menetét a 29. I ábrán példaképpen fölvett hat erőre a 29. I—29. II ábrán lehet látni. Az erők a számozás sorrendjében vannak összetéve; erőpoligónjukat az előbbeni §-ban mondottak szerint a 29. II ábrán rajzoltuk meg. A részeredők és a végeredő irányvonalait ezután a 29. I ábrán a következő módon szerkesztjük meg. Az első két erő 1,2 eredőjének irányvonalát úgy kapjuk, ha $\alpha$ metszéspontjukon át az $\alpha\beta$ egyenest, (melyet tetszés szerint megnyújthatunk,) az erőpoligón $ob$ sugarával húzzuk párhuzamosan. Az $1,2 = ob$ eredőt új erőnek tekintve, ezt a 3-mal számozott erővel kell összetenni. Az eredő ama $\beta$ ponton megy át, melyen az 1,2 erő irányvonala a 3-mal jelölt erőt átmetszi, s magával párhuzamosan eltolva, az erőpoligón $oc$ sugarával van megadva. Ha tehát $\beta\gamma \parallel oc$-vel húzzuk, akkor a $\beta\gamma$ egyenes az 1,2,3 erők eredőjének irányvonalát adja meg. Ama $\gamma$ ponton, melyen e $\beta\gamma$ egyenes a legközelebb sorra kerülő 4-ik erőt metszi, megy át az 1,2,3 erőnek a 4-ik erővel való eredője. Ha tehát $\gamma\delta \parallel od$-vel, akkor a $\gamma\delta$ egyenes az 1,2,3,4 erők eredőjének irányvonala. Ha ennek és az 5-ik erőnek $\delta$ metszéspontján át $\delta\varepsilon \parallel oe$-vel szerkesztjük, akkor a $\delta\varepsilon$ egyenesben az 1,2,3,4,5 erők eredőjének irányvonalát kapjuk meg. S ha végre a $\delta\varepsilon$ egyenes és az utolsó erő közötti $\varepsilon$ metszésponton át az $R \parallel of$ egyenest húzzuk meg, akkor ez $R$ egyenes megadja az 1—6-tal számozott erők eredőjének, tehát a jelen példában a végeredőnek irányvonalát.

Ha az 1, 2, 3, ... erőkhöz, $R$ eredőjük irányvonalában, ez eredőjükkel nagyságban és irányban megegyező, de előjelre nézve ezzel ellenkező erőt veszünk föl, akkor ez a többi erővel együtt egyensúlyban lesz. S ha kötéllel képzeljük ezeket az erőket egymással az $1\alpha\beta\gamma$.... poligón oldalai hosszában összekötve, vagy kötél helyett oly pálca-szerkezettel, melyen az egyes pálcák az $\alpha, \beta, \gamma$.... sarokpontokon alkalmazott csuklók körül szabadon foroghatnak, akkor a kötél-, vagy pálca-szerkezet is egyensúlyban lesz. Mert



*29-ik ábra.*

bármely helyen veszünk is föl átmetszést e kötélen,- vagy pálca-szerkezeten, a reá ható külső erők eredőjének szükségképpen azon az egyenesen kell átmennie, melyen az átmetszést fölvettük. Igy, ha a 29. I ábrán látható példában, a $\gamma\delta$ szakaszon át veszszük föl az $xx$ átmetszést, akkor erre balról az 1,2,3,4 erők hatnak, jobbról az 5,6 és — $R$ erők. A $\gamma\delta$ egyenesre esik tehát mind a balról, mind a jobbról ható erők eredője; mindkét eredőt az *od* erősugár adja meg; értelemre nézve ellenben az egyiknek az előjele szükségképpen ellenkezik a másikéval, (a balról ható erőkre ugyanis a kezdőpont az *od* mérő hosszúságon az *o* pont, a jobbról ható erőkre pedig a *d* pont,) ami egyszerűen az 1—6 és —$R$ erők közötti egyensúly kifejezése. Egyszersmind látjuk, hogy a jelen esetben pl. a $\gamma\delta$ kötélszakaszt az erők húzásra veszik igénybe.

Minthogy azt a poligónt, melyet az imént szerkesztett részeredők irányvonalai képeznek, amint az éppen mondottakból kitetszik, valamely kötél,- vagy pálca-szerkezet egyensúlyi vetületének lehet képzelni, ez okból e poligónt kötélpoligónnak, ha görbe vonalból áll, kötélgörbének, általánosságban kötélvonalnak nevezzük. Kötélgörbe akkor keletkezik, ha egymáshoz végtelen közel működnek az erők, vagyis akkor, ha ú. n. *megoszló erőkre*, (pl. szélnyomás, víznyomás, megoszló súly stb.) szerkesztjük a kötélvonalat. Mondanunk sem kell, hogy abban az esetben, ha az egyes szakaszok nyomó szilárdságukra vétetnek igénybe, a kötélpoligónt szorosan véve csak pálca-szerkezet egyensúlyi vetületének lehet tekinteni.

*E leszármaztatásból önként következik, hogy minden kötélvonal az összetétel sorrendjében köti egymással össze az erőket. Az összetétel sorrendjét tehát nemcsak az erőpoligónon lehet látni, (lásd az előbbi szakaszban mondottakat,) hanem a kötélpoligónon is. A végeredőre az erők összetételének nincsen befolyása.*

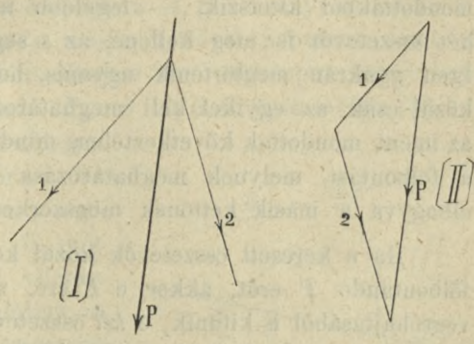
Valamely kötélpoligón-oldalt, (kötélszakaszt,) megelőző kötélrésznek a kötélpoligón ama részét nevezzük, mely *a szerkesztés sorrendje szerint* előzi meg ez oldalt, s valamely kötéloldalt megelőző erőknek azokat az erőket, melyek a kötélnek ezt az oldalát megelőző részére hatnak; két kötéloldal közötti erőknek továbbá azokat az erőket, melyek e két oldal közötti kötélrészre hatnak; közvetetlenül egymásután következőknek végre oly erőket mondunk, melyek a szerkesztés sorrendjében, tehát mind az erőpoligón kerületén, mind a kötélvonalon közvetetlenül egymásután következnek. A mondottak szerint közvetetlenül egymásra következőknek nevezhetjük tehát pl. azokat az erőket, melyek valamely kötéloldalt megelőznek, vagy azokat, melyek e kötéloldalt követik, valamint azokat az erőket is melyeket tetszőleges két kötélpoligón-oldal közbefoglal.

Megemlítendő, hogy az erő- és a kötélpoligón sarokpontjait a 29. II és 29. I ábrákon csak a szerkesztés világosabb megmagyarázása végett neveztük meg betűkkel. Az ezután következő tárgyalásokban az erőpoligónoldalakat, — úgy mint eddig is, — az erők folyó számaival fogjuk megjelölni, mindegyik oldal *középére* írva az erő folyó számát, és rajzolva a nyilat; a sarokpontokat és ezek sugarait a két szomszédos oldal folyó számával, a kötélpoligónok sarokpontjait pedig az erők folyó számaival fogjuk megnevezni. Igy a 29. I ábrán $\alpha; \beta; \gamma \ldots$ helyett 2; 3; 4; . . .-vel jelöljük meg a sarokpontokat. A 29. II ábrán p. o. 4, 5 nek nevezzük továbbá a *d* sarokpontot; az *od* sugarat a 4,5 sugárnak, alattomban értve, hogy az *o* kezdőponton megy át; a *be* átlót pedig p. o. a (2,3)(5,6) átlónak stb. (Példák legközelebb a 10. § ábráin láthatók.) Abban az esetben, ha az erők párhuzamosak, s ha előjelük az összetétel sorrendje szerint többször megváltozik, annyiban térünk el az erőpoligónok éppen említett megjelölő módjától, hogy — félreértés elkerülése végett — mindegyik erő mérő hosszúsága mindkét végpontjára ráírjuk az erő folyó számát; (lásd pl. az 55. I és 58. II ábrákat;) ez esetben az egyes erők közötti válaszpontok két-két számmal vannak megjelölve.

## 9. §.

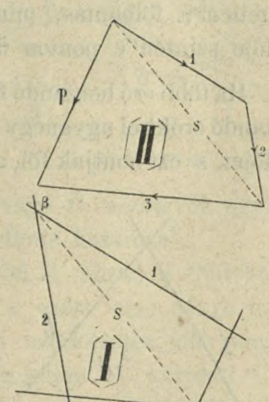
## Az erők felbontása, velük nem párhuzamos, síkbeli összetevőkre.

*1. A tetszőleges P erő fölbontása két összetevőre.* A $P$ erőt akképpen bontjuk föl a $P$ irányvonalat ugyanabban a pontban metsző, 1 és 2-vel számozott két összetevőre, (30. I ábra,) ha megszerkesztjük a megelőző 7. § 2-ban előadottak szerint ez erők háromszögét. E végből fölmérjük a fölbontandó $P$ erő mérő hosszúságát, párhuzamosan eltolt helyzetben, (30. II ábra,) s az egyik végponton át az egyik, a másikon át a másik összetevő irányvonalához húzunk párhuzamosat, úgy rakva föl a nyilakat az ekképpen megszerkesztett erőháromszögön, a keresett összetevőket megadó oldalakra, hogy az eredő mérő hosszúságának kezdőpontjából kiinduló, vagyis oly körfolyamot mutassanak, melynek értelme ellenkező azéval, melyet az eredőre rajzolt nyíl jelöl meg. Hogy melyik végponton át, melyik összetevővel húzzunk párhuzamost, annak az eredményre nincs befolyása; amint ugyanis az imént idézett 7. § 2-ból tudjuk, az itt lehetséges kétféle szerkesztéssel az erőparallelogramm két háromszögét kapjuk meg.



30-ik ábra.

*2. Ha oly három összetevőre bontandó föl a P erő,* (31. I ábra,) melyek irányvonalai meg vannak adva s a $P$ erővel ugyanegy síkra esnek, (melyek közül a $P$ erőt nem metszi át kettő ugyanazon a ponton, s melyek egymás között sem metsződnek ugyanegy pontban,) akkor összekötjük, az $s$ segédegyenes megvonása útján, azt az $\alpha$ pontot, melyen az egyik, pl. a 3-mal jelölt összetevő irányvonala a fölbontandó $P$ erőt átmetszi, a másik két irányvonal $\beta$ metszéspontjával, s fölbontjuk a $P$ erőt előbb két oly összetevőre, $s$-re és 3-ra, melyek irányvonalai az imént említett $s$- és 3-mal jelölt egyenesek, s ezután az $s$ segéd-összetevőt a $\beta$ ponton átmenő 1 és 2-vel jelölt erőkre. (31. I—II ábra.)



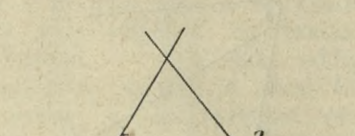
31-ik ábra.

Hogy a talált eredmény helyes, az a föntebb mondottakból önként értődik, de abból is kitetszik, hogy, ha a végzett szerkesztés eredményezte erőket 1, 2, 3 sorrendben összetesszük, kötélpoligónjukat a $\beta\alpha P$ vonal képezi, eredőjüknek tehát mind nagyságra és értelemre, mind irányvonalra nézve is, csakugyan a $P$ erőt találjuk.

Az, hogy melyik összetevővel kezdjük meg a szerkesztést, magától értődőleg, nincs befolyással az eredményre. Megjegyzendő azonban, hogy azt az összetevőt, melylyel a fölbontást megkezdjük, -- amint az épp mondottakból kitetszik, — legelőbb találjuk meg, annélkül, hogy a másik két összetevőt is meg kellene, az $s$ segéderő fölbontása útján, szerkeszteni. Igen gyakran megtörténik ugyanis, hogy valamely erő három összetevője közül csak az egyiket kell meghatározni, a másik kettőt nem. Ily esetben az imént mondottak következtében mindig azzal az összetevővel kezdjük meg a fölbontást, melynek meghatározása a föladat tárgyát képezi, egészen elhagyva a másik kettőnek megszerkesztését.

Ha a keresett összetevők közül kettő ugyanabban a pontban metszi a fölbontandó $P$ erőt, akkor e $P$ erő, amint az éppen előadott szerkesztés végrehajtásából is kitünik, e *két* összetevőre oszlik, a harmadik irányvonalon t. i. zérus lesz az összetevő. Ha mind a három összetevő irányvonala a fölbontandó erőnek ugyanegy pontján megy át, (s vele ugyanegy síkon van,) akkor a fölbontás sztatikailag határozatlan: a szóban forgó erő végtelen sokféle módon oszolhat három ily összetevőre. Ha pedig oly ponton metsződik a három irányvonal, mely a fölbontandó erőn kívül van, akkor lehetetlen a fölbontás, minthogy az ugyanegy ponton átmenő bármily erők eredője szintén e ponton megy át.

Ha több erő bontandó föl három oly összetevőre, melyek irányvonalai a fölbontandó erőkkel ugyanegy síkban vannak, akkor meghatározzuk az adott erők eredőjét, s ezt bontjuk föl, az imént előadott módon, a kijelölt három összetevőre.



*32-ik ábra.*

A rácsos tartók elméletében igen gyakran számítás útján oldjuk meg az e pontban tárgyalt föladatot, még pedig többnyire a *Ritter* (Hannover) féle nyomatéki módszer alapján. Ha ugyanis $X$ a keresett összetevő, (32-ik ábra,) $d$ ennek távolsága a másik két $Y, Z$ összetevő $\gamma$ metszéspontjától, és ha a fölbontandó erők nyomatékösszege ugyane metszéspontra $\mathbf{N}$, akkor:

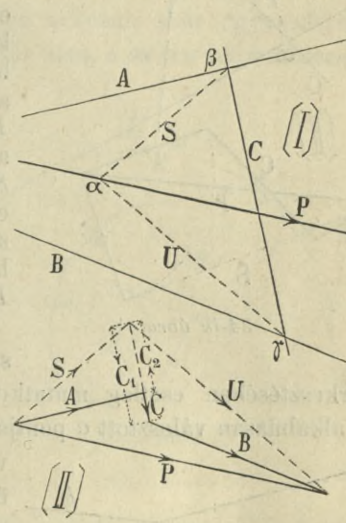
$$X = \frac{\mathbf{N}}{d}$$

tekintetbe véve, hogy az összetevők nyomatékösszege minden pontra nézve ugyanaz, mint a fölbontandó erőé, vagy erőké. A keresett $X$ összetevő értelmét pedig ugyanez elv következtében abból határozzuk meg, hogy az $Xd$ nyomaték *előjelének* is ugyanannak kell lennie, ami az $\mathbf{N}$ nyomatéké. A

32-ik ábra esetében pl. ha a fölbontandó erő vagy erők a $\gamma$ pont körül ↻ felé forgatnak, a keresett $x$ összetevőnek fölfelé kell irányvonalában működnie.

*3.* ***Más módok valamely erő fölbontására, vele ugyanarra a síkra eső három összetevőre.*** Ha az imént előadott szerkesztés végrehajtása a metszéspontok megszerkesztése tekintetében nehézségekbe ütközik, több más módon is meg lehet a keresett összetevőket szerkeszteni; ezek közül a következőket említjük meg e helyen.

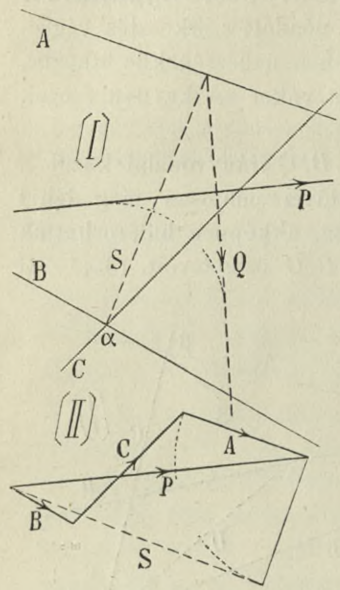
Az oly esetben, ha a keresett összetevők $A, B, C$ irányvonalai közül a $C$ egyenes $\beta$ és $\gamma$ metszéspontját a másik kettővel pontosan meg lehet szerkeszteni, az $A$ és $B$ egyenesekét ellenben nem, akképpen határozhatjuk meg igen egyszerűen a fölbontandó $P$ erő $A, B, C$ összetevőit, (33, I—II ábra,) ha fölbontjuk a $P$ erőt, a tetszőleges $\alpha$ pontján, két oly segédösszetevőre, $S$- és $U$-ra, melyek egyike a $\beta$, másika a $\gamma$ metszésponton megy át. Ha most az $U$ erőt $B$-re és $C$-re bontjuk föl, akkor világos ugyanis, hogy ezzel máris megtaláltuk a keresett $B$ összetevőt, és a $C$ összetevő egyik részét, $C_1$-et, tekintetbe véve, hogy az $S$ erőből csak az $A$ és $C$ irányvonalakra juthat összetevő; s ha az imént említett $S$ erőt $A$-ra és $C$-re bontjuk, ezzel megkapjuk a keresett $A$ összetevőt és a $C$ összetevőnek azt a $C_2$ részét, mely a föntebb említett $C_1$ részszel, előjel tekintetében helyesen összeadva, a keresett $C$ összetevőt adja meg. Amint ezekből látjuk, e módon is meg lehet könnyen szerkeszteni mind a három összetevőt, s meg lehet szerkeszteni az $A$ vagy $B$ összetevők egyikét is, anélkül, hogy a másik két összetevőt meg kellene határozni.




*33-ik ábra.*

A $PABC$ erőnégyszög megszerkesztése, (33.II ábra,) a föntebb mondottak után nem kíván bővebb magyarázatot, s ezért erre nézve csak azt említjük meg, hogy a $C_1$ és $C_2$ erőket csak a szerkesztés jobb megvilágítása végett jelöltük meg a 33.II ábrán külön-külön. A keresett $C$ összetevőt ugyanis, a $C_1$ és $C_2$ részek külön meghatározása és összeadása helyett, egyszerűen abból találjuk meg a II ábrán, hogy az $A, B, C$ és $P$ erők mérő hosszainak erőnégyszöget kell képezniök, s hogy a $C$ erő mérő hosszának ennélfogva $A$ erő végpontja és $B$ erő kezdőpontja közé kell esnie.

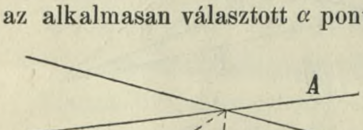
Ha ennek a módnak végrehajtása is nehézséget okoz, akkor akképpen határozhatjuk meg a keresett $A, B, C$ összetevőket, (34. I—II ábra,) ha bármely más oly $Q$ erővel pótoljuk a fölbontandó $P$ erőt, melynek nyomatéka az $A$, $B$, $C$ irányvonalak bármelyik $\alpha$ metszéspontjára nézve mind előjel, mind nagyság dolgában ugyanaz, mint a fölbontandó $P$ erőé. Arra az $A$ irányvonalra ugyanis, mely nem megy át az $\alpha$ ponton, minden ily $Q$ erő után ugyanoly összetevő esik, mint a fölbontandó $P$ erő után. Az $A$ összetevőt ez okból az éppen említett módon fölvett $Q$ erő fölbontásával lehet megszerkeszteni. S ha nem csak az $A$, hanem a $B$ és $C$ összetevőket is meg kell határozni, akkor ez könnyen megtörténhet, tekintve, hogy a $P, A, B, C$ erőnégyszög két oldalával $P$-vel és $A$-val, és másik két oldala irányával, teljesen meg van határozva.



*34-ik ábra.*

A 34. I—II ábrákon a fölbontandó $P$ erőt a $B$ és $C$ irányvonalak $\alpha$ metszéspontja körül $90^0$-os szögben fordítottuk el, s fölbontottuk az ekképpen keletkező $Q = P$ erőt az $A$ és $S$ összetevőkre. Az erőpoligónban a $P$ erőt nem fordítottuk félre, hanem e helyett az $A$ és az $S$-et húztuk merőlegesen az $A$ és $S$ irányvonalakra. A talált $A$ összetevőt az erőpoligónban visszaforgattuk valódi irányába, s ez után megrajzoltuk az erőnégyszög még hiányzó két oldalát $B$-és $C$-t, párhuzamosan a $B$ és $C$ irányvonalakkal.

Akképpen is el lehet kerülni a nehézséget, mely a $P$ erő $A, B, C$ összetevői megszerkesztésében esetleg mutatkozik, (35-ik ábra,) hogy fölbontjuk a $P$ erőt, az alkalmasan választott $\alpha$ pontján, az $S_1$ összetevőre, mely az $A$ és $B$ irányvonalak $\beta$ metszéspontján megy át, és az $S_2$ összetevőre, melynek irányvonalát akképpen veszszük föl, hogy az $S_2$ erőt könnyen föl lehessen tovább bontani egy olyan összetevőre, mely a $C$ egyenesre esik, és egy másik összetevőre $S_3$-ra, mely a $\beta$ metszésponton megy át. Az $S_2$ erőnek ekképpen megszerkesztett $C$ összetevője ugyanis a fölbontandó $P$ erő $C$ összetevőjét adja meg, tekintve, hogy az $S_1$ és $S_3$ erőkből csak $A$-ra és $B$-re jut összetevő. A $C$ összetevő meghatározása után ismeretes a $P, A, B, C$ erő négyszögben két oldal, $P$ és $C$; meg lehet tehát megint szerkeszteni az egész erőnégyszöget, s ez úton igen egyszerűen meg lehet határozni, — ha szükséges, — az $A$ és $B$ összetevőket is.



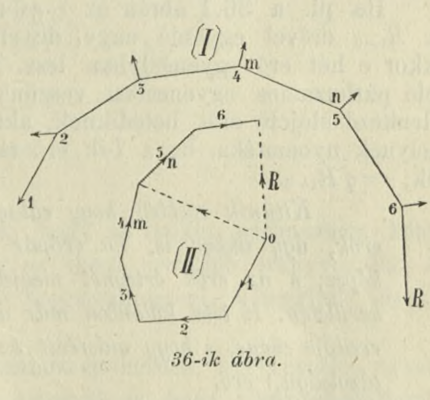
*35-ik ábra.*

## 10. §.

## Tételek az erő- és a kötélpoligónról.

*1. A kötélszakasz-erők. A 8. §-ban akképpen származtattuk le a kötélpoligónokat, hogy az első két erővel kezdve az összetételt, mindegyik részeredőt a legközelebb sorra kerülő erővel tettük össze. E leszármaztatásból legelőbb az következik önként, hogy az az egyenes, melyet a kötélpoligón valamely oldalának megnyújtása képez, az ez oldalt megelőző erők eredőjének irányvonala, s hogy ez eredőt, magával párhuzamosan eltolva, az erőpoligón ama sugara adja meg, mely a szóban forgó kötéloldallal párhuzamos.*

Ez eredőket a 8-ik §-ban említett okból, rövidség végett, kötélszakasz-erőknek fogjuk a következőkben nevezni, akár egyensúlyban levő erőkre szerkesztettük a kötélpoligónt, akár nem, *s az mn kötélszakasz-erő alatt,* (36.I—II ábra,) *a mi ez erő előjelét illeti, akkor is az mn oldalt, az összetétel sora szerint megelőző erők eredőjét fogjuk érteni, ha az erők egyensúlyban vannak, s ha ez okból minden kötélpoligón oldal két egyenlő nagyságú, de ellenkező előjelű eredő irányvonala, t. i. az e kötéloldalt megelőző, és a reája következő erőké.* Ha nyilakkal jelöljük meg a kötélszakasz-erők értelmét az erőpoligónban, akkor tehát mind e nyilak a kezdőponttól a kerület sarokpontjai felé mutatnak.




*36-ik ábra.*

A 4, 5 kötélszakasz képezte egyenes a 36. I ábrán pl. az 1, 2, 3, 4 erők eredőjének irányvonalát adja meg, a 4, 5 erősugár pedig a 36. II ábrán ez eredő mérő hosszát; és a 4, 5 kötélszakasz-erőn, előjelre nézve, az 1, 2, 3, 4 erők eredője értendő, nem az 5, 6 és —*R* erőké; e kötélszakasz-erő tehát balra felé hat.

*Az is közvetetlenül a kötélpoligón leszármaztatásából következik továbbá, hogy mindegyik kötélpoligón-oldal egyik erősugárral párhuzamos, még pedig azzal az erősugárral, mely az erőpoligónban ugyanama két erő közötti sarokponton megy át, melyek irányvonalai között van a szóban levő kötéloldal a kötélpoligón ábráján. Az mn kötéloldal tehát az mn erősugárral párhuzamos.*

Az *mn* kötéloldal ugyanis, a mint épp láttuk, az *m* erő előtti erők eredőjének irányvonala, az *m* erőt beleértve, az *n* erőt pedig nem. Világos tehát, hogy az eltolt *mn* kötélszakaszerőt megadó erősugárnak az *m* erő végpontján s az *n* erő kezdőpontján, tehát az *mn* ponton kell átmennie.

*A kötélpoligónokat a mondottak következtében, nem tekintve sztatikai leszármaztatásukat, egyszerűen úgy rajzoljuk meg, hogy megszerkesztjük,* *az összetétel sorrendjének megállapítása után, az erőpoligónt; ezután megnyújtjuk az összetétel sorában elsőnek szereplő erő irányvonalát, (36, I—36, II ábra,) míg a másodikat nem metszi, a metszésponton át a 2,3 kötéloldalt a 2,3 erősugárral, az új metszésponton át a 3,4 kötéloldalt a 3,4 erősugárral húzzuk párhuzamosan stb.*

**2. *Az egész erőrendszer egyensúlya.*** Oly erőt, mely tetszőleges számú más erőt egyensúlyoz, amint tudjuk úgy találunk, ha erő- és kötélpoligónt rajzolva, meghatározzuk a szóban forgó erők eredőjét, s vele egyenlő nagyságú, de ellenkező előjelű erőt veszünk föl irányvonalában. Abban az esetben, ha az utolsó erőt a többi erő eredőjének irányvonalával össze nem eső, de ezzel párhuzamos egyenesen, a többi erő eredőjével egyenlő nagynak és ellenkező előjelűnek veszszük föl: az e módon kiegészített erőrendszer eredője erőpár.

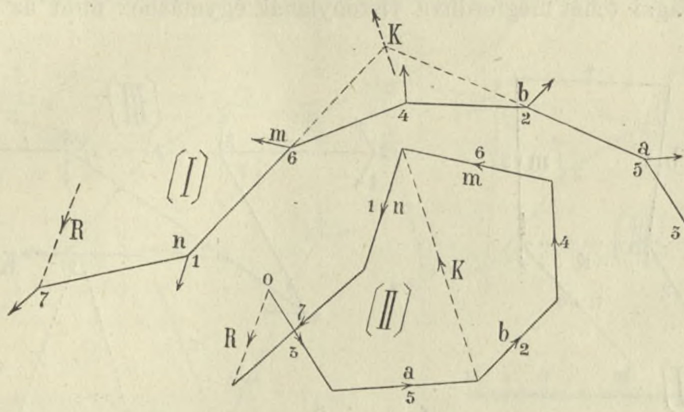
Ha pl. a 36. I ábrán az 1—6-tal számozott erőkhöz az $R$ egyenesben az $R_{1-6}$ erővel egyenlő nagy, de ellenkező előjelű 7-ik erőt veszszük föl, akkor e hét erő egyensúlyban lesz. Ha pedig az $R$-el össze nem eső, de vele párhuzamos egyenesben veszünk föl az $R_{1-6}$ erővel egyenlő nagy, de ellenkező előjelű erőt hetediknek, akkor e hét erő eredője oly erőpár lesz, melynek nyomatéka, ha a 7-ik erő távolságát az $R$ kötéloldaltól $q$-val jelöljük, $= q\,R_{1-6}$.

*Kitünik ezekből, hogy valamint akkor, ha egyensúlyban vannak az erők, úgy akkor is, ha erőpár az eredőjük, erőpoligónjuk zárt vonalat képez, s az erők értelmét megjelölő nyilak folytonos folyamot mutatnak kerületén. E tétel különben már abból is foly, hogy egyensúlyban levő erők eredője zérus, s hogy másrészt az erőpár eredője végtelen kis, (és végtelen távolságú,) erő.*

**3. *A tetszőleges ab és mn kötéloldalak közötti erők eredője.*** Ha $ab$ az a kötélpoligón-oldal, mely az $ab$ és $mn$ közötti erőket megelőzi, $mn$ pedig az, mely követi őket, s ha a kötélszakasz-erőket ez oldalakban, rövidség kedvéért, szintén $ab$-vel és $mn$-nel jelöljük, az $ab$ és $mn$ oldalak közötti erők eredőjét pedig $K$-val, akkor az $mn$ erő az $ab$ és a $K$ erők eredője; e három erőnek tehát ugyanazon a ponton kell átmennie. Világos továbbá, hogy a $K$ eredő mérő hosszát az erőpoligón $(a,b)(m,n)$ átlója adja meg, tekintetbe véve, hogy, ha $ab$ és $mn$ a közbefoglaló oldalak, és ha az összetétel sorrendje $p, q, r, \ldots, a, b, \ldots, m, n, \ldots$, akkor a $b$-től $m$-ig számozott erők a közbefoglaltak, ezeknek az erőknek poligónjában pedig a kezdőpont az $a, b$ pont, (mint az $a$ erő végpontja, s a $b$ erő kezdőpontja,) a végpont pedig hasonló okból az $m, n$ pont. (37. I—II ábra.)

*A tetszőleges ab és mn kötélpoligón-oldalak közötti erők K eredője, amint ezekből látjuk, a közbefoglaló és esetleg megnyújtandó ab és mn kötélpoligón-oldal metszéspontján megy át, s magával párhuzamosan eltolva, az erőpoligón $(a, b)(m, n)$ átlójával van megadva.*

E tétel alkalmazásával akkor is meghatározhatjuk tetszőleges számú, közvetetlenül egymást követő erő eredőjét, ha az összetétel sorában elsőnek fölvett erő nem szerepel közöttük. (Még más alkalmazást láss alább a 9-ik pontban.) A 37. I—II ábrákon pl. a 2, 4, 6-tal számozott erők eredője a közbefoglaló 5, 2 és 6, 1 kötélszakaszok metszéspontján megy át, magával párhuzamosan eltolva az erőpoligón (5, 2), (6, 1) = *K* átlójával egyenlő, s fölfelé működik.




*37-ik ábra.*

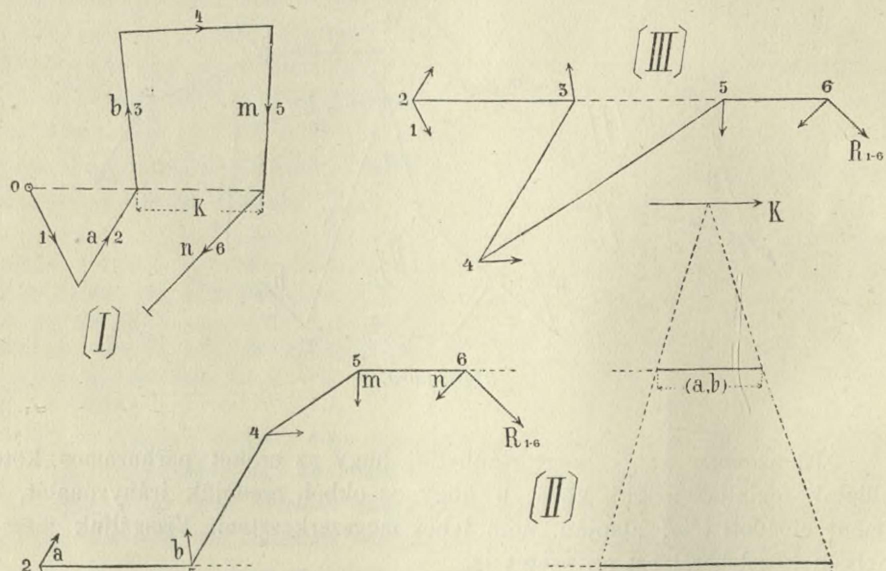
Itt azonban az is megtörténhetik, hogy az erőket párhuzamos kötéloldalak foglalják maguk közé, s hogy ez okból eredőjük irányvonalát, az imént előadott tétel alapján, nem lehet megszerkeszteni. Vizsgáljuk meg e helyen közelebbről ezt az esetet is.

Annak, hogy két kötéloldal párhuzamos egymással, vagy esetleg ugyanabba az egyenesbe esik, két oka lehet. Az egyik az, hogy a közbefoglalt erők erőpoligónja záródik, s az erőpoligónban ezért két sugár végpontja összeesik. (Lásd pl. az alább következő 39. II és III ábrákon, melyekhez a 39. I ábrán látható erőpoligón közösen tartozik, a 4—7-tel számozott erőket.) A közbefoglalt erők ekkor, amint a 2-ik pontban mondottakból foly, vagy egyensúlyban vannak, vagy erőpár az eredőjük, amit az alább következő 4—5-ik pontokban még részletesen fogunk tárgyalni.

A másik ok az lehet, hogy az erőpoligón egyik átlójának meghosszabbítása az erőpoligón kezdőpontján megy át. (Lásd pl. a 38. II és III ábrákon melyekhez az I ábrán látható erőpoligón ismét közösen tartozik, a 3—5-tel számozott erőket.) Ha a közbefoglaló kötéloldalak ily esetben ugyanabba az egyenesbe esnek, (38. III ábra,) akkor a közbefoglalt erők eredőjének irányvonala, a föntebb mondottak szerint, szintén ez egyenesre esik.

Abban az esetben ellenben, ha a közbefoglaló kötéloldalak nem esnek ugyanabba az egyenesbe, (38. II ábra,) a közbefoglalt erők eredője párhuzamos a közbefoglaló kötéloldalakkal, irányvonalát azonban csak segédszerkesztés útján lehet meghatározni, (tekintve hogy a közbefoglaló kötéloldalok metszéspontja ezek végtelenül távol pontja,) legegyszerűbben a következő módon.

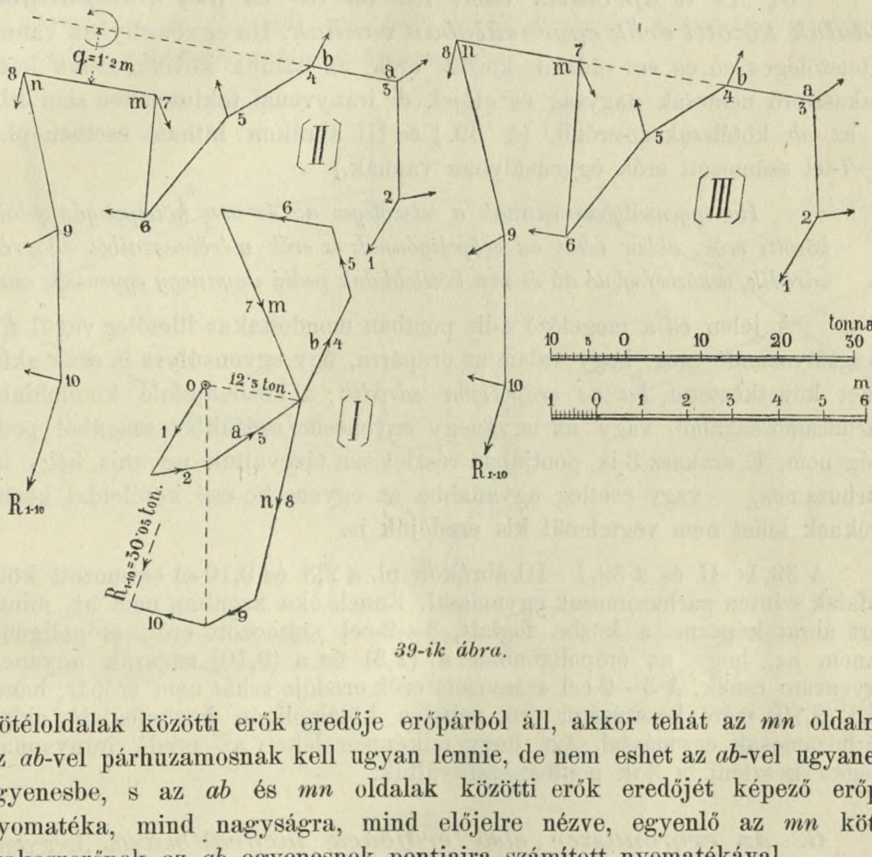
Jelöljük meg azt a kötélpoligón-oldalt, mely a szóban forgó erőket megelőzi, *ab*-vel, a reájuk következő kötéloldalt *mn*-nel, s a kötélszakasz-erőket ez oldalakban, a rövidség végett, megint *ab*-vel és *mn*-nel. Amint tudjuk, az *mn* erő az *ab*- és *K* erők eredője; a (— *mn*) erő tehát az *ab* erővel és a *K* erővel egyensúlyban van. A keresett *K* irányvonalnak az *ab* és *mn* egyenesektől mért távolságai tehát megfordítva viszonylanak egymáshoz mint az *ab* és *mn*




*38-ik ábra.*

erők. Másrészt pedig, — tekintve, hogy egyensúlyban levő erők nyomatékösszege zérus, — az *ab* erőnek a *K* irányvonal pontjai körül ellenkezőleg kell forgatnia mint a (— *mn*) erőnek. Ha az *mn* és *ab* erők mérő hosszúságait a 38. II ábrán az *mn* és *ab* egyenesek meghosszabbításain fölcserélve mérjük föl, s végpontjaikat akképpen kötjük össze, hogy az *ab* és a (—*mn*) erők ez összekötő vonalok metszéspontja körül egymáshoz képest ellenkező értelemben forgassanak, akkor e metszéspont a föntebb mondottak következtében a *K* irányvonalnak egy pontja. (Két párhuzamos erő eredőjének megszerkesztését lásd különben a 12. §-ban.)

**4. *Az a speciális eset, ha az ab és mn kötélpoligón-oldalak közötti erők eredője erőpár.*** Tudjuk a megelőző 2-ik pontban mondottakból, hogy, ha egyensúlyban vannak a tetszőleges *ab* és *mn* oldalak közötti erők, vagy ha erőpárból áll az eredőjük: erőpoligónjuk mindkét esetben záródik, a közbefoglaló kötélpoligón-oldalak tehát mind a két esetben párhuzamosak egymással. Jelöljük már most a sarokpontokat és az erőket a közbefoglaló két párhuzamos kötéloldalon az összetétel sorrendjében *a*, *b* és *m*, *n*-nel, (39. I—II ábra,) s a kötélszakasz-erőket az *ab* és *mn* oldalakban, mint föntebb, ismét *ab* és *mn*-nel. (E két erő csak irányvonalban különbözik egymástól esetleg, nagyságban és értelemben nem, minthogy az erőpoligónban az *mn* sugár összeesik az *ab* sugárral.) Tudjuk, hogy ekkor az *mn* erő, az *ab* erő és az *ab* és *mn* kötéloldalak közötti erők eredője. Tudjuk azonban másrészt azt is, hogy, ha erőpárral teszünk össze valamely erőt: az erő az összetétel következtében magával párhuzamosan *félretolatik*. Ha az *ab* és *mn*




*39-ik ábra.*

kötéloldalak közötti erők eredője erőpárból áll, akkor tehát az *mn* oldalnak az *ab*-vel párhuzamosnak kell ugyan lennie, de nem eshet az *ab*-vel ugyanegy egyenesbe, s az *ab* és *mn* oldalak közötti erők eredőjét képező erőpár nyomatéka, mind nagyságra, mind előjelre nézve, egyenlő az *mn* kötélszakaszerőnek az *ab* egyenesnek pontjaira számított nyomatékával.

*Ha erőpárból áll a tetszőleges ab és mn kötélpoligón-oldalak közötti erők eredője, akkor az erőpoligónnak ez erőkből álló része, amint az épp előadottakból látjuk, záródik, a közbefoglaló ab és mn kötélpoligón oldalak pedig párhuzamosak, de nem esnek ugyanarra az egyenesre.*

A 39. I—II ábrákon az erő- és kötélpoligónt pl. 10 erőre szerkesztettük meg. Az erőket a következő módon vettük föl számozásuk sorrendében: $13{\cdot}8^t$; $7{\cdot}5^t$; $14{\cdot}7^t$; $15{\cdot}3^t$; $9{\cdot}5^t$; $14{\cdot}4^t$; $27{\cdot}2^t$; $26{\cdot}8^t$; $7{\cdot}1^t$; $10{\cdot}0^t$. Az erő- és a hosszlépték az ábrákon látható. Az erőket a számozás sorrende szerint tettük össze. (Amint az erőpoligón kerületén a nyilak mutatják, az összetétel sorrende 1, 2, 3, . . . . , 10; nem pedig 10, 9, 8, . . . . , 1; se nem

1, 2, 3, 7, 6, 5, 4, 8, 9, 10). A végeredőt az erőléptéken lemérve $R_{1-10} = 30{\cdot}05$ tonnára találtuk; irányvonalát a szintén $R_{1-10}$-zel megjelölt utolsó kötéloldal adja meg. A 4—7-el számozott erők erőpoligónja záródik; a közbefoglaló két párhuzamos kötéloldal távolsága $q = 1{\cdot}2$ m.; a kötélszakaszerő e kötéloldalakban 12·3 tonna és jobbra felé hat. A 4—7-tel számozott erők eredője tehát oly erőpár, mely ↻ felé forgat, s melynek nyomatéka $\mathsf{M} = 1{\cdot}2 \,.\, 12{\cdot}3 = 14{\cdot}76$ méter-tonna.

**5. *Az a speciális eset, ha az ab és mn kötélpoligónoldalak közötti erők egyensúlyban vannak.*** Ha egyensúlyban vannak a tetszőleges *ab* és *mn* oldalak közötti erők, az utánuk következő *mn* kötélszakasz-erő nemcsak nagyság és előjel, de irányvonal tekintetében sem ütheti el az *ab* kötélszakasz-erőtől. (A 39. I és III ábrákon látható esetben pl. a 4—7-tel számozott erők egyensúlyban vannak.)

*Ha egyensúlyban vannak a tetszőleges ab és mn kötélpoligón-oldalak közötti erők, akkor tehát az erőpoligónnak ez erők mérőhosszaiból álló része záródik, a közbefoglaló ab és mn kötéloldalak pedig ugyanegy egyenesbe esnek.*

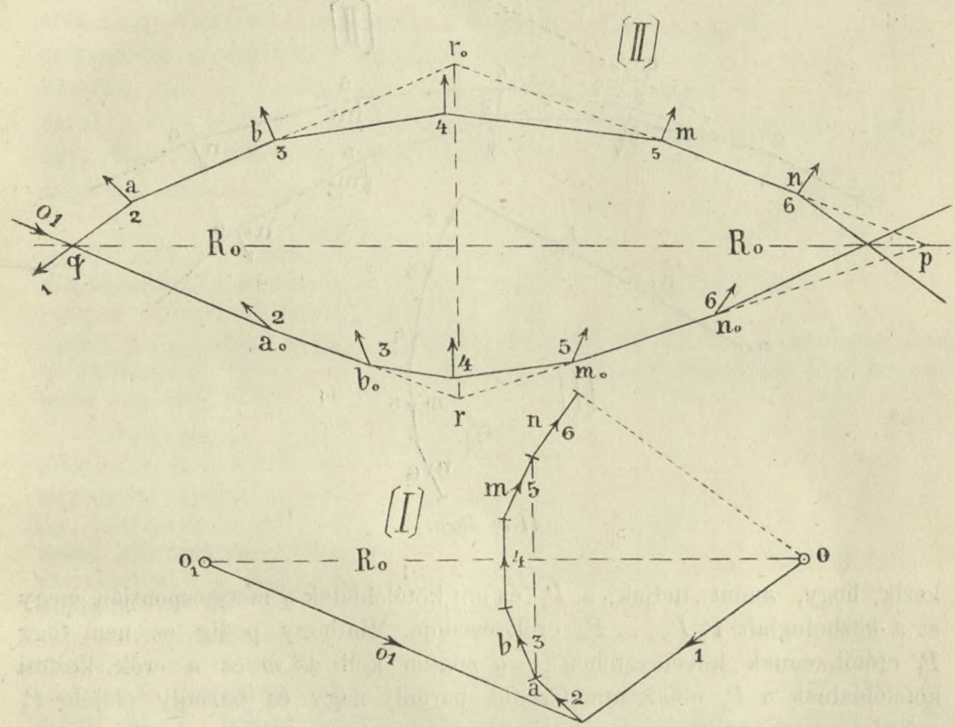
A jelen és a megelőző 4-ik pontban mondottakat illetőleg végül újra hangsúlyozandó még, hogy valamint erőpárra, úgy egyensúlyra is csak akkor lehet következtetni, *ha az erőpoligón záródik;* a közbefoglaló kötéloldalak párhuzamosságából, vagy az ugyanegy egyenesbe esésükből magából pedig még nem. E szakasz 3-ik pontjában részletesen tárgyaltuk ugyanis, hogy két párhuzamos, — vagy esetleg ugyanabba az egyenesbe eső kötéloldal közötti erőknek lehet nem végtelenül kis eredőjük is.

A 39. I—II és a 39. I—III ábrákon pl. a 2,3 és 9,10-el számozott kötéloldalak szintén párhuzamosak egymással. Ennek oka azonban nem az, mintha zárt ábrát képezne a közbe foglalt, 3—9-cel számozott erők erőpoligónja, hanem az, hogy az erőpoligónban a (2,3) és a (9,10) sugarak ugyanegy egyenesre esnek. A 3—9-cel számozott erők eredője tehát nem erőpár, hanem (2,3) (9,10) mérő hosszúságú erő, noha a kötélpoligón közbefoglaló oldalai párhuzamosak egymással. Azt, hogy miképpen lehet az eredő irányvonalát megszerkeszteni, a 3-ik pontban tárgyaltuk.

**6. *Az erőrendszer első erőjének megváltozása.*** Legyenek $P_1\, P_2\, P_3 \ldots$ tetszőleges erők s $P_{01}\, P_2\, P_3 \ldots$ oly erők, melyek csak abban különböznek az előbbiektől, hogy a $P_1$ erő a $P_{01}$-gyel van helyettesítve. Szerkeszszük meg mind a két rendszer kötélpoligónját, abban a sorrendben téve egymással össze az erőket, melyben jeleiket föntebb egymásután írtuk, s vonatkoztassuk a két kötélpoligónt geometriailag akképpen egymásra, hogy oly *mn* és $m_0 n_0$ oldalakat tekintünk egymásnak megfelelőknek, melyek ugyanama $P_m$ és $P_n$ erők között vannak. (40. I—II ábra.) Tudjuk, hogy az *mn* kötélszakaszerő a $P_1\, P_2 \ldots P_m$ erők eredője, az $m_0\, n_0$ kötélszakaszerő pedig a $P_{01} P_2 \ldots P_m$ erőké. Ha összeteszszük az *mn* erőt a $-P_1$ és $P_{01}$ erők $R_0$ eredőjével, akkor tehát az $m_0 n_0$ erőt kapjuk, s ha viszont az $m_0 n_0$ erőt teszszük össze a $P_1$

és $-P_{01}$ erők $-R_0$ eredőjével, akkor az $mn$ erőt. A + vagy — előjelű $R_0$ eredő irányvonalát pedig könnyen megszerkeszthetjük, tekintve hogy a $P_1$ és $P_{01}$ irányvonalak $q$ metszéspontján megy át, s hogy párhuzamos az erőpoligónok kezdőpontjait összekötő $oo_1$ egyenessel.

*Két oly kötélpoligónon, melyeken az erők csak az összetétel sorrendjében elsőnek fölvett erőben különböznek egymástól, az egymásnak megfelelő oldalak metszéspontjai tehát ugyanarra az $R_0$ egyenesre esnek. Ezt az egyenest úgy kapjuk meg, ha a szóban forgó két kötélpoligónon elsőknek szereplő $P_1$ és $P_{01}$ erők egyikének előjelét ellenkezőre változtatva, megszerkesztjük e két erő eredőjének irányvonalát.*

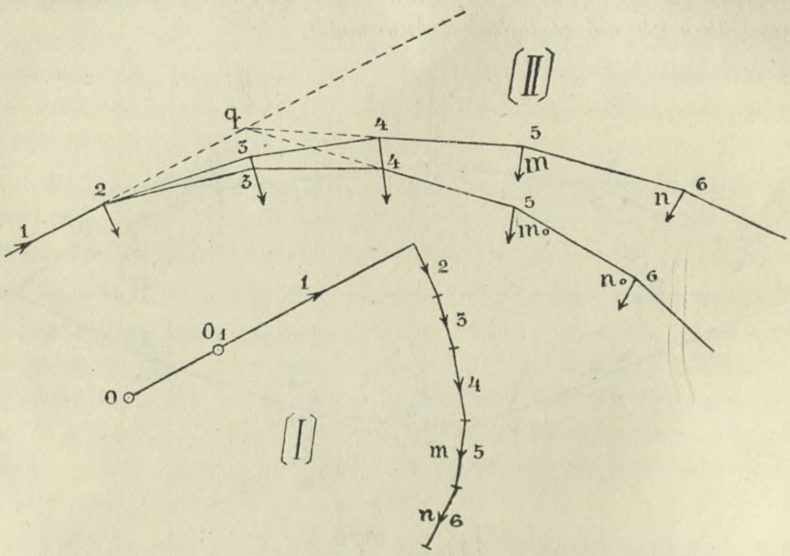



*40-ik ábra.*

Ha megszerkesztettük a $P_1\ P_2\ P_3 \ldots$ erők kötélpoligónját, és ha ezután tetszőleges más erővel helyettesítjük a $P_1$ erőt, akkor könnyen megrajzolhatjuk tehát az új kötélpoligónt, az imént levezetett tétel alapján, az erőpoligón további használata nélkül is.

A szóban forgó kötélpoligónok még más geometriai összefüggésben is vannak egymással és az erőpoligónnal. Ha ugyanis egymásnak megfelelő metszéspontoknak oly pontokat tekintünk a két kötélpoligón ábráján, melyeken egymásnak megfelelő oldalpárok metszik egymást, (pl. $r$ és $r_0$ a 40. II ábrán,) akkor világos, hogy az ily, egymásnak megfelelő metszéspontok az erőpoligón egyes átlóival párhuzamos egyenesekre kell hogy essenek, még pedig az $ab$ és $mn$ erők közötti oldalak metszéspontjai az erőpoligón $ab, mn$ átlójával párhuzamos egyenesre, tekintve hogy az $ab$ és $mn$ oldalak közötti erők eredőjének mind a két metszésponton át kell mennie.

Ha a $P_1$ erő irányvonala nem változik meg, hanem csak nagysága és esetleg értelme, akkor az $R_0$ eredő a $P_1$ egyenesre esik. Az egymásnak megfelelő kötéloldalak ebben az esetben tehát a $P_1$ egyenesen metsződnek. (41. I—II ábra.) A föntebbi tételnek e speciális esete egyébiránt abból is követ-

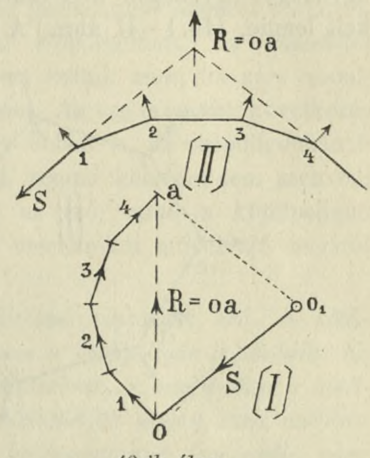



*41-ik ábra.*

kezik, hogy, amint tudjuk, a $P_1$ és $mn$ kötéloldalak $q$ metszéspontján megy át a közbefoglalt $P_2 P_3 \ldots P_m$ erők eredője. Minthogy pedig ez nem függ $P_1$ erőtől, ennek következtében e $q$ ponton kell az $m$ és $n$ erők közötti kötéloldalnak a $P_1$ oldalt átmetszenie, bármily nagy és bármily előjelű $P_1$ erővel is szerkesztjük meg a kötélpoligónt.

Megjegyzendő még végre, hogy az e pontban tárgyalt tételnek általánosabb jelentősége is van. Tegyük föl ugyanis, hogy a $P_1 P_2 P_3 \ldots P_m P_n \ldots$ erők közül nemcsak az elsőt, hanem az 1-től $m$-ig számozottakat mind másokkal helyettesitettük és hogy ez új erőcsoportra új kötélpoligónt szerkesztettünk. E két kötélpoligónon az $m\,n$ és az $m_0\,n_0$ oldalra következő két kötélpoligón-részt akkor olyannak lehet tekinteni, mintha az egyiket az $m\,n$, a másikat az $m_0\,n_0$ kötélszakasz-erővel, mint első erővel kezdve, ugyanazokra az erőkre szerkesztettük volna. *A két kötélpoligón ama részein tehát, melyeken az erők ugyanazok, az egymásnak megfelelő oldalak ugyanazon az $R_0$ egyenesen, t. i. a $\pm\, m\,n$ és $\mp\, m_0\,n_0$ kötélszakaszerők eredőjének irányvonalán metsződnek.*

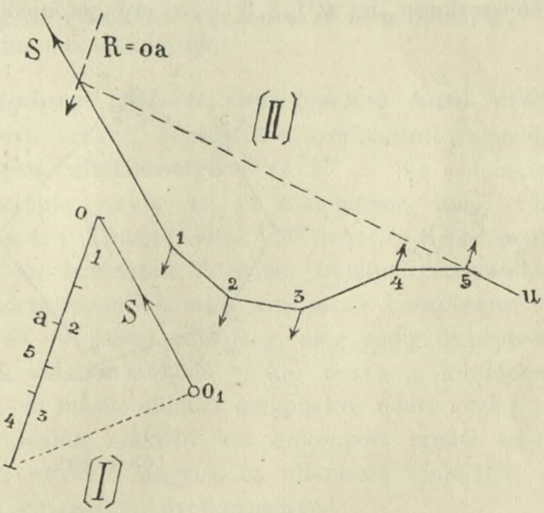
*7. A segéderővel rajzolt kötélpoligónok.* Ha az erők irányvonalainak viszonylagos helyzete olyan, hogy kötélpoligónjuk megszerkesztése nehézségeket okoz, (pl. ha igen hegyes szögben metsződnek, vagy ha épp párhuzamosak az erők; vagy ha metszéspontjaik a rajzlap keretén túl esnek stb,) akkor akképpen egészítjük ki gyakran az adott erőrendszert egy további *S* erő alkalmas fölvételével, hogy a kiegészített erőrendszer kötélpoligónját, — ha az *S* erővel kezdjük a szerkesztést, — könnyen meg lehessen rajzolni. Ezt a külön fölvett *S* erőt s e g é d e r ő n e k nevezzük; s az adott erőrendszer eredőjét az e segéderővel szerkesztett erő- és kötélpoligón fölhasználásával, a 3-ik pontban tárgyalt módon, t. i. úgy, mint két kötéloldal közötti erők eredőjét határozzuk meg.



*42-ik ábra.*

A 42. I—II ábrákon pl. az 1—4-gyel számozott erők *R* eredőjének irányvonalát az *S* segéderővel szerkesztett *S* 1 2 3 4 *u* kötélpoligón fölhasználásával határoztuk meg. Amint az ábrákból látjuk, a keresett *R* eredő az *S* 1 és *u* 4 kötélszakaszok metszéspontján megy át, s párhuzamosan eltolva, az erőpoligón *R* = *oa* átlójával van megadva.

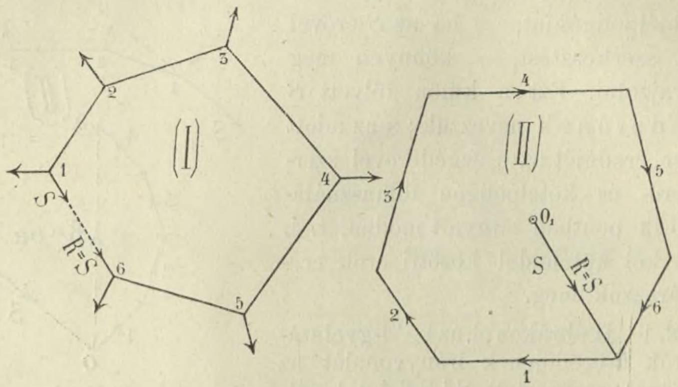
Párhuzamos erőkre csakis segéderővel lehet kötélpoligónt rajzolni, s csakis ily kötélpoligónnal lehet tehát súlyvonalukat megszerkeszteni. A 43. I—II ábrákon pl. az 1—5-tel számozott párhuzamos erők eredője az *S* 1 és *u* 5 kötélszakaszok metszéspontján megy át s lefelé hat, tekintve hogy *o a* mérő hossza az erőpoligónban az *o* kezdőpont alá esik.



*43-ik ábra.*

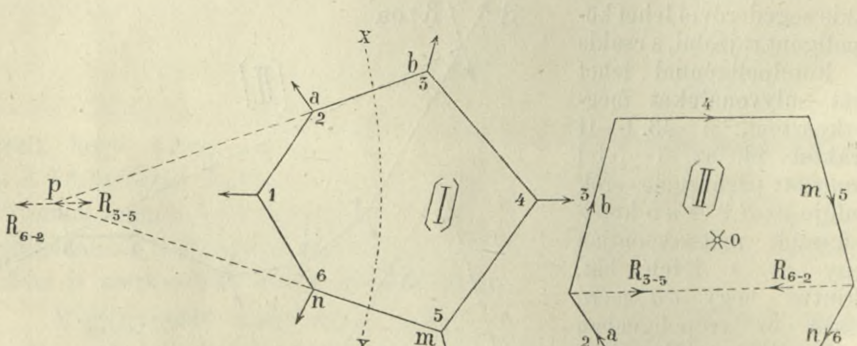
Ha segéderővel rajzoljuk meg valamely erőrendszer erőpoligónját, akkor azt is mondhatjuk, hogy *új $o_1$ kezdőpontot vettünk föl az erőpoligónban.* (Lásd pl. a 42. I és a 43. I ábrát.) A kezdőponttal fölvettük ugyanis a segéderőt is, mind nagyságra, mind értelemre nézve, irányvonalának fölvétele pedig, amint tudjuk, különben sincs befolyással az eredményre.

*8. Egyensúlyban levő erőkre, segéderővel rajzolt kötélpoligón.* Ha segéderővel rajzolunk kötélpoligónt az egyensúlyban levő tetszőleges $1, 2, 3 \ldots u$ erőkre, akkor, az utolsó kötélszakasznak az 5-ik pontban mondottak következtében, az $S$ segéderő irányvonalával ugyanegy egyenesbe kell esnie, s az utolsó kötélszakasz-erőnek $R = S$-nek kell lennie. (44. I—II ábra.) A kötélpoligónnal ábrázolt kötélszerkezet akkor




*44-ik ábra.*

van tehát egyensúlyban, ha utolsó szakaszában $-S$ erőt veszünk föl a többi mellé. Amint ebből látjuk, akkor is egyensúlyban van azonban a kötélszerkezet, ha az $1, 2, 3 \ldots u$ erőket *önmagába visszatérő* kötéllel, (vagy




*45-ik ábra.*

pálcaszerkezettel,) kötjük össze a kötélpoligónnak $1, 2, 3 \ldots u$-val számozott sarokpontjaiban, úgy mint a 45. I—II ábrák mutatják, melyek a 44. I—II ábrák egyszerű másolatai, azzal a kivétellel, hogy a kötélpoligónt zárt vonalnak rajzoltuk, az erőpoligónban pedig az $o$-ra áttett kezdőponton átmenő segéderőt meg nem jelöltük. Ebből azonban további következtetéseket is le lehet vonni, és egyidejűleg más szempontból is meg lehet okolni az imént mondottakat. Minthogy ugyanis az összeteendő $1, 2, 3 \ldots u$ erők egyensúlyban vannak, erőpoligónjuk tehát záródik, az erőpoligón bármely sarokpontját a kezdőpontnak tekinthetjük ez erőkre nézve. S minthogy a kötélpoligón is visszatér önmagába, világos, hogy ennek megszerkesztését is bármelyik oldalával kezdhetjük meg, ha az e kötélszakaszszal párhuzamos sugarat tekintjük segéderőnek az $o$ pontra áttett kezdőpontú erőpoligónon. Az összetétel sorának határozottsága azonban azért akkor sem szünik meg, ha zárt vonalnak rajzoljuk mind az erő- mind a kötélpoligónt. Az egymásután következés sorát ugyanis, mint minden más esetben, úgy ebben is, az erőpoligónban a nyilak mutatják meg. A 45. I—II ábrákon pl. semmi kétséget sem szenved, hogy az összetétel sorrende szerint mind az erő, mind a kötélpoligón ↻ felé van leírva, noha a megszerkesztésnek mechanikai műveletét, magától értődőleg, megfordítva is végre lehet hajtani.

*Ha egyensúlyban levő erőkre segéderővel rajzolunk erő és kötélpoligónt, akkor tehát nemcsak az erő, hanem a kötélpoligón is záródik. Ez okból az erőpoligón bármely sugarát a segéderőnek, s megfelelőleg a kötélpoligón bármely oldalát az első oldalnak tekinthetjük ugyan, ezzel azonban az összetételnek csak kezdőpontja válik határozatlanná, sorrendje nem.*

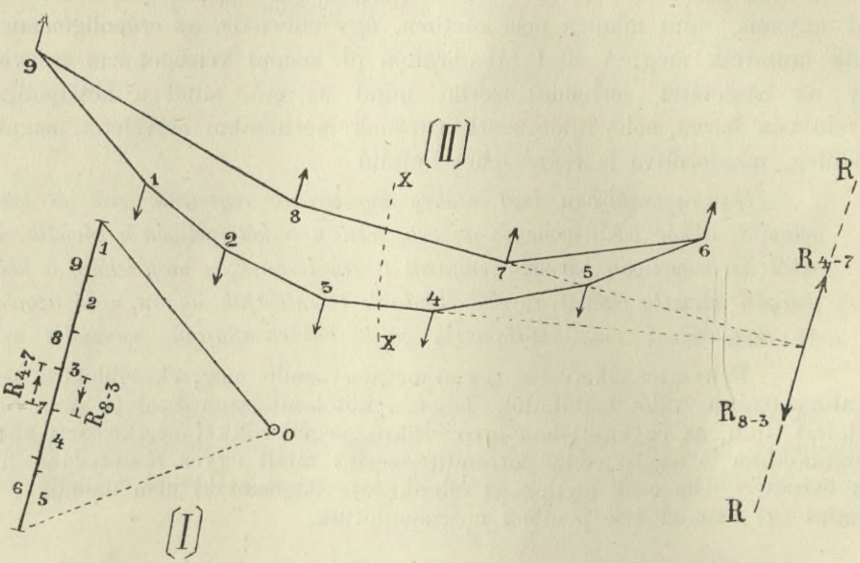
Félreértés elkerülése végett megjegyzendő még, a később következő alkalmazásokra való tekintettel, hogy a kötélszakasz-erők alatt, ami ezek előjeleit illeti, az egyensúlyban levő erőkre, segéderőkkel szerkesztett kötélpoligónokban is az összetétel sorrendje szerint talált egyes részeredőket fogjuk érteni, — ha csak esetleg az ellenkezőt világosan ki nem mondjuk, — a mint ezt már az 1-ső pontban megmondottuk.

***9. Zárt kötélpoligónon fölvett átmetszésre ható erők eredője.*** Ha egyensúlyban levő erőkre, segéderővel szerkesztett valamely kötélpoligónt tetszőleges helyen, általánosságban az $ab$ és $mn$ oldalakon át, két részre metszve képzelünk, akkor az ez átmetszésre ható erők eredője, (úgy értve ezt, mint a 4. § 2 ban előadtuk,) az imént és a 3-ik pontban mondottak következtében, az átmetszett $ab$ és $mn$ kötélpoligón-oldalak, mint a közbefoglaló oldalak metszéspontján megy át, mérő hosszúságát és értelmét pedig az erőpoligón $ab, mn$ átlója adja meg, még pedig akképpen, hogy a fölvett átmetszés egyik oldalán működő erőkre nézve a kezdőpont az erőpoligónban az $ab$ pont, a másik oldalán működőkre nézve pedig az $mn$ pont. Az átmetszés két oldalán működő két erőcsoport eredői tehát ugyanarra az egyenesre esnek, egyenlő nagyok és ellenkező előjelűek, a mi egyszerűen az erők közötti egyensúly következménye.

A 45. I ábrában pl. az $xx$ átmetszést a $2, 3$ és $5, 6$ oldalakon át vettük föl; a reá ható erők eredőjének irányvonalát tehát az átmetszett $2,3$ és $5,6$ kötéloldalak $p$ metszéspontján át, az erőpoligón $(2,3)(5,6)$ átlójával párhuzamosan húzott $R_{6-2}$, $R_{3-5}$ egyenes adja meg, mérő hosszát pedig az erőpoligón imént említett $(2,3)(5,6)$ átlója. A mi pedig a keresett eredő értelmét illeti, az átmetszés bal oldalán levő $6, 1, 2$ erőkre nézve a kezdőpont, amint az erőpoligón kerületére rajzolt nyilakból látjuk, az

5,6 pont; a jobb oldalán levő 3, 4, 5 erőkre nézve pedig a 2, 3 pont. Az *xx* átmetszés bal oldalán levő erők eredője tehát e példában balra felé, a jobb oldalon levőké jobbra felé hat.

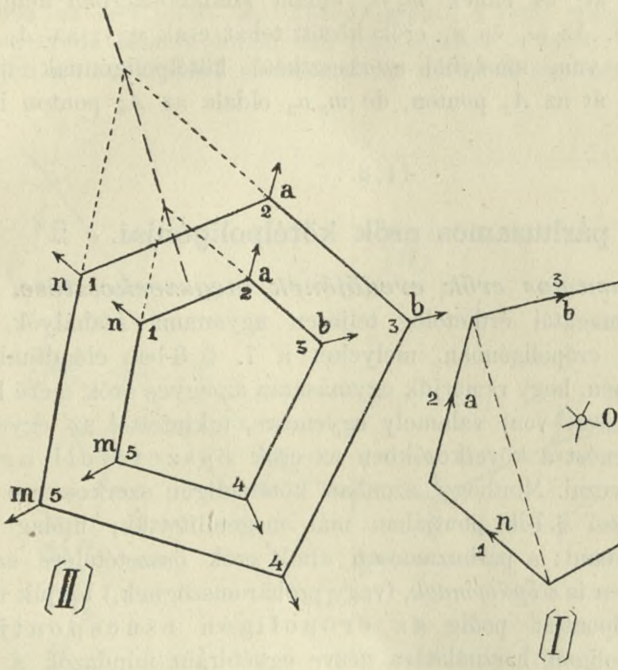
A 46. I—II ábra az egyensúlyban levő, 1—9-cel számozott *párhuzamos* erőkre segéderővel rajzolt erő- és kötélpoligónt mutat. A kötélpoligón az összetétel sorrendje szerint, ↻ felé van leirva. Ha az *xx* átmetszést pl. a 3, 4 és 7, 8 oldalakon át veszszük föl, akkor a reája ható erők eredőjének irányvonala az átmetszett 3,4 és 7,8 oldalak metszéspontján át, az




*46-ik ábra.*

erőkkel párhuzamosan vont *RR* egyenes, mérőhosszúsága pedig az erőpoligónban a (3, 4) (7, 8) hosszúság. Az átmetszés bal oldalán működő erőkre nézve 7,8 az ez erőket megelőző kötélpoligón-oldal; eredőjüknek kezdőpontja tehát az erőpoligón 7,8 pontja. Az átmetszés jobb oldalán működő erőkre nézve pedig 3,4 a megelőző kötéloldal, eredőjük kezdőpontja az erőpoligónban tehát a 3,4 pont. Az átmetszés bal oldalán működő erők eredője ennél fogva lefelé hat, a jobb oldalán működőké pedig fölfelé. (Ezek alkalmazását lásd a 34-ik §-ban.)

***10. A változatlan segéderejű erőpoligónnal szerkesztett kötélpoligónok.*** Ha két vagy több kötélpoligónt rajzolunk valamely erőrendszerre, de a fölvett segéderőt az erőpoligónban nem változtatjuk meg, hanem csak irányvonalát toljuk el magával párhuzamosan, (47. I—II ábra,) akkor a kötélpoligón minden egyes oldala egy-egy párhuzamos sugársort ír le, s mind e sugársorok perszpektivikusak egymással, minthogy a tetszőleges *ab* és *mn* oldalak leírta sugársorok ugyanannak az egyenesnek pontjain metsződnek, t. i. a közbefoglalt erők eredője irányvonalának egyes pontjain. Az egymásnak megfelelő oldalak metszés-pontjainak $R_0$ egyenese pedig, (lásd a 6-ik pontban mondottakat,) a végtelen távol egyenes, mivel az egymásnak megfelelő kötéloldalak egymással párhuzamosak, s mivel másrészt a kötélpoligónok egyikének $S$ segéderője és egy másik kötélpoligónnak az ellenkezőre megváltoztatott előjelű segéderője együttvéve a $\pm S$ erőpárt képezik.




*47-ik ábra.*

***11. A segéderővel rajzolt kötélpoligónok geometriai határozottságának föltételei.*** Irányvonalukban, nagyságukban és értelmükben megadott, tetszőleges számú erőnek, segéderővel szerkesztendő kötélpoligónja, geometriailag teljesen meg van határozva, ha meg van adva az összetétel sorrendjén kivül:

*a)* A keresett kötélpoligón egyik oldala, s ez oldal kötélszakasz-erője. Ezekből meg lehet ugyanis az erőpoligón kezdőpontját szerkeszteni, s ezután a kötélpoligónt is, a megadott oldaltól kezdve mind a két oldal felé.

*b)* Vagy ha meg van adva a megszerkesztendő kötélpoligón egyik oldala és egy másik oldalának, (vagy ez oldal meghosszabbításának,) egy pontja. Ha az adott oldallal párhuzamos erősugár hossza megváltozik, akkor ugyanis a megadott oldalból kiinduló kötélvonal is megváltozik, s a szóban forgó erősugár hosszának csak egy oly értéke van, melylyel a rajzolt kötélpoligónnak a föladatban megjelölt oldala a megadott ponton megy át.

*c)* Vagy ha meg van adva a megszerkesztendő kötélpoligón három oldalának, (esetleg meghosszabbításaiknak,) egy-egy pontja. Ha ugyanis az $m_1$

és $n_1$ erők közötti kötélpoligón-oldalnak az $A_1$ ponton kell átmennie, az $m_2$ $n_2$ oldalnak az $A_2$ ponton, az $m_3 n_3$ oldalnak pedig az $A_3$ ponton, s ha fölveszszük az $m_1$ $n_1$ kötéloldalt, (úgy hogy az $A_1$ ponton átmenjen,) akkor e *fölvett* $m_1 n_1$ kötéloldallal, — amint a megelőző *b* pontban éppen láttuk, — csak egy oly kötélpoligónt lehet rajzolni, melynek $m_2 n_2$ oldala az $A_2$ ponton megy át, és ennek $m_3 n_3$ oldala általánosságban nem fog az $A_3$ ponton átmenni. Az $m_1$ és $n_1$ erők között tehát csak egy, az $A_1$ ponton átmenő oly oldal van, amelyből szerkeszthető kötélpoligónnak nemcsak $m_2 n_2$ oldala megy át az $A_2$ ponton, de $m_3 n_3$ oldala az $A_3$ ponton is.

## 11. §.

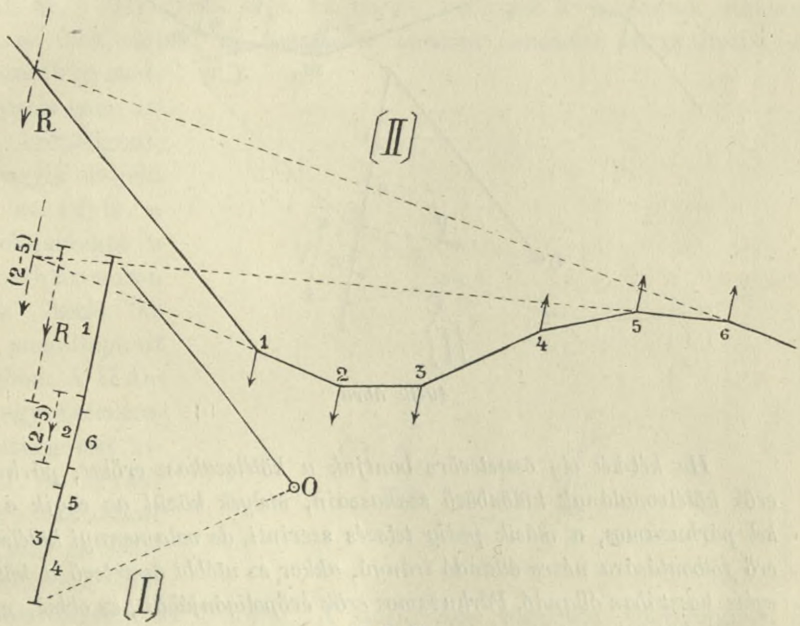
## A párhuzamos erők kötélpoligónjai.

***1. Párhuzamos erők eredőjének megszerkesztése.*** A párhuzamos erőket magától érthetőleg teljesen ugyanama szabályok szerint teszszük össze az erőpoligónban, melyeket a 7. § 3-ban előadtunk, t. i. egyszerűen akképpen, hogy ráméijük egymásután az egyes erők mérő hosszait a velük párhuzamosan vont valamely egyenesre, tekintettel az egyes erők értelmére. Ez egyenest a következőkben az erők összetételi egyenesének fogjuk nevezni. Minthogy azonban kötélpoligón szerkesztése végett, a mint a megelőző §. 7-ik pontjában már megemlítettük, utólag mindig segéderőt kell fölvenni: a párhuzamosan eltolt erők összetételére szerkesztett ábrát ez esetben is *erőpoligónnak*, (vagy erőháromszögnek,) fogjuk nevezni, a segéderő kezdőpontját pedig az erőpoligón csúcspontjának. Az erő- és kötélpoligón használatára nézve egyébiránt mindazok a tételek állanak, melyeket a megelőző §-ban előadtunk.

*Tetszőleges számú, közvetetlenül egymásután következő párhuzamos erő eredőjének irányvonala tehát a közbefoglaló kötéloldalak metszéspontján át, az erőkkel párhuzamosan vont egyenes; mérő hosszúságának kezdőpontja ugyanazzal a számmal van az erők összetételi egyenesén megjelölve, mint a szóban levő erőket megelőző kötéloldal, végpontja azzal a számmal, melylyel az erők után következő kötéloldal; értelmét pedig abból határozzuk meg legegyszerűbben, hogy az eredő arra felé hat, amerre mérő hossza a kezdőponttól számítva esik. (Lásd 7. § 2—3. pont.)*

*Tekintettel arra, hogy a hasonló számokkal megjelölt erősugarak és kötéloldalak párhuzamosak egymással, akképpen is megszerkeszthetjük továbbá tetszőleges számú közvetetlenül egymásután következő párhuzamos erő eredőjének mérőhosszát, ha az erőpoligón csúcspontján át a közbefoglaló kötéloldalakhoz párhuzamos sugarakat vonunk. Az a hosszúság ugyanis, melyet e sugarak az erők összetételi egyenesén levágnak, a keresett eredő mérő hosszúsága, s ennek kezdőpontja az a pont, melyen az erőket megelőző kötéloldallal párhuzamosan vont sugár megy át.*

*Példák.* A 48-ik ábra pl. az 1—6-tal számozott erők összetételét mutatja. Az erőpoligón csúcspontját *o*-n vettük föl. Az 1,2 és az 5,6 kötéloldalak közötti, 2—5-tel számozott erők eredőjének mérő hosszúsága pl. az 1,2 ponttól mint kezdőponttól az 5,6 pontig ér, (mivelhogy 1,2 a megelőző kötéloldal,) és az 1,2 és 5,6 kötéloldalak metszéspontján át az erőkkel párhuzamosan húzott (2—5) egyenesben *lefelé* hat, mivel mérő hosszúsága az 1,2 kezdőpont alá esik. Mind a hat erő eredőjének *R* mérő hosszúsága továbbá az 1-el jelölt erő kezdőpontjától a 6-tal számozott erő végpontjáig ér; ez eredő szintén lefelé hat, irányvonalát a szélső kötéloldalak metszéspontján át, az erőkkel párhuzamosan húzott *R* egyenes adja meg stb.

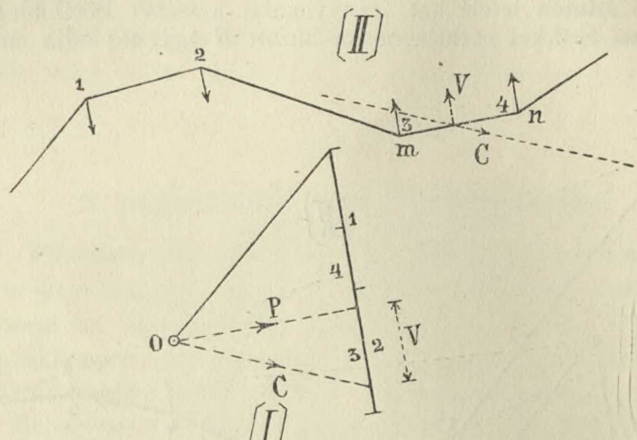



*48-ik ábra.*

Ha valamely vasuti- vagy más kocsi-vonat egyes kerekeire jutó súlyok kötélpoligónját tetszőleges segéderővel megrajzoltuk, akkor könnyen meg lehet szerkeszteni, az imént mondottak alapján, ez egy kötélpoligón segítségével, tetszőleges számú közvetetlenül egymásután következő keréksúly eredőjének irányvonalát, (súlyvonalát,) akár a vonat valamelyik szélétől, akár valamely közbenső keréktől számitjuk a kijelölt kerekeket. Meghosszabbitjuk ugyanis egyszerűen a közbefoglaló kötélpoligón-oldalakat metszéspontjukig; a keresett súlyvonal e metszésponton megy át.

A párhuzamos erők kötélpoligónjainak más fontos alkalmazását illetőleg, a megelőző szakaszban a 46-ik ábra kapcsán már mondottakra utalunk.

**2. *A kötélszakasz-erők állandó irányú összetevői.*** Szerkeszszük meg tetszőleges párhuzamos erők erő- és kötél-poligónját, és bontsuk föl a tetszőleges *mn* oldal *P* kötélszakasz-erőjét két oly összetevőre, *V*-re és *C*-re, (49-ik ábra,) melyek közül *V* az erőkkel, *C* pedig valamely tetszőleges, de valamennyi kötélszakasz-erő fölbontására nézve állandó iránynyal párhuzamos. Húzzunk e célból az erőpoligón $o$ csúcspontján át a $C$ iránynyal, a $P$ sugár másik végpontján át pedig az erőkkel párhuzamosat. (I ábra.) Könnyen belátható hogy, ha e fölbontást több kötélszakasz-erőre ismételjük, csak a $V$ összetevő változik meg, kötéloldalról kötéloldalra, a $C$ összetevő ellenben mind nagyságra mind értelemre nézve állandó az egész kötélvonal hosszában.

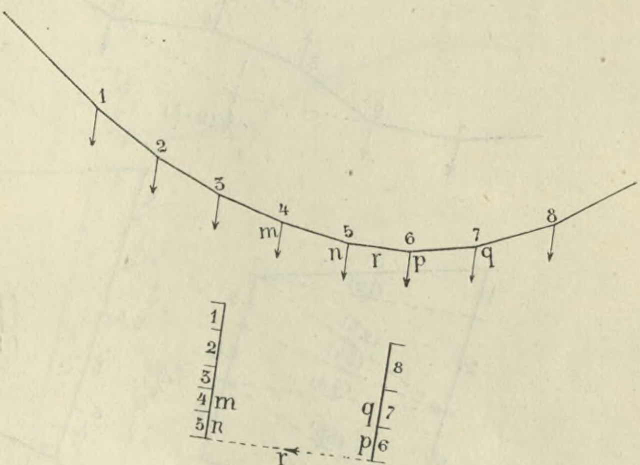



*49-ik ábra.*

*Ha két-két oly összetevőre bontjuk a kötélszakasz-erőket, párhuzamos erők kötélvonalának különböző szakaszain, melyek közül az egyik az erőkkel párhuzamos, a másik pedig tetszés szerinti, de valamennyi kötélszakaszerő fölbontására nézve állandó irányú, akkor ez utóbbi összetevő a kötélvonal egész hosszában állandó. Párhuzamos erők erőpoligónjában, ez okból, nemcsak az erők közötti pontokhoz irányuló sugaraknak, hanem minden más sugárnak is van sztatikai jelentősége. Minden tetszőleges sugár a kötélszakasz-erőknek e sugárral párhuzamos irányú állandó összetevőjét jelenti; az erőpoligón magassága a kötélszakasz-erőknek az összeteendő erőkre merőleges irányú összetevője.*

***3. Az erők összetétele két párhuzamoson.*** Ha az 1, 2 . . . .-val számozott párhuzamos erők kötélpoligónjának szerkesztésében a tetszőleges $r$ oldalig jutottunk, (50-ik ábra,) s a szerkesztést tovább folytatjuk, akkor a legközelebb sorra kerülő $p$ erőt akképpen is össze lehet tenni az erőpoligónban az $r$ kötélszakasz-erővel, hogy a $p$ mérő hosszúságot az $r$ sugár *kezdőpontján* át vont párhuzamoson mérjük föl, de nem arra, amerre ez erő hat, hanem éppen az ellenkező oldal felé, tekintetbe véve, hogy a $p$ és $r$ nyilaknak egymással egyező körfolyamot kell mutatniok. (50-ik ábra.) És a többi, még következő $q$ . . . erők mérő hosszait ezután szintén ugyane módon sorolhatjuk az *o* párhuzamoson, (melyet a *második* párhuzamosnak nevezünk,) egymás mellé, vagy esetleg úgy is rendezhetjük a szerkesztést, hogy valamely tetszőleges erőtől kezdve, megint az eredeti, az úgynevezett *első* párhuzamosra térünk vissza az erők összetételében, s később esetleg megint a *másodikra*, és így tovább: arra ügyelve azonban, hogy az *első* párhuzamoson összetett egyes erők mérő hosszai arra felé méressenek föl, amerre felé az egyes erők hatnak, a *második* párhuzamoson összetett erők mérő hosszai ellenben mindig éppen ez ellenkező oldal felé, pl. a lefelé ható erők mérő hosszai fölfelé, s megfordítva.

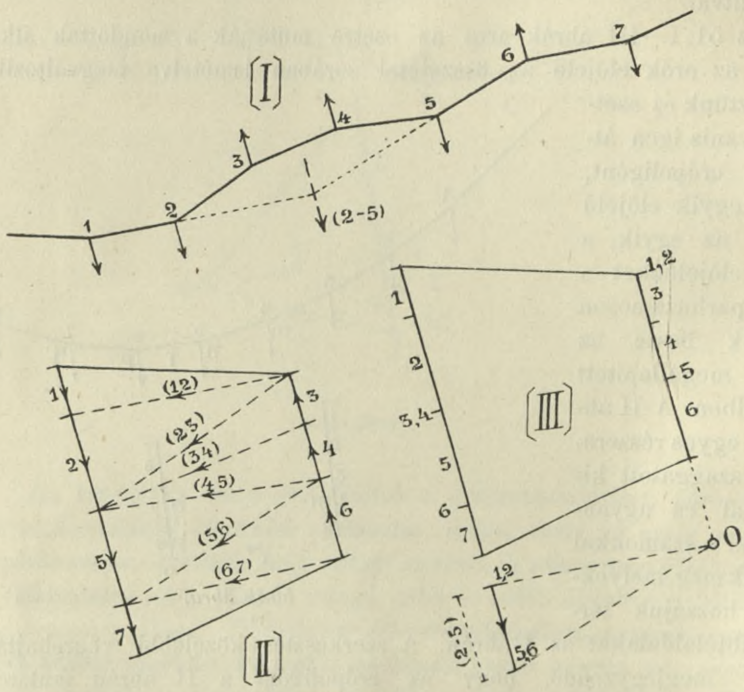
Az 51. I—III ábrák arra az esetre mutatják a mondottak alkalmazását, ha az erők előjele az összetétel sorában ismételve megváltozik. Úgy szerkesztünk ez esetben ugyanis igen átnézetes erőpoligónt, ha az egyik előjelű erőket az egyik, a másik előjelűeket a másik párhuzamoson teszszük össze az előre megállapított sorrendben. A II ábrán az egyes részeredőket szaggatott kihúzással és ugyanazokkal a számokkal jelöltük meg, melyekkel a hozzájuk tartozó kötéloldalakat az I ábrán. A szerkesztés közelebbi végrehajtása dolgában megjegyzendő, hogy az erőpoligónt a II ábrán mutatott alak helyett, — elhagyva a föntebbiekben csupán csak a megokolásra használt vonalakat, az erők megszámozását pedig kibővítve, — akképpen szerkesztjük meg, amint a III ábrán látható. Följegyezzük ugyanis mindegyik párhuzamoson *valamennyi* erő folyó számát a szerkesztés sorrendjében, zérus nagyságúnak tekintve mindegyik párhuzamoson minden oly erőt, melynek mérő hossza a másik párhuzamosra van fölmérve. Könnyen átlátható, hogy e módon oly erőpoligónt kapunk, melyen az egyes részeredőknek mind a két végpontja ugyanazzal a két számmal van megjelölve, mint a vele párhuzamos kötéloldal. Ez erőpoligón segítségével a kötélpoligónt tehát ismét egyszerűen úgy lehet megrajzolni, hogy az 1,2 közötti oldalt az erőpoligón (1,2) (1,2) egyenesével vonjuk párhuzamosan; a 2,3 közötti oldalt a (2,3) (2,3) egyenessel, stb.




50-ik ábra.

Az összetétel sorrendjét az ekképpen szerkesztett erőpoligónokon csak az *első párhuzamoson* mutatják a nyilak, a másodikon ellenben a megfordított sorrendben kötik össze a nyilak az erőket. Tetszőleges számú közvetetlenül egymásután következő erők eredőjének mérő hosszát és előjelét pedig úgy találjuk meg az 1-ső pontban mondottak alapján, ha a *második* összetételi egyenes tetszőleges pontjából, párhuzamos sugarakat húzunk a közbefoglaló kötélszakaszokkal, s megszerkesztjük azt a hosszúságot, melyet ezek az *első* összetételi egyenesen levágnak.

Az 51-ik ábrán pl. az 1,2 és 5,6 kötélszakaszok közötti, 2—5-tel számozott erők eredője e kötélpoligón-oldalak metszéspontján megy át, s

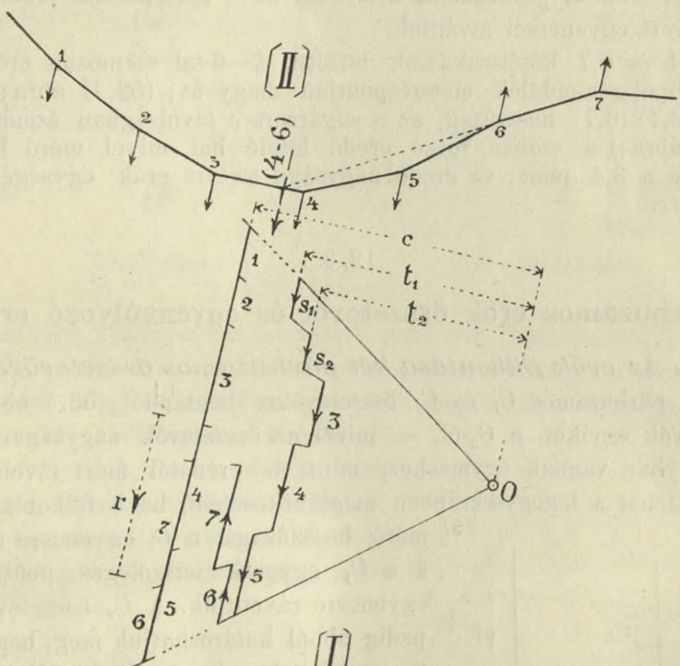



51-ik ábra.

mérő hosszát a III ábrán az *o* ponton át a közbefoglaló 1,2 és 5,6 kötélszakaszokkal párhuzamosan vont, és sorban szintén 1,2 és 5,6-tal jelölt sugarak vágják le. Az eredő lefelé hat, mivelhogy mérő hossza az erőket megelőző 1, 2 kötélszakaszszal párhuzamosan vont 1,2 sugár alá esik. Ha az *első* összetételi egyenesen választott valamely ponton át vonunk párhuzamosokat a közbefoglaló kötélszakaszokhoz, ha tehát a második összetételi egyenesen szerkesztjük meg az eredő mérő hosszát, akkor az erők *után* következő kötélszakaszszal párhuzamosan vont sugár metszéspontját kell kezdőpontnak tekinteni.

Az imént említetten kivül még több más esetben is két egyenesen fogjuk a párhuzamos erőket összetenni, pl. (a rugalmas elhajlások elméletében) akkor, ha az erőket ismételve erőpárokkal kell összetenni bizonyos sorrendben; vagy akkor, ha két erő működik mindegyik irányvonalban, az egész erőrendszerben tehát két *csoport* erő, s ha előzetesen szerkesztjük meg a mérő hosszakat, külön-külön mindegyik csoportra, előjel dolgában helyesen egymásután sorolva stb.

***4. Viszonyszámokban kifejezett erők összetétele.*** A rugalmas elhajlás grafikai elméletében és más esetekben is gyakran megtörténik, hogy az erőket $\frac{s_1}{t_1}$; $\frac{s_2}{t_2}$; $\frac{s_3}{t_3}$ ..... $\frac{s}{t}$ viszonyszámok adják meg, melyekben az $s$-ek és $t$-k hosszúságokat jelentenek. Ily esetben akképp rendezhetjük a szerkesztést, hogy megsokszorozzuk az $s:t$ viszonyszámokat az alkalmasan fölveendő $c$ hosszúsággal, s az $s:t$ erőket a velük arányos $cs:t$ hosszúságokkal pótoljuk, melyeket az $s:t$ erők mérő hosszainak tekinthetjük, melyekkel tehát a rendes módon rajzolhatjuk meg az erő- és a kötélpoligónt.




*52-ik ábra.*

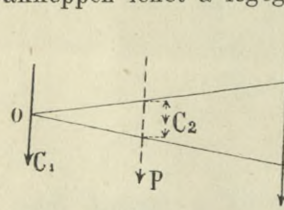
Megszerkeszthetjük azonban az $s:t$ viszonyszámok képviselte erők poligónját közvetetlenül is, legegyszerűbben akképpen, ha sugarait az 52. I ábrán látható módon rajzoljuk meg. Fölveszszük ugyanis az erőpoligón $o$ csúcspontját és első sugarát, mint segéderőt, s fölmérjük, az $o$ ponttól $t_1$ távolságban, az erőkkel párhuzamosan vont $s_1$ egyenesen, az első sugár metszéspontjától, az $s_1$ hoszszúságot arra felé, a amerre az $s_1:t_1$ hat. Ezután meghúzzuk az $s_1$ hosszúság végpontjának sugarát, s fölmérjük az $s_2$ hosszúságot, ama pontból, melyen az $o$ csúcsponttól $t_2$ távolságban, az erőkkel párhuzamosan húzott $s_2$ egyenes e sugarat metszi, még pedig arra felé, amerre az $s_2:t_2$ erő hat stb. Könnyen be lehet látni, hogy az ekképpen talált sugársor az $s:t$ viszonyszámok erőpoligónja, tekintetbe véve hogy, ha e sugársort az $o$ csúcsponttól mért tetszőleges $c$ távolságban az erőkkel párhuzamosan vont valamely egyenessel átvágjuk, a levágott hosszúságok $cs:t$ nagyságúak, tehát az $s:t$ erők mérő hosszai $1:c$-re mint alapra. Az éppen említett egyenest pedig, melylyel az $o$ sugársor képezte erőpoligónt esetleg átvágjuk, (a kötélpoligón megszerkesztéséhez ez t. i. nem szükséges,) az $s:t$ erők összetételi egyenesének is tekinthetjük; s ha az eredetileg fölvett helyett más segéderővel óhajtjuk a kötélpoligónt megszerkeszteni, akkor nem szükséges új erőpoligónt rajzolni, hanem egyszerűen más csúcspontot veszünk föl $o$ helyett, miután az $o$ sugársort az erőkkel párhuzamos irányban, az $o$ csúcsponttól alkalmas távol ságban fölvett egyenessel átvágtuk.

A 3,4 és 6,7 kötélszakaszok közötti, 4—6-tal számozott erők eredője pl. e kötélpoligón-oldalok metszéspontján megy át; (52. II ábra;) $r$ mérő hossza a (3,4) (6,7) hosszúság, az $o$ sugársort $c$ távolságban átmetsző egyenesen; (I ábra;) a szóban forgó eredő lefelé hat, mivel mérő hoszszának kezdőpontja a 3,4 pont; az eredő nagysága az $s:t$ erők egységeiben kifejezve $= r:c$.

## 12. §.

## Párhuzamos erők összetevői és egyensúlyozó erői.

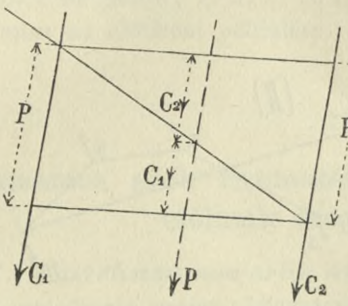
**1. *Az erők fölbontása két párhuzamos összetevőre.*** Ha a $P$ erő a vele párhuzamos $C_1$ és $C_2$ összetevőkre bontandó, (53. I ábra,) akkor ez összetevők egyikét, a $C_2$-őt, — mivel az összetevők nagyságai megfordított viszonyban vannak egymáshoz, mint az eredőtől mért távolságaik, — akképpen lehet a legegyszerűbben megszerkeszteni, ha a fölbontandó $P$ erő mérő hosszúságát a $C_2$ egyenesre mérjük föl, s a $C_1$ egyenes tetszőleges pontjából a $P$ egyenesre rávetítjük. A $C_2$ összetevő értelmét pedig abból határozhatjuk meg, hogy a másik összetevő valamely pontja körül úgy kell forgatnia mint az eredőnek. Ebből az is következik, hogy a $C_2$ mérő hosszúság előjele dolgában, a két vetítő egyenes közül az szerepel kordináta-tengelyül, mely a $P$ mérőhossz kezdőpontján megy át; s a $C_2$ összetevő arra felé hat, a merre felé mérő hosszúsága e kordinátatengelytől esik.



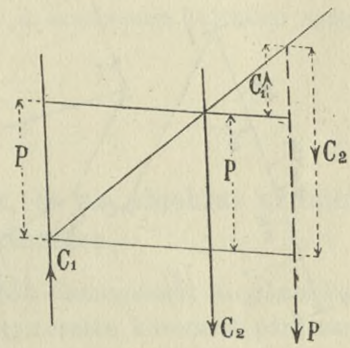

*53. I ábra.*

Úgy szerkesztjük meg ennél fogva mind a két összetevő mérő hosszúságát, ha mind a két összetevő irányvonalára rámérve a fölbontandó $P$ erő mérő hosszát, a végpontokat összekötjük, s az ekképpen talált paralellogramm egyik átlóját meghúzzuk. Az 53. II ábra arra az esetre mutatja a szerkesztést, ha a fölbontandó $P$ erő $C_1$ és $C_2$ között van, az 53. III ábra pedig az ellenkező esetre. Az összetevők értelmét mind a két ábrán az imént kifejtett szabály alapján találjuk meg.

**2. *Két párhuzamos erő eredője.*** A $C_1$ és $C_2$ párhuzamos erők eredőjének egy pontját úgy találjuk meg, ha fölcserélve mérjük rá őket irányvonalaikra és ezután úgy kötjük össze a végpontokat, (54-ik ábra,) hogy a $C_1$ és $C_2$ összetevők e két összekötő vonal metszéspontja körül ellenkező értelemben forgassanak; tehát úgy, hogy, ha az erők előjeleit is megjelöljük mérő hoszszúságaikon, a két összekötő vonal mindegyike az

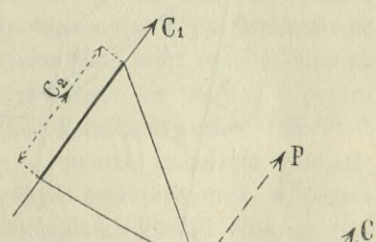



53. *II ábra.*




53. *III ábra.*

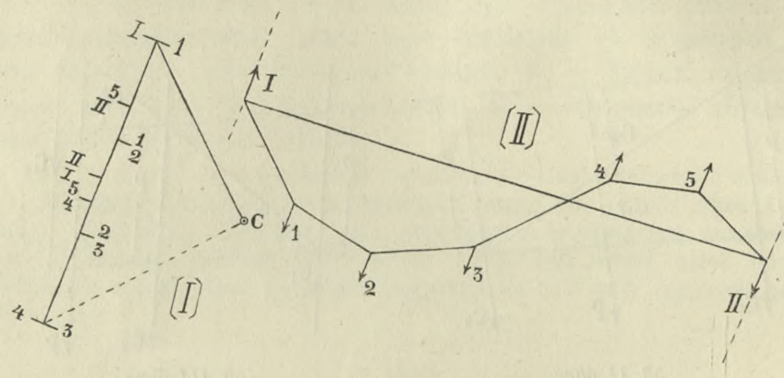
egyik összetevő kezdőpontját a másik összetevő végpontjával kösse össze. Az adott $C_1$ és $C_2$ erők eredőjének irányvonala az ekképpen megszerkesztett metszésponton megy át, mivel az összetevők megfordítva viszonylanak mint az eredőtől mért távolságaik, és mivel a két összetevőnek, az eredőben levő pontok körül, egymáshoz képest ellenkezőleg kell forgatnia, minthogy különben nyomatékösszegük nem lehetne e pontokra nézve zérus.



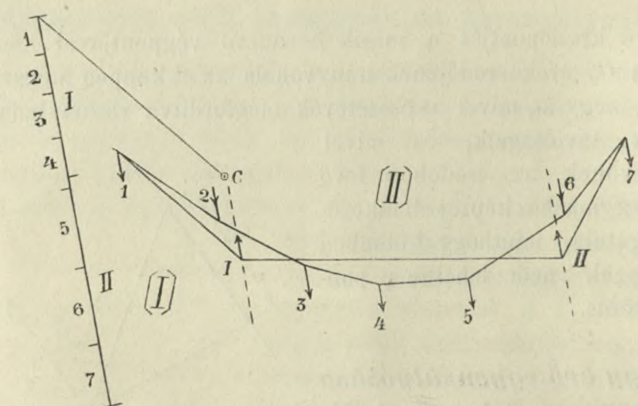

*54-ik ábra.*

**3. *Egy erő egyensúlyozása vele párhuzamos két erővel.*** Ha vagy az eredő vagy az összetevők előjelét ellenkezőre változtatjuk, egyensúly keletkezik. Az 1—2-ik pontban imént előadottakat tehát, ha az előjeleket e szerint határozzuk meg, egy erőt egyensúlyozó két párhuzamos erőnek, s viszont két párhuzamos erőt egyensúlyozó harmadik erőnek megszerkesztésére is alkalmazhatjuk.

**4. *Több párhuzamos erő egyensúlyozása velük párhuzamos két erővel.*** Ha több párhuzamos erő bontandó föl velük párhuzamos két összetevőre, vagy ha több párhuzamos erőt egyensúlyozó, velük párhuzamos két további erő szerkesztendő meg, akkor legegyszerűbben azt a tételt alkalmazzuk, hogy egyensúlyban levő erők erő- és kötélpoligónja záródik. Megszerkesztjük ugyanis a *megadott* erők kötélpoligónját alkalmas magasságú erőpoligón segítségével, ezután meghúzzuk a *keresett* két erő közötti kötélszakaszt, úgy hogy zárt kötélvonal keletkezzék, s párhuzamos sugarat huzunk ez oldallal az erőpoligónban.



*55-ik ábra.*



*56-ik ábra.*

Az 55. I—II ábrák az 1—5-el számozott erőkre adják a szerkesztést. A keresett két egyensúlyozó erő irányvonala I és II-vel van megjelölve. Az összetétel sorrendje: 1, 2, 3, 4, 5, II, I. Előbb a megadott 1, 2, . . . . 5-tel számozott erők erő- és kötélpoligónját kell megrajzolni. (Az erőpoligónon mindkét végén megszámoztuk minden egyes erő mérő hosszát, mivel az erők értelme az összetétel sorrendjében ismételve megváltozik.) Ezután összekötjük a kötélpoligónban azokat az I és II-vel jelölt pontokat, melyekben az 1 előtti és az 5 után következő kötéloldalak az I és II irányvonalakat átmetszik. Végre megrajzoljuk az erőpoligónban I, II kötéloldallal párhuzamosan az I, II sugarat, s meghatározzuk ez uton a keresett I és II erők mérő hosszait, tudva, hogy az I, II sugárnak az I és II mérő hosszak közötti ponton kell az erők összetételi egyenesét metszenie. Ha az 55. I ábrán mérő hosszaikban meghatározott I és II erők értelmét akképp vesszük föl, mint az 55. II ábrán, nyilakkal jelöltük meg, akkor az adott, 1—5-tel számozott erőkkel egyensúlyban vannak, ha ellenkezőre változtatjuk meg értelmüket, akkor ez erők összetevőit képezik.

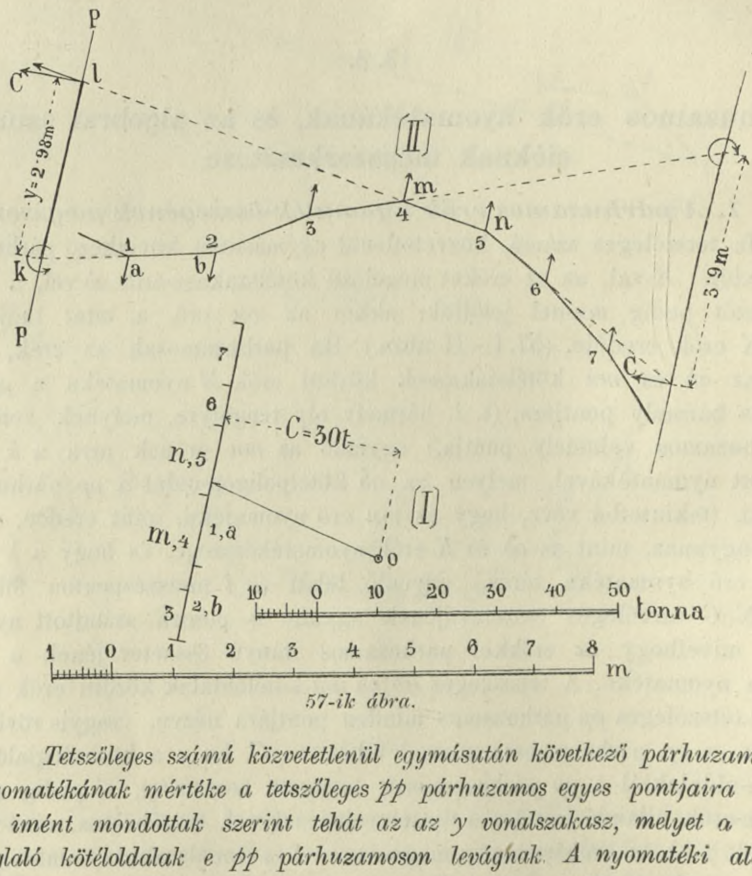
Az 56. I—II ábrák oly példát mutatnak, melyben a keresett egyensúlyozó erők I és II irányvonalai az adott, 1—7-tel számozott erők közé esnek. Az összetétel sorrendje: 1, 2, .... 7, II, I. A szerkesztés különben egészen ugyanaz mint az előbbeni példában.

## 13. §.

## A párhuzamos erők nyomatékának, és az algebrai szummációknak megszerkesztése.

***1. A párhuzamos erők nyomaték-összegének megszerkesztése.*** Ha tetszőleges számú, közvetetlenül egymásután következő párhuzamos erő eredőjét $K$-val, az ez erőket megelőző kötélszakasz-erőt $ab$-vel, a reájuk következőt pedig $mn$-nel jelöljük, akkor az $mn$ erő, a mint tudjuk, az $ab$ és $K$ erők eredője. (57. I—II ábra.) Ha párhuzamosak az erők, akkor tehát az $ab$ és $mn$ kötélszakaszok közötti erők $M$ nyomatéka a $pp$ párhuzamos bármely pontjára, (t. i. bármely oly tengelyre, melynek vetülete a $pp$ párhuzamos valamely pontja,) egyenlő az $mn$ erőnek arra a $k$ pontra számított nyomatékával, melyen az $ab$ kötélpoligón-oldal a $pp$ párhuzamost átmetszi, (tekintetbe véve, hogy az $mn$ erő nyomatéka, mint eredőé, minden pontra ugyanaz, mint az $ab$ és $K$ erők nyomatékösszege, és hogy a $k$ pontra az $ab$ erő nyomatéka zérus,) egyenlő tehát az $l$ metszésponton fölbontott $mn$ erő $C$ merőleges összetevőjének ugyane $k$ pontra számított nyomatékával, mivelhogy az erőkkel párhuzamos irányú összetevőjének e pontra nincsen nyomatéka. A tetszőleges $ab$ és $mn$ kötéloldalak közötti erők nyomatéka, a tetszőleges $pp$ párhuzamos minden pontjára nézve, (vagyis rövidebben mondva, a $pp$ párhuzamosra nézve,) tehát $= yC$, ha $y$ a közbefoglaló kötélpoligón-oldalaktól a $pp$ párhuzamoson levágott hosszúság, $C$ pedig a kötélszakasz-erők állandó merőleges összetevője, melynek mérőhossza, mint tudjuk, (lásd 11. § 2,) az erőháromszög magassága. A $y$ vonalszakasz, amint ezekből látjuk, a keresett nyomaték mértéke, vonatkozással az erőháromszög magasságára, mint nyomatéki alapra. A mi pedig a nyomaték előjelét illeti, ezt abból határozzuk meg, hogy az $ab$ és $mn$ közötti erők úgy forgatnak, az imént mondottak következtében, a $pp$ párhuzamos bármely pontja körül, mint az utánuk következő $mn$ kötélszakasz-erő, az $y$ hosszúság $k$ pontja (vagy bármely más pontja) körül.

Az $y$ nyomatéki mérő hosszak előjelét illetőleg ezekből még más szabályt is le lehet származtatni. Abból ugyanis, hogy az $ab$ és az $mn$ kötéloldalak közötti erők nyomatéka az $y$ vonalszakasz minden pontjára nézve, mind nagyság, mind értelem tekintetében ugyanaz, mint az ez erők után következő $mn$ kötéloldal $l$ metszéspontján fölvett $C$ erőé, az is következik, hogy ha ugyanazoknak, vagy esetleg más és más közvetetlenül egymásután következő erőknek nyomatékösszegi mértékeit más és más párhuzamosokra nézve határozzuk meg, mindazok a nyomatéki mértékek, melyek az erőket megelőző kötéloldal ugyanazon oldalán vannak, ugyanoly előjelű, azok pedig melyek a másik oldalra esnek, az előbbiekhez képest ellenkező előjelű nyomatékokat mérnek.




*57-ik ábra.*

*Tetszőleges számú közvetetlenül egymásután következő párhuzamos erő nyomatékának mértéke a tetszőleges pp párhuzamos egyes pontjaira nézve, az imént mondottak szerint tehát az az y vonalszakasz, melyet a közbefoglaló kötéloldalak e pp párhuzamoson levágnak. A nyomatéki alap az erőháromszög C magassága; a nyomaték tehát egyenlő az yC szorzattal, melyben bármelyik szorzót a hosszúságok léptékén lehet leolvasni, ha a másikat az erők léptékén mérjük le. Az erőpoligón magasságát ez okból mindig akképpen kell fölvenni, hogy vagy mint erő, vagy mint hosszúság kerek számban legyen kifejezve. (Lásd 1. § 5.) A nyomatéki mértékek előjelét vagy akképpen határozzuk meg, hogy megvizsgáljuk, hogy merre forgat az erők után következő kötélszakasz-erő, a nyomatéki mérték valamely pontja körül; vagy akképpen, hogy meghatározzuk előzetesen, hogy az erő-*

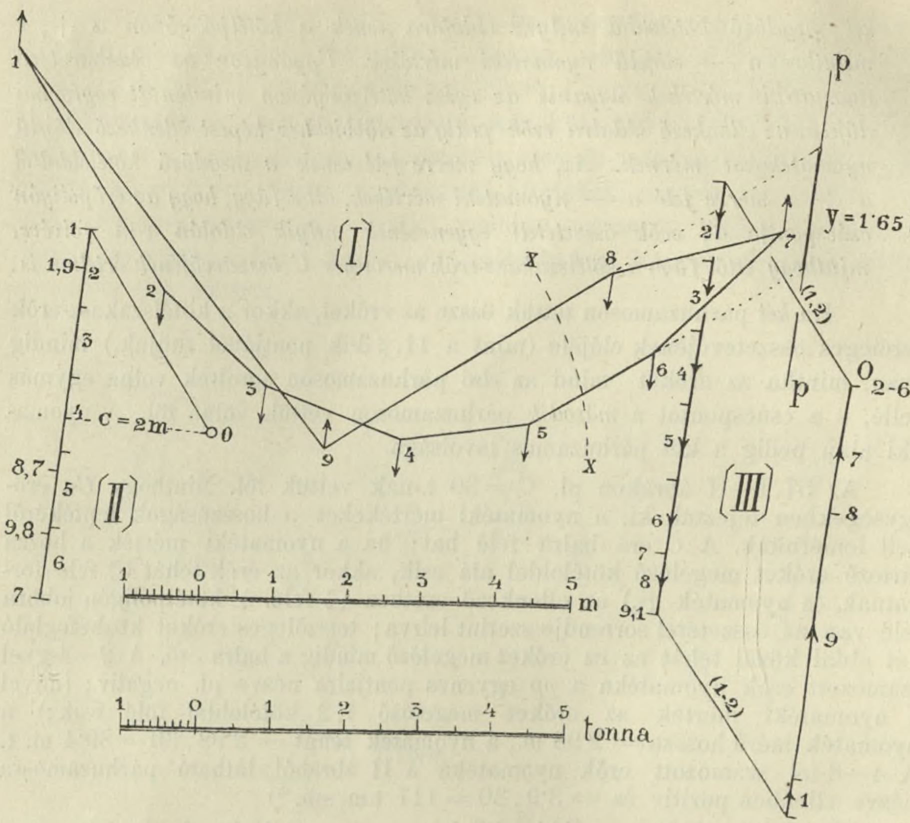
*ket megelőző kötéloldal melyik oldalára esnek a kötélpoligónon a +, s melyikre a — előjelű nyomatéki mértékek. Ugyanazon az oldalon levő nyomatéki mértékek ugyanis az egész kötélpoligónon mindenütt egyforma előjelű, az ellenkező oldalra esők pedig az előbbiekhez képest ellenkező előjelű nyomatékokat mérnek. Az, hogy merre felé esnek a megelőző kötéloldaltól a +, s merre felé a — nyomatéki mértékek, attól függ, hogy az erőpoligón csúcspontja az erők összetételi egyenesének melyik oldalán van fölvéve, minthogy ettől függ a kötélszakasz-erők merőleges C összetevőjének értelme is.*

Ha *két* párhuzamoson tettük össze az erőket, akkor a kötélszakasz-erők merőleges összetevőjének előjele (mint a 11. § 3-ik pontjából tudjuk,) mindig olyan, mintha az erőket mind az *első* párhuzamoson soroltuk volna egymás mellé, s a csúcspontot a *második* párhuzamoson vettük volna föl. A nyomatéki alap pedig a két párhuzamos távolsága.

Az 57. I—II ábrákon pl. $C = 30$ t.-nak vettük föl. Minthogy $C$-t erőegységekben fejeztük ki, a nyomatéki mértékeket a hosszúságok leptékéről kell lemérnünk. A $C$ erő balra felé hat; ha a nyomatéki mérték a hozzá tartozó erőket megelőző kötéloldal alá esik, akkor az erők tehát ↻ felé forgatnak, (a nyomaték +,) az ellenkező esetben ↺ felé. A kötélpoligón jobbra felé van az összetétel sorrendje szerint leirva; tetszőleges erőket közbefoglaló két oldal közül tehát az ez erőket megelőző mindig a balra eső. A 2—4-gyel számozott erők nyomatéka a $pp$ egyenes pontjaira nézve pl. negativ; (mivel a nyomatéki mérték az erőket megelőző 1, 2 kötéloldal fölé esik;) a nyomaték mérő hossza $= 2{\cdot}98$ m., a nyomaték tehát $= 2{\cdot}98 \,.\, 30 = 89{\cdot}4$ m. t. A 4—6-tal számozott erők nyomatéka a II ábrából látható párhuzamosra nézve ellenben pozitiv és $= 3{\cdot}9 \,.\, 30 = 117$ t.m stb.*)

Az 58-ik ábrán, további példaképpen, egyensúlyban levő párhuzamos erők kötélvonalát rajzoltuk meg. Az erőpoligónt a II ábrán a rendes módon, a III ábrán pedig két párhuzamoson szerkesztettük meg, még pedig akképpen, hogy a kötélpoligón mind a kettőre ugyanaz legyen. A kötélvonal 1, 2, 3,... 8, 9, 1 felé van leirva (nem 1, 9, 8 . . . 3, 2, 1 felé!) az összetétel sorrendje szerint. A kötélszakasz-erők merőleges összetevője balra felé hat; tetszőleges erőket megelőző kötéloldal egyenese fölött levágott nyomatéki mérték tehát ↺ felé forgató erők nyomatékát méri, tehát — nyomatékot jelent. A nyomatéki alapot $c = 2$ $m$-re, tehát hosszúságnak vettük föl. Ha e kötélpoligónt az 5, 6 és 8, 9 oldalokon át két részre vágva, s ehhez képest az erőket is két csoportra osztva képzeljük, (hasonlóan, mint tartók szilárdságának megvizsgálására teszszük, lásd a 4. §-t,) akkor az ez átmetszésre ható erők nyomatékának mértéke, a $pp$ párhuzamos pontjaira nézve, az átmetszett kötéloldalaktól e párhuzamoson levágott $y = 1{\cdot}65$ tonna nagyságú erő. (Ezt t. i. erőegységekben kell kifejezni, mivel $c$ hosszegységekben van fölvéve). A balról az átmetszésre ható erőkre nézve a megelőző kötéloldal a 8,9-cel számozott, az $y$ nyomatéki mérték ez oldal meghosszabbitása *alá* esik, a nyomaték tehát + előjelű. (A jobbról hatóké tehát negativ.) A nyomaték nagysága pedig, bármelyik oldalon levő erőket értjük, $= 2 \,.\, 1{\cdot}65 = 3{,}30$ m. t.

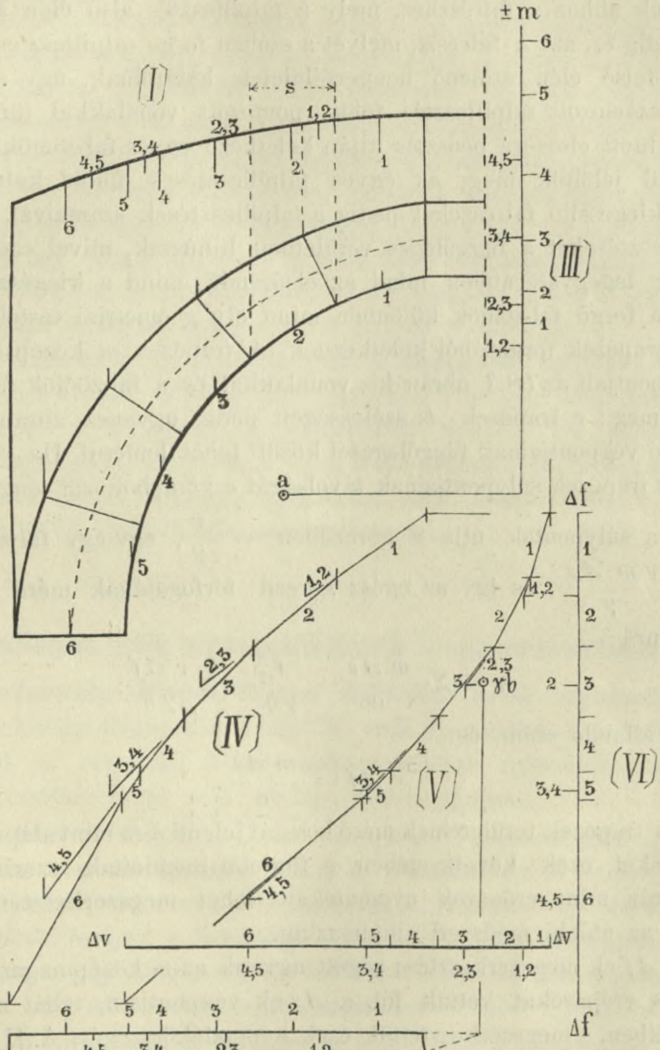
*) Hogy a nyomatékok megjelzése a hosszúságokéval össze ne téveszthessék, czélszerű, ha szorzó jelet teszünk, a nyomaték számbeli értékének megjelzésében, az erő és hosszúság egységeinek jelei közé.




*58-ik ábra.*

**2. *Az integrálisok és a szummációk megszerkesztése.*** Azt, hogy a párhuzamos erők nyomaték-összegét kötélpoligónok, (ha az erők megvannak oszolva, akkor kötélgörbék,) segitségével lehet megszerkeszteni, arra lehet fölhasználni, hogy bármely $\Sigma$- vagy $\int$-t szintén szerkesztés útján határozhassunk meg, a mint ezt a 2. § 9 és a 3. § 2-ban már megemlítettük. A tetszőleges $\Sigma\, m\, n\, r\ldots$ összeget ugyanis akképpen lehet megszerkeszteni, ha pl. az $m$-eket párhuzamos erőknek, az $n$-eket nyomatéki karoknak tekintve, (vagy esetleg $n$ karú $\pm\, m$ erejű erőpárokat véve fől,) kötélpoligón segítségével megszerkesztjük az $mn$ nyomatékokat, egyenként és összegelve. Erre az $mn$-eket új párhuzamos erőknek vagy erőpároknak tekintjük, az $r$-eket pedig ezek nyomatéki karjainak, s egy második kötélpoligón segítségével megszerkesztjük az $mnr$-eket, újra mint nyomatékokat, és így tovább. Ehhez egészen hasonló módon lehet az $\int$-okat is megszerkeszteni, csakhogy, — ha nem pótoljuk az $\int$-t megközelítőleg pontos $\Sigma$-val, — a kötélpoligónok helyett a 15. §-ban előadandó módon, kötélgörbéket kell szerkeszteni.

Az imént mondottak egyéb alkalmazásait illetőleg a később következő §-okra utalva, e helyen csak a 3. §-ban már tárgyalt föladat (gömb-boltozat egyik gerezdje térfogatának megszerkesztése,) más megoldását fogjuk még példaképpen megismertetni. Az 59. I ábra ily boltozat-gerezd függőleges vetületét, a II ábra ennek alaprajzát mutatja. Mindenek előtt beosztjuk a gerezdet




*59-ik ábra.*

*Lépték 1 : 50; a = 2 m; b = 1 m; γ = 3.*

a talpillesztések belső élein át fölvett függőleges hengerfölületekkel, amint ezt az I ábrán, a 2-vel számozott részen a pontozott függőlegesek mutatják. Ha megszerkesztjük ugyanis az ekképp keletkező gerezd-részek térfogatait külön-külön és összesen, akkor könnyen meg lehet határozni a gerezd tetőpontja és tetszőleges talpillesztése közötti fal-zöm térfogatát is, ha e talpillesztés felső élén át utólag ujabb beosztó hengerfölületet veszünk föl, s ha hozzáadjuk ahhoz a falrészhez, mely a talpillesztés alsó élén át fölvett henger-fölületig ér, azt a falrészt, melyet a szóban forgó talpillesztés és az ennek alsó és felső élén átmenő hengerfölületek határolnak, úgy a mint ezt az 1, 2-vel számozott talpillesztés fölött pontozott vonalakkal tüntettük ki. Az imént említett elsősorú beosztás utján keletkező egyes fal-zömöket 1—6 folyó számokkal jelöltük meg, az egyes talpillesztések fölött keletkező, imént említett kiegészítő falrészeket pedig a talpillesztések számaival. (I—II ábra.) A talpillesztéseket a függőleges vetületben kihúztuk, mivel ezekkel határozzuk meg legegyszerűbben mind az elsőrendű, mind a kiegészítő beosztást. A szóban forgó fal-zömök különben mind oly geometriai testeket képeznek, melyek trapézek forgásából keletkeznek. A trapézek $m$ középső magasságainak végpontjait az 58. I ábrán kis vonalakkal és a fal-zömök folyó számaival jelöltük meg; e trapézek $\Delta s$ szélességeit pedig ugyanez ábrán a talpillesztések alsó végpontjainak függőlegesei között lehet lemérni. Ha $r$-nek nevezzük az egyes trapézek súlypontjainak távolságát a gömbboltozat tengelyétől, akkor továbbá a súlypontok útja a gerezdben $= \frac{r}{\gamma}$, egy-egy fal-zöm térfogata tehát $= \frac{r\,m\,\Delta s}{\gamma}$, és így az egész gerezd térfogatának mérő hossza $ab$-re mint alapra:

$$v = \Sigma \frac{m\,\Delta s}{a} \cdot \frac{r}{\gamma b} = \Sigma \frac{r\,\Delta f}{\gamma b};$$

ebben $\gamma$ állandó szám, és

$$\Delta f = \frac{m\,\Delta s}{a}$$

az egyes trapézek területeinek mérő hosszát jelenti $a$-ra mint alapra. A $\Delta f$-eket és a $\Delta v$-ket, ezek következtében, a föntebb mondottak szerint, akár mint erők, akár mint erőpárok nyomatékait lehet megszerkeszteni. A III—V ábrákon az utóbbi módszert alkalmaztuk.

A $\Delta f$-ek megszerkesztése végett ugyanis az $m$ középmagasságokból képzett $\pm m$ erőpárokat vettük föl, a $\Delta s$-ek végpontjain, tehát a beosztó függőlegesekben, s megszerkesztettük ezek nyomatékösszegét. A III ábra ez erőpárok $a$ magasságú erőpoligónját mutatja, a IV ábra a kötélpoligónt. Ha e kötélpoligón sarokpontjait, vízszintes irányban, a tetszőleges $\Delta f$ függőlegesre vetítjük, a föntebb mondottak szerint a $\Delta f$-eket kapjuk meg, egyenként és összegeikben. (VI ábra.)

A $\Delta f$-ek után a $\Delta v$-ket, mint a $\Delta f$-ek végpontjain, tehát az imént említett IV ábra kötélpoligónja sarokpontjainak vízszinteseiben fölvett $\pm r$ erőpárok nyomatékait rajzoltuk meg, $\gamma b$-re mint alapra. A $\pm r$ erőpárok erőpoligónját a gömb-boltozat alaprajzában szerkesztettük meg, egyszerűen a trapéz-súlypontok (esetleg e helyett a középvonalak,) levetitésével, a magasságot $\gamma b$-vel egyenlőnek véve föl. (Ezért a csúcspontot $\gamma b$-vel jelöltük meg.) Ezután megrajzoltuk az V ábrán a IV ábra sarokpontjainak vízszintesei között a $\pm r$ erőpárok kötélpoligónját. A sarokpontokat a $\Delta v$ vízszintesre vetítettük, és ezzel a föntebb mondottak szerint, az egyes fal-zömök térfogati mérő hosszait kaptuk meg, egyenként és összegeikben. Az egyes mérő hosszakat rövid vonalkákkal és a fal-zömök folyó számaival jelöltük meg, az egyik oldalon a főbeosztásra, a másikon a föntemlített kiegészítő részekre. A kötélpoligónokat a IV és az V ábrán előbb ugyanis a fő-beosztásra rajzoltuk meg, folytonos vonalban, s ezután húztuk meg az egyes talpillesztések fölötti falzömökre az egyes kiegészítő kötéloldalokat külön-külön. A boltozat-gerezd központi szögét úgy vettük föl, hogy $\gamma = 3$. Az $a$ és $b$ alaphosszakat $a = 2\ m$, $b = 1\ m$-nek vettük föl. A 3, 4 talpillesztésig érő gerezdre p. o. $v = 1{\cdot}58\ m$-nek találtuk; e gerezd térfogata tehát $V = 2\,.\,1\,.\,1{\cdot}58 = 3{\cdot}15\ m^3$.

A donga-boltozatok elméletében csak a beosztásból származó trapézek $\Delta f$ területi mérő hosszai szükségesek, melyeket, erre való tekintettel, szerkesztettünk meg, a VI ábrán, a föntemlített módon. Ha *dongaboltozat* képezi a föladat tárgyát, akkor az V ábra tehát elmarad. Ha pedig valamely *gömb-boltozat* gerezdjének térfogata határozandó meg, akkor viszont a $\Delta f$-eket nem szükséges a VI ábrán külön megszerkeszteni.

14. §.

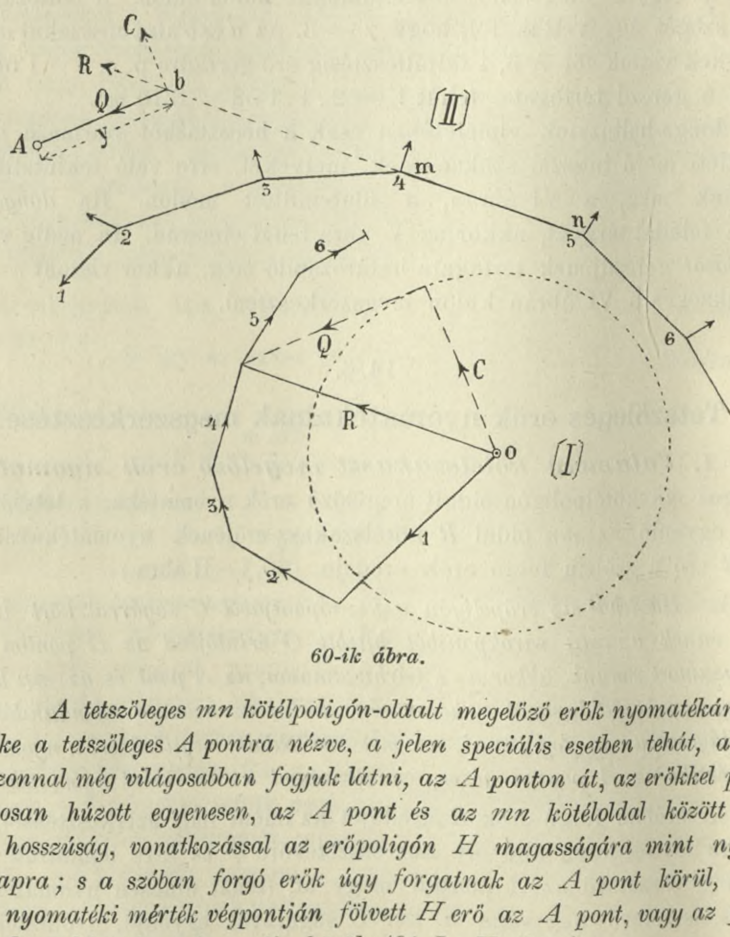
## Tetszőleges erők nyomatékainak megszerkesztése.

***1. Valamely kötélszakaszt megelőző erők nyomatéka.*** A tetszőleges $mn$ kötélpoligón-oldalt megelőző erők nyomatéka, a tetszőleges $A$ pontra, egyenlő az $mn$ oldal $R$ kötélszakasz-erőjének nyomatékával, mivel ez az $R$ erő a szóban forgó erők eredője. (60. I—II ábra.)

*Ha tehát az erőpoligón o kezdőpontjából C sugárral kört irunk le, s ennek az mn sarokpontból húzott Q érintőjével az A ponton át párhuzamost vonunk, akkor az e párhuzamoson, az A pont és az mn kötéloldal egyenese között levágott y hosszúság, amint az azonnal mondandókból még világosabban ki fog tünni, az mn kötéloldalt megelőző erők nyomatékának mértéke az A pontra nézve, vonatkozással a C-re mint nyomatéki alapra.*

A szóban forgó erők $R$ eredőjét az imént leirt szerkesztéssel ugyanis egymásra merőlegesen álló oly két összetevőre $Q$- és $C$-re bontottuk, melyek közül a $Q$ összetevő az $A$ ponton megy át, (tehát nincsen nyomatéka,) míg a másik összetevő nagysága a kör $C$ sugarával egyenlő, nyomatéki karja pedig az $A$ pontra nézve az $y$ hosszúság. A $C$ nyomatéki alapot, hogy a szerkesztést végre lehessen hajtani, az erőpoligón sugarainál kisebbre kell fölvenni. Ha valamely erősugár hossza igen kicsiny volna, akkor a többiekre a használtnál kisebb $C_1$ nyomatéki alapot kell fölvenni, még pedig akképpen, hogy $C$-én kivül $C_1$-et is kerek számban lehessen kifejezni, vagy mint erőt, vagy mint hosszúságot.

***2. Speciális eset.*** Az ívek és a függő tartók elméletében fontos az a speciális eset, ha a szélső erők kivételével, a többi párhuzamos. (Lásd pl. a 125- és 126-ik ábrákat.) Ez esetben az erő- és a kötélpoligón egészen olyan, mint ha párhuzamos erőkre segéderővel lenne rajzolva. A kötélszakasz-erők merőleges összetevője is állandó az egész kötélvonal hosszában, s egyenlő az erőpoligón $H$ magasságával. (61. I—II ábra.) Csakhogy a kötélszakasz-erők merőleges összetevője egyenlő a ferde erők, (tehát rendesen a szélső reakciók) merőleges összetevőjével, az erőpoligón magassága tehát előre meg van adva.

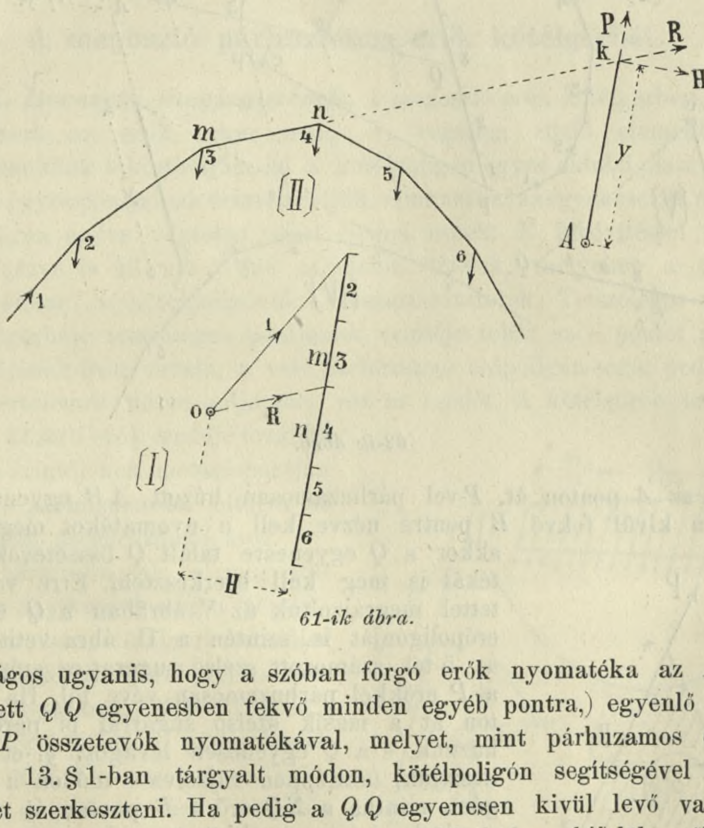



*60-ik ábra.*

*A tetszőleges mn kötélpoligón-oldalt megelőző erők nyomatékának mértéke a tetszőleges A pontra nézve, a jelen speciális esetben tehát, amint ezt azonnal még világosabban fogjuk látni, az A ponton át, az erőkkel párhuzamosan húzott egyenesen, az A pont és az mn kötéloldal között levágott y hosszúság, vonatkozással az erőpoligón H magasságára mint nyomatéki alapra; s a szóban forgó erők úgy forgatnak az A pont körül, mint az y nyomatéki mérték végpontján fölvett H erő az A pont, vagy az y vonalszakasz bármely más pontja körül.* (61. I—II ábra.)

Ha fölbontjuk az $mn$ oldalt megelőző erők $R$ eredőjét azon a $k$ ponton, melyen az $mn$ kötéloldal, (mint az eredő irányvonala,) az $A$ párhuzamost átmetszi, az e párhuzamosba eső $P$, és reá merőleges $H$ összetevőkre, akkor az $R$ erő nyomatéka ugyanis a $H$ erő $Hy$ nyomatékával egyenlő, mivelhogy a $P$ erőnek az $A$ pontra nézve nincsen nyomatéka.

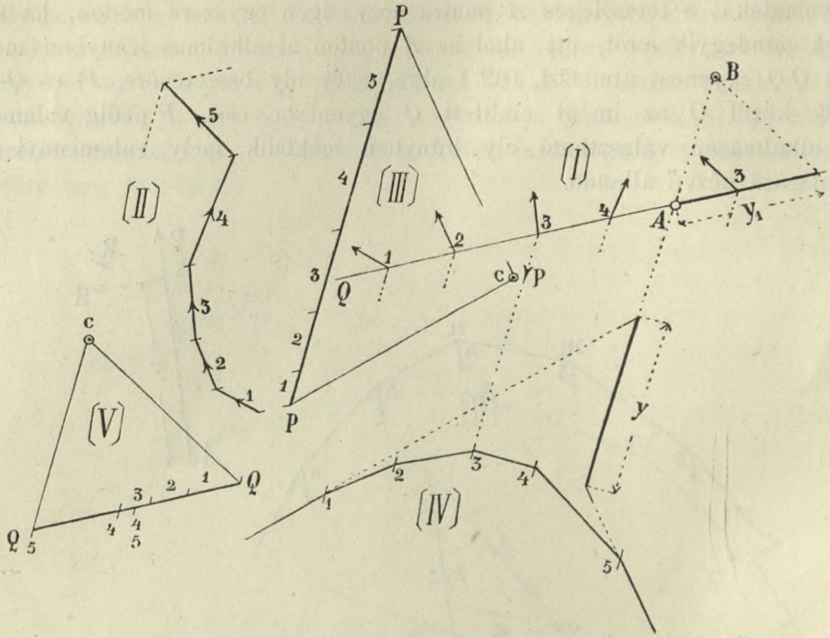
*3. Az összetétel sorrendjében közvetetlenül egymást követő tetszőleges erők nyomatékának megszerkesztése.* Akképpen is meg lehet szerkeszteni tetszőleges számú közvetetlenül egymásután következő erő nyomatékát a tetszőleges *A* pontra nézve igen egyszerű módon, ha fölbontjuk mindegyik erőt, ott ahol az *A* ponton át alkalmas irányban meghúzott *Q Q* egyenest átmetszi, (62. I ábra,) két oly összetevőre, *P*- és *Q*-ra, melyek közül *Q* az imént említett *Q* egyenesbe esik, *P* pedig valamely más, alkalmasan választható oly irányban működik, mely valamennyi erő fölbontására nézve állandó.




*61-ik ábra.*

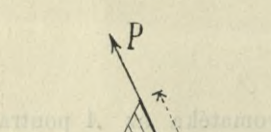
Világos ugyanis, hogy a szóban forgó erők nyomatéka az *A* pontra, (s a fölvett *Q Q* egyenesben fekvő minden egyéb pontra,) egyenlő az imént említett *P* összetevők nyomatékával, melyet, mint párhuzamos erőkét, a megelőző 13. § 1-ban tárgyalt módon, kötélpoligón segítségével könnyen meg lehet szerkeszteni. Ha pedig a *Q Q* egyenesen kivül levő valamely *B* pontra nézve is meg kell szerkeszteni a föladatban kijelölt erők nyomatékát, akkor a párhuzamos *P* összetevők nyomatékához hozzá kell még adni, (az előjelnek tekintetbe vételével,) a *Q* egyenesbe eső összetevők nyomatékát.

A 62. I—V ábrákon 1—5-tel számozott erők nyomatékának megszerkesztése látható. A 62. II ábra az erőpoligónt mutatja; a *P* összetevők erőpoligónját ebből a III ábrán vetités útján szerkesztettük meg. Ezután megrajzoltuk az IV. ábrán a *P* összetevők kötélpoligónját, melylyel az 1—5-tel számozott erők nyomatékát, amint épp mondottuk, a *Q Q* egyenesben fekvő bármely pontra meg lehet szerkeszteni. Mind az öt erő nyomatéki mértéke pl. az $A$ pontra nézve az az $y$ hosszúság, melyet a szélső kötéloldalok az $A$ párhuzamoson levágnak; a forgatás ↺ felé irányul. (Mivel a merőleges kötélszakasz-erő balra felé hat.)




[62-ik ábra.

Ha az $A$ ponton át, $P$-vel párhuzamosan húzott $AB$ egyenesen, a $Q$ egyenesen kivül fekvő $B$ pontra nézve kell a nyomatékot meghatározni, akkor a $Q$ egyenesre talált $Q$ összetevők nyomatékát is meg kell szerkeszteni. Erre való tekintettel megrajzoltuk az V ábrában a $Q$ összetevők erőpoligónját is, szintén a II ábra vetítése útján, az 5-tel számozott szélső sugarat ez erőpoligónban a $P$ erőkkel párhuzamosan véve föl. Ha a $B$ ponton át a másik szélső sugárral is párhuzamosat húzunk, s a $Q$ egyenesen levágott $y_1$-et megszerkesztjük, (akképpen rajzolva e módon a kötélpoligónt, mintha a $\Sigma Q$ erő a $B$ ponton át működnék, s mintha a nyomatéki pont volna a $Q$ egyenesen,) akkor ez $y_1$ vonalszakasz, a $Q$ összetevők nyomatékának mértéke. Az egész nyomaték mértéke egyenlő az $y$ és $y_1$ mértékek összegével. A jelen esetben e két nyomatéki mérték összeadandó, mivel a $Q$ összetevők is ↺ felé forgatnak a $B$ pont körül.



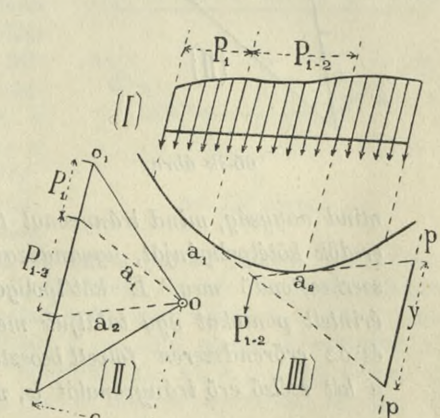

63-ik ábra.

**4.** ***A nyomaték, háromszög területével ábrázolva.*** Végre még az említendő meg e helyen, tekintettel a későbbi alkalmazásokra, hogy a tetszőleges $P$ erő nyomatékát, a tetszőleges $A$ pontra nézve, akképpen is meghatározhatjuk, ha a szóban forgó $P$ erő mérő hosszúságát a $P$ irányvonalra tetszőleges helyen fölmérjük, (63-ik ábra,) s a végpontokat az $A$ nyomatéki középponttal összekötjük. Ha ugyanis az ekképp talált háromszög magassága $d$, akkor e háromszög területe $= \frac{1}{2} Pd$, tehát egyenlő a $P$ erő nyomatékának felével. A nyomatéki háromszögek előjelét az szabja meg, hogy mily körfolyamot mutat a $P$ erő a háromszögben fekvő valamely pont körül.

## 15. §.

## A megoszló párhuzamos erők kötélgörbéi.

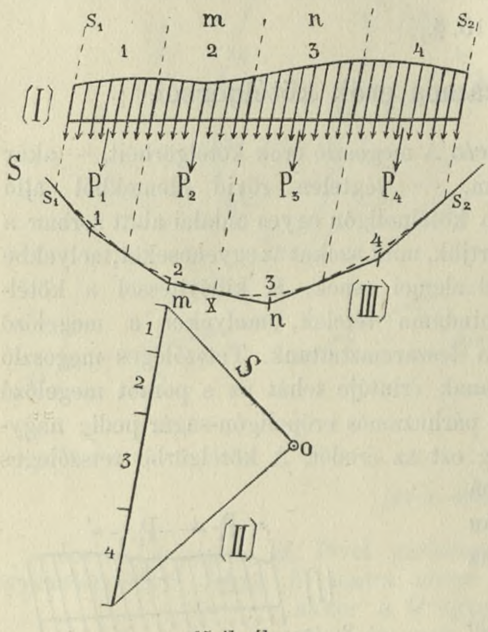
***1. Bevezető megjegyzések.*** A megoszló erők kötélgörbéit, — akár párhuzamosak az erők, akár nem, — végtelen rövid elemekből álló kötélpoligónoknak tekinthetjük, ha a kötélpoligón egyes oldalai alatt sorban a kötélgörbe egyes pontjainak érintőit értjük, mint azokat az egyeneseket, melyekbe a kötélpoligón egyes végtelen rövid elemei esnek. E kibővítéssel a kötélgörbékre nézve is állanak tehát mindama tételek, melyeket a megelőző 10—14. §-okban a kötélpoligónokra leszármaztattunk. Tetszőleges megoszló erők kötélgörbéje tetszőleges pontjának érintője tehát az e pontot megelőző erők eredőjének irányvonala, a vele párhuzamos erőpoligón-sugár pedig nagyságra és értelemre nézve adja meg ezt az eredőt. A kötélgörbe tetszőleges két pontja közötti erők eredője továbbá e két pont érintőjének metszéspontján megy át, s párhuzamosan eltolva az erőpoligónban szerkeszthető meg.



*64-ik ábra.*

Ha párhuzamosak a megoszló erők, akkor úgy kapjuk meg a mondottak következtében a kötélgörbe tetszőleges $a_1$ pontjának érintőjével párhuzamos $a_1$ erőpoligón-sugarat, (64. I—III ábra,) ha az erőkkel vont $a_1$ párhuzamost megelőző erők $P_1$ összegét, az erők összetételi egyenesén, az $o_1$ kezdőponttól, előjelére való tekintettel lemérjük; viszont az erőkkel vont $a_1$ és $a_2$ párhuzamosok közötti erők $P_{1-2}$ összegét úgy, ha az erőpoligónban az $a_1$ és $a_2$ sugarakat a kötélgörbe $a_1$ és $a_2$ pontjainak érintőivel párhuzamosan húzzuk; az $a_1$ és $a_2$ párhuzamosak közötti erők nyomatékának mértéke továbbá, a $pp$ párhuzamos pontjaira nézve, az az $y$ hosszúság, (vonatkozással az erőháromszög $c$ magasságára mint alapra,) melyet a kötélgörbe $a_1$ és $a_2$ pontjainak érintői vágnak le a $pp$ párhuzamosról stb.

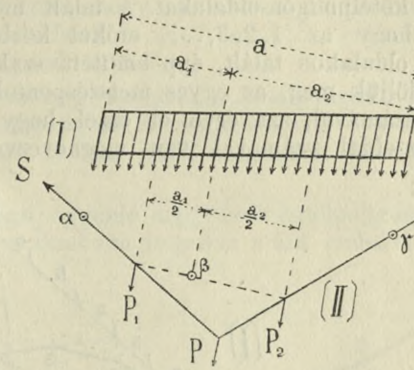
***2. A megoszló párhuzamos erők kötélgörbéinek megszerkesztése.*** Oszszuk be a föladatban szereplő megoszló erőrendszert az erőkkel párhuzamosan fölvett egyenesekkel oly csoportokra, melyekben az erők eredői, mind nagyság, mind irányvonal dolgában ismeretesek, pótoljuk az egyes csoportban szereplő erőket eredőikkel, s szerkeszszünk e $P_1$; $P_2$; $P_3$... eredőkre, az alkalmasan fölvett $S$ segéderővel erő- és kötélpoligónt. (65. I—III ábra.) Tudjuk, hogy e kötélpoligón tetszőleges $mn$ oldala az ez oldalt megelőző erők eredőjének irányvonala, beleértve ez erők közé az $S$ segéderőt is. De ha ugyanez $S$ segéderővel rajzoljuk meg a *megoszló* erők kötélgörbéjét is, akkor az $mn$ beosztó vonalba eső pont érintője, az imént mondottak szerint, szintén az $mn$ beosztó vonalat megelőző erők eredőjének irányvonala. Az az $x$ pont tehát, melyben a tetszőleges $mn$ beosztó vonal az $mn$ kötélpoligón-oldalt átmetszi, az $S$ segéderővel rajzolt kötélgörbe pontja, s e pont érintője az $mn$ kötélpoligón-oldal.



*65-ik ábra.*

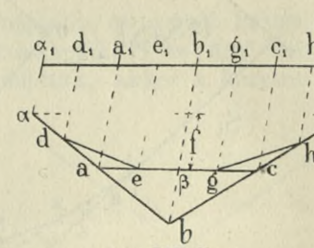
*Megoszló párhuzamos erők kötélgörbéjét akképpen rajzoljuk tehát meg, hogy beosztjuk az erőket, velük párhuzamosan fölvett egyenesekkel, oly csoportokra, melyek $P_1$; $P_2$... eredői, mind nagyság, mind irányvonal tekintetében ismeretesek, s megrajzoljuk ez eredők kötélpoligónját, ugyanazzal az $S$ segéderővel, melylyel a kötélgörbe szerkesztendő meg. E kötélpoligón burkolja a keresett kötélgörbét, s az érintett pontokat úgy találjuk meg, ha megszerkesztjük az e kötélpoligón és az erőrendszeren fölvett beosztó vonalak közötti metszéspontokat, beleértve a két szélső erő irányvonalát is, mint a két szélső beosztó vonalat.*

***3. Az egyenletesen megoszló erők kötélparabolája.*** Legyen $SPS'$ a tetszőleges $a$ hosszúságon egyenletesen megoszló, tetszőleges nagyságú párhuzamos erők $P$ eredőjének kötélpoligónja, (66. I—II ábra,) $\alpha$ és $\gamma$ tehát ez erők kötélgörbéjének két végpontja, és $S$ az $\alpha$ pontnak, $S'$ pedig a $\gamma$ pontnak érintője. Oszszuk be a szóban forgó erőket a tetszőleges $\beta$ párhuzamossal az $a_1$ és $a_2$ szélességű két csoportra, húzzuk meg az $a_1$ és $a_2$ hosszak középvonalaiban az e két csoporthoz tartozó erők $P_1$ és $P_2$ eredőinek irányvonalait, s kössük össze a $P_1$ és $P_2$ egyenesek és az $S$ és $S'$ kötélszakaszok közötti metszéspontokat. Könnyen belátható, hogy akkor $SP_1P_2S'$ a $P_1$ és $P_2$ eredők kötélpoligónja, a $P_1P_2$ egyenes tehát, az előbbi pontban mondottakra való tekintettel, a megoszló erők kötélgörbéje $\beta$ pontjának érintője. Az egyenletesen megoszló erők kötélgörbéje, amint ezekből látjuk, akképpen keletkezik, hogy e görbe egyik tetszőleges $P_1P_2$ érintője úgy mozdul el más két érintő között, hogy az erőkkel párhuzamos irányban szerkesztett vetületének hossza $^1/_2\,(a_1 + a_2) = {}^1/_2\,a$, tehát állandó. Tudjuk, hogy e módon az erőkkel párhuzamos tengelyű parabola keletkezik. Egyenletesen megoszló erők kötélgörbéje tehát oly parabola, melynek tengelye párhuzamos az erőkkel.



*66. I—II ábra.*

Egyenletesen megoszló erők kötélgörbéjét, mint parabolát, legegyszerűbben érintőinek felezése, és a felező pontok összekötése útján szerkesztjük meg, mi által tudvalevőleg további érintőket találunk. (66 III ábra.) Rendesen meg van adva, vagy ki van előre számítva, a parabola $f$ ívmagassága. Ez esetben mindenekelőtt a szélső pontok érintőit húzzuk meg, fölmérve a középvonalban a parabola $\alpha\gamma$ húrjától a kétszeres ívmagasságot $2f$-et, s összekötve az ekképp talált $b$ pontot az $\alpha$ és $\gamma$ pontokkal. (Ez érintőket esetleg, mint az egész erőrendszer eredőjének kötélpoligónját, erőpoligón rajzolása útján is meg lehet szerkeszteni.) Ez érintők felezését, ezután a felező pontok összekötése útján kapott újabb $a\alpha$; $a\beta$; $c\beta$; $c\gamma$ érintők felezését stb. legegyszerűbben úgy hajtjuk végre, hogy beosztjuk a szélső erők irányvonalai között tetszőleges irányban húzott $\alpha_1\gamma_1$ egyeneset előbb 4 egyenlő részre, s levetítjük az $a_1$ és $c_1$ pontokat $a$ és $c$-re; ezután megfelezzük az $\alpha_1\gamma_1$ egyenesen az előbbi beosztás szakaszait, s levetítjük az e módon nyert $d_1$; $e_1$; $g_1$; $h_1$ pontokat $d$; $e$; $g$; és $h$-ra stb.



*66. III ábra.*

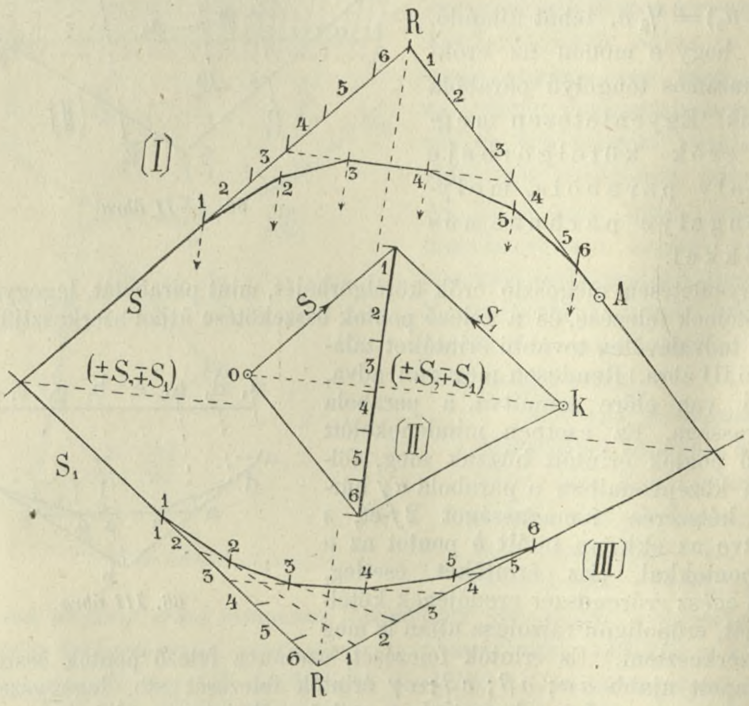
## 16. §.

## Föladatok a kötélpoligónok megszerkesztésére.

Célszerűnek véljük a kötélpoligónok elméletének befejezéséül még a következő, a tartók elméletében fölmerülő föladatok megoldását adni elő e szakaszban.

1. Szerkeszszünk az 1, 2, 3 .... párhuzamos erőkre oly kötélvonalat, melynek első oldala $S$ meg van adva, s

melynek utolsó oldala az $A$ ponton menjen át. (67. I ábra.) E föladat megoldására előbb kisérleti kötélpoligónt rajzolunk, az erőpoligón $k$ csúcspontját tetszőlegesen véve föl; (II—III ábra;) ezután meghosszabbítjuk a kötélpoligón szélső oldalait, míg egymást nem metszik, s többi oldalait, míg a szélsőket nem vágják, egyes szakaszokra osztva ez úton a megnyujtott szélső kötélpoligón-oldalakat. A talált metszéspontokat akképpen számozzuk meg, hogy az 1, 2, 3,.... erőket közbefoglaló oldalak megnyujtásával a szélső oldalakon talált, épp említett szakaszokat sorban 1, 2, 3,.... számokkal jelöljük meg, az egyes metszéspontokat pedig a két szomszédos szakasz folyó számával, azt érve el ezzel, hogy mindegyik metszéspont ama kötélpoligón-oldal számával van megnevezve, mely e metszésponton átmegy.




*67. I—III ábra.*

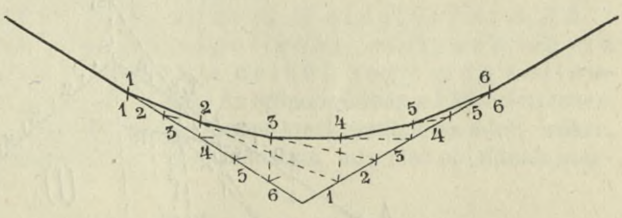
Rávetítjük most a kisérleti kötélpoligón szélső oldalainak $R$ metszéspontját a megadott $S$ kötéloldal megnyujtására, s összekötjük e pontot az $A$ ponttal, mi által a megszerkesztendő kötélpoligón másik szélső oldalát találjuk meg. Ha az erőpoligónban a szélső sugarakat e szélső kötéloldalakkal párhuzamosan húzzuk, megkapjuk az erőpoligón $o$ csúcspontját s az ekképp kiegészített erőpoligón fölhasználásával könnyen megrajzolhatjuk a keresett kötélpoligónt.

De erőpoligón nélkül is megrajzolhatjuk a keresett kötélpoligónt oly módon, hogy a kisérleti kötélpoligón szélső oldalain talált metszéspontokat, a keresett kötélpoligón szélső oldalaira vetítve, s az ekképp talált szakaszokat és pontokat ugyanazokkal a számokkal jelölve meg, melyeket a kisérleti kötélpoligón szélső oldalain használtunk, összekötjük a hasonló számokkal jelölt pontokat. (67. I és III ábra.) A 3,4 oldal pl. — ha meghosszabbítjuk, — a két szélső oldal mindegyikét a 3,4-gyel számozott ponton metszi, a mint ezt az I ábrán, a vonalzott egyenes mutatja.

A kisérleti kötélpoligón segítségével azon alapon is meg lehet továbbá szerkeszteni a keresett kötélpoligónt, miután szélső oldalai meg vannak húzva, (szintén az erőpoligón használata nélkül,) hogy a szóban forgó két kötélpoligónban az egymásnak megfelelő oldalak a $\pm S$ és $\mp S_1$ erők *o k* eredőjének irányvonalán metsződnek. (Lásd 10. § 6.)

Bármi módon szerkesztettük is meg azonban a kötélpoligónt, magától értődik, hogy, — ha utólagosan az erőpoligónt is megrajzoljuk, — a sugaraknak párhuzamosaknak kell lenniök a már előbb megrajzolt kötélpoligónoldalakkal.

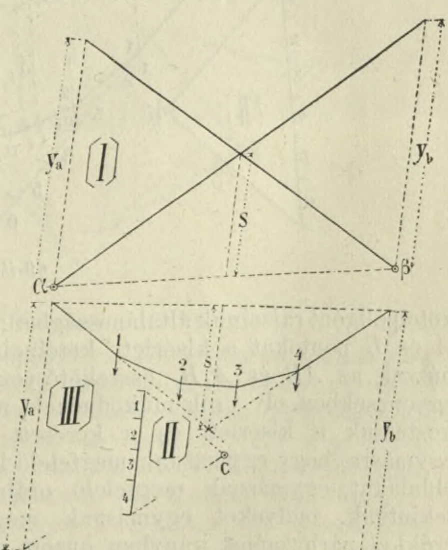
Igen gyakran egyenlő távolságú, egyenlő nagy erők kötélpoligónját kell megrajzolni. (67. IV ábra.) Ez esetben azzal van megadva a két szélső oldal, ha ismerjük az *egyiket* és a másiknak *egy pontját*, tekintetbe véve, hogy metszés pontjuk a két szélső erő között vont középvonalra esik, mint valamennyi erő súlyvonalába. A többi oldalak megnyujtásával a szélső oldalakon talált metszéspontok fölváltva az egyes erők irányvonalaira, és az ezek közötti középvonalakra esnek, tehát könnyen megszerkeszthetők. S ha úgy számozzuk meg e metszéspontokat, mint föntebb mondottuk, akkor a keresett kötélpoligónt megint a hasonló számokkal jelölt metszéspontok összekötése útján szerkeszthetjük meg, amint látjuk minden erőpoligón és kisérleti kötélpoligón nélkül.



*67. IV ábra.*

Megemlítendő még végre, hogy tetszőleges párhuzamos erők kötélpoligónját az e pontban előadott módon akkor is meg lehet szerkeszteni, ha az egyik szélső oldal, és a másiknak egy pontja helyett, a kötélpoligón egyik tetszőleges oldala, és egyik tetszőleges más oldalának egy pontja van megadva.

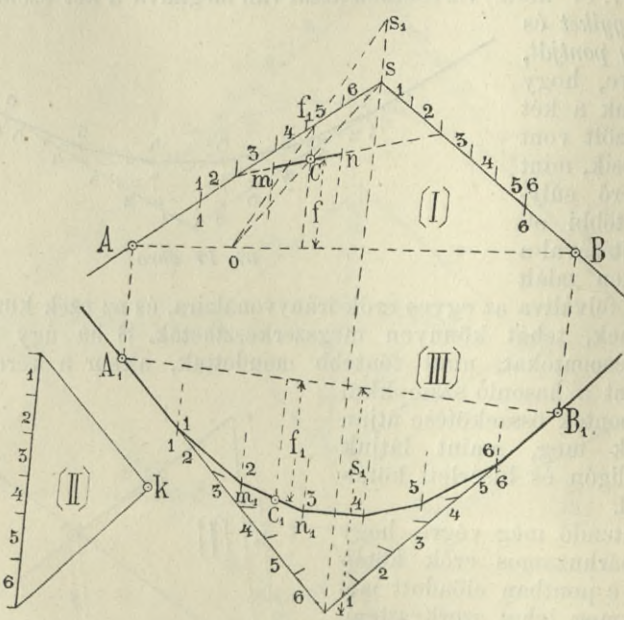
2. S z e r k e s z s z ü n k az 1, 2 . . . p á r h u z a m o s e r ő k r e o l y k ö t é l p o l i g ó n t, m e l y b e n k é t p o n t, $\alpha$ é s $\beta$, s a k ö t é l s z a k a s z e r ő k m e r ő l e g e s $C$ ö s s z e t e v ő j é n e k m i n d n a g y s á g a, m i n d e l ő j e l e m e g v a n a d v a. (68. I ábra.) Hogy a föladatot a megelőzőre vezethessük vissza, a megnyujtott szélső oldalakat kell megszerkesztenünk. E célból vagy metszéspontjuk $s$ ordinátáját határozzuk meg, vagy azokat az $y_a$ és



*68-ik ábra.*

$y_b$ hosszakat, melyeket ez oldalak az adott $\alpha$ és $\beta$ pontok párhuzamosain levágnak. Ezt általánosságban, $C$ magasságú erőpoligónnal rajzolt kisérleti kötélpoligón segítségével érjük el, (II—III ábra,) melylyel a szóban levő $y_a$ és $y_b$ hosszúságokat közvetetlenül megkapjuk. Egyszerűbb esetekben számítás útján is meghatározhatjuk $y_a$ és $y_b$-t, mint az adott erők nyomatéki mértékeit az $\alpha$ és $\beta$ párhuzamosak pontjai, s a $C$ nyomatéki alapra nézve. Vagy az $s$ ordinátát is kiszámíthatjuk esetleg $y_a$ és $y_b$ helyett, akár az e hosszak között fönnálló geometriai összefüggés alapján, akár közvetetlenül mint nyomatéki mértéket. (Lásd a 141 és 146-ik ábrák kapcsán később mondandókat.)

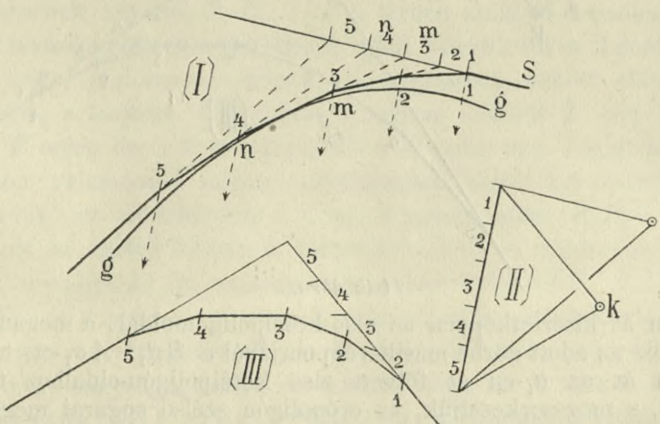
3. Szerkeszszük meg az 1, 2, 3 . . . . párhuzamos erők kötélpoligónját akképpen, hogy két szélső oldala sorban az $A$ és $B$ ponton menjen át, az $m$ és $n$ erők közötti oldala pedig a $C$ ponton. (69. I—III ábra.) Mindenekelőtt megint kisérleti erő- és




*69-ik ábra.*

kötélpoligónt rajzolunk általánosságban; (II—III ábra ;) ezután átvetítjük az adott $A$ és $B$ pontokat a kisérleti kötélpoligón oldalaira, $A_1$-re és $B_1$-re, s meghúzzuk az $AB$ és $A_1B_1$ összekötő vonalakat. (Úgy mint ha az $AA_1$ és $BB_1$ egyenesekben oly erők működnének, melyek a többit egyensúlyozzák.) Vonatkoztassuk a kisérleti és a keresett kötélpoligónt geometriailag akképpen egymásra, hogy egymásnak megfelelő kötéloldalaknak az ugyanaz erők közötti oldalakat, egymásnak megfelelő ordinátáknak pedig oly vonal-szakaszokat tekintünk, melyeket egymásnak megfelelő kötéloldal-párok vágnak le az erőkkel párhuzamos irányban húzott valamely egyenesen. Tekintve, hogy e hosszúságok nyomatéki mértékek, kitetszik a mondottakból, hogy az egymásnak megfelelő ordináták *arányosak.* (T. i. megfordított viszonyban vannak, mint a megfelelő erőpoligónok magasságai.) Ha $s_1$-gyel jelöljük a kisérleti kötélvonal szélső oldalai metszéspontjának, $f_1$-gyel a $C$-nek megfelelő $C_1$ pontnak ordinátáját, $s$ és $f$-fel pedig a megfelelő ordinátákat a megszerkesztendő kötélpoligónon, akkor $s : s_1 = f : f_1$ és ebből az $s$-et könnyen meg lehet mint negyedik geometriai arányost szerkeszteni, pl. az I ábrán vonalozva jelzett módon, t. i. átmérve az $s_1$ és $f_1$ ordinátákat az I ábrába, összekötve az $s_1$ ordináta $s_1$ végpontját az $f_1$ ordináta $f_1$ végpontjával, s átvetítve az ekképpen az $AB$ húron talált $o$ metszéspontból az $f$ ordináta $C$ végpontját az erőrendszer súlyvonalára, az $s$ pontra. Végre meghúzzuk a keresett kötélpoligón két szélső oldalát, összekötve az $s$ pontot az adott $A$ és $B$ pontokkal, mi által ezt a földadatot is a megelőzőkre vezetjük vissza. Magától értődik, hogy egyszerűbb esetekben számítás útján is meg lehet határozni az $f_1$ és $s_1$ ordinátákat, mint nyomatéki mértékeket; valamint másrészt az is önként érthető, hogy abban az esetben is az imént előadott módon szerkeszthetjük meg a keresett kötélpoligónt, ha a szélső oldalak és még egy oldal egy-egy pontja helyett, három tetszőleges oldalnak, vagy esetleg ezek meghosszabbításainak egy-egy pontja van megadva.

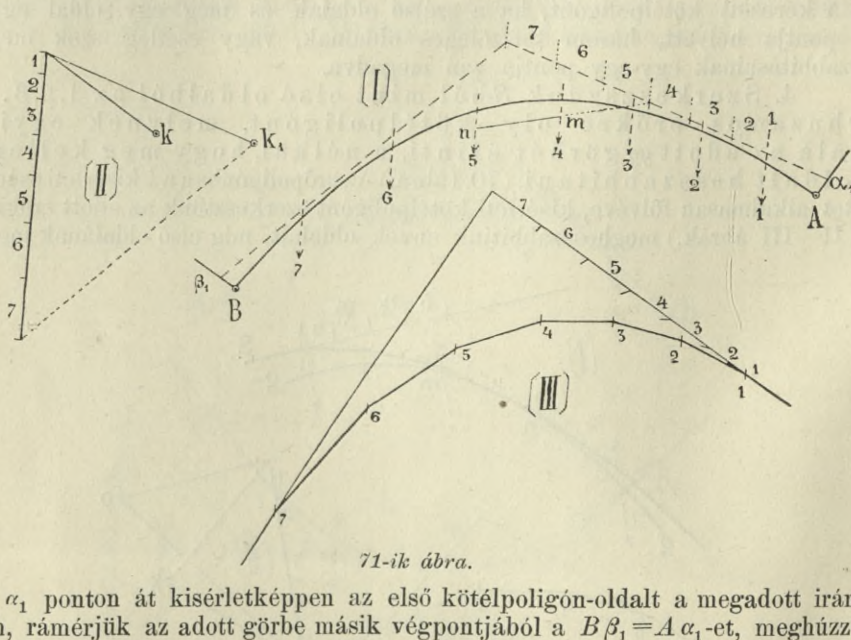
4. Szerkeszszünk $S$-ből mint első oldalból az 1, 2, 3... párhuzamos erőkre oly kötélpoligónt, melynek egyik oldala az adott $gg$ görbét érinti, a nélkül, hogy meg kellene ez oldalt hosszabbítani. (70. I ábra.) Az erőpoligónban a $k$ kisérleti csúcspontot alkalmasan fölvéve, kisérleti kötélpoligónt szerkesztünk az adott erőkre, (70. II—III ábrák,) meghosszabbítjuk ennek oldalait, míg első oldalának meg-




*70-ik ábra.*

hosszabbítását átmetszik, s miután a metszéspontokat, a megelőző pontokban többemlített módon, a rajtuk átmenő kötéloldalak számaival megjelöltük, átvetítjük őket a megszerkesztendő kötélpoligón első oldalára. Ezután megvizsgáljuk, hogy melyik az az $mn$ metszéspont, melyből oly érintőt lehet a $gg$ görbéhez húzni, melynek érintett pontja az $mn$ erők közé esik. (I. ábra.) Ez érintőnek az $mn$ erők közé eső szakasza, a keresett kötélpoligón $mn$ oldala; s ez oldal meghuzása után, vagy az erőpoligón kiegészitése és fölhasználása útján lehet a szóban forgó kötélpoligón többi oldalát megrajzolni, vagy az első oldal megnyujtásán talált többi metszéspont fölhasználásával; s az utóbbi esetben akképpen határozzuk meg utólag az erőpoligón $o$ csúcspontját, hogy tetszőleges két sugarát, — nagyobb pontosság végett legcélszerűbben a két szélsőt, — a megfelelő kötélszakaszokkal párhuzamosan húzzuk meg.

5. Szerkeszszünk az 1, 2, 3 .... párhuzamos erőkre oly kötélpoligónt, melyen az első oldal iránya meg van adva, s mely az adott $AB$ görbe vonal $A$ és $B$ pontjainak merőlegesein ugyanoly hosszúságokat vág le, mint a görbe ama harmadik pontja merőlegesén, melyen a harmadik legnagyobb eltérés mutatkozik a keresett kötélpoligón és a megadott görbe között. (71. I ábra). E föladat megoldására szintén mindenekelőtt kisérleti erő- és kötélpoligónt szerkesztünk, (II—III ábra,) meghosszabbitjuk e kötélpoligón egyes oldalait, míg az első oldal meghosszabbitását át nem metszik, meghúzzuk a talált metszéspontok vetitő egyeneseinek rövid szakaszait az adott $AB$ görbe közelében s megszámozzuk ezek közeit a többször említett módon. (I ábra.) Ezután fölveszszük




71-ik ábra.

az $\alpha_1$ ponton át kisérletképpen az első kötélpoligón-oldalt a megadott irányban, ráméıjük az adott görbe másik végpontjából a $B\beta_1 = A\alpha_1$-et, meghúzzuk a $\beta_1$ ponton át az $\alpha_1$-en át fölvett első kötélpoligón-oldalhoz tartozó $\beta_1$ utolsó oldalt, s megszerkesztjük, az erőpoligón szélső sugarai meghúzásával, a $k_1$ pontot, mely azonban még nem a végleges csúcspont. Ekkor meghúzzuk azt az $mn$ kötélszakaszt, melynél az eltérés a kötélpoligón és az $AB$ görbe között maximum, fölkeresve azt az $mn$ erőpoligón-sugarat, amelylyel párhuzamosan vont érintő az $AB$ görbét az $m$ és $n$ erők között érinti, s párhuzamosat húzva e sugárral, az első $\alpha_1$ kisérleti kötélpoligón-oldal $mn$ pontján át. Az ekképpen megrajzolt $mn$ oldal és az $AB$ görbe közötti eltérést általában nem találjuk egyenlőnek a görbe két végén fölvett $A\alpha_1 = B\beta_1$ eltéréssel. Rendesen ki kell tehát javítani az első $\alpha_1$ oldal fölvételét, még pedig akképp, hogy, ha kisebb az $mn$ kötélszakasz eltérése mint a szélső oldalaké, akkor az első oldal közelebb veendő föl a görbéhez, ha pedig nagyobb, akkor távolabb; e kisérletet addig kell ez alapon ismételni, míg oly kötéloldalt nem találunk az $m$ és $n$ erők között, melynek eltérése az $AB$ görbétől ugyanaz, mint a szélső oldalakon fölvett eltérés. Miután a keresett kötélpoligón két szélső, és $mn$ oldalát ekképpen megszerkesztettük, a többi oldalt, és az erőpoligónt, a megelőző pontokból ismert módon rajzoljuk meg.

# IV. FEJEZET.

# A térbeli erők összetétele és fölbontása.

## 17. §.

## Bevezető megjegyzések.

Amint a 22- és 23. §-okban mondandókból ki fog tünni, de az összetevők és az eredő közötti ismert hat alapegyenletből is önként következik, a térbeli erőket csak kivételesen lehet *egy* erővel mint eredővel pótolni, *kettővel* azonban mindenkor, még pedig végtelen sokféle módon. Két oly erőt, melyet együttvéve valamely erőrendszer eredőjének lehet ez értelemben tekinteni, két társerőnek nevezünk, s oly két társerővel is végtelen sokféle módon pótolhatunk a térben levő minden tetszőleges erőrendszert, melyek egyike erőpár.

Legyenek ugyanis $P_1$ $P_2$ . . . $P$ a térben működő tetszőleges erők, s $A$ a térben tetszőlegesen fölvett valamely pont. Vegyük föl az $A$ ponton a $P$ erővel egyenlő nagy, párhuzamos irányú, és egymáshoz képest ellenkező előjelű $\pm P$ erőket, s bontsuk föl ez úton a térben működő $P$ erőt az $A$ ponton működő $P$ erőre és $\pm P$ erőpárra. Ha a $P$ erőre épp mondottakat a térbeli erőrendszer valamennyi erőjére alkalmazzuk, akkor két erővel pótolhatjuk a szóban levő ez erőrendszert, t. i. az $A$ pontra áttett $P_1$ $P_2$ . . . erők $R$ eredőjével; és az áttétel folytán a különböző síkokban keletkező $\pm P_1$ $\pm P_2$ . . . erőpárok eredőjével. Ha más-más $A$ pontot választunk, s a mondottakat ismételjük, az erőpárbeli társerőnek mind a síkja, (végtelen távol egyenese,) mind a nagysága megváltozik, az $R$ társerőnek ellenben csak irányvonala változik meg, nagysága, iránya és értelme nem. Ez $R$ erőt a következőkben a központosított erők eredőjének fogjuk nevezni, s be fogjuk bizonyítani, (22. § 1,) hogy, ha valamely erőrendszer egyik társerője erőpár, a másik szükségképpen egyenlő a központosított erőrendszer eredőjével.

Egy erőből és egy erőpárból álló azt a két társerőt, melyek közül az erőpár merőleges az erőre, a centrális társerőknek nevezzük, s az e társerőkben szereplő nem végtelen távolságú $R$ erő irányvonalát az erőrendszer centrális tengelyének. A centrális tengely az imént mondottak következtében tehát párhuzamos a központosított erők eredőjével. Azt, ha *egy* erő képezi valamely erőrendszer eredőjét, oly külön esetnek lehet tekinteni, melyben az erőpárbeli társerő zérus.

Az eredő és az összetevők között fönnálló épp említett hat alapegyenletből az is önként következik továbbá, hogy valamely erőt általánosságban csak hat összetevőre lehet a térben, sztatikailag határozottan, fölbontani; kevesebbre mint hatra csak speciális esetekben; több mint hatra pedig, sztatikailag határozottan csak akkor, ha a fölbontásnak külön föltételei is vannak.

Bármily erőkből áll is egyébiránt valamely erőrendszer, mindig egy erő vagy esetleg két társerő összetevőinek tekinthetjük a benne szereplő erőket; s ugyanazok az erők, ha magukkal párhuzamosan más-más irányvonalakba helyezzük őket át, vagy ha bizonyos egyenesek körül forgatjuk, végtelen sokféle módon lehetnek ugyanannak az erőnek vagy ugyanama két társerőnek összetevői. Tegyük föl ugyanis először, hogy az egy $R$ erőből áll az erőrendszer eredője. Könnyen belátható hogy, ha az erőrendszert az $R$ eredővel párhuzamos irányban, tetszőleges távolságra eltoljuk, vagy ha tetszőleges szögben forgatjuk az erőrendszert az eredő körül, az erők az eltolás, vagy forgatás, vagy esetleg az eltolás és forgatás után is az előbbi $R$ erő összetevői. Az oly erőrendszert pedig, melyet nem lehet *egy* erővel pótolni, a centrális tengelylyel párhuzamosan lehet *eltolni*, vagy *forgatni* is lehet a centrális tengely körül, annélkül, hogy eredője megváltoznék, tekintve hogy, ha a centrális társerőket is forgatjuk a centrális tengely körül, vagy e tengelylyel párhuzamosan eltoljuk őket, ez erők egyáltalában nem változnak meg.

De más-más irányban, más-más távolságra is el lehet tolni valamely erőrendszer egyes erőit, bizonyos módon magukkal párhuzamosan, akár egy erőből, akár két társerőből áll eredőjük. El lehet ugyanis tolni minden tetszőleges erőrendszer tetszőleges két erőjét akképpen, hogy az áthelyezésből keletkező erőpárok párhuzamos síkokba essenek, egyenlő nagyok és ellenkező előjelűek legyenek, tehát kölcsönösen ellensúlyozzák egymást. Mert ha az erőrendszer tetszőleges két erőjét $P_1$ és $P_2$-vel jelöljük, s ha a $P_1$ irányvonalon át a $P_2$-vel párhuzamos $\mathfrak{P}_1$ síkot veszszük föl, s viszont a $P_2$ irányvonalon át a $P_1$-gyel párhuzamos irányú $\mathfrak{P}_2$ síkot, akkor a $\mathfrak{P}_1$ és $\mathfrak{P}_2$ síkok egymással is párhuzamosak, tekintve, hogy mindkettő párhuzamos mind a $P_1$ mind $P_2$ egyenessel. Ha most a $P_1$ erőt a $\mathfrak{P}_1$ síkban toljuk el, magával párhuzamosan, a tetszőleges $x_1$ távolságra, akkor el lehet tolni a $P_2$ erőt a $\mathfrak{P}_2$ síkban oly $x_2$ távolságra, hogy a két erő áthelyezéséből keletkező erőpárok nyomatékösszege $P_1x_1+P_2x_2=o$ legyen.

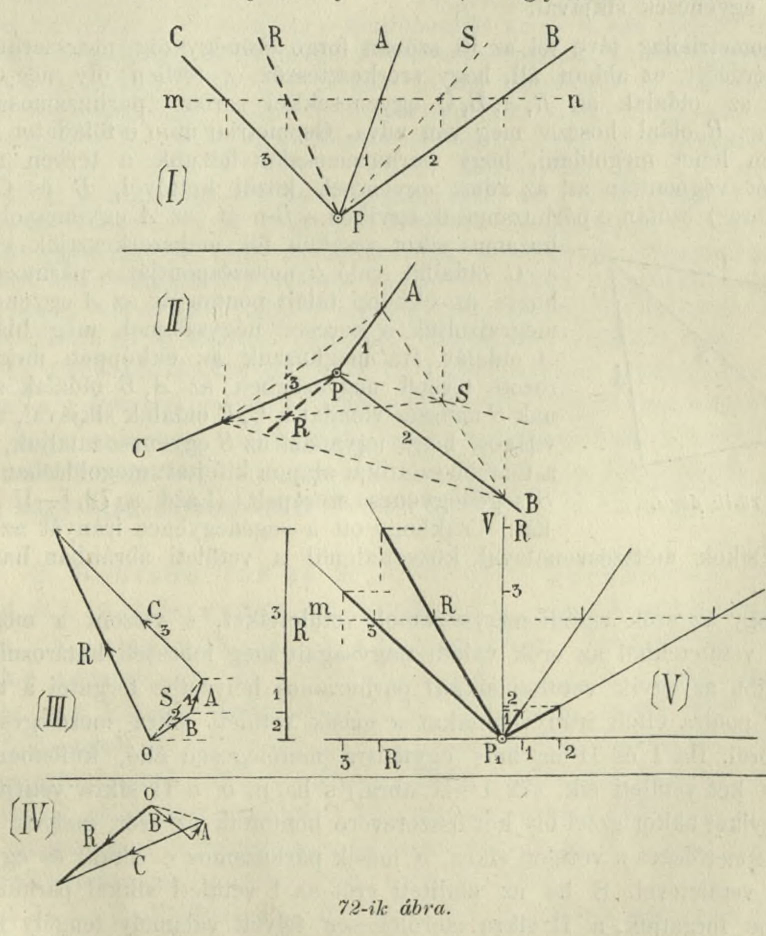
Megemlítendő még végre e helyen, hogy abban a speciális esetben, ha *három* összetevőre bontunk föl valamely erőt a térben, az összetevőknek mind nagysága, mind értelme csakis irányaiktól függ, s az irányvonalak viszonylagos helyzetétől egészen független, föltéve, hogy a fölbontás egyáltalában lehetséges. A térben megszerkeszthető azt az erőnégyszöget ugyanis, melyet valamely erő és ennek három összetevője képez, a négy oldal iránya és az egyik oldal nagysága teljesen meghatározza, amint ez a következő 18. § 3 végén mondandókból még világosabban ki fog tünni. Ha egyáltalában föl lehet bontani valamely erőt a térben három összetevőre, akkor az összetevők az imént mondottak következtében tehát ugyanoly nagyságúak és értelműek, mint ha ugyanabban a pontban metszenék a fölbontandó erőt.

18. §.

## A térbeli erők grafikai fölbontása.

Az alább következőkben az erők grafikai fölbontásának nehány fontosabb esetét fogjuk tárgyalni, párhuzamba állítva azokat a föladatokat, melyek geometriai tekintetben reciprocitásban vannak egymással. A mi az e föladatok megoldására szükséges erőpoligón-vetületek megszerkesztését illeti, ez iránt a 7. § 4-ban mondottakra utalunk.

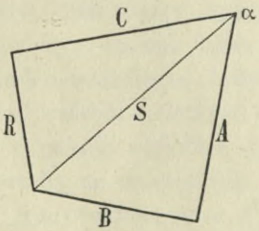
1. Bontsuk föl az $R$ erőt három oly $A, B, C$ összetevőre, melyek irányvonalai a nem végtelen távolságban fekvő $P$ pontban metszik az $R$ erőt, nem esnek ugyanabba a síkba, s oly helyzetűek, hogy összekötő síkjaik



72-ik ábra.

egyike sem megy át a fölbontandó erő irányvonalán. (72. I—II ábra.) (E föladatnak a reciprocitásban az előbbeni fejezetben már megoldott ama föladat felel meg, hogy bontassék föl az $R$ erő vele ugyanegy síkra eső oly három összetevőre, melyek irányvonalai nem mennek át ugyanazon a ponton, s melyek egyik metszéspontja sem esik az *R* egyenesre.) Fölbontjuk az *R* erőt előbb két oly összetevőre, melyek egyike a kijelölt összetevők egyikének, *C*-nek, irányvonalába esik, másika, *S*, pedig a másik két összetevő *A*,*B* síkjába; ezután fölbontjuk az *S* erőt az *A* és *B* összetevőkre. Ha e szerkesztést két merőleges vetületben hajtjuk végre, (72. III—IV ábra,) akkor az erők térbeli erőpoligónjának vetületeit (7. § 4,) és ezzel a keresett összetevők vetületeit kapjuk meg. Az *S* segédösszetevő irányvonalának megszerkesztésére a 72. I—II ábrákon az *A*, *B*, *C* egyeneseket az *mn* vízszintes síkkal metszettük, meghatároztuk az ekképpen keletkező háromélű piramison az *R* egyenes metszéspontját az alappal, s ennek segítségével a vízszintes vetületben az *R* és *C* egyenesek síkjának *S* metszésvonalát az *A* és *B* egyenesek síkjával.

Geometriailag téve föl az itt szóban forgó erőnégyszög megszerkesztésének kérdését, ez abban áll, hogy szerkesztessék a térben oly négyszög, melyen az oldalak az *R*, *A*, *B*, *C* egyenesekkel sorban párhuzamosak, s melyen az *R* oldal hossza meg van adva. Geometriai úton e föladatot tehát akképpen lehet megoldani, hogy párhuzamosakat húzunk a térben az *R* oldal két végpontján át, az adott egyenesek közül kettővel, *B* és *C*-vel; (73-ik ábra;) ezután e párhuzamosak egyikén a *B*-n át, az *A* egyenessel párhuzamos síkot veszünk föl, megszerkesztjük ennek a *C* oldallal való $\alpha$ metszéspontját, s párhuzamost húzva az ekképp talált ponton át az *A* egyenessel, megrajzoljuk a keresett négyszögnek még hiányzó *A* oldalát. Ha meghúzzuk az ekképpen meghatározott térbeli négyszögben az *A*, *B* oldalak síkjának *S* metszés vonalát a *C*, *R* oldalak síkjával, akkor világos, hogy ugyanazt az *S* egyenest találjuk, mely a föntebb sztatikai alapon kifejtett megoldásban mint *S* segédegyenes szerepelt. (Lásd a 72. I—II ábrákat.) Csakhogy ott a segédegyenes irányát az *A*, *B* és *C*, *R* síkok metszésvonalával, közvetetlenül a vetületi ábrákban határoztuk meg.



*73-ik ábra.*

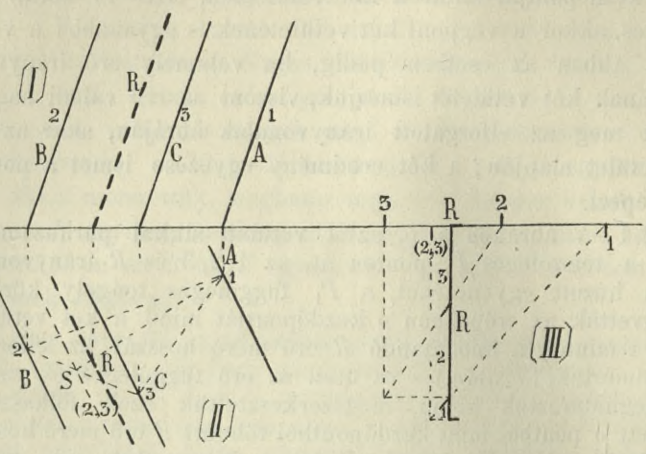
Hogy az erők valódi nagyságaiból vetületeiket, s viszont a megszerkesztett vetületekből az erők valódi nagyságait meg lehessen határozni, legegyszerűbb az egyik vetületi síkkal párhuzamos helyzetbe forgatni a tetszőleges *P* pontra eltolt irányvonalakat a másik vetületi síkra merőleges tengely körül. Ha I és II ugyanis egymásra merőlegesen álló, különben tetszőleges két vetületi sík, (72. I—II ábra,) s ha p. o. a II síkra vetítjük az erők egyikét akkor ezzel oly két összetevőre bontottuk ez erőt, melyek közül az egyik merőleges a vetületi síkra, a másik párhuzamos e síkkal és egyenlő az erő vetületével. S ha az említett erőt az I vetületi síkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk, a II síkra merőlegesen fölvett valamely tengely körül, (V ábra,) akkor ez összetevők vetületei valódi nagyságaikkal egyenlőek. Ha ismerjük valamely erő irányvonalát és mérő hosszát, (mint pl. a jelen esetben a fölbontandó *R* erőét,) akkor könnyen meghatározhatjuk tehát ez erő éppen említett két összetevőjét, és ebből ezután, az imént jelzett módon, az erő mindkét vetületének mérő hosszát, még pedig mindegyiket külön-külön, függetlenül a másiktól; s ha ugyanama vetitő sugáron veszszük föl az erőpoligón kezdőpontját mind a két vetületben, (III—IV ábra,) s ha pontos a szerkesztés, akkor a végpont két vetületének is ugyanabba a vetitő sugárba kell esnie. Abban az esetben pedig, ha valamely erő irányvonalának és mérő hosszának két vetületét ismerjük, viszont az erő valódi nagyságát szerkeszthetjük meg az elforgatott irányvonalak ábráján, akár az egyik, akár a másik vetület alapján; a két eredmény egyezése ismét a pontosság bizonyítékát képezi.

A 72. I—V ábrákon p. o. az I vetületi síkkal párhuzamos helyzetbe forgattuk, a tetszőleges $P_1$ ponton át, az 1, 2, 3 és $R$ irányvonalakkal párhuzamosan húzott egyeneseket, a $P_1$ függőleges tengely körül. (V ábra.) Ezután fölvettük az erőpoligón $o$ kezdőpontját mind a két vetületben (III—IV ábra), s miután a fölbontandó $R$ erő mérő hosszát az elforgatott irányvonalra fölmértük, (V ábra,) s ez úton az erő függőleges és vízszintes összetevőjét meghatároztuk volna, megszerkesztettük ezek fölhasználásával az épp említett $o$ pontból mint kezdőpontból fölmért $R$ erő mérő hosszának mindkét vetületét. (III—IV ábra.) Ezután fölbontottuk az erőt mindegyik vetületben külön-külön a $C$ és $S$ összetevőkre, az $S$ erőt pedig $A$ és $B$-re, utólagosan konstatálva az erőpoligón-vetületek sarokpontjain át húzott vetitősugarak egyezését is. Végre meghatároztuk e vetületek fölhasználásával a forgatott irányvonalakon a keresett összetevők valódi nagyságait, még pedig a pontosság ellenőrzése céljából mindegyiket mindegyik vetületből. A talált eredményeket az V ábrában vastagabb meghúzással jelöltük meg.

Az alább következőkben az erőket közvetetlenül vetületeikben fogjuk fölvenni s a keresett erőket is csak vetületeikben fogjuk meghatározni; az iránt, hogy miképpen szerkesztjük meg legegyszerűbben a vetületeket az adott mérő hosszakból, és viszont a megszerkesztett vetületekből az erők valódi nagyságát, egyszer és mindenkorra az imént mondottakra utalunk.

2. Bontsuk föl az $R$ erőt vele párhuzamos három oly $A, B, C$ összetevőre, melyek nem esnek ugyanabba a síkba, s amelyeknek irányvonalait összekötő síkok egyike sem megy át a fölbontandó $R$ erő irányvonalán. Hasonló utat követve, mint az előbbeni föladatban, ismét sikot veszünk föl a fölbontandó $R$ erő és az egyik összetevő $A$ irányvonalán át; (74. I—II ábra;) meghatározzuk ennek $S$ metszés vonalát a másik két összetevő síkjával, s fölbontjuk előbb $R$-et az $A$ és $S$ összetevőkre, ezután pedig $S$-et $B$ és $C$-re. Az $S$ metszésvonal megrajzolására legcélszerűbb az $A, B, C$ és $R$ egyenesek átdöféseit szerkeszteni meg az egyik vetületi síkkal.

A 74. I—II ábrákon az $A, B, C$ erőket 1, 2, 3 folyó számokkal is megjelöltük, az $S$ erőt pedig, mint a 2 és 3-mal számozott erők eredőjét, 2, 3-mal. Az $A, B, C, R$ egyenesek átdöfő pontjait a II vetületi síkkal szerkesztettük meg, s ez egyenesek betűivel és számaival jelöltük meg. Ami a keresett összetevők meghatározását illeti, az $S$ erő úgy viszonylik $A$-hoz, mint megfordítva az $S$ és $A$ átdöfő pontoknak az $R$ átdöfő ponttól mért távolságai. (II ábra.) A $B$ és $C$ összetevők, (vagyis a 2 és 3-mal számozott erők,) pedig úgy viszonylanak $S$-hez, (2, 3-hoz,) mint megfordítva a $B$ és $C$ átdöfő pontoknak az $S$ átdöfő ponttól mért távolságai. Az $A$ és $S$ összetevőket az $R$ erőből, s ezután a $B$ és $C$-ét az




*74-ik ábra.*

$S$-ből, tehát egészen a 12. §-ban az 53-ik ábra kapcsán előadott módon szerkeszthetjük meg. A III-as ábrára nézve, melyen a keresett összetevőket megszerkesztettük, ez okból csak annyit jegyzünk meg, hogy a fölbontandó $R$ erő mérő hosszát az $R$ függőlegesen mértük föl, az $R$ vizszintesen pedig előbb az 1 és a (2, 3) átdöfő pontok távolságát $R$-től, s ezután a 2 és 3-mal számozott egyenesek átdöfő pontjainak távolságát a (2, 3) átdöfő ponttól; a végpontokat sorban az irányvonalak folyó számaival jelöltük meg. A keresett összetevők mérő hosszait az $R$ függőlegesen különben az épp említett 53-ik ábrán mutatott vetités útján szerkesztettük meg, még pedig előbb az 1 és (2, 3) s ezután külön a 2 és 3-mal számozott mérő hosszakat.

Az alább következő föladatokat mind az imént tárgyalt kettőre fogjuk visszavinni, s ezért csak a legfőbb vonásokban fogjuk megoldásukat megmutatni, a szerkesztés végrehajtásának részleteit illetőleg, az imént mondottakra utalva.

3. Bontsuk föl az $R$ erőt három összetevőre, $A$, $B$, $C$-re, abban az esetben, ha ez összetevők $A$, $B$, $C$ irányvonalai közül az $A$ egyenes az $R$ egyenessel, a másik két egyenes pedig egymás között metsződik, és ha mind az $R$, $A$, mind a $B$, $C$ metszéspont az $R$, $A$ és a $B$, $C$ síkok $S$ metszésvonalába esik, a nélkül, hogy e metszésvonal az $A$, $B$, $C$, $R$ egyenesek egyikével összeesnék. Fölbontjuk az $R$ erőt előbb az $A$ és $S$ összetevőkre, ezután az $S$ erőt $B$ és $C$-re. Amint az épp mondottakból kitünik, e föladat önmagával van reciprocitásban. Látjuk továbbá, hogy az $A$, $B$, $C$ összetevők ugyanolyanok, mint ha a $B$ és $C$ egyenesek, irányuk megváltoztatása nélkül, szintén az $A$, $R$ metszésponton, vagy az

$S$ egyenes bármely más pontján mennének át. Hogy ez nemcsak a jelen esetben, hanem egészen általánosan, tehát akkor is áll, ha az összetevők sem egymás között, sem a fölbontandó $R$ erővel nem metsződnek, ezt föntebb a 73-ik ábra kapcsán előadottakkal már egész általánosan bebizonyítottuk, (tekintve, hogy az $R,A,B,C$ erőnégyszög az $R$ oldallal, és az $A,B,C$ oldalak *irányával* teljesen meg van határozva,) csak azt téve föl magától értődőleg, hogy egyáltalában föllehet bontani az $R$ erőt a kijelölt irányvonalú három összetevőre, mi az irányvonalak viszonylagos helyzetétől függ.

4. Bontsuk föl az $R$ erőt négy összetevőre, melyek irányvonalai oly helyzetűek:

*a1*. Hogy az $A$ és a $B$ egyenesek az $R$ egyenest ugyanama $P$ ponton metszik, a nélkül hogy $R$-rel ugyanabban a síkban lennének; a $C$ és a $D$ egyenesek pedig a P ponton átmenő síkban vannak, a nélkül azonban, hogy metszéspontjuk az $A,B$ síkba vagy az $R$ egyenesre esnék.

Összekötjük a $C,D$ metszéspontot a $P$ ponttal $S$ egyenes huzásával, és fölbontjuk az $R$-et $A,B$ és $S$-re és ezután az $S$-et $C$ és $D$-re.

*a2*. Hogy az $A$ és a $B$ egyenesek $R$-rel ugyanegy $\mathfrak{P}$ síkban vannak, a nélkül, hogy az $R$-et ugyanabban a pontban metszenék; a $C$ és a $D$ egyenesek pedig a $\mathfrak{P}$ síkban fekvő ponton metsződnek, a nélkül azonban, hogy síkjuk az $A,B$ ponton vagy az $R$ egyenesen menne át.

Megszerkesztjük a $C,D$ sík $S$ metszésvonalát a $\mathfrak{P}$ síkkal és fölbontjuk az $R$-et $A, B, S$-re, ezután $S$-et $C$-re és $D$-re.

Azoknak a külön eseteknek föltételeit, melyekben egy vagy több összetevő zérussá lesz, e föladatban rövidség végett nem emeltük ki, s az alábbkövetkező föladatokban sem fogjuk megemlíteni.

*b1*. Hogy az $A$ egyenes az $R$-et a $P$ pontban metszi és hogy a $B, C, D$ egyenesek az $A,R$ síkban levő $Q$ ponton mennek át, a nélkül, hogy az $A$ egyenesen metsződnének, s a nélkül, hogy egymás között ugyanabban a síkban lennének.

Összekötjük a $P$ pontot a $Q$ ponttal az $S$ egyenes által, s fölbontjuk az $R$ erőt $A$ és $S$-re, ezután az $S$-et $B, C$ és $D$-re.

*b2*. Hogy az $A$ egyenes az $R$-rel ugyanabban a $\mathfrak{P}$ síkban van, a $B, C, D$ egyenesek pedig az $A,R$ ponton átmenő $\mathfrak{Q}$ síkban vannak, a nélkül, hogy síkjuk az $A$ egyenesen menne át, és a nélkül, hogy mindhárman ugyanabban a pontban metsződnének.

Megszerkesztjük a $P$ sík $S$ metszésvonalát a $Q$ síkkal s fölbontjuk az $R$ erőt $A$-ra és $S$-re és az $S$-et $B, C$ és $D$-re.

*c*) Hogy egyrészt az $A$ és $B$, másrészt a $C$ és $D$ egyenesek egy-egy oly síkban vannak, mely az $R$ egyenest ugyanabban a $P$ pontban metszi, és hogy továbbá az $A,B$ és $C,D$ metszéspontok az $R$ egyenessel ugyanabban a síkban vannak.

E föladat a reciprocitásban önmagának felel meg. Megoldása abban áll, hogy meghatározzuk az $A,B$ és a $C,D$ síkok $P$ metszéspontját az $R$ egyenessel, összekötjük e pontot az $A,B$ és a $C,D$ metszéspontokkal az $S_1$ és $S_2$

egyenesek által, s fölbontjuk az $R$ erőt előbb $S_1$ és $S_2$-re és ezután $S_1$-et $A$ és $B$-re, $S_2$-őt pedig $C$ és $D$-re.

5. Bontsuk föl az $R$ erőt öt oly összetevőre, melyek $A, B, C, D, E$ irányvonalai közül:

*a1.* Az $A$ és $B$ irányvonalak ugyanabban a síkban vannak, a $C,D,E$ irányvonalak egy második, az előbbivel össze nem eső síkban. E két sík az $R$-et ugyan abban a $P$ pontban metszi. Az $A,B$ metszéspont nem esik az $R$ egyenesre; a $C,D,E$ egyenesek pedig nem mennek át ugyanegy ponton.

Összekötjük az $AB$ metszéspontot a $P$ ponttal az $S_1$ egyenes által, meghatározzuk az $S_1 R$ sík $S_2$ metszésvonalát a $C,D,E$ síkkal s fölbontjuk az $R$ erőt előbb $S_1$-re és $S_2$-re, s ezután $S_1$ et $A$ és $B$-re, az $S_2$-őt pedig $C,D$ és $E$-re. Ha az $R$ egyenesen megy át az $A,B$ sík, akkor meghatározzuk e sík $S_2$ metszésvonalát a $C,D,E$ síkkal és fölbontjuk az $R$ erőt $A,B$ és $S_2$-re, s ezután $S_2$-őt $C,D,E$-re.

*a2.* Az $A$ és $B$ irányvonalak ugyanazon a ponton mennek át, a $C,D,E$ irányvonalak egy másik ponton. E két pont ugyanabban a $\mathfrak{P}$ síkban van, melyben $R$. Az $A,B$ sík nem megy át az $R$ egyenesen; a $C, D, E$ egyenesek nincsenek ugyanegy síkban.

Megszerkesztjük az $A,B$ sík $S_1$ metszésvonalát a $\mathfrak{P}$ síkkal, összekötjük az $S_1 R$ metszéspontot a $C,D,E$ metszésponttal az $S_2$ egyenes által, s fölbontjuk az $R$ erőt előbb $S_1$-re és $S_2$-re, ezután $S_1$-et $A$ és $B$-re, az $S_2$-őt pedig $C,D$ és $E$-re. Ha az $A,B$ metszéspont az $R$ egyenesre esik, akkor összekötjük e pontot az $S_2$ egyenes által a $C,D,E$ metszésponttal, s fölbontjuk az $R$-et $A,B$ és $S_2$-re, ezután $S_2$-őt $C, D,E$-re.

*b1.* Az $A$ egyenes az $R$-et a $P$ pontban átmetszi; a $C$ és $B$, s másrészt a $D$ és $E$ egyensek pedig egy-egy oly síkban vannak, melyek mindegyike a $P$ ponton megy át. A $B,C$ és a $D,E$ metszéspontok nem esnek a $P$ pontra s nincsenek ugyanabban a síkban, mint $A$.

Összekötjük a $P$ pontot az $S_1$ és $S_2$ egyenesek által a $B,C$ és a $D,E$ metszéspontokkal, fölbontjuk az $R$-et $A,S_1,S_2$-re, ezután az $S_1$-et $B$ és $C$-re, az $S_2$-őt pedig $D$ és $E$-re.

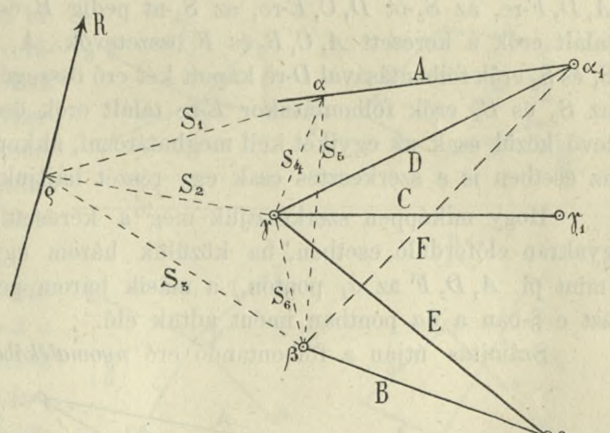
*b2.* Az $A$ egyenes az $R$-rel ugyanegy $\mathfrak{P}$ síkban van; a $B$ és $C$ és másrészt a $D$ és $E$ egyenesek pedig egy-egy oly pontban metsződnek, melyek mindegyike a síkba esik. A $B,C$ és a $D,E$ síkok nem esnek össze a $\mathfrak{P}$ síkkal és nem metszik az $A$ egyenest ugyanabban a pontban.

Meghatározzuk a $P$ sík $S_1$ és $S_2$ metszésvonalait a $B,C$ és a $D,E$ síkokkal, s fölbontjuk az $R$ erőt $A,S_1$ és $S_2$re, ezután $S_1$-et $B$-re és $C$-re, $S_2$-őt pedig $D$-re és $E$-re.

*6a.* Bontsuk föl az $R$ erőt hat oly összetevőre, $A$, $B, C, D, E, F$-re, melyek irányvonalai közül az $A, B, C$ egyenesek ugyanabban a $P$ pontban metsződnek, a $D, E, F$ egyenesek pedig ugyanegy $\mathfrak{Q}$ síkban vannak. A $\mathfrak{Q}$ sík nem megy át a $P$ ponton; az $R$ egyenes pedig sem a $P$ ponton nem megy át, sem a $Q$ síkba nem esik.

E föladat önmagával van reciprocitásban, s külön esetét az a föladat képezi, hogy bontassék föl az $R$ erő oly hat összetevőre, melyek irányvonalait tetszőleges oly tetraeder élei képezik, melynek egyik sarokpontja sem esik az $R$ egyenesre, s melynek egyik síkja sem megy át ez egyenesen. Megoldása abban áll, hogy fölbontjuk az $R$ erőt azon a ponton, hol a $\Omega$ síkot átdöfi, a $P$ ponton átmenő $S_1$ összetevőre, és a $\Omega$ síkra eső $S_2$ összetevőre, s ezután az $S_1$ erőt $A, B, C$-re, az $S_2$ erőt pedig $D, E, F$-re.

6*b*. **Bontsuk föl az $R$ erőt hat oly összetevőre, melyek irányvonalai csomópontokban metsződnek.** Valamely $R$ erő hat összetevőre bontását illetőleg, a térbeli rácsos tartók elméletében az az eset is fontos, ha a keresett összetevők irányvonalai ú. n. *csomópontokban* metsződnek. Jelöljük meg az ily rácsos tartón, hat rúdon át fölvett átmetszésben, $A, B, C$-vel az övek szilárdsági tengelyeit, (75-ik ábra,) $D$ és $E$-vel a $C$ öv $\gamma$ csomópontjából kiinduló két rácsrudat, $F$-fel pedig a $B$ öv $\beta$ csomópontját az $A$ öv $\alpha_1$ csomópontjával összekötő rácsrúd szilárdsági tengelyét. Az $R$ erőt ekkor akképpen lehet az $A, B, C, D, E, F$ összetevőkre fölbontani, ha úgy veszszük föl az $\alpha\beta\gamma\varrho$ tetraedert, hogy két csúcspontját a $\beta$ és $\gamma$ csomópontok képezzék, másik két csúcspontja közül az egyik az $R$ egyenesnek, a másik az $A$ egyenesnek tetszőleges pontja legyen. E tetraeder sarokpontjainak fölvétele után fölbontjuk az $R$ erőt a $\varrho$ ponton az $S_1, S_2, S_3$ összetevőkre. Ezután fölbontjuk az $S_1$ erőt az $\alpha$ ponton az $A, S_4, S_5$ összetevőkre, és folytatva a szerkesztést, a $\beta$ ponton az $S_5$ és $S_3$ erők eredőjét az $S_6$, $B$ és $F$ összetevőkre; végre a $\gamma$ ponton az $S_2$, $S_4$, $S_6$ erők eredőjét a $D$, $C$, $E$ összetevőkre.



*75-ik ábra.*

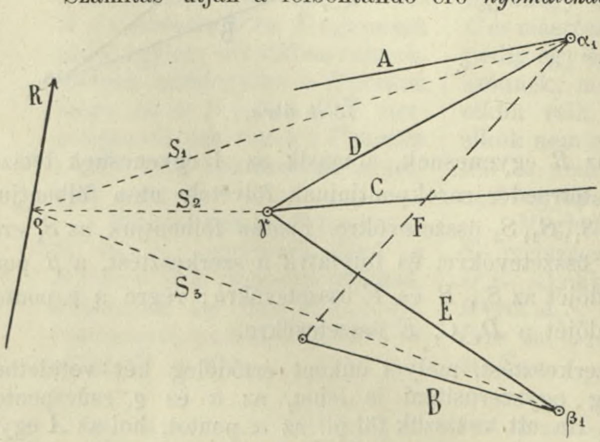
Az imént vázolt szerkesztést, melyet önként értődőleg két vetületben kell végrehajtani, esetleg egyszerűsíteni is lehet, az $\alpha$ és $\varrho$ csúcspontok alkalmas fölvétele útján. Ha ott veszszük föl pl. az $\alpha$ pontot, hol az $A$ egyenes a $\gamma R$ síkot átdöfi, akkor $S_3 = o$, (bárhol is van a $\varrho$ pont,) tekintve hogy $S_1$ és $S_2$ az $R$-rel ugyanegy síkba esik. Ha pedig ezenkivül a $\varrho$ pontot akképp határozzuk meg, hogy az $R$ egyenes és az $A, \beta$ sík átdöfő pontjára essék, akor $S_4$ is $= o$, minthogy ekkor $S_1, S_5$ és $A$ ugyanabban a síkban vannak. Ez esetben tehát úgy találjuk meg az $A$ erőt, ha $R$-et $S_1$ és $S_2$-re bontjuk, s ezután az $S_1$-et $S_5$ és $A$-ra; a $B$ és $F$ és a $C, D, E$ összetevők megszerkesztése pedig szintén egyszerűsbödik.

Kitetszik ezekből továbbá az is, hogy abban a gyakori esetben, ha a hat összetevő közül csak az egyik *övre* eső erőt keressük, ezt legelsőül lehet megszerkeszteni, a többinek meghatározása nélkül; ha pedig egyik *rácsrúdra* eső összetevő képezi a föladat tárgyát, akkor másodikul. Igy a 75-ik ábra esetében az erőt az $A$ övben legelsőül kapjuk meg, az $F$ rácsrúdban pedig $B$-vel egyidejűleg másodikul. Ha $\alpha$ helyett $\alpha_1$-ben, $\beta$ helyett $\beta_1$-ben, $\gamma$ helyett pedig a $C$ egyenes valamely más pontjában veszszük föl a tetraeder csúcspontjait, akkor legelőbb $C$-ben találjuk meg az erőt, s ezután $B$-vel egyidejűleg az $E$ rácsrúdban. Ha pedig a $B$ övön át más átmetszést veszünk föl, (de úgy, hogy ez is hat rudat vágjon át,) akkor a $B$ egyenesben lehet az összetevőt mint legelsőt megszerkeszteni stb.

Ugyane föladat más megoldása a következő. (76-ik ábra.) Megszerkesztjük a $B E$ sík $\varrho$ metszéspontját a fölbontandó $R$ erő irányvonalával, összekötjük e pontot a $\beta_1$, $\gamma$ és $\alpha_1$ pontokkal az $S_1$, $S_2$ és $S_3$ egyenesek által, fölbontjuk az $R$ erőt az $S_1$, $S_2$, $S_3$ összetevőkre, ezután a $S_1$ erőt $A, D, F$-re, az $S_2$-őt $D, C, E$-re, az $S_3$-at pedig $B$ és $E$-re. Az $A, B, C$ és $F$-re talált erők a keresett $A, C, B$ és $F$ összetevők. A $D$ összetevő egyenlő az $S_1$ és $S_2$ erők fölbontásával $D$-re kapott két erő összegével; az $E$ összetevő pedig az $S_2$ és $S_3$ erők fölbontásakor $E$-re talált erők összegével. Ha a hat összetevő közül csak az egyiket kell meghatározni, akkor magától értődőleg, ebben az esetben is a szerkesztés csak egy részét hajtjuk végre.

Hogy miképpen szerkesztjük meg a keresett hat összetevőt abban a gyakran előforduló esetben, ha közülük három ugyanazon ponton megy át, (mint pl. $A, D, F$ az $\alpha_1$ ponton,) a másik három pedig ugyanegy síkba esik, azt e §-ban a 6$a$ pontban imént adtuk elő.

Számítás útján a fölbontandó erő *nyomatékából* határozhatjuk meg legkönyebben a hat összetevő bármelyikét, föltéve, hogy ez összetevők csomópontokban metsződnek, amint azt e pont elején kifejtettük. Kifejezzük ugyanis az eredő és az összetevők közötti nyomaték egyenlőségét oly tengelyre, mely a hat összetevő közül ötnek irányvonalát metszi, melyre tehát a fölbontandó erőn kivül csak a keresett összetevőnek van nyomatéka. Az övek egyes szakaszaira nézve sorban az egyes rácsrúdak szilárdsági tengelyei képeznek ily egyeneseket, pl. a $B$ szakaszra nézve a $D$ egyenes.



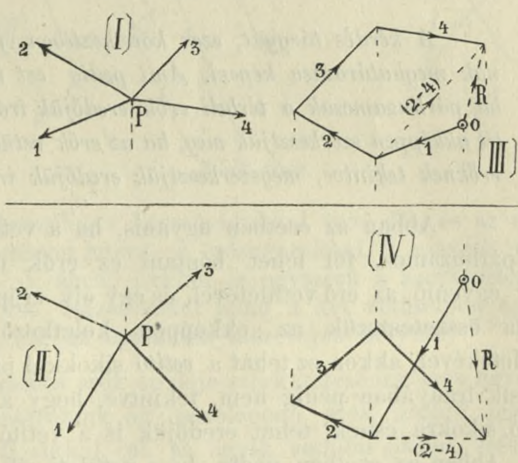
*76-ik ábra.*

(76-ik ábra.) A tetszőleges $E$ rácsrúdra nézve pedig akképpen találunk ily tengelyt, ha fölkeressük azt az $\alpha_1$ csomópontot, melyen az $E$-vel ugyan abban az átmetszésben szereplő másik két $D$ és $F$ rácsrúd és az egyik övnek egyik szakasza metsződnek, s oly egyenest szerkesztünk e csomóponton át, mely az ugyanebben az átmetszésben szereplő másik két öv szilárdsági tengelyeit, $C$ és $B$-ét, metszi. S ha általában X a keresett összetevő, $q$ az X egyenes távolsága az X-re nézve az imént leírt módon meghatározott tengelytől, s $\mathfrak{N}$ a fölbontandó erő- vagy erőknek e tengelyre számított nyomatéka, akkor $X = \mathfrak{N} : q$ és az X erő úgy forgat a többször említett tengely körül, mint a fölbontandó erő vagy erők.

## 19. §.

## Ugyanazon, (véges távolságú,) ponton átmenő térbeli erők összetétele.

Ha mind ugyanazon, nem végtelen távolságú $P$ ponton mennek át az összeteendő erők irányvonalai, (77. I—II. ábra,) akkor úgy találjuk meg a magával párhuzamosan eltolt eredőjük tetszőleges vetületét, a 7. § 4-ban előadottak következtében, hogy megszerkesztjük az erővetületek eredőjét úgy, mintha ez erővetületek a vetületi síkban működő erők lennének.



77-ik ábra.

*Ha két síkra vetítjük az erőket, s mind a két vetületre alkalmazzuk az imént mondottakat, akkor a két erőpoligónban a párhuzamosan eltolt eredőjük két vetületét kapjuk meg, még pedig akár valamennyi, akár tetszőleges számú közvetetlenül egymásután következő erőre. Ami pedig a szóban levő vég- vagy részeredő irányvonalát illeti, ezt akképpen szerkesztjük meg mind a két vetületben, hogy az eltolt helyzetben már megtalált eredővel az összeteendő erők P metszéspontján át párhuzamosat vonunk. Ugyanazon, véges távolságú ponton átmenő erők akkor vannak egyensúlyban, ha térbeli erőpoligónjuk záródik, tehát akkor, ha az erővetületek erőpoligónja, tetszőleges két vetületre nézve megszerkesztve, mind a két vetületre záródik.*

A 77. I—II ábrákon két vetületben látható erőkre a III—IV ábrákon szerkesztettük meg az erőpoligón vetületeit. A párhuzamosan eltolt végeredő két vetületét az $R$ sugár, a 2—4-gyel számozott erők eredőjét pl. a 2—4 átló adja meg; mind e két eredő irányvonala a $P$ ponton megy át. Egyensúlyban levő erőrendszer akkor keletkezik, ha az 1—4-gyel számozott erőkhöz a közös $P$ pontjukon átmenő oly 5-ik erőt veszünk föl, mely az 1—4 erők $R$ eredőjével párhuzamos, egyenlő nagy és ellenkező előjelű. Az ekképpen kiegészített erőrendszer poligónja, mint látjuk, mind a két vetületben záródik.

## 20. §.

## A párhuzamos erők összetétele a térben.

***1. A térben működő párhuzamos erők eredője.*** A magukkal párhuzamosan eltolt erőket egészen azon a módon tehetjük össze, mint a megelőző §-ban láttuk, s csak az jegyzendő meg e tekintetben, hogy az erőpoligónból az erők *összetételi egyenese* lesz, — hasonlólag mint a síkbeli párhuzamos erők összetételekor, — s hogy ezt nemcsak vetületben lehet megrajzolni, hanem önként értődőleg valódi nagyságban is, tekintve hogy a vetületi síkot az erőkkel párhuzamosan vehetjük föl, s ezután esetleg bármely más vetületi síkra ráforgathatjuk.

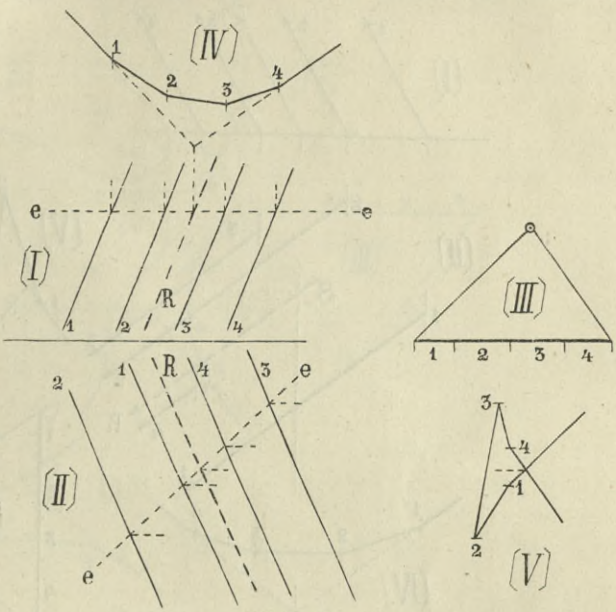
*A kérdés tárgyát, ezek következtében, főképpen az eredő irányvonalának meghatározása képezi. Ami pedig ezt illeti, könnyen belátható, hogy, ha párhuzamosak a térbeli erők, eredőjük irányvonalának tetszőleges vetületét akképpen szerkesztjük meg, ha az erők vetületeit a vetületi síkban működő erőknek tekintve, megszerkesztjük eredőjük irányvonalát.*

Abban az esetben ugyanis, ha a vetületi sík az összeteendő erőkkel párhuzamos, föl lehet bontani ez erők mindegyikét egy oly erőre, mely egyenlő az erő vetületével, és egy oly erőpárra, mely a *vetítő* síkra esik. S ha összeteszszük az ekképpen keletkező erőpárok eredőjét az erővetületekével, akkor ez tehát a *vetítő* síkokkal párhuzamosan tolódik el, a *vetületi* sík irányában pedig nem, tekintve, hogy a szóban forgó erőpárok mind *vetítő* síkokra esnek, tehát eredőjük is a vetítő síkokkal párhuzamos.

Abban az esetben pedig, ha a vetületi sík nem párhuzamos az erőkkel, az egyes erőket addig lehet forgatni, tetszőleges pontjaik körül, vetítő síkjaikban, míg a vetületi síkkal párhuzamos helyzetbe nem jutnak, a nélkül, hogy irányvonalaiknak vetületei megváltoznának. S minthogy ez alatt valamennyi erő ugyanama szöggel fordul el, a vetítő síkokkal párhuzamos irányban, eredőjük is *vetítő* síkban fordul el, (még pedig ugyanavval a szöggel, melylyel a forgatott erők, és ama pont körül, mely annak az erőrendszernek súlypontja, melyet a szóban levő erők, és forgó pontjaik határoznak meg), tehát úgy, hogy irányvonalának vetülete szintén meg nem változik forgás közben.

Hogy ne kelljen az erővetületek eredőjének meghatározása végett a két vetületi síkban külön-külön erőpoligónt rajzolni, legcélszerűbben úgy rendezzük a szerkesztést, hogy átmetszszük az erőket mind a két vetületben egy-

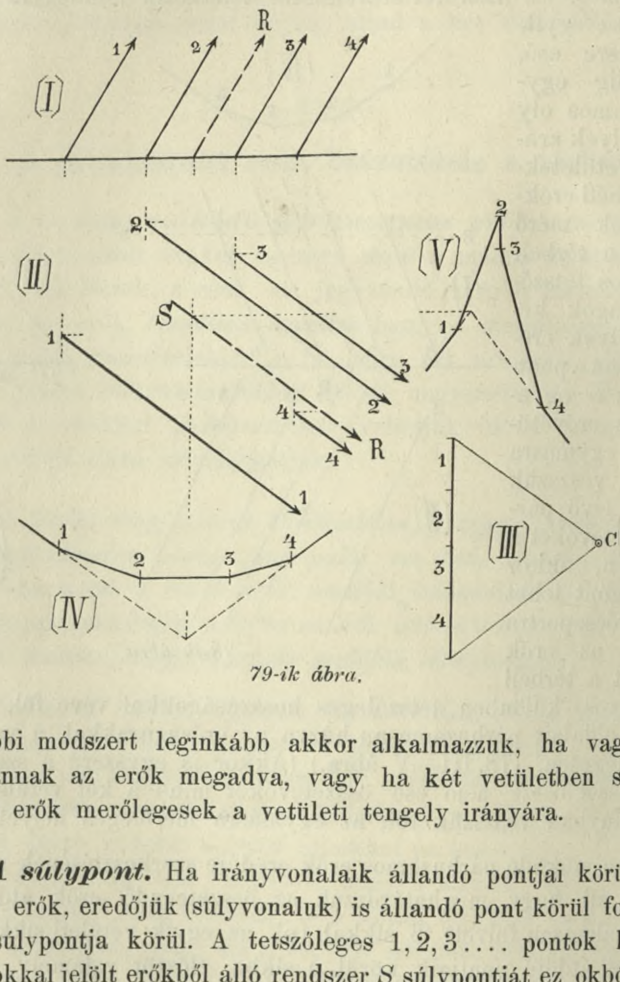
egy alkalmasan fölvett *ee* egyenessel, (78. I—II ábra,) s két-két oly összetevőre bontva képzeljük az erővetületek mindegyikét, melyek közül az egyik az *ee* egyenesre esik, a másik pedig valamely alkalmasan fölvett más egyenessel párhuzamos. Ez uton két erőrendszer keletkezik mindegyik vetületben, melyek közül az egyik az *ee* egyenesre eső, a másik pedig egymással párhuzamos oly erőkből áll, melyek arányosak az erővetületekkel, tehát a térbeli erőkkel is, melyek mérő hosszait tehát a térbeli erőkkel arányos tetszőleges hosszúságok képezhetik, s melyek eredője ugyanabban a pontban metszi az *ee* egyenest, mint az erővetületeké. Ha egymásra merőlegesen veszszük föl a szóban levő párhuzamos összetevőket a két vetületben, akkor közös erőpoligónt lehet tehát e két erőcsoportra szerkeszteni, az erők mérő hosszait a térbeli erőkkel arányos, különben tetszőleges hosszúságokkal véve föl, és az egyik kötélpoligón oldalait párhuzamosan húzva az erősugarakkal, a másikét pedig ezekre merőlegesen. (78. III—V ábra.) (Akkor is egyszerű a szerkesztés, ha az *ee* egyenessel össze nem eső összetevőket mind a két vetületben ugyanabban az irányban veszszük föl, az egymásra merőleges helyett.)



*78-ik ábra.*

A térben működő párhuzamos erők eredője szerkesztésének más egyszerű módja abból áll, hogy meghatározzuk az összeteendő erők átdöfő pontjait valamely alkalmasan fölvett 𝔓 síkkal, (pl. az egyik vetületi síkkal,) leforgatjuk az erőket átdöfő pontjaik körül e síkba, először valamely tetszőlegesen fölvett irányba, ezután még egyszer, valamely más, szintén tetszőleges irányba, s megszerkesztjük mind a két leforgatott erőrendszer eredőjét. E két eredő metszéspontja ugyanis a térbeli erők eredőjének a fölvett 𝔓 síkkal való átdöfő pontja, (79-ik ábra,) tekintve hogy a térbeli erők forgatása közben eredőjük ama rendszer *S* súlypontja körül forog, melyet az erők és átdöfő pontjaik határoznak meg, tehát ama pont körül, melyben az eredő a 𝔓 síkot átdöfi.

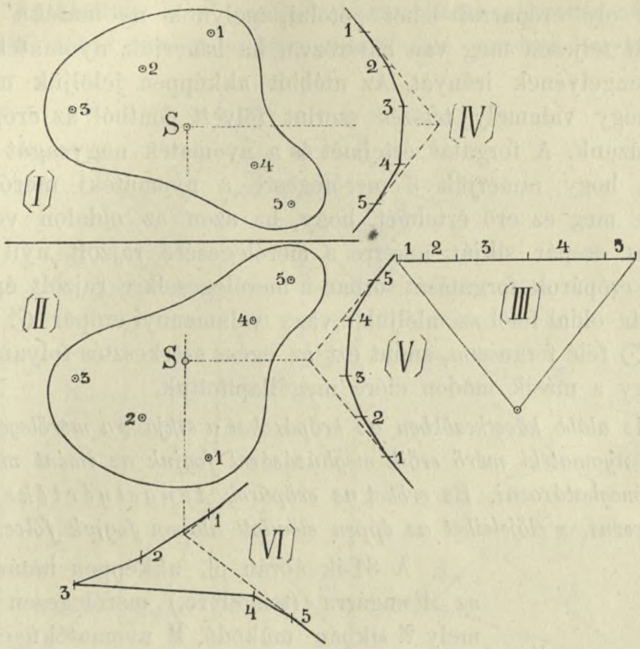
Legegyszerűbb ha az egyik vetületi síkba forgatjuk le az összeteendő erőket, átdöfő pontjaik körül, még pedig egymásra merőlegesen fölvett, különben tetszőleges két irányba. (II—V ábrák.) Ez esetben ugyanis ugyanazzal az erőpoligónnal lehet mind a két kötélpoligónt megrajzolni. Az erőpoligónt pedig akár a térbeli erők valódi nagysága alapján, akár velük arányos bármely hosszúságokból, esetleg tehát az erők vetületeiből is meg lehet szerkeszteni.




79-ik ábra.

Ez utóbbi módszert leginkább akkor alkalmazzuk, ha vagy csak egy vetületben vannak az erők megadva, vagy ha két vetületben szerkesztünk ugyan, de az erők merőlegesek a vetületi tengely irányára.

*2. A súlypont.* Ha irányvonalaik állandó pontjai körül forognak a párhuzamos erők, eredőjük (súlyvonaluk) is állandó pont körül forog, t. i. az erőrendszer súlypontja körül. A tetszőleges 1, 2, 3.... pontok körül forgó, hasonló számokkal jelölt erőkből álló rendszer $S$ súlypontját ez okból akképpen találjuk meg, (80.I—II ábra,) ha két fölvételt téve ez erők irányára, két súlyvonalukat rajzoljuk meg; a két súlyvonal metszéspontja a súlypont. A súlyvonalat az erők irányának mindegyik fölvételére egészen a megelőző pontban mondottak szerint lehet megszerkeszteni; csak azt jegyezzük tehát meg erre nézve, hogy legcélszerűbb, ha úgy rendezzük a szerkesztést, hogy először a vetületi tengelylyel párhuzamosan, ezután erre merőlegesen veszszük föl az erőket; megszerkesztjük, két kötélpoligón segitségével, a vetületi tengelylyel párhuzamos súlyvonal mindkét vetületét, (III—V ábra,) s egy harmadik kötélpoligónnal a vetületi tengelyre merőleges súlyvonal egyik vetületét. (VI ábra.) Az a két pont, melyen ez utóbbi a vetületi tengelylyel párhuzamos súlyvonal két vetületét átmetszi, a szóban levő erők $S$ súlypontjának két vetülete. Magától értődik, hogy mind a három kötélpoligónt ugyanazzal az erőpoligónnal (III ábra) meg lehet rajzolni.




*80-ik ábra.*

Testek súlypontját ugyane módon meg lehet szerkeszteni, ha a testet alkalmasan fölvett síkokkal vagy egyéb válaszfölületekkel oly részekre osztjuk, melyek súlypontjait és térfogatait ismerjük, s ha a beosztásból származó egyes testek térfogatait, e testek súlypontjai körül forgó párhuzamos erőknek tekintve, rájuk az imént mondottakat alkalmazzuk.

Abban az esetben, ha valamennyi erő támadó pontja ugyanazon a síkon van, e síkra esik a súlypont is. Minthogy pedig a támadó pontok síkját rendesen vetületi síknak lehet fölvenni, többnyire akképpen határozhatjuk meg ez esetben a súlypontot legegyszerűbben, ha a vetületi síkba forgatjuk le az erőket, először egy bizonyos és azután valamely más irányba, s ha megszerkesztjük mind a két irányra a kötélpoligónt, s ennek segítségével a súlyvonalat, úgy mintha az erők a vetületi síkban működnének. A két súlyvonal metszéspontja az erőrendszer súlypontja. E módszert leggyakrabban a sík ábrák súlypontjának megszerkesztésére alkalmazzuk. (Lásd 27. §.)

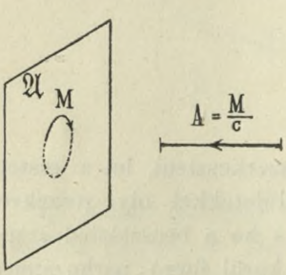
21. §.

## A térbeli erőpárok összetétele és fölbontása.

***1. Az erőpárok geometriai meghatározása.*** Tekintve, hogy az erőpár nyomatéka, síkjára merőlegesen fölvett minden tengelyre ugyanaz;

s tekintve hogy, ha valamely erőpár nyomatéka $\mathbf{M}$, ez erőpárt akár ugyanabban a síkban, akár vele párhuzamosan fölvett bármely más síkra eső bármely más oly erőpárral lehet pótolni, melynek nyomatéka szintén $\mathbf{M}$: minden erőpár teljesen meg van határozva, ha ismerjük nyomatékát, forgató értelmét és tengelyének irányát. Az utóbbit akképpen jelöljük meg a szerkesztésben, hogy valamely tetszés szerint fölvett pontból az erőpár sikjára merőlegest húzunk. A forgatás értelmét és a nyomaték nagyságát pedig úgy tüntetjük ki, hogy ráмérjük e merőlegesre a nyomatéki mérő erőt, oly nyillal jelölve meg ez erő értelmét, hogy, ha azon az oldalon veszszük föl minden egyes erőpár síkját, amerre a merőlegesére rajzolt nyil mutat, és ha az egyes erőpárok forgatását sorban a merőlegeseikre rajzolt épp említett nyilak mutatta oldal felől szemléljük: vagy valamennyi erőpár ↺ felé, vagy valamennyi ↻ felé forgasson, amint ezt az egész szerkesztés folyamára nézve, az egyik vagy a másik módon előre megállapítottuk.

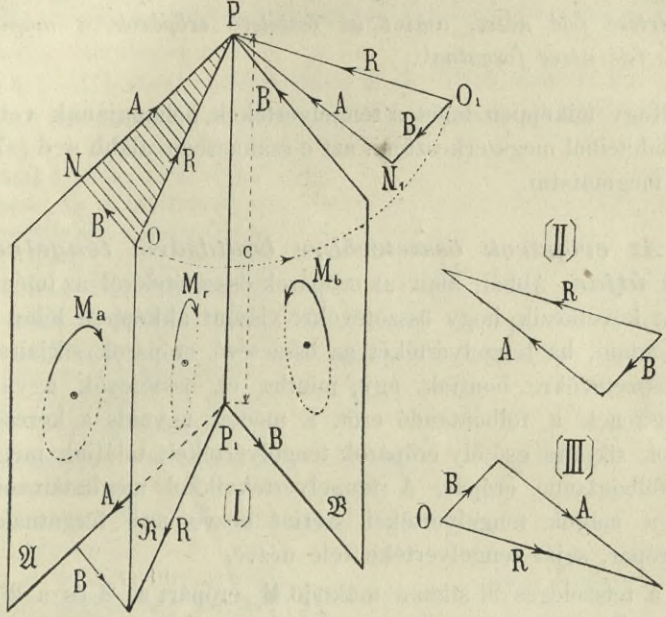
*Az alább következőkben az erőpárokat a síkjaikra merőleges irányban fölmért nyomatéki mérő erőik meghúzásával fogjuk az imént mondottaknál fogva meghatározni. Ez erőket az erőpárok* t e n g e l y é r t é k e i n e k *fogjuk nevezni, s előjeleiket az éppen előadott alapon fogjuk fölvenni.*




*81-ik ábra.*

A 81-ik ábrán pl. akképpen határoztuk meg az $A$ sugárra (tengelyre,) merőlegesen álló valamely 𝔄 síkban működő, $\mathbf{M}$ nyomatékú erőpárt, a $c$ alapra vonatkozó $A = \mathbf{M}:c$ tengelyértékével, hogy az erőpár, az $A$ nyil felé nézve ↺ felé forgat.

**2. *Az erőpárok tengelyértékeinek erőpoligónja.*** Határozzuk meg először két erőpár eredőjét, s jelöljük meg e célból az összeteendő erőpárok síkjait 𝔄-val és 𝔅-vel, nyomatékait sorban $\mathbf{M}_a$ és $\mathbf{M}_b$ -vel, ezek mérő erőit pedig $c$-re, mint alapra nézve, $A$- és $B$-vel. (82-ik ábra.) Ha ráмérjük a szóban forgó két erőpár síkjának metszésvonalára, a tetszőleges $P$ ponttól, a $PP_1 = c$ nyomatéki alaphosszúságot, akkor ez erőpárokat az 𝔄 és 𝔅 síkokban a $P$ és $P_1$ pontokon át működő és a $PP_1$ egyenesre merőlegesen álló $\pm A$ és $\pm B$ erőkből képezhetjük. Ha meghatározzuk az $A$ és $B$ erők $R$ eredőjét mind a $P$ mind a $P_1$ ponton, akkor az ekképpen talált $\pm R$ erők az eredő erőpárt adják meg, s minthogy az $R$ erők is merőlegesek a $PP_1$ egyenesre: az $R$ erő az eredő erőpár $\mathbf{M}_r$ nyomatékának mérő erője ugyanama $c$ alapra nézve, melyre az $A$ és $B$ erők az $\mathbf{M}_a$ és $\mathbf{M}_b$ nyomatékok mérő erői. Fordítsuk most a $P$ ponton szerkesztett $A,B,R$ erőháromszöget a $PP_1$ egyenes körül $90^0$-os szöggel félre, és ezután toljuk el e háromszöget magával párhuzamosan, a térben tetszőlegesen fölvett $O$ pontig. (82. I—II ábra.) Világos, hogy az ekképpen forgatott és eltolt erőháromszög $A,B$ és $R$ oldalai sorban merőlegesek az $\mathbf{M}_a$, $\mathbf{M}_b$ és $\mathbf{M}_r$ erőpárok síkjaira, valamint azt is könnyen be lehet látni, hogy, ha az elforgatott és eltolt $A, B$ és $R$ erők nyilai szerint szemléljük az $\mathbf{M}_a$, $\mathbf{M}_b$ és $\mathbf{M}_r$ erőpárokat: vagy mind a három ↻ felé, vagy mind a három ↺ felé forgatónak látszik, a szerint, hogy merre felé fordítottuk a $P$ pontból megszerkesztett erőháromszöget a $PP_1$ tengely körül, tehát a szerint, hogy merre felé soroltuk egymás mellé az




*82-ik ábra.*

elfordított és eltolt erőháromszögben az egyes erőket. (Mert ha valamely erőt 180°-os szöggel fordítunk el, akkor értelme éppen ellenkezővé változik). A $P$ pontról a 82. II ábrára eltolt és elfordított erőháromszög erőinek $A, B$ és $R$ nyilai szerint nézve pl. az $\mathbf{M}_a$, $\mathbf{M}_b$ és $\mathbf{M}_r$ erőpárok forgatása ↻ felé irányulónak látszik. Ha a másik oldal felé fordítjuk el a $P$ pontból szerkesztett $A, B, R$ erőháromszöget, a $PP_1$ egyenes körül, 90°-os szöggel, s az így kapott három szöget toljuk magával párhuzamosan félre, (82. III ábra,) akkor az egyes erőpárok, a mérő erőikre rajzolt nyilak felé nézve, ↺ felé forgatnak.

A mint ezekből kitetszik, a térben működő tetszőleges két erőpár eredőjének tengelyértékét úgy találjuk meg, ha akképpen szerkesztjük meg az összeteendő erőpárok tengelyértékeinek eredőjét, mintha e tengelyértékek a térben fölvett valamely ponton átmenő erők volnának.

Ha több mint két erőpár teendő össze, akkor előbb két erőpár eredőjének $R_{12}$ tengelyértékét szerkesztjük meg az imént előadott módon. Ez megtörténvén, eredőjével pótolhatjuk e két erőpárt, és összetehetjük az $R_{12}$ tengelyértéket egy harmadik erőpár $R_3$ tengelyértékével, s így folytathatjuk a szerkesztést, míg valamennyi erőpár eredőjének tengelyértékét meg nem találtuk.

*Akképpen határozzuk tehát meg a térben működő tetszőleges számú erőpár eredőjének tengelyértékét, hogy úgy szerkesztjük meg az összeteendő erőpárok tengelyértékeinek eredőjét, mintha e tengelyértékek ugyanazon a ponton átmenő térbeli erők volnának. Az összeteendő erőpárok tengelyértékeinek ez eredője az eredő erőpár tengelyértéke, s az eredő erőpár úgy forgat, saját tengelyértéke felé nézve, amint az összetevő erőpárok, a maguk tengelyértékeik felé nézve forgatnak.*

Hogy miképpen lehet a tengelyértékek poligónjának vetületeit az erőpárok vetületeiből megszerkeszteni, azt e szakaszban alább a 6—7-ik pontban fogjuk megmutatni.

**3. *Az erőpárok összetevőkre bontásáról tengelyértékeik fölbontása útján.*** Abból, amit az erőpárok összetételéről az imént mondottunk, önként következik, hogy összetevőkre viszont akképpen lehet valamely erőpárt fölbontani, ha tengelyértékét az összetevő erőpárok síkjaira merőlegesen álló összetevőkre bontjuk, úgy, mintha ez összetevők ugyanabban a pontban metszenék a fölbontandó erőt. E módon ugyanis a keresett összetevő erőpárok síkjaira eső oly erőpárok tengelyértékeit találjuk meg, melyek eredője a fölbontandó erőpár. A tengelyértékeikkel meghatározott erőpár-összetevők, a maguk tengelyértékei szerint nézve, úgy forgatnak, mint a fölbontott erőpár, saját tengelyértéke felé nézve.

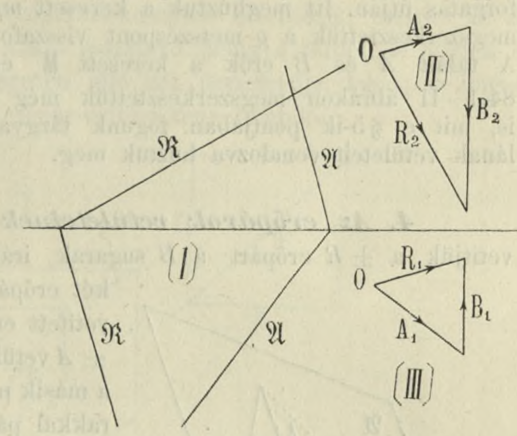
Hogy a tetszőleges $\mathfrak{N}$ síkban működő $\mathbf{M}_r$ erőpárt az $\mathfrak{A}$ és a $\mathfrak{B}$ síkokban működő $\mathbf{M}_a$ és $\mathbf{M}_b$ összetevőkre föl lehessen bontani, az szükséges, hogy, ha ugyanazon ponton át merőlegeseket húzunk az $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ síkokra,. e merőlegesek ugyanabba a síkba essenek; mert csak akkor lehet a térben oly erőháromszöget szerkeszteni, melynek oldalai sorban merőlegesek az $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ síkokra.

Két összetevőre tehát csak akkor lehet valamely erőpárt fölbontani, ha az összetevő erőpárok síkjai a fölbontandó erőpár síkjával párhuzamos egyenesben metsződnek, önmagukkal párhuzamosan eltolva tehát a fölbontandó erőpár síkját ugyanabban az egyenesben metszik. Három összetevőre ellenben mindig föl lehet bontani minden erőpárt, bármilyen is a keresett összetevő erőpárok síkjainak viszonylagos helyzete egymáshoz és a fölbontandó erőpár síkjához képest. Több mint három összetevőre, ha a föloszlás nincsen külön föltételekhez kötve, végtelen sokféle módon lehet minden erőpárt bontani.

Föl lehet bontani továbbá minden erőpárt két oly összetevőre is, melyek egyike valamely megadott $\mathfrak{A}$ síkkal, másika valamely szintén megadott $R$ egyenessel párhuzamos síkra esik. Mert a fölbontandó erőpár síkja és az $\mathfrak{A}$ sík közötti metszésvonalon át mindig lehet az $R$ egyenessel párhuzamos síkot fölvenni.

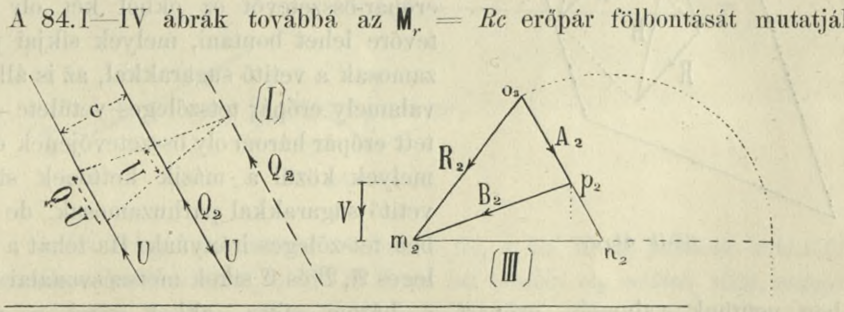
Más esetekben akképpen kell valamely $\mathbf{M}_r$ erőpárt két összetevőre bontani, hogy az egyiknek síkja párhuzamos legyen valamely megadott $Q$ egyenessel, a másiké pedig merőlegesen álljon ez egyenesre. A keresett összetevők tengelyértékei ez esetben merőlegesek egymásra, mivelhogy síkjaik szintén merőlegesek egymáshoz képest. Az összetevők tengelyértékeit ezért igen egyszerűen, akképpen szerkesztjük meg, hogy oly két összetevőre bontjuk az adott $\mathsf{M}_r$ erőpár tengelyértékét, melyek egyike párhuzamos az $R$ egyenessel, másika pedig merőleges erre.

A 83. I—III ábrák példaképpen az $\mathfrak{R}$ síkban működő $\mathsf{M}_r = Rc$ nyomatékú erőpár fölbontását mutatják két oly erőpárra, melyek közül az egyiknek $\mathfrak{B}$ síkja a vetületi tengelylyel, a másiké pedig az $\mathfrak{A}$ síkkal párhuzamos. Az $R$ mérő erőt az $\mathfrak{R}$ síkra merőleges erőnek tekintettük, ($R_1$ és $R_2$ vetületei tehát merőlegesek az $\mathfrak{R}$ sík nyomaira,) s fölbontottuk a vetületi tengely irányára merőleges $B$ és az $\mathfrak{A}$ síkra merőleges $A$ összetevőkre: az $A$ erő vetületeit az $\mathfrak{A}$ sík nyomaira, a $B$ erőét pedig a vetületi tengelyre merőlegesen húzva. A talált $A$ és $B$ összetevők a keresett $\mathsf{M}_a$ és $\mathsf{M}_b$ erőpárok tengelyértékei, s ez erőpárok, az $A$ és $B$ erőkre rajzolt nyilak felé nézve, úgy forgatnak, mint a fölbontott $\mathsf{M}_r$ erőpár az $R$ nyíl felé nézve.




*83-ik ábra.*

A 84. I—IV ábrák továbbá az $\mathsf{M}_r = Rc$ erőpár fölbontását mutatják

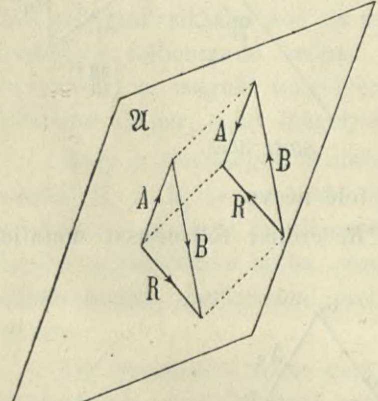



*84-ik ábra.*

egy oly $\mathsf{M}_a = Ac$ erőpárra, melynek síkja merőleges az adott $Q$ erőre, és egy másik $\mathsf{M}_b = Bc$ erőpárra, melynek síkja párhuzamos a $Q$ erővel. Az

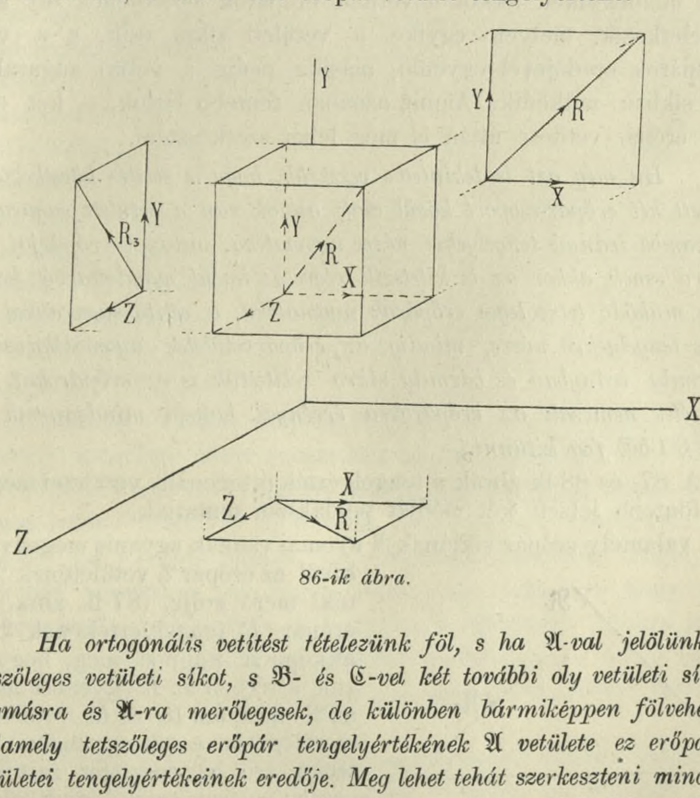
$\mathsf{M}_r$ erőpár $R$ tengelyértéke két vetületével $R_1$ és $R_2$-vel van megadva. (III—IV ábra.) Az $A$ és $B$ tengelyértékek megszerkesztésére, föl kell bontani az $R$ tengelyértéket, a mint épp láttuk, egy oly $A$ erőre, mely a $Q$ erővel párhuzamos és egy oly $B$ erőre, mely $A$-ra merőleges. A $Q$-val párhuzamos $op$ oldalt irányra nézve mindkét vetületben közvetetlenül meg lehet húzni. A végből, hogy az $m$ ponton át merőlegeset lehessen ez $op$ egyenesre szerkeszteni, az $om$ és $op$ egyeneseket a vízszintes vetületi síkkal párhuzamos $mn$ egyenessel kötöttük össze, meghatároztuk az $on$ oldal valódi hosszát, és ezután az $mno$ háromszög valódi nagyságát, a vízszintes vetületi síkba történt forgatás útján. Itt meghúztuk a keresett $mp$ merőlegest az $m_1$ ponton át, s megszerkesztettük a $p$ metszéspont visszaforgatása útján $e$ pont vetületeit. A talált $A$ és $B$ erők a keresett $\mathsf{M}_a$ és $\mathsf{M}_b$ erőpárok tengelyértékei. A 84. I—II ábrákon megszerkesztettük még a $Q$ erő és a $B$ erőpár eredőjét is, mit e § 5-ik pontjában fogunk tárgyalni. Az eredő $Q$ erő irányvonalának vetületeit vonalozva húztuk meg.

**4.** ***Az erőpárok vetületeinek fölhasználása.*** Ha az $\mathfrak{A}$ síkra vetítjük a $\pm R$ erőpárt a $B$ sugarak irányában, (85-ik ábra,) ezzel oly két erőpárra $\pm A$ és $\pm B$-re bontottuk a vetített erőpárt, melyek közül az egyik az $\pm A$ vetületből áll és a vetületi síkra esik, a másik pedig oly síkra, mely a vetítő sugarakkal párhuzamos. (És azzal az egyenessel, melyben a vetített erőpár síkja a vetületi síkot átmetszi.) Mivel pedig e második erőpár-összetevőt ez okból két oly összetevőre lehet bontani, melyek síkjai párhuzamosak a vetítő sugarakkal, az is áll, hogy valamely erőpár tetszőleges vetülete a vetített erőpár három oly összetevőjének egyike, melyek közül a másik kettőnek síkjai a vetítő sugarakkal párhuzamosak, de különben tetszőleges irányúak. Ha tehát a tetszőleges $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ síkok metszésvonalai irányában vetítünk valamely erőpárt e három síkra, akkor ezzel a vetületi síkokra eső három oly összetevőre bontottuk a vetített erőpárt, melyek sorban az egyes vetületi síkokon talált erőpár-vetületekből állanak. A tetszőleges $\mathfrak{A}$ vetületi síkon a $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ metszésvonal irányában szerkesztett erőpár-vetület ugyanis, a föntebbiek szerint, a vetített erőpár oly három összetevőjének egyike, melyek közül az erőpár-vetület az $\mathfrak{A}$ vetületi síkra esik, a másik kettő pedig a $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ vetítő sugárral párhuzamos tetszőleges két síkra, tehát esetleg a $\mathfrak{B}$ és a $\mathfrak{C}$ síkra.



*85-ik ábra.*

Alkalmazzuk ezeket arra az esetre, ha a három vetületi síkot, mint szokás, egymásra merőleges irányban veszszük föl. Legyen $X, Y, Z$ a három vetületi tengely, s $R$ a fölbontandó erőpár tengelyértéke. (86-ik ábra.) Bontsuk föl az $R$ tengelyértéket a vetületi síkokra merőlegesen álló három összetevőre: $X, Y, Z$-re. Világos, hogy e három összetevő mindegyike a reá merőleges síkban szerkesztett erőpár-vetület tengelyértéke, (tehát ennek nyomatéki mérő erője,) tekintve, hogy a megelőző pontban mondottak szerint, a tengelyérték mindegyik összetevője a reá merőleges síkban működő erőpár-összetevő tengelyértéke, és hogy ez erőpár-összetevőt, amint éppen láttuk, a fölbontott erőpár vetülete adja meg. S ha most az $R$ tengelyértéket és ennek $X, Y, Z$ összetevőit mind a három vetületi síkra rá vetítjük, akkor minden egyes vetületben egy-egy oly épszögű erőparallelogramm keletkezik, melyen az $R$ tengelyérték vetülete az eredő, a két összetevő pedig a térbeli $R$ erőnek a másik két vetületi síkra merőlegesen álló két összetevője, tehát, az imént mondottak szerint, a másik két erőpár-vetület tengelyértéke.




*86-ik ábra.*

*Ha ortogonális vetítést tételezünk föl, s ha 𝔄-val jelölünk valamely tetszőleges vetületi síkot, s 𝔅- és ℭ-vel két további oly vetületi síkot, melyek egymásra és 𝔄-ra merőlegesek, de különben bármiképpen fölvehetők, akkor valamely tetszőleges erőpár tengelyértékének 𝔄 vetülete ez erőpár 𝔅 és ℭ vetületei tengelyértékeinek eredője. Meg lehet tehát szerkeszteni minden erőpár tengelyértékének bármely vetületét, ha az erőpár másik két vetületét ismerjük; vagy ha ismerjük az erőpár síkjának irányát, (és ezzel tengelyértéke vetületének irányát,) és az erőpár egyik vetületét. Ha pedig viszont valamely erőpár tengelyértékének egyik vetülete ismeretes, akkor ebből az erőpár másik két vetületének tengelyértékeit szerkeszthetjük meg, fölbontva a tengelyértéknek szóban forgó vetületét a másik két vetületi síkra merőlegesen álló két összetevőre. És minthogy másrészt valamely erőpár meghatározásához tengelyértékének két vetülete szükséges: akkor mondhatunk valamely erőpárt* *teljesen meghatározottnak, ha vagy mind a három vetületének nyomatékát ismerjük; vagy ha ismerjük, — esetleg két vetületből, — az erőpár síkjának irányát és legalább egy oly vetületének nyomatékát, melyben a nyomaték nem zérus.*

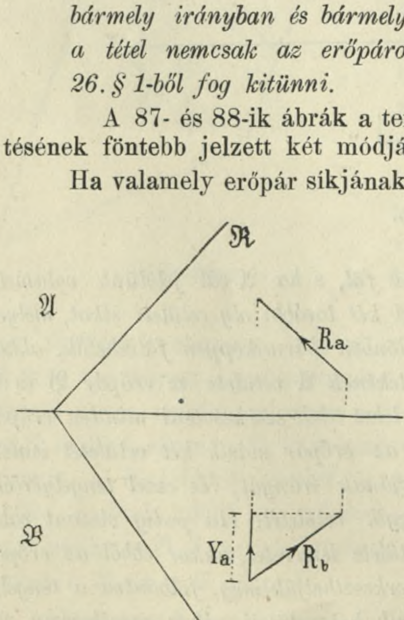
*Az is következik továbbá a föntebbiekből, hogy, ha tetszőleges irányban tetszőleges síkra vetítünk a térben működő tetszőleges számú erőpárt, a vetületben talált erőpárok eredője egyenlő a vetített erőpárok eredőjének vetületével, egyenlő tehát az eredő erőpárnak a vetületi síkra eső összetevőjével is, amint ez az azonnal mondandókból még világosabban ki fog tünni.*

Oly két csoportra bontjuk ugyanis a vetítéssel a térben működő erőpárokat, melyek egyike a vetületben talált, másika pedig a vetítő sugarakkal párhuzamos síkokra eső erőpárokból áll. Ha tehát eredőjével pótoljuk e csoportok mindegyikét, akkor a vetített erőpárok eredőjének oly két összetevője keletkezik, melyek egyike a vetületi síkra esik, s a vetületben talált erőpárok eredőjével egyenlő, másika pedig a vetítő sugarakkal párhuzamos síkban működik. Amint azonban föntebb láttuk, e két összetevőt az eredő erőpár vetítése útján is meg lehet szerkeszteni.

*Ha még azt is tekintetbe veszszük, hogy a vetítés következtében keletkezett két erőpár-csoport közül csak annak van a vetületi sugarakkal párhuzamos irányú tengelyekre nézve nyomatéka, melynek erőpárjai a vetületi síkra esnek, akkor az is kitetszik végre az imént mondottakból, hogy a térben működő tetszőleges erőpárok nyomatéka, a vetítő sugarakkal párhuzamos tengelyekre nézve, mindig az erőpárvetületek nyomatékával egyenlő, bármely irányban és bármely síkra vetítettük is az erőpárokat. Az, hogy a tétel nemcsak az erőpárokra érvényes, hanem mindennemű erőkre a 26. § 1-ből fog kitünni.*

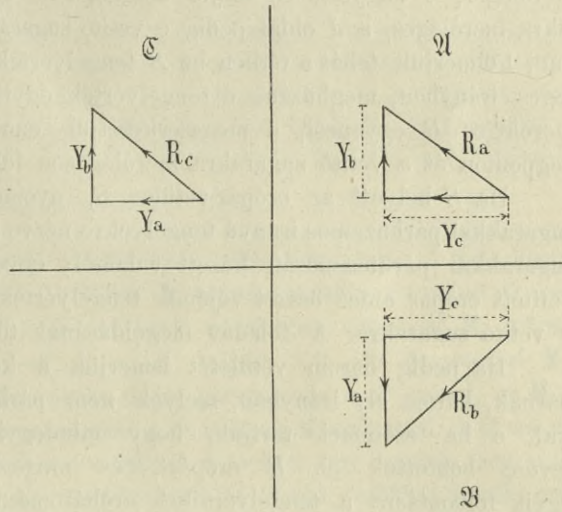
A 87- és 88-ik ábrák a tengelyérték ortogonális vetületei megszerkesztésének föntebb jelzett két módját példákban mutatják.

Ha valamely erőpár síkjának $\mathfrak{R}$ nyomai vannak ugyanis megadva, és ezenkívül az erőpár $\mathfrak{A}$ vetületének $Y_a$ nyomatéki merő erője, (87-ik ábra,) akkor az erőpár $R$ tengelyértékének $\mathfrak{B}$ vetületét akképpen kapjuk meg, hogy meghúzzuk a térben az $R$ egyenest merőlegesen az $\mathfrak{R}$ síkra, (az $R_a$ és $R_b$ vetületeket tehát merőlegesen e sík nyomaira), s oly épszögű erő háromszöget rajzolunk a $\mathfrak{B}$ vetületben, melynek egyik oldala az $\mathfrak{A}$ síkra merőleges és az $Y_a$ tengelyértékkel egyenlő, másik oldala a $\mathfrak{C}$ vetületi síkra merőleges, átfogója pedig $R_b$. A keresett $R$ mérő erő $\mathfrak{A}$ vetületét a $\mathfrak{B}$ vetületből magától értődőleg vetités útján találjuk meg. Az ekképpen $R$ tengelyértékével meghatározott erőpár az $R$ nyil felé nézve úgy forgat, mint ez erőpár $\mathfrak{A}$ vetülete az $Y_a$ nyil felé nézve.



87-ik ábra.

Ha pedig valamely más esetben, valamely ismeretlen síkban működő erőpár 𝔄, 𝔅, ℭ vetületeinek nyomatéki mérő erői sorban $Y_a$ $Y_b$ $Y_c$ nagyságúak, akkor ez erőpár $R$ tengelyértékének két, vagy esetleg mind a három vetületét a 88-ik ábrán látható módon rajzoljuk meg. Magyarázatképpen a föntebb már mondottak után csak azt jegyezzük meg, hogy akképpen kapjuk meg a tengelyérték mindegyik vetületét, hogy oly épszögű erőháromszöget rajzolunk, amelynek két oldalát a másik két erőpárvetület tengelyértékei képezik.




*88-ik ábra.*

A megelőzőből láttuk, hogy miképpen lehet valamely erőpár tengelyértékét ez erőpár ortogonális vetületeiből megszerkeszteni. Meg lehet azonban határozni minden erőpárt, tetszőleges síkokra, tetszőleges irányokban szerkesztett vetületeiből is. Tudjuk ugyanis a megelőzőkben mondottakból, hogy bármely erőpár bármely vetülete, ez erőpárnak a vetületi síkra eső oly összetevője, melyhez tartozó másik összetevő síkja a vetítő sugarakkal párhuzamos. Minden erőpárvetületnek a vetületi síkra merőlegesen álló valamely tengelyre értett nyomatéka megadja ennélfogva a vetületi síkra eső épp említett összetevő tengelyértékét. Ha pedig a vetítő sugarakkal párhuzamos irányú tengelyre határozzuk meg valamely erőpárvetület nyomatékát, akkor ez egyenlő annak az erőpár-összetevőnek tengelyértékével, mely a vetítő sugarakra merőleges síkra esik, tekintve, hogy az ugyanarról az erőpárról, ugyanabban az irányban, különböző síkokra szerkesztett vetületek nyomatékai, a vetítő sugarakkal párhuzamosan fekvő egyenesekre nézve mind egyenlőek, mivel valamennyi egyenlő a térbeli erőpár nyomatékával.

Ezek alapján meg lehet azonban szerkeszteni minden erőpár tengelyértékét, mint összetevői tengelyértékeinek eredőjét, ha ismerjük az erőpár síkjának irányát és ez erőpár egyik tetszőleges vetületét; vagy ha ismerjük az erőpár három vetületét, akár ugyanarra, akár különböző síkokra, három, különben tetszőleges, de mégis oly irányban, melyek nem párhuzamosak ugyanazzal a síkkal, amint ez még világosabban ki fog tünni az azonnal mondandókból.

Legyen ugyanis a meghatározandó, $R$ tengelyértékű erőpár síkja ℜ, s ez erőpár tetszőleges vetülete nyomatékának mérő erője, az 𝔖 vetületi síkra merőleges tengelyekre nézve $S$, és tegyük föl, hogy $\mathfrak{R}$ és $S$ ismeretes. Ha az $R$ erőpárt két oly összetevőre bontottnak képzeljük, melyek egyike az $\mathfrak{S}$ vetületi síkra esik, másikának $\mathfrak{J}$ síkja pedig a vetítő sugarakkal párhuzamos, akkor könnyen meg lehet rajzolni az $S, R$ és $J$ tengelyértékek erőháromszögét, s ez uton meg lehet szerkeszteni a meghatározandó erőpár $R$ tengelyértékét is, tekintve, hogy az $R,S,J$ erőháromszögben az $S$ oldal az $\mathfrak{S}$ síkra merőleges, s nagyság és előjel dolgában is ismeretes, az $R$ oldal az $\mathfrak{R}$ síkra merőleges, a $J$ oldal pedig e vetítő sugarakra merőlegesen álló síkban van. Fölmérjük tehát a térben az $S$ tengelyértéket az $\mathfrak{S}$ vetületi síkra merőleges irányban, meghúzzuk e tengelyérték egyik végpontján át az $\mathfrak{R}$ síkra merőleges $R$ egyenest, s megszerkesztjük ennek átdöfő pontját a másik végponton át a vetítő sugarakra merőlegesen fölvett síkkal.

Ha $S$ helyett az erőpár-vetület $S_1$ nyomatéki merő erőjét, a vetítő sugarakkal párhuzamos irányú tengelyekre nézve ismerjük, akkor ezt a vetítő sugarakkal párhuzamosan húzott valamely egyenesre kell ráméni, mint a vetített erőpár amaz összetevőjének tengelyértékét, melynek síkja merőleges a vetítő sugarakra. A föladat megoldásának többi része változatlan marad.

Ha pedig három vetületét ismerjük a keresett $R$ tengelyértékű erőpárnak, három oly irányban, melyek nem párhuzamosak ugyanazzal a síkkal, s ha szemmel tartjuk, hogy mindegyik vetítéssel két-két összetevőre bontottuk az $R$ erőpárt, és megszerkesztve képzeljük mindegyik fölbontásra a tengelyértékek erőháromszögét, akkor mindegyikre áll, mint fönt, hogy, ha $S$ megint a vetület tengelyértéke, a másik összetevő tengelyértéke az $S$ erő végpontján át a vetítő sugarakra merőlegesen fölvett síkban van; e síkban van tehát az $R$ erőpár tengelyértékének végpontja is. Ha tehát $S_1$ ; $S_2$ ; $S_3$ a három erőpár-vetület nyomatéki mérő erője, s ha ráméрjük ez erőket a térben tetszőlegesen választott $\alpha$ ponttól, mint kezdőponttól, az e ponton át a vetületi síkokra merőlegesen húzott egyenesekre, a végpontokon át a vetítő sugarakra merőleges síkokat veszünk föl, s megszerkesztjük e síkok $\gamma$ metszéspontját, akkor az $\alpha\gamma$ erő az $R$ erőpár tengelyértéke, s ennek kezdőpontja az $\alpha$, végpontja a $\gamma$ pont. Ha pedig az $S_{11}S_{21}S_{31}$ erők az $R$ erőpár vetületeinek nyomatéki mérő erőit jelentik, a vetítő sugarakkal párhuzamos tengelyekre nézve, akkor ez erőket az $\alpha$ pontból a vetítő sugarakkal párhuzamosan vont egyenesekre kell fölmérni; a föladat megoldásának többi része különben megint az előbbi marad.

A három vetületi irány azért nem lehet párhuzamos ugyanazzal a síkkal, minthogy ez esetben az $\alpha$ kezdőpontból fölmért $S_{11}S_{21}S_{31}$ tengelyértékek ugyanabba az $\mathfrak{J}$ síkba esnének, a végpontjaikon át saját irányaikra merőlegesen fölvett síkok pedig ugyanabban az egyenesben metsződnének. Mert ha viszont az $R$ tengelyértéket gondoljuk megadva, s ebből szerkesztjük meg az $S_{11}S_{21}S_{31}$ tengelyértékeket, akkor az $R$ erő végpontján át merőleges síkokat kell fölvennünk az $\alpha$ kezdőponton át a vetítő sugarakkal párhuzamosan vont $S_{11}S_{21}S_{31}$ egyenesekre. Ha azonban az

$S_{11}S_{21}S_{31}$ egyenesek ugyanabba az $\mathfrak{F}$ síkba esnek, akkor az épp említett három merőleges sík ugyanazon egyenesen megy át, t. i. az $R$ erő végpontjából az $\mathfrak{F}$ síkra húzott merőlegesen.

Megjegyzendő végre az imént mondottak kapcsán, hogy abból, hogy tetszőleges erőpárok vetületének eredője egyenlő ez erőpárok eredőjének vetületével, önként következik, *hogy a térben működő, tetszőleges számú erőpár eredőjének tengelyértékét szintén ugyan e módokon lehet megszerkeszteni,* ha ismeretesek az összeteendő erőpárok síkjai és a nyomatékok ez erőpárok legalább egy vetületén; vagy ha ismeretes a nyomatékösszeg az összeteendő erőpároknak nem ugyanazzal a síkkal párhuzamosan szerkesztett három vetületén. Arra a legfontosabb esetre, ha az összeteendő erőpárok ortogonális vetületeikkel vannak megadva, a szerkesztés végrehajtását az alább következő 6—7-ik pontokban részletesen meg fogjuk mutatni.

*5. A térbeli erők összetétele erőpárokkal.* A tetszőleges $Q$ erőt és a tetszőleges síkban működő $\mathsf{M}_r$ erőpárt mindig az adott $Q$ erővel párhuzamos más $Q$ erővel és az erre merőleges síkra eső $\mathsf{M}_a$ erőpárral pótolhatjuk. E célból fölbontjuk az $\mathsf{M}_r$ erőpárt két oly összetevőre $\mathsf{M}_a$ és $\mathsf{M}_b$-re, melyek közül az $\mathsf{M}_b$ erőpár síkja párhuzamos a $Q$ erővel, az $\mathsf{M}_a$ erőpáré erre merőleges, s összeteszszük a $Q$ erőt az $\mathsf{M}_b$ erőpárral. A $Q$ erő és az $\mathsf{M}_b$ erőpár eredőjének tetszőleges vetületét e mellett úgy kapjuk meg, a 20. § 1-ban mondottak folytán, ha összeteszszük a $Q$ erő vetületét az $\mathsf{M}_b$ erőpár vetületével, tekintve, hogy az $\mathsf{M}_b$ erőpárt a $Q$-val párhuzamos erőkből állónak képzelhetjük. Ami pedig a $\mathsf{M}_b$- erőpár vetületét illeti, tudjuk a megelőző pontban, a 86-ik ábra kapcsán levezetett tételekből, hogy, ha $\mathfrak{S}_1$ és $\mathfrak{S}_2$ két merőleges vetületi sík, akkor bármely erőpár $\mathfrak{S}_1$ vetülete tengelyértékét ez erőpár tengelyértéke $\mathfrak{S}_2$ vetületének az $\mathfrak{S}_1$ vetületi síkra merőlegesen álló összetevője adja meg.

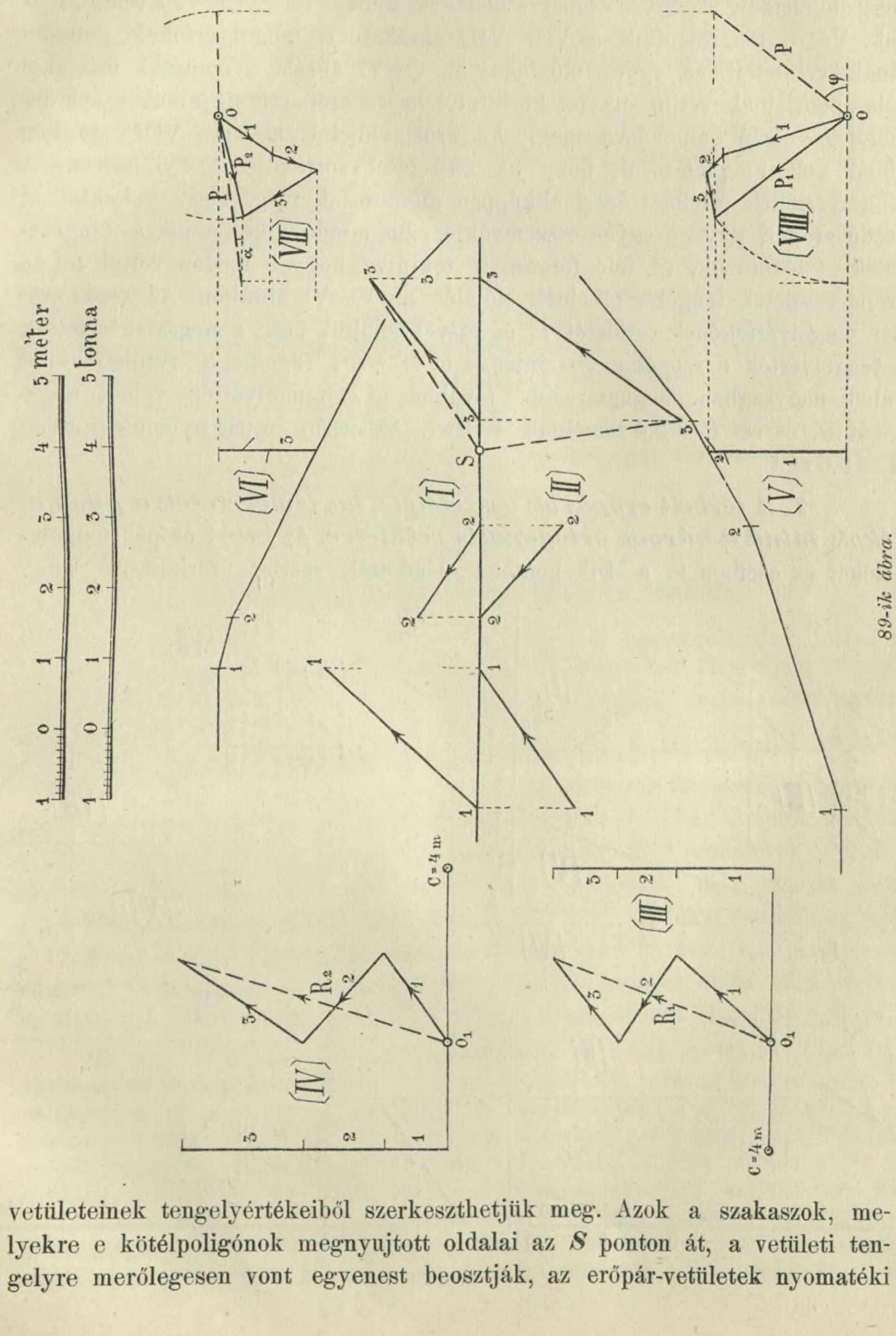
A megelőző pontban a 84-ik ábra kapcsán tárgyalt föladatban pl. az $R$ tengelyértékű s $\mathsf{M}_r = cR$ nyomatékú erőpárt két oly összetevőre bontottuk volt, melyek közül a $B$ erőpár síkja a $Q$ erővel párhuzamos, az $A$ erőpáré pedig erre merőleges. A $B$ erőpár vízszintes vetületének tengelyértéke a $V$ erő, függőleges vetületéé az $U$ erő, s e vetületek forgatásának értelme, az $U$ és $V$ nyilak felé nézve ugyanaz, mint a fölbontott $R$ erőpáré, az $R$ nyil felé nézve. Ha ismeretes az $R$ erőpár forgatásának értelme akkor tehát könnyen össze lehet tenni a $Q$ erőt a $B$ erőpárral. A 84-ik ábra, — melyen az adott $Q$ erő irányvonalát mind a két vetületen kihúztuk, az összetételből keletkező $Q$ erőét pedig megvonaloztuk, — arra az esetre mutatja a szerkesztés végrehajtását, ha az $R$ erőpár az $R$ nyil felé nézve $\circlearrowleft$ felé forgat. Magyarázatul csak azt említjük meg, hogy a $B$ erőpár $\frac{\text{vízszintes}}{\text{függőleges}}$ vetületét a $c$ távolságban fölvett $\frac{\pm V \text{ erőkkel}}{\pm U \text{ erőkkel}}$ helyettesítettük, (itt $c$ az $R$ erőpár nyomatéki alapja,) a $V$ erők egyikét a $Q_1$ egyenesen, viszont az $U$ erők egyikét a $Q_2$ egyenesen vettük föl, s megszerkesztettük a vízszintes vetületi síkban a $Q_1 + V$ és a $-V$ erők eredőjét, a függőlegesben pedig a $Q_2 - U$ és a

— $U$ erőkét, a 12. § 2-ból ismeretes módon, t. i. mind a két vetületen az összetevők fölcserélt fölmérése és a végpontok összekötése útján.

*6. A térbeli erőpárok összetétele, ha ismeretes az egyes erőpárok síkja, és legalább egyik ortogonális vetülete.* Ha $\mathfrak{S}_1$ és $\mathfrak{S}_2$ egymásra merőlegesen álló két vetületi sík, és ha ismeretesek a nyomatékok az összeteendő erőpárok $\mathfrak{S}_1$ vetületén, s meg vannak adva ez erőpárok síkjai, akkor könnyen meg lehet, a 4-ik pontban mondottak szerint szerkeszteni ez erőpárok tengelyértékei erőpoligónjának $\mathfrak{S}_2$ vetületét. Ismerjük ugyanis ez erőpoligón-vetületben valamennyi oldal irányát és ismerjük az egyes oldalak ábrázolta erőknek az $\mathfrak{S}_1$ vetületi síkra merőlegesen álló összetevőit, tekintve, hogy ezek a térbeli erőpárok $\mathfrak{S}_1$ vetületeinek tengelyértékeivel egyenlők. Úgy szerkeszthetjük meg tehát legegyszerűbben az erőpoligón szóban forgó vetületét, hogy ezt magát is az $\mathfrak{S}_2$ síkon, az $\mathfrak{S}_1$ síkra merőlegesen húzott valamely egyenesre vetítjük, a vetületi tengelylyel párhuzamos irányban. E vetületet ugyanis egyszerűen az erőpárok $\mathfrak{S}_1$ vetületei tengelyértékeinek összetétele útján szerkeszthetjük meg, s ha ez megtörtént, akkor könnyen megrajzolhatjuk az összeteendő erőpárok tengelyértékeinek erőpoligónját, előbb az $\mathfrak{S}_2$, s ezután az $\mathfrak{S}_1$ vetületen, tekintve, hogy a poligón-oldalak irányai ismeretesek.

Ha pedig az erőpárok mindkét vetületén ismeretesek a nyomatékok, akkor egymástól függetlenül rajzolhatjuk meg, az imént előadott módon, a tengelyértékek erőpoligónjának két vetületét; és ha pontos a szerkesztés, akkor a sarokpontoknak a vetítő sugarakra kell esniök.

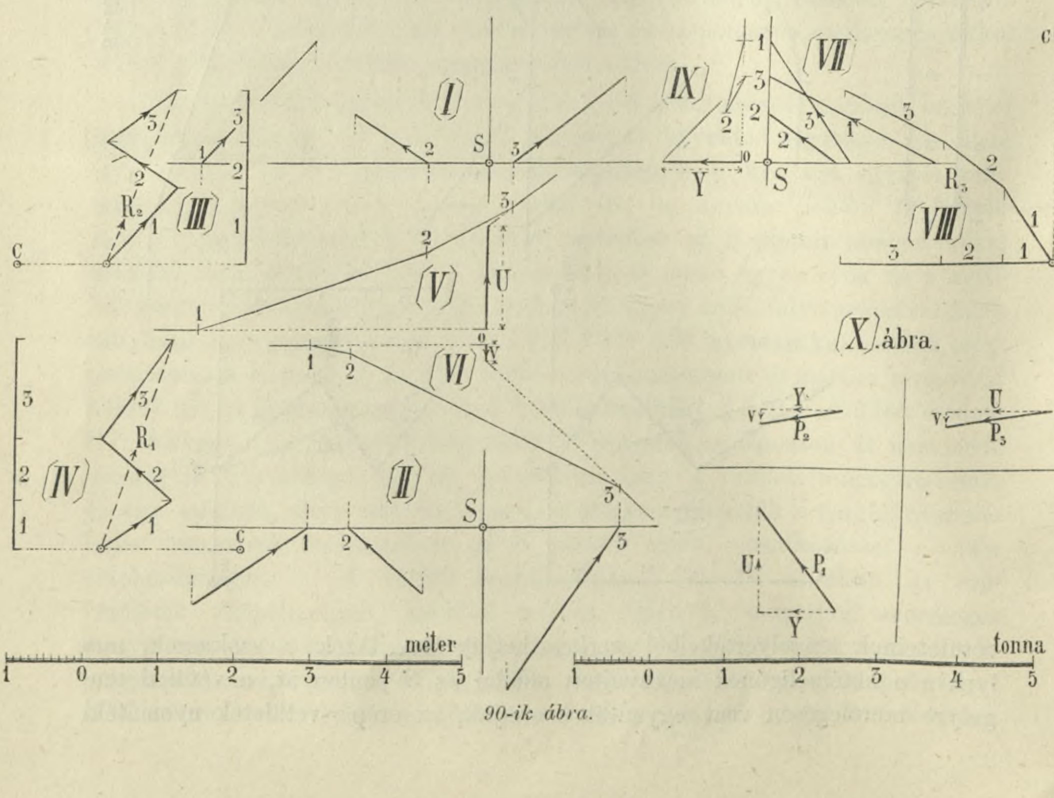
A 89. I—VIII ábrákon e módon az 1—3-al számozott erőpárok eredőjét szerkesztettük meg. Az összeteendő erőpárokat egyenlő nagyságú és ellenkező előjelű két-két párhuzamos erő képében, s e két erő egyikét valamennyi erőpárban az $S$ ponton vettük föl, és ugyane ponton át huztuk meg a vetületi tengelyt is. (I—II ábra, melyeken az $S$ ponton átmenő erőket azonban nem húztuk ki.) Az $S$ ponton át nem menő egyes erők és a vetületi síkok közötti átdöfő pontokat sorban az egyes erők folyó számával jelöltük meg. Az erőpárok síkjai tehát $1S1$; $2S2$; $3S3$ nyomaikkal vannak meghatározva, melyek közül azonban csak a 3-mal számozott erőpárhoz tartozókat húztuk ki. Az erőpárok vetületeinek nyomatékait a 14. § 3-ban előadott módon, t. i. akképpen szerkesztettük meg, hogy fölbontottuk az $S$ ponton át nem menő mindegyik erővetületet egy oly összetevőre, mely a vetületi tengelyre esik, és egy másikra, mely erre merőleges, és megszerkesztettük a tengelyre merőleges összetevők nyomatékait az $S$ pontra nézve, vonatkozással $c = 4m$ alaphosszúságra. — E végből megrajzoltuk a III—IV ábrákon az erővetületek erőpoligónjait, ezekből vetítés útján a tengelyre merőleges irányú összetevők erőpoligónjait, s ezután az V—VI ábrákon ezek kötélpoligónjait, még pedig a *függőleges* vetületek erő- és kötélpoligónját a *vízszintes* vetületi síkon, (tehát a vetületi tengely alatt,) a vízszintes erővetületekét pedig viszont a függőleges vetületi síkon, tekintve, hogy a tengelyértékek erőpoligónjának $\frac{\text{vízszintes}}{\text{függőleges}}$ vetületét, az erőpárok $\frac{\text{függőleges}}{\text{vízszintes}}$



89-ik ábra.

vetületeinek tengelyértékeiből szerkeszthetjük meg. Azok a szakaszok, melyekre e kötélpoligónok megnyujtott oldalai az $S$ ponton át, a vetületi tengelyre merőlegesen vont egyenest beosztják, az erőpár-vetületek nyomatéki mérő erői, tehát ez erőpár-vetületek tengelyértékei, s e tengelyértékek akképpen sorakoznak az erőpoligónok csúcspontjainak megfelelő fölvétele következtében egymás után, hogy, ha sorakozásuk szerinti nyilakkal jelöljük meg előjeleiket, az egyes erőpárvetületek, e nyilak felé nézve ↻ felé forgatnak. Végre megrajzoltuk a VII—VIII ábrákon a tengelyértékek poligónjának vetületeit, az egyes oldalakat az V—VI ábrák nyomatéki mértékei válaszpontjainak vetítő sugarai között, az egyes erőpárok síkjainak nyomaira merőleges irányban húzva meg. Az erők előjeleit a VII—VIII ábrákon abból kell meghatározni, hogy az összetétel sorrendje 1, 2, 3 legyen. A tengelyértékek értelmét ezzel akképpen állapítottuk meg, hogy valamint az eredő erőpár, úgy az egyes összetevők is, ha mindegyiket a maga tengelyértéke felé nézzük, ↻ felé forgatnak, tekintve, hogy e módon vettük föl az erőpárvetületek tengelyértékeinek előjelét az V—VI ábrákon. Az eredő erőpár tengelyértékének vetületét $P_1$ és $P_2$-vel jelöltük meg, s megszerkesztettük e tengelyérték $\alpha$ szögét a vízszintes, s $\varphi$ szögét a függőleges, vetületi síkkal valódi nagyságban. Meghatároztuk továbbá a $P$ tengelyérték valódi nagyságát is, és ezt $P = 2{,}4$ tonnának találtuk. Az eredő erőpár nyomatéka tehát $M = 9{,}6$ m. t.

*7. A térbeli erőpárok összetétele, ha ismeretesek a nyomatékok mind a három ortogonális vetületre.* Az eredő erőpár tengelyértékét ez esetben is a 4-ik pontban előadottak szerint szerkesztjük meg.




*90-ik ábra.*

(Lásd a 88-ik ábra kapcsán mondottakat.) Az egyes erőpárok síkjainak nyomait, amint az épp idézettekből kitetszik, ez esetben nem kell meghatározni. Nem kell továbbá megrajzolni a tengelyértékek poligónját sem, tekintve, hogy az összeteendő erőpárok három vetülete megadja az eredő erőpár három vetületét, s tekintve, hogy ennek következtében az eredő erőpár tengelyértékének bármely vetületét, mint a másik két erőpárvetület tengelyértékeinek eredőjét lehet megszerkeszteni.

A 90. I—X ábrák ugyanazoknak az erőpároknak összetételét mutatják, melyek eredőjét az előbbi pontban más módon szerkesztettük meg. A 90. I—VI ábrák ugyanazok, mint előbb a 89. I—VI ábrák, csakhogy egészen külön-külön rajzoltuk meg az ábra-sorokat az egyes vetületre, s hogy különben is másképpen csoportosítottuk az egyes ábrákat. A VII ábra az összeteendő erőpárok harmadik vetületét mutatja. Az erők e vetületeit az $S$ függőlegessel metszettük át, s fölbontottuk őket e függőlegesre eső, és erre merőleges irányban működő összetevőkre. Az erőpoligón a VIII ábrán látható, a merőleges összetevők kötélpoligónja pedig a IX ábrán. Az eredő erőpár három vetületének, (vagyis 3 összetevőjének,) tengelyértékeit $U$, $V$, $Y$-al jelöltük meg, s ez erők előjelét akképpen állapitottuk meg, hogy, ha a maguk tengelyértékeik felé nézzük az eredő erőpár vetületeit, ezek mind ↺ felé forgatnak. A X ábra végre az eredő erőpár $P$ tengelyértéke három vetületének megszerkesztését mutatja az $U, V, Y$ összetevőkből.

## 22. §.

## Tetszőleges erők összetétele a térben.

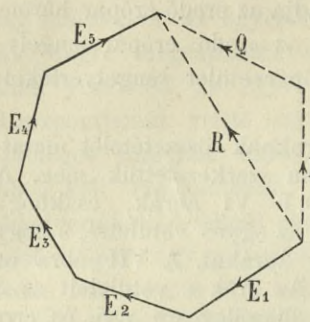
Nem ugyanazon ponton átmenő, térbeli erők összetétele alatt, amint a 17. §-ban már említettük, általánosságban az erők két társerőjének meghatározását értjük. A jelen §-ban e föladat következő megoldásait fogjuk megismertetni.

***1. Egy erőből és egy erőpárból álló két társerő megszerkesztése, az összeteendő erők áttétele utján.*** Oly két társerőt, melyek egyike erőpárból áll, másika pedig a központositott erők eredőjével egyenlő, úgy találhatunk, (ugyanily társerők megszerkesztésének más módját lásd e § 3-ban,) ha átteszszük az öszszeteendő $E_1 E_2 E_3 \ldots$ erőket, amint ezt már a 17. §-ban is megemlítettük, a térben tetszőlegesen választott $S$ pontra, és megszerkesztjük mind az $S$ pontra áttett erők $R$ eredőjét, (lásd 19. §,) mind az áttételből keletkező $\pm E_1$ ; $\pm E_2$ ; $\pm E_3$ ; ... erőpárokét. (Lásd 21. §. 6—7.)

Ha úgy képzeljük pl. hogy a megelőző 89. I—II és 90. I—II és VII ábrákon az erőrendszer csak azokból az erőkből áll, melyek irányvonalait a vetületeken meghúztuk és nyilakkal is megjelöltük, és ha ez erőket az $S$ pontra teszszük át, akkor az áttételből keletkező erőpárok eredője az az erőpár, melynek $P$ tengelyértékét a 89. VII—VIII, és más módon a 90. X ábrákon, (melyeken az erőrendszert azonban erőpárokból vettük volt föl a megelőző §-ban,) már meghatároztuk. A központositott erőrendszer $R$ eredőjét pedig a 89. III—IV és a 90. III—IV és VIII ábrákon szintén megszerkesztettük már. Ha az 1—3-mal számozott erők egyik társerője az $S$

ponton megy át, s egyenlő e központositott erők $R$ eredőjével, akkor a másik társerő tehát a $P$ tengelyértékű erőpár.

Az imént mondottakból általános következtetést is vonhatunk azonban le.



*91-ik ábra.*

Képzeljük ugyanis a tetszőleges $E_1$; $E_2$; $E_3$.... térbeli erők erőpoligónját a *térben* megszerkesztve, s a tetszőleges $P$ és $Q$ társerőkkel kiegészitve. (91-ik ábra.) Világos mindenekelőtt, hogy, ha az összeteendő erők poligónja kezdőpontjából kiindulva mérjük föl a társerőket is a hozzájuk húzott párhuzamosakra, értelmük tekintetbe vételével: a társerők erőpoligónja végpontjának az összeteendő erőkével össze kell esnie. Mert, ha ugyanarra a tetszőleges pontra teszszük át a társerőket, melyre az összeteendő erőket, akkor nemcsak az áttételből keletkező két erőpárnak kell egymással egyenlőnek lennie, hanem a központositott társerők eredőjének is azonosnak kell lennie az $E_1 E_2$... erőkével. Ha a $P$ és $Q$ társerők egyike végtelen kis erő, akkor a másik, amint ezekből látjuk, szükségképpen egyenlő a központositott erők $R$ eredőjével.

*Végtelen sokféle módon lehet tehát ugyan általánosságban minden erőrendszert egy erővel és egy erőpárral pótolni; de ha valamely erőrendszer két társerője közül az egyik erőpárból áll, akkor a másik szükségképpen egyenlő a központositott erőrendszer eredőjével, és viszont, ha két társerő egyike a központositott erőrendszer eredője, akkor a másik szükségképpen erőpárból áll.*

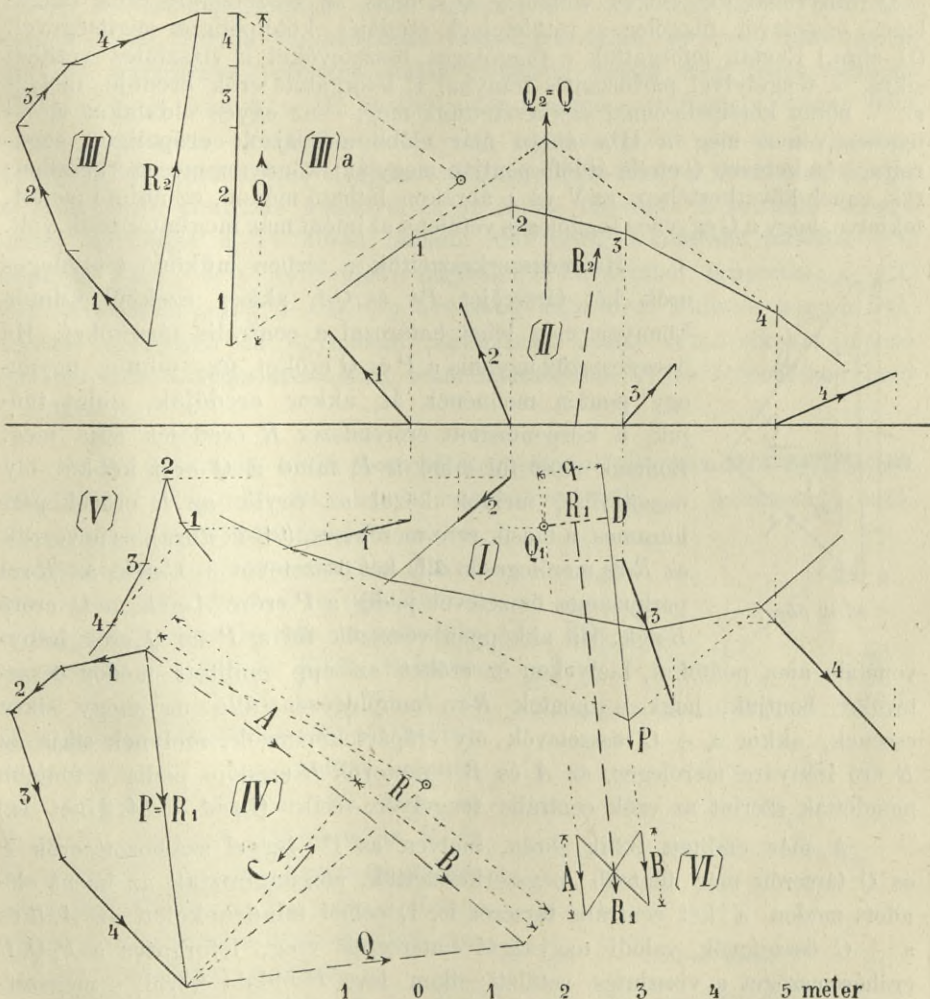
Ha ismerjük valamely erőrendszer két oly társerőjét, melyek egyike erőpár, akkor az erőrendszer centrális társerőit és centrális tengelyét a megelőző § 5-ik pontjában előadottak alkalmazásával meg lehet szerkeszteni.

***2. A térbeli erők összetétele, véges távolságú összetevőkre bontásuk útján.*** — Ha fölbontjuk az összeteendő erők mindegyikét ott, ahol az alkalmasan fölvett 𝔄 síkot átdöfi, két oly összetevőre, melyek egyike a térben fölvett $B$ ponton megy át, másika pedig az 𝔄 síkra esik, s ha megszerkesztjük mind a $B$ ponton átmenő, mind az 𝔄 síkra eső összetevők eredőjét, akkor az összeteendő erők két oly társerőjét kapjuk meg, melyek közül általánosságban egyik sem erőpár.

*Ebből az következik mindenekelőtt, hogy oly két társerővel, melyek egyike sem erőpár, szintén végtelen sokféle módon lehet a térben működő minden erőrendszert pótolni.*

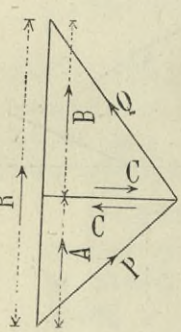
Ha az összeteendő erők két ortogonális vetületben vannak megadva, akkor a szerkesztés végrehajtása tekintetében legegyszerűbb, ha két oly összetevőre bontjuk az erők mindegyikét, melyek közül az egyik az alapul fölvett vetületi síkra esik, a másik pedig e síkra merőleges. Ez esetben a vetületi síkra eső összetevőket ugyanis az erők vetületei adják meg, az e síkra merőleges összetevőket pedig az erők másik vetületeinek a tengelyre merőleges irányú összetevői.

A 92. I—VI ábrán e módon az 1—4-gyel számozott erőket tettük össze. Fölbontottuk ugyanis ez erők mindegyikét ott, ahol a vízszintes vetületi




*92-ik ábra.*

síkot átdöfi, két oly összetevőre, melyek egyike függőleges irányú, másika pedig a vízszintes vetületi síkra esik. Ezután megszerkesztettük az összeteendő erők erőpoligónjának két vetületét, (III—IV ábra), mint az erővetületek erőpoligónjait. A vízszintes erővetületek $P$ eredője, melynek irányvonalát az I ábrán alkalmas segéderővel rajzolt kötélpoligónnal határoztuk meg, az imént mondottak szerint a vízszintes vetületi síkra eső összetevők eredője, tehát a keresett két társerő egyike. A másik társerő mérőhosszát úgy találjuk meg, ha a függőleges erővetületek erőpoligónját a vetületi tengelyre merőlegesen vont $Q$ egyenesre vetítjük. (III*a* ábra.) Hogy még a $Q$ társerő irányvonalát is meghatározzuk, megszerkesztettük mindenekelőtt a $Q$ irányvonal függőleges vetületét $Q_2$-t mint az összeteendő erők függőleges összetevői függőleges vetületeinek eredőjét, kötélpoligón segítségével. (II ábra.) Ezután leforgattuk e függőleges összetevőket a vízszintes vetületi síkra, a tengelylyel párhuzamos irányba. E leforgatott erők eredője, melyet az V ábrán kötélpoligónnal szerkesztettünk meg, — az egyes oldalakat merőlegesen vonva meg a III*a* ábrán már előbb megrajzolt erőpoligón sugaraira, — a keresett $Q$ eredő átdöfő pontján megy át; könnyen megszerkeszthettük ennek következtében, az V és I ábrákon látható módon, ez átdöfő pontot, tekintve, hogy a $Q$ egyenes függőleges vetületét az imént már meghatároztuk volt.



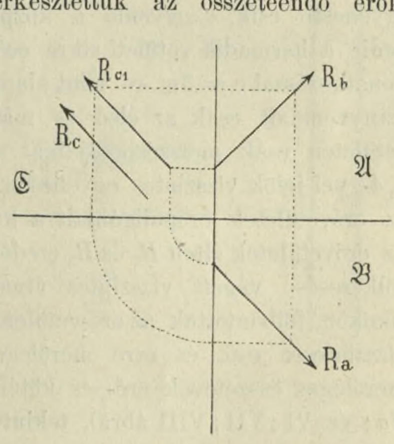
*93-ik ábra.*

Ha megszerkesztettük a térben működő tetszőleges erők két társerőjét $P$-t és $Q$-t, akkor ezekből szintén könnyen meg lehet határozni a centrális társerőket. Ha összeteszszük ugyanis a $P$ és $Q$ erőket, úgy mintha ugyanegy ponton mennének át, akkor eredőjük, amint tudjuk, a központosított erőrendszer $R$ eredőjét adja meg. Bontsuk most föl mind a $P$, mind a $Q$ erőt két-két oly összetevőre, melyek közül az egyik az $R$ erővel párhuzamos, a másik erre merőleges, (93-ik ábra), és nevezzük az $R$-re merőlegesen álló két összetevőt $\pm C$-nek, az $R$-rel párhuzamos összetevőt pedig a $P$ erőre $A$-nak, a $Q$ erőre $B$-nek. Ha akképpen veszszük föl a $P$ és $Q$ erők irányvonalain ama pontokat, melyeken ez erőket az épp említett módon összetevőkre bontjuk, hogy e pontok $R$-re merőlegesen álló ugyanegy síkra essenek, akkor a $\pm C$ összetevők oly erőpárt képeznek, melynek síkja az $R$ erő irányára merőleges, az $A$ és $B$ összetevők $R$ eredője pedig a föntebb mondottak szerint az erők centrális tengelyére esik. (Lásd a 24. § 5-ot is.)

A már említett 92-ik ábrán, melyen az 1—4-gyel számozott erők $P$ és $Q$ társerőit már föntebb megszerkesztettük, meghatároztuk az imént előadott módon a két centrális társerőt is. E célból mindenekelőtt az $A$, $B$ és a $\pm C$ összetevők valódi nagyságát határoztuk meg, leforgatva a $P$, $Q$, $R$ erőháromszöget a vízszintes vetületi síkon levő $P$ oldala körül, s megszerkesztve a leforgatásban az $R$ oldalra merőleges $C$ összetevőt. (IV ábra.) Minthogy a $Q$ erő függőleges irányú, $P$ pedig a vízszintes vetületi síkra esik, legcélszerűbb, ha a $Q$ erőt a $Q_1$ átdöfő ponton bontjuk föl, a $P$ erőt tehát azon a ponton, a hol a $Q_1$ ponton át az $R$ egyenes irányára merőlegesen fölvett síkot átdöfi. Ha ugyanis a $Q_1$ ponton át az $R$ egyenesre merőlegesen álló síkot veszünk föl, e sík vízszintes nyoma a $Q_1$ ponton át a $P$ egyenesre merőlegesen húzott $Q_1D$ egyenesre esik, tekintve hogy az $R$ egyenes vízszintes $R_1$ vetülete a $P$ erővel párhuzamos. A $P$ egyenes átdöfő pontja a szóban forgó síkkal ezek folytán a $Q_1 D$ és a $P$ egyenesek közötti $D$ metszéspont, tekintve hogy a $P$ egyenes a vízszintes vetületi síkon van.

Megszerkesztettük tehát a VI segédábrán a $D$ és $Q_1$ pontokon fölvett $A$ és $B$ erők eredője irányvonalának $R_1$ vízszintes vetületét az ismert módon, a vízszintes vetületi síkra leforgatott, és 1 : 3 léptékben fölcserélve fölmért $A$ és $B$ erők végpontjainak összekötése útján. Ez eredő irányvonalának $R_2$ függőleges vetületét ezután nehézség nélkül meg lehet rajzolni, tekintve, hogy iránya a III ábrából már ismeretes, és hogy a szóban levő eredő a vízszintes vetületi síkot a $DQ_1$ egyenesen döfi át, az $R_1$ ponton. Az $R_1$ és $R_2$ vetületeivel meghatározott egyenes a föntebb mondottak szerint az erőrendszer centrális tengelye, és az ebben fölvehető $R$ centrális társerő valódi nagysága a IV ábrán látható. Ami pedig a centrális társerők $\pm C$ erőpárját illeti, a $C$ erő valódi nagysága a IV ábrából ismeretes; a $\pm C$ erők távolságát pedig a $DQ_1 = q$ hosszúság adja meg, tekintve hogy a $DQ_1$ egyenes merőleges az egymással párhuzamos irányú vetítő síkokat képező $PAC$ és $QBC$ erőháromszögekre, tehát merőleges a $Q_1$ és $D$ pontokon ható $C$ erőkre is.

*3. A térbeli erők összetétele, három ortogonális vetületük alapján.**) Tegyük föl, hogy megszerkesztettük az összeteendő erők ortogonális vetületeit a szokásos módon, az egymásra merőleges irányban fölvett három síkra: 𝔄-, 𝔅- és ℭ-re, (94-ik ábra), és hogy megszerkesztettük az erővetületek eredőit $R_a$, $R_b$, és $R_c$-ét. E három eredő közül bármelyik kettő, pl. $R_a$ és $R_b$ a térben működő oly $R$ erőt határoz meg, mely $\#$ a központosított erőrendszer eredőjével. Tegyük föl, hogy ez $R$ erő $R_{c1}$ vetületét a ℭ síkon, az $R_a$ és $R_b$ vetületek alapján szintén megrajzoltuk, magától értődvén, hogy $R_{c1} \# R_c$-vel, tekintve, hogy $R_c$ is a központosított erőrendszer eredőjének vetülete.




*94-ik ábra.*

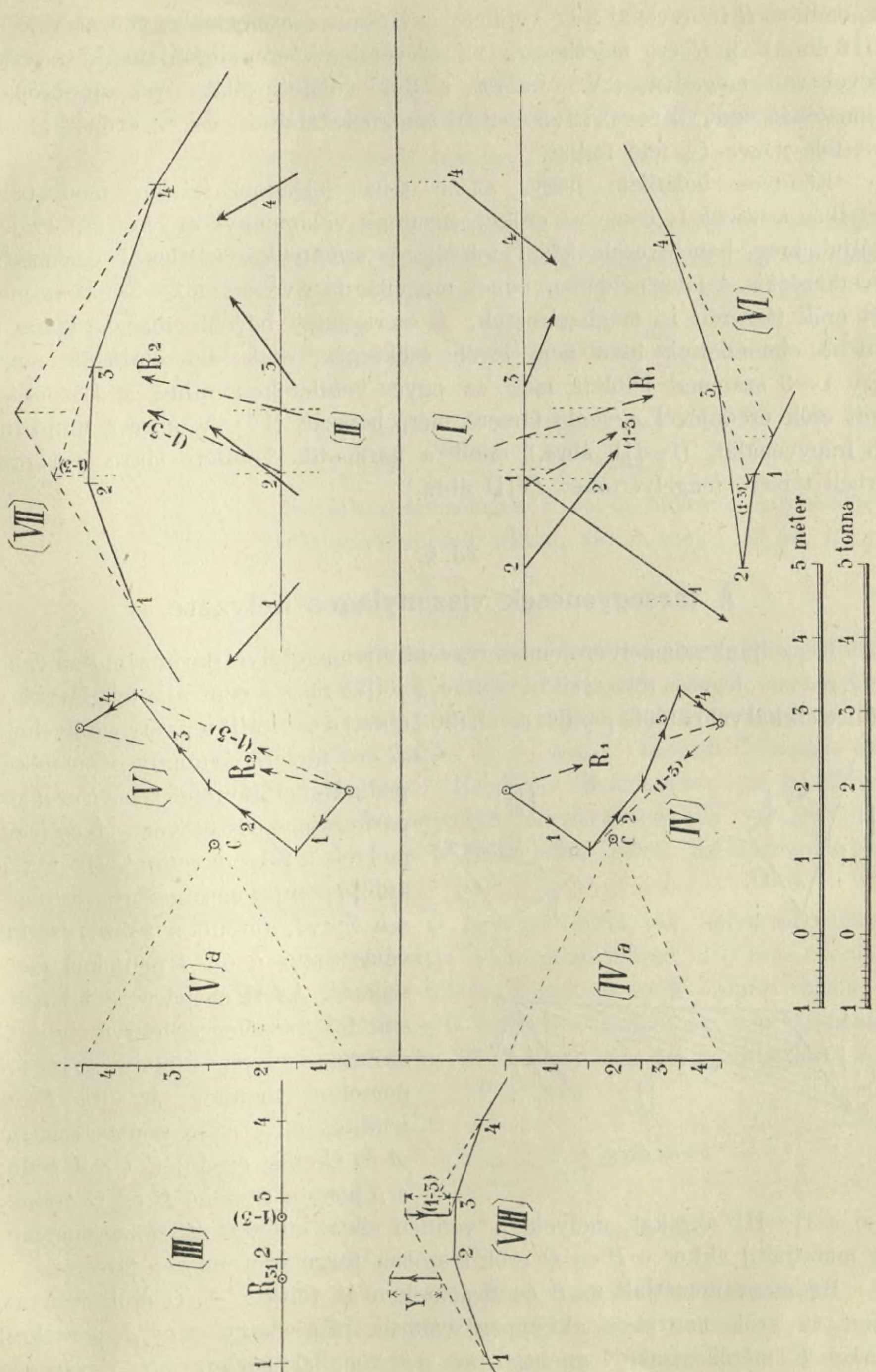
Világos, hogy ezzel az összeteendő erők oly társerőit találtuk meg, melyek egyike az $R_a$ és $R_b$ vetületek meghatározta $R$ erő, másika pedig a ℭ vetületi síkra eső oly erőpár, melynek nyomatéka mind nagyság, mind értelem dolgában egyenlő az $R_c$ erőnek az $R_{c1}$ egyenes valamely pontjára számított nyomatékával. Ha az $R_a$, $R_b$ és $R_{c1}$ vetületű $R$ egyenes valamely pontjára helyezzük ugyanis át az összeteendő erőket, akkor oly

*) A térbeli erők összetételét kötélpiramisok és kötélprizmák segítségével lásd *Levy*: Stat. graph. I. p. 431; és *Steiner*: Graph. Zusammensetzung d. Kräfte.

két társerőt találunk ez úton, az 1 pontban mondottak szerint ez erőkre, melyek egyike az $R$ egyenesre eső $R$ erő, másika az áthelyezésből keletkező erőpár, és mindkettőre nézve közönyös, hogy a térbeli $R$ egyenes melyik pontjára helyeztük át az összeteendő erőket. Az áthelyezésből keletkező erőpárt a vetítéssel, amint tudjuk, a vetületi síkokra eső három összetevőre bontjuk. Ez összetevők bármelyikének nyomatéka, a síkjára merőleges tengelyekre számítva, egyenlő az e síkban talált erőpár-vetületek nyomatékával, tehát az erő-vetületeknek az $R$ egyenes vetülete valamely pontjára számított nyomatékával, tekintve hogy az összeteendő erőket, amint épp említettük, a térbeli $R$ egyenes bármely pontjára áttehetjük. Ha meggondoljuk, hogy az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ síkokon talált erő-vetületek nyomatéka az $R$ egyenes vetületének pontjaira nézve zérus, akkor tehát világos, hogy az áttételből keletkező erőpárnak csak a $\mathfrak{C}$ vetületi síkon van összetevője, s hogy ennek nyomatéka egyenlő az $R_c$ erőnek az $R_{c1}$ egyenes pontjaira számított nyomatékával.

Amint ezekből kitetszik, könnyen meghatározhatjuk ez úton ugyanegy szerkesztéssel, minden tetszőleges erőrendszer három oly társerő-párját, melyek egyikében az $\mathfrak{A}$, másikában a $\mathfrak{B}$, harmadikában a $\mathfrak{C}$ vetületi síkra esik az erőpárbeli társerő.

A 95. I—VIII ábrán az imént előadott módon határoztuk meg az 1—4-gyel számozott erők oly társerőit, melyek egyike az $R_1, R_2$ vetületű egyenesre esik, s egyenlő a központosított erőrendszer eredőjével, másika pedig a harmadik vetületi síkra eső oly erőpárból áll, melynek tengelyértéke, vonatkozással $c = 3$m.-re mint alapra, az $Y$ hosszúság. (I—VIII ábra.) Az erők irányvonalait csak az első és második vetületen húztuk meg; a harmadik vetületen csak metszéspontjaikat szerkesztettük és számoztuk meg, az 1, 2, 3, 4-gyel jelölt vízszintes egyenesen. (I—III ábra.) Ezután megszerkesztettük az erővetületek erőpoligónjait a két első vetületre, s meghatároztuk ezeken az erővetületek eltolt $R_1$ és $R_2$ eredőit. (IV—V ábra.) Ez eredők irányvonalainak fölkeresése végett vízszintes átmetsző egyeneseket vettünk föl a vetületi síkokon, fölbontottuk az erő-vetületeket mindegyik vetületi síkon az átmetsző vízszintesre eső, és erre merőlegesen álló összetevőkre, s megrajzoltuk a merőleges összetevők erő- és kötélpoligónját mind a három vetületre, (IV$a$; V$a$; és VI; VII; VIII ábra), tekintve hogy, bármelyik vetületet értjük is, az erővetületek eredőjének irányvonala azon a ponton megy át, melyen az átmetsző egyenes a merőleges összetevők eredőjét vágja, s így az erőpoligón fölhasználásával könnyen megszerkeszthető; és tekintve, hogy a merőleges összetevők kötélpoligónjával, a 14. § 3-ban előadottak szerint, az erővetületek nyomatékát is könnyen meg lehet szerkeszteni. A tisztább megérthetőség végett egyébiránt csak azt a két társerőt szerkesztettük meg, melyek egyike a központosított erőrendszer $R$ eredőjéből áll, s az $R_1, R_2$ vetületű $R$ egyenesre esik, másika tehát a harmadik vetületi síkra eső erőpár. Az erővetületek nyomatékát ezért csak a 3-ik vetületre határoztuk meg, mint a merőleges összetevőknek arra az $R_{31}$ pontra számított nyomatékát, melyen az




95-ik ábra. c = 3m.

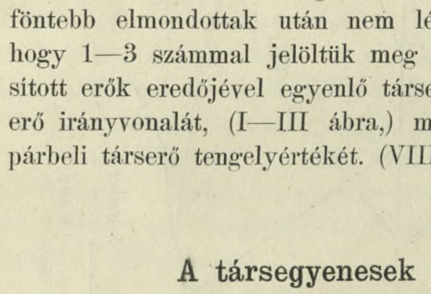
épp említett $R$ irányvonal 3-ik vetülete a vízszintes átmetsző egyenest vágja. (VIII ábra.) Az $R$ erő mérőhossza az erővetületek erőpoligónjain két vetületével van megadva, (IV—V ábra), a 3-ik vetületi síkra eső társ-erőpár nyomatékát pedig $Yc = 0{,}72 \,.\, 3 = 2{,}16$ t. m.-nek találtuk, és ez erőpár az $Y$ nyil felé nézve ↻ felé forgat.

Könnyen belátható hogy, az e §-ban előadott három mód bármelyikén teszszük is össze az erőket, nemcsak valamennyi erő két társ-erőjét találjuk meg, hanem ezek közül tetszőleges számú közvetetlenül egymásra következőét is. A jelen példában, ennek megvilágítása végett az 1—3-mal számozott erők társerőit is meghatároztuk. A szerkesztés bővebb magyarázata a föntebb elmondottak után nem lévén szükséges, csak azt említjük meg, hogy 1—3 számmal jelöltük meg az egyes vetületeken mind a központosított erők eredőjével egyenlő társerő mérő hosszát, (IV—V ábra,) mind ez erő irányvonalát, (I—III ábra,) mind a harmadik vetületi síkra eső erőpárbeli társerő tengelyértékét. (VIII ábra.)

## 23. §.

## A társegyenesek viszonylagos helyzete.

Képzeljünk valamely erőrendszert a centrális tengelylyel párhuzamosan, valamely, reá merőlegesen fölvett síkra vetítve, jelöljük meg a centrális tengelynek a vetületi síkkal való átdöfő pontját $\varrho$-val, (96.I ábra,) a centrális tengelyen fölvehető $R$ erő társerőpárjának nyomatékát pedig $\mathsf{M}$-mel. Bontsuk föl az $R$ erőt két párhuzamos összetevőre, $A$- és $B$-re, melyek a fölvett vetületi síkot a $\varrho$ átdöfő ponttal ugyanazon az egyenesen fekvő, különben tetszés szerint választható $\alpha$ és $\beta$ pontokon metszik át. Az $\mathsf{M}$ erőpárt pedig bontsuk föl tetszőleges irányú oly $\pm\, C$ erőkre, melyek szintén az $\alpha$ és $\beta$ pontokon mennek át. Ha $P$-vel jelöljük meg az $\alpha$ ponton átmenő $A$ és $C$ erők eredőjét, $Q$-val pedig a $\beta$ ponton átmenő $B$ és $C$ erőkét, (lásd a II—III ábrákat, melyek a vetületi síkra leforgatott erőháromszögeket mutatják,) akkor e $P$ és $Q$ erők a szóban forgó erőrendszer társerői.



96-ik ábra.

Ha megváltoztatjuk az $\alpha$ és $\beta$ pontokon át fölvett $\pm\, C$ erők irányát, akkor ez erők nagysága akképpen változik meg, hogy $\alpha$ és $\beta$ pontoktól fölmért $C$ mérőhosszak végpontjai az $\alpha\beta$ vonallal párhuzamos egyenesen mozdulnak el, tekintve hogy a $\pm\, C$ erőpár nyomatékának mindig $\mathsf{M}$-nek kell lennie, s tekintve, hogy e nyomaték arányos az egyik $C$ mérő hosszból és és az $\alpha\beta$ hosszúságból szerkesztett, — a 96. I ábrán megvonalzott, — háromszög területével. A $P$ és $Q$ erők mérő hosszainak végpontjai a $\pm C$ erők forgatása alatt, amint ezekből látjuk, $\alpha\beta$-val, párhuzamos egyeneseken mozdulnak el a térben: a $P$ és $Q$ erők irányvonalai tehát oly síkokban forognak az $\alpha$ és $\beta$ pontok körül, melyek mindegyike az $\alpha\beta$ egyenesen, tehát a $\varrho$ átdöfő ponton is átmegy.

Ha az $\alpha\beta$-ra merőleges $C$ erő értékét $C_0$-val, az $\alpha\varrho$ és $\beta\varrho$ távolságokat $a$ és $b$-vel, a $P$ és $Q$ erők leirta síkok hajlásszögeit az $R$-re merőlegesen fölvett vetületi síkkal pedig szintén $\alpha$- és $\beta$-val jelöljük meg, akkor

$$C_0 = \frac{\mathsf{M}}{a+b};\ B = \frac{Ra}{a+b};\ A = \frac{Rb}{a+b}$$

tehát

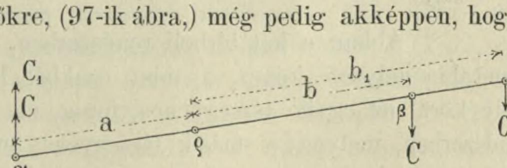
$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{A}{C_0} = \frac{Rb}{\mathsf{M}};\ \operatorname{tang}\beta = \frac{Ra}{\mathsf{M}};\ \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta} = \frac{a}{b},$$

és ha $\alpha_1$ és $\beta_1$-gyel jelöljük a tetszőleges $P$ és $Q$ társerők hajlásszögeit a centrális-tengelyre merőlegesen fölvett síkkal, akkor ezekre is áll, hogy

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\beta_1} = \frac{a}{b}$$

tekintve, hogy a $P$ és $Q$ irányvonalakon át, a centrális tengelylyel párhuzamos irányban fölvett vetítő síkok párhuzamosak egymás között. (Az $A$, $C$, $P$ és $B$, $C$, $Q$ derékszögű erőháromszögekből ez különben közvetetlenül is következik, tekintve, hogy ezekben az $\alpha_1$ és $\beta_1$ szögek melletti $C$ oldalak egyenlőek; lásd a 96. II—III ábrát.) Ha $R$ és $\mathsf{M}$ ismeretes, és ha fölvettük az $\alpha$ és $\beta$ pontokat, a centrális tengelyre merőlegesen álló valamely tetszőleges egyenesen, akkor a $P$ és $Q$ erők leirta síkok hajlásszögeit e képletekből meg lehet határozni.

Hogy megállapithassuk a $Q$ egyenes leirta sík helyzetét abban az esetben, ha a $P$ erő $\alpha$ átdöfő pontja változatlan marad, a $Q$ erőé ellenben az $\alpha\varrho$ egyenesen elmozdul, bontsuk föl az $R$ erőt és az $\mathsf{M}$ erőpárt előbb az $\alpha$ és $\beta$ pontokon átmenő $A$, $B$ és $\pm C$ erőkre, s ezután az $\alpha$ és $\beta_1$ pontokon átmenő $A_1$ $B_1$ és $\pm C_1$ összetevőkre, (97-ik ábra,) még pedig akképpen, hogy a $\pm C_1$ erők a $\pm C$ erőkkel párhuzamosak legyenek. Könnyen belátható, hogy a $B$ és $C$ erők arányosak $B_1$-és $C_1$-gyel, tekintve hogy mind a $C$ és $C_1$, mind a $B$ és $B_1$ erők úgy



*97-ik ábra.*

viszonylanak egymáshoz, mint megfordítva az $\alpha\beta$ és $\alpha\beta_1$ távolságok. Ha a $B_1$ $C_1$ eredőt $Q_1$-gyel jelöljük meg, akkor a $\beta_1$ ponton átmenő $Q_1$ erő, a mint ezekből látjuk, ugyanabba a síkba esik, mint a $\beta$ ponton átmenő $Q$ erő. Az $\alpha$ ponton átmenő $A_1$ és $C_1$ erők $P_1$ eredője ellenben nem eshet ugyanabba, az $\alpha\varrho$ egyenesen átmenő síkba, melybe a $P$ erő, mivelhogy, ha a $\beta$ pont távozik $\alpha$-tól, az $A$ erő nagyobbodik, a $C$ erő kisebbedik, az $A_1$ és $C_1$ erők tehát nem lehetnek arányosak az $A$ és $C$ erőkkel.

*Összefoglalva az e pontban eddig előadottakat, kitetszik hogy, ha bármely erőrendszer bármely két társegyenesén át, a centrális tengelylyel párhuzamos irányban síkokat veszünk föl, e síkok egymással is párhuzamosak; s ha tetszőleges ponton át, a centrális tengelyre merőleges irányban fölvett síkkal vágjuk a centrális tengelyt és tetszőleges két társegyenest, a három metszéspont mind a két társegyenesre merőlegesen álló ugyanabba az egyenesbe esik. Az az egyenes, mely tetszőleges két társegyenes mindegyikére merőleges, és mindegyikét átmetszi, ezek következtében a centrális tengelyt is átmetszi és erre is merőleges.*

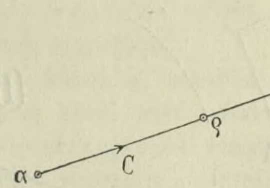
*Kitetszik továbbá a föntebb mondottakból, hogy, ha két társerő közül az egyik a tetszőleges $\alpha$ pont körül forog, a másik oly $\mathfrak{S}$ síkot ír le, mely az $\alpha$ forgási középponton és azon az $\alpha\varrho$ egyenesen megy át, melyet az $\alpha$ ponton át a centrális tengelyre merőlegesen húzhatunk. E sík iránya az $\alpha$ forgási középpont és a centrális tengely közötti $\alpha\varrho$ távolságtól függ, s ebbe a síkba esik, önként értődőleg, az az erőpár is, mely az $\alpha$ ponton működő, s a központosított erőrendszer $R$ eredőjével $\#$ erőnek társerője. Az $\alpha$ pont körül forgó $P$ erő $Q$ társerője akképpen írja le az éppen említett $\mathfrak{S}$ síkot, hogy, míg a $P$ erő a centrális tengelyre merőlegesen vont $\alpha\varrho$ egyenesen átmenő valamely síkban forog, addig társerője az $\alpha\varrho$ egyenesen fekvő oly $\beta$ pont körül forog, melynek távolsága a centrális tengelytől, a $P$ erő leírta sík irányától függ. S ha a $P$ erő az $\alpha\varrho$ egyenesen átmenő más-más síkban forog az állandó $\alpha$ pont körül, akkor társerője az $\alpha\varrho$ egyenesen fekvő más-más pont körül forog az állandó $\mathfrak{S}$ síkban. Minthogy pedig az $\alpha$ pontot a térben tetszőleges módon föl lehet venni, erre való tekintetettel világos, hogy a térben fölvehető minden egyenes képezheti ugyan két társerő egyikének irányvonalát, hogy azonban minden ily egyenesnek csak egyetlen egy más egyenes felel meg mint társ-irányvonal. Ha pedig két társegyenes egyikének $\frac{\text{pontja}}{\text{síkja}}$ van megadva, ezzel meg van határozva a másik társ-egyenes $\frac{\text{síkja}}{\text{pontja}}$.*

Abban a két térbeli rendszerben, melyet a $P$ és $Q$ társegyenesek számtalan helyzete képez, a mint ezekből látjuk, minden oly $\alpha$ pontnak, mely körül az egyik társegyenes forog, oly sík felel meg a másik térbeli rendszerben, melyen a másik társegyenes mozog, s mely mindig átmegy a neki megfelelő $\alpha$ ponton. *A társegyenesek két serege képezte térbeli rendszerek tehát reciprocitásban vannak egymással, s úgynevezett zérus-rendszert képeznek.*

Ha az $\alpha$ forgási középpont az erőrendszer centrális tengelyére merőlegesen vont $\alpha\varrho$ sugárban mozdul el, (96-ik ábra,) akkor a megfelelő sík e sugár körül forog. Az erőrendszer centrális tengelyét derékszög alatt metsző minden sugár, amint ezekből látjuk, önmagának felel meg, *a zérus-rendszer főtengelyét tehát az erőrendszer centrális tengelye képezi.*

Az e pontban alább még következő tételek egy részét ebből közvetetlenül, geometriai úton is le lehet származtatni. A kérdés sztatikai voltának jobb megvilágítása céljából azonban helyesebb lesz sztatikai úton vezetni le őket.

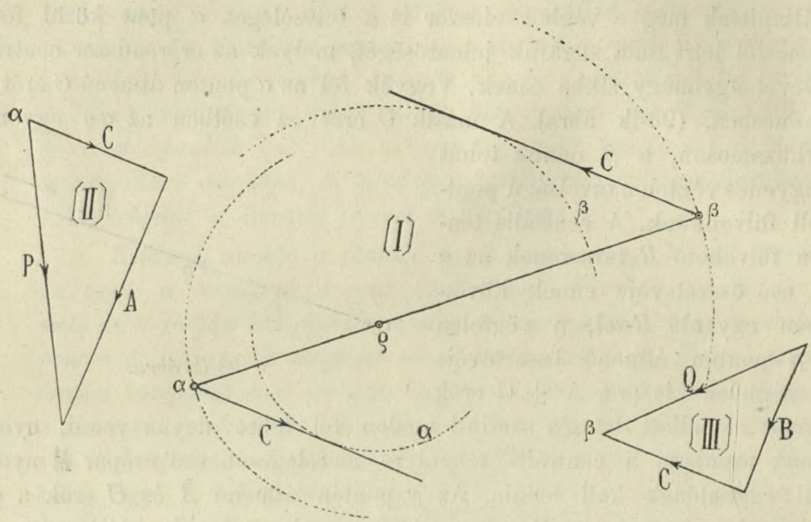
Állapítsuk meg e végből először is a tetszőleges $\alpha$ pont körül forgó $P$ egyenestől leírt ama sugarak jelentőségét, melyek az erőrendszer centrális tengelyével ugyanegy síkba esnek. Vegyük föl az $\alpha$ ponton átmenő $C$ erőt az $\alpha\varrho$ egyenesben. (98-ik ábra). A másik $C$ erőt ez esetben az $\alpha\varrho$ egyenessel párhuzamosan, a $\beta$ pontot tehát az $\alpha\varrho$ egyenes végtelen távolságú pontján kell fölvennünk. A centrális tengelyben fölvehető $R$ társerőnek az $\alpha$ pontra eső összetevője ennek következtében egyenlő $R$-rel, a végtelen távol $\beta$ ponton átmenő összetevője pedig végtelen kis erő. A $\pm C$ erők nagyságát e mellett tetszés szerinti módon föl lehet ugyan venni, nyomatékuknak azonban a centrális tengelyre merőlegesen eső erőpár **M** nyomatékával egyenlőnek kell lennie. Az $\alpha$ ponton átmenő $A$ és $C$ erők a centrális tengelyt metsző oly $P$ erőt eredményeznek, melynek hajlásszöge a $C$ erő fölvételétől függ. A végtelen távolságú $\beta$ ponton átmenő erők $Q$ eredője pedig $\#$ $C$-vel, tekintve, hogy a végtelen távolságú és végtelen kis $B$ erő síkja a $B$-vel összeteendő $C$ erő irányvonalával párhuzamos. Ha fölbontjuk a $P$ erőt ama $\gamma$ ponton, melyen a centrális tengelyt átmetszi, az erre eső $R$ és a reá merőleges irányú $C$ összetevőre, akkor ez összetevőnek az épp említett $Q = C$ erővel oly erőpárt kell képeznie, melynek síkja merőleges a centrális tengelyre, tekintve, hogy a centrális tengelyben fölvett $R$ erő társerőjét a centrális tengelyre merőleges síkra eső erőpárnak kell képeznie.



*98-ik ábra.*

*Ha két társerő $P$ és $Q$ közül a $P$ erő a centrális tengelyt a $\gamma$ ponton át metszi, akkor a $Q$ erő az imént mondottak következtében, a $\gamma$ metszésponton átmenő, a centrális tengelyre merőlegesen álló síkra esik, s párhuzamos a $P$ erő és a centrális tengely képezte síkkal. A $Q$ erő egyenlő a $P$ erőnek a centrális tengelyre merőleges irányú összetevőjével, s ezzel oly erőpárt képez, melynek nyomatéka a centrális tengelyben fölvett $R$ erő társerőpárjának* **M** *nyomatékával egyenlő; a $P$ erőnek a centrális tengelylyel párhuzamos irányú összetevője pedig egyenlő $R$-rel. Ha két társerő egyikének irányvonala párhuzamos a centrális tengelylyel, akkor ez erő tehát egyenlő $R$-rel, társerője pedig erőpárból áll.*

Igen jól megvilágítja a társegyenes-párok közötti geometriai vonatkozásokat, ha fölbontjuk a centrális tengelyben fölvett $R$ erőt, úgy mint föntebb ismételve tettük, vele párhuzamos két összetevőre, $A$- és $B$-re, melyek a reá merőlegesen fölvett vetületi síkot az $\alpha$ és $\beta$ pontokon metszik, az **M** erőpárt pedig az $\alpha$ és $\beta$ pontokon átmenő, különben tetszőleges irányú $\pm C$ összetevőkre, (99-ik ábra,) és ha az $\alpha$ és $\beta$ pontokat, az $A$ és $C$, és a $B$ és $C$ erőkkel, s ezek $P$ és $Q$ eredőivel együtt a centrális tengely körül forgatjuk.




*99-ik ábra.*

Minthogy a forgás közben az $A$, $C$, $B$, $C$ erők mindig a centrális társerők összetevői maradnak, társerők maradnak a forgás közben a $P$ és $Q$ erők is, miből mindenekelőtt az következik, hogy, *ha tetszőleges társegyeneseket a centrális tengely körül forgatunk, ezek minden helyzetben új társegyeneseket képeznek, tehát társ-hiperboloidokat írnak le.*

Az $\alpha$ és $\beta$ pontok a forgás közben egyébiránt az $\alpha$ és $\beta$ köröket írják le a centrális tengely körül, a $\pm C$ erők pedig a centrális tengely körül vont $\alpha$ és $\beta$ köröket burkolják. S ha megszerkesztjük a térben az $R, Q, P$ erőháromszöget, (lásd 22. §; 93. ábra), s ha ezt ugyanarra felé és ugyanama szögsebességgel forgatjuk az $R$ oldala körül, amint a $P$ és $Q$ erők irányvonalait centrális tengely körül, akkor a $P$ és $Q$ irányvonalak mindig párhuzamosak az erőháromszögek forgásából keletkező erőkúpok $P$ és $Q$ alkotóival.

Amint továbbá az épp mondottakból szintén kitünik, a centrális tengely $\varrho$ átdöfő pontja körül vont bármely $\alpha$ és $\beta$ körökön végtelen sok társhiperboloid megy át. A centrális tengelyre merőlegesen fölvett bármely síkban, a $\varrho$ átdöfő ponton át húzott bármely egyenesen, minden tetszőleges módon fölvehetjük ugyanis az $\alpha$ és $\beta$ átdöfő pontokat, s az $\alpha$ ponton át, a $\beta$ pontnak megfelelő síkban, végtelen sok oly egyenest, melynek társegyenese a $\beta$ ponton megy át. Ha az $\alpha$ és $\beta$ pontokat egyenlő távolságban veszszük föl a centrális tengelytől, akkor a $P$ és $Q$ társegyenesek leírta társ-hiperboloidok összeesnek, tekintve, hogy ekkor $A = B$, s ez okból a $180^0$-os szögben forgatott $P$ erő $\#$ a nem forgatott $Q$ erővel. Az alkotóknak a toroksíkkal képezett szögeiben a *tang.*-ek, tetszőleges két társ-hiperboloidon, megfordított viszonyban vannak a torok-körök sugaraival. Társegyeneseket tetszőleges társ-hiperboloidok oly alkotói képeznek, melyek a centrális tengelyre merőleges irányban fölvett bármely síkot a centrális tengely átdöfő pontjával ugyanegy egyenesre eső pontokon döfik át; s az ily társalkotókon a centrális tengelylyel párhuzamos irányban fölvett síkok párhuzamosak egymással. Két társ-hiperboloid alkotóinak két serege oly két erőrendszer társirányvonalaiból áll, melyek vagy a centrális tengelyben fölvett $R$ erő vagy ennek **M** társ-erőpárja előjelében különböznek egymástól.

A társegyenesek leírta hiperboloidok kúpokba, síkokba és hengerfölületekbe is átmehetnek. A centrális tengely körül leírt minden oly kúphoz ugyanis, mely e tengelyt átmetsző valamely egyenes forgásából keletkezik, a föntebbiek szerint a kúp csúcspontján átmenő, s a centrális tengelyre merőlegesen álló sík tartozik, mint az a fölület, melyen a kúpalkotók társegyenesei vannak. A centrális tengely körül leírt körhengerek alkotóiban fölvett $R$ erők végtelen kis társerői pedig a végtelen távol síkra esnek.

A forgatáson kivül még akképpen is keletkeznek tetszésszerinti két társerőből további társerők, ha az $\alpha$ és $\beta$ átfödő pontokat, (99-ik ábra,) az $A$ és $C$, és a $B$ és $C$ erőkkel, s ezek $P$ és $Q$ eredőivel együtt a centrális tengelylyel párhuzamos irányban, ugyanabban az értelemben ugyanarra a, — különben tetszőleges, — távolságra eltoljuk. Ez eltolás közben ugyanis az $A$, $B$ és a $\pm C$ erők a centrális társerők összetevői maradnak, tekintve, hogy az $A$ és $B$ erők az eltolás következtében egyáltalában nem változnak meg, sem irányvonalaikban, sem egyébben, a $\pm C$ erőkből álló erőpár síkja pedig önmagával párhuzamosan mozdul el.

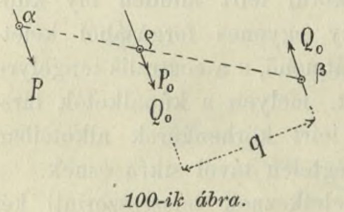
*A társerők forgatásáról föntebb előadott tételt avval egészíthetjük ki ezek következtében, hogy, ha ugyanabban az értelemben ugyanama szöggel forgatunk tetszőleges két társegyenest a centrális tengely körül; vagy ha ugyanabban az értelemben, ugyanarra a távolságra toljuk el ez egyeneseket a centrális tengelylyel párhuzamos irányban; vagy ha egyidejűleg el is toljuk és el is forditjuk a szóban levő társegyeneseket az épp említett módon: ez egyenesek minden helyzetben új társegyeneseket, s a bennük fölvehető társerők oly társerőket képeznek, melyek csak az irányvonalakban különböznek egymástól. S ha két társ-hiperboloidot tolunk el a centrális tengelylyel párhuzamosan, ugyanabban az értelemben és ugyanarra a távolságra, akkor új társ-hiperboloidok keletkeznek.*

## 24. §.

## Új társerők megszerkesztése adott társerőkből.

Ha valamely erőrendszer két társerőjét a 22-ik §-ban előadott módok egyikén meghatároztuk, ezekből gyakran más társerőket kell, bizonyos előre megállapitott föltételek alatt szerkeszteni, mire nézve a következőket jegyezzük meg e helyen.

***Első föladat.*** Meg vannak adva valamely erőrendszer centrális társerői $R$ és $\mathsf{M}_o$; (tehát a centrális tengely is;) szerkesztessék meg a nem végtelen nagy távolságú, és a centrális tengelylyel nem párhuzamos irányú $P$ egyenes $Q$ társegyenese, és az ezekre az egyenesekre eső $P$ és $Q$ társerők. Húzzuk meg a $P$ egyenes tetszőleges $\alpha$ pontjából az $\alpha\varrho$ egyenest merőlegesen a centrális tengelyre. Legyen $\varrho$ ez egyenesnek a centrális tengelylyel való metszéspontja. (100-ik ábra.) Tudjuk hogy, ha a $P$ irányvonal az $\alpha\varrho$ egyenes hosszában, magával párhuzamosan elmozdul, a társegyenes az $\alpha\varrho$ egyenesnek állandó $\beta$ pontja körül forog. E $\beta$ pontot, melyen tehát a $P$ erő társerője is átmegy, úgy határozhatjuk meg ezek következtében, hogy megszerkesztjük a $\varrho$ ponton a $P$ egyenessel párhuzamosan fölvett $P_0$ irányvonal társegyenesének az $\alpha\varrho$ egyenessel való metszéspontját. Ismeretes azonban a föntebb mondottakból, hogy, ha az e $P_o$ egyenesben fölvehető $P_o$ erő az egyik társerő, s ha ezt a centrális tengelylyel párhuzamos és erre merőleges irányú összetevőkre bontjuk a $\varrho$ metszésponton: a párhuzamos összetevő $= R$-rel, a merőleges összetevő pedig a $P_o$ erő társerőjével $Q_o$-val oly erőpárt képez, mely a $\varrho$ ponton át, a centrális tengelyre merőlegesen fölvett síkra esik, s melynek nyomatéka egyenlő a centrális társerők erőpárja $\mathsf{M}_o$ nyomatékával. A $\beta$ pont $q$ távolsága, a centrális tengelyen át a $P$ egyenessel párhuzamosan fölvett síktól, amint ezekből látjuk, egyenlő az $\mathsf{M}_o$ erőpár nyomatéki mérőhosszával, vonatkozással $Q_o$-ra mint alapra, amiből könnyen meghatározhatjuk előbb a $q$ távolságot, s ezután a $\beta$ pontot, tekintve, hogy $Q_o$ a $P_o$ erőnek a centrális tengelyre merőlegesen álló összetevője, s tekintve, hogy $P_o$ abból ismeretes, hogy a centrális tengelylyel párhuzamos összetevője $= R$-rel



*100-ik ábra.*

A $\beta$ pont meghatározása után könnyen meg lehet szerkeszteni a $P$ irányvonal $Q$ társ-egyenesét, még pedig vagy abból, hogy ez az egyenes a $\beta$ ponton át a $P$ egyenessel és a centrális tengelylyel párhuzamosan fölvehető síkra esik, és hogy a $Q$ és a $P$ egyeneseknek a centrális tengelyre merőlegesen álló síkokkal képezett szögeinek *tang*-ei úgy viszonylanak egymáshoz, mint $\alpha\varrho : \beta\varrho$-hoz. Vagy meghatározzuk, a $\beta$ pont megszerkesztése után, a $Q$ egyenes irányát, megszerkesztve a $P, Q, R$ erőháromszöget. E célból fölbontjuk a centrális tengelyen fölvett $R$ társerőt az $\alpha$ és $\beta$ pontokra eső $A$ és $B$ párhuzamos összetevőkre. Ismerve az $A$ összetevőt, könnyen meg lehet szerkeszteni előbb a $P$ erőt és ezután az $R, P, Q$ erőháromszöget.

***Második föladat.*** Meg van adva valamely erőrendszer két oly társerője, melyek egyike a centrális tengelylyel párhuzamos $r$ irányvonalú

$R$ erőből, másika az adott $\mathfrak{A}$ síkra eső $\mathbf{M}$ nyomatékú erőpárból áll. Szerkesztessék meg oly két társerő, melyek egyike a centrális tengelylyel szintén párhuzamos $r_1$ egyenesre esik.

Átteszszük az $R$ erőt az $r$ egyenesről a vele párhuzamos $r_1$ egyenesre, s összeteszszük az áthelyezésből keletkező $Rq$ nyomatékú, és az $rr_1$ síkra eső erőpárt, ($q$ az $r$ és $r_1$ egyenesek távolsága,) az $\mathfrak{A}$ síkban megadott $\mathbf{M}$ nyomatékú erőpárral. E két erőpár eredője az $r_1$ egyenesre áttett $R$ erő társerője.

***Harmadik föladat.*** Meg van adva valamely erőrendszer két társerője, $S$ és $T$, melyek egyike sem esik a centrális tengelyre. Szerkesztessék meg a nem végtelen távol levő, a centrális tengelylyel nem párhuzamos irányú $P$ egyenes $Q$ társegyenese, s határoztassanak meg az ezeken az egyenesekben fölvehető $P$ és $Q$ társerők.

Mindenekelőtt a központosított $S$ és $T$ erők $R$ eredőjét szerkesztjük meg, meghatározva ez úton a centrális tengely irányát. Ezután eltoljuk az $S$ és $T$ erőket magukkal párhuzamosan, a centrális tengely irányában, míg egyikük, az $S$ erő, az adott $P$ egyenest át nem metszi, (megszerkesztjük tehát a $P$ egyenes átdöfő pontját az $S$ egyenesen át, az $R$ iránynyal párhuzamosan fölvett síkkal), s fölbontjuk az eltolt $S$ erőt két oly összetevőre, melyek egyike a $P$ egyenesre esik, másika pedig oly $X$ egyenesre, mely az eltolt $T$ erőt a $\gamma$ ponton metszi. Világos, hogy az ekképp megszerkesztett $P$ erő megadja az egyik, a $\gamma$ ponton átmenő $X$ és $T$ erők $Q$ eredője pedig a keresett másik társerőt.

Az, ha az adott $S$ és $T$ társerők egyike, a $T$ erő, végtelen távolságú végtelen kis erő, az imént előadottak alkalmazásában semmi lényeges változást nem okoz. Az $X$ egyenest ez esetben akképpen kell meghatározni, hogy a végtelen távolságú $T$ erőt átmesse, vagyis akképpen, hogy párhuzamos legyen a $T$ erőpár síkjával. Ez megtörténvén, fölbontjuk az eltolt $S$ erőt a $P$ és $X$ összetevőkre, s meghatározzuk az $X$ erő és a $T$ erőpár $Q \# X$ eredőjét a nélkül, hogy e végből az $S$ erővel együtt a $T$ erőpárt is el kellett volna tolni.

Akképpen is meg lehet továbbá a tárgyalásban levő föladatot oldani, — akár véges távolságúak az adott $S$ és $T$ társerők, akár erőpárból áll egyikük, — hogy az $S$ és $T$ egyenesek helyett a $P$ egyenest toljuk el, magával párhuzamosan, a centrális tengely irányában, míg az adott erők egyikét, az $S$-et át nem metszi. Ezután két oly társerőt szerkesztünk, melyek egyike az eltolt $P$ egyenesre esik, s visszatoljuk e társerőket, míg az eltolt $P$ egyenes, eredeti helyére vissza nem jut.

Ha ismeretes a centrális tengely, akkor forgatni is lehet körülötte az adott $S$ és $T$ társerőket, vagy helyettük az adott $P$ egyenest; avagy pedig a forgatáson kivül el is lehet tolni az $S$ és $T$ társerőket, vagy helyettük a $P$ egyenest a centrális tengelylyel párhuzamos irányban; a szerkesztés többi része egészen a föntebb magyarázott marad.

*Negyedik föladat.* Meg van adva valamely erőrendszernek nem végtelen távolságú két társerője $S$ és $T$. Szerkesztessék oly két társerő, melyek egyikének irányvonala e centrális tengelylyel párhuzamos irányú $r$ egyenes. (Azt az esetet, ha az adott társerők egyike erőpár, már a második föladatban tárgyaltuk.)

Áthelyezzük az adott $S$ és $T$ társerőket az $r$ egyenesnek alkalmasan fölvett $\gamma$ pontjára, s meghatározzuk mind a $\gamma$ pontra áttett erők, mind az áttételből keletkező erőpárok eredőjét.

*Ötödik föladat.* Meg vannak adva valamely erőrendszer nem végtelen távolságú társerői $S$ és $T$. Határoztassanak meg azok a társerők, melyek egyikét az adott $\mathfrak{P}$ síkban fölvehető erőpár képezi. E föladat megoldása végett meghatározzuk mindenekelőtt a központosított $S$ és $T$ erők $R$ eredőjét, megszerkesztjük az $S$ és $T$ irányvonalak $\alpha$ és $\beta$ átdöfő pontjait a $\mathfrak{P}$-vel párhuzamosan fölvett bármely $\mathfrak{P}_1$ síkkal, s fölbontjuk az $S$ és $T$ erőket az $\alpha$ és $\beta$ átdöfő pontokon két-két oly összetevőre, melyek egyike a $\mathfrak{P}$ síkra esik, másika pedig az $R$ iránynyal párhuzamos. A $\mathfrak{P}$ síkra eső két összetevő a keresett erőpárt adja meg, az $R$-rel párhuzamos $A$ és $B$ összetevők $R$ eredője pedig ez erőpár társerőjét.

Ha a $\mathfrak{P}$ síkot az $R$ irányra merőlegesen veszszük föl, akkor az $S$ és $T$ társerőkből e módon a centrális társerőket, s ezekkel az erőrendszer centrális tengelyét határozhatjuk meg. (Lásd a 92-ik ábra kapcsán előadottakat is; 22. § 2.)

*Hatodik föladat.* Meg van adva valamely erőrendszer két oly társerője, melyek egyike a centrális tengelylyel párhuzamos $r$ egyenesre eső $R$ erőből, másika az $\mathfrak{S}$ síkra eső, $\mathsf{S}$ nyomatékú erőpárból áll. Határoztassanak meg azok a társerők, melyek egyikét az adott $\mathfrak{P}$ síkra eső $\mathsf{P}$ erőpár képezi.

Fölbontjuk az $\mathsf{S}$ erőpárt két oly erőpárra $\mathsf{P}$- és $\mathsf{V}$-re, melyek közül a $\mathsf{P}$ erőpár síkja az adott $\mathfrak{P}$ síkkal, a $\mathsf{V}$ erőpáré pedig az adott $r$ egyenessel párhuzamos. $\mathsf{P}$ ekkor a keresett erőpár, a $\mathsf{V}$ erőpár és az adott $R$ erő eredője pedig e $\mathsf{P}$ erőpár társerője.

Ha a $\mathfrak{P}$ síkot az $R$ irányra merőlegesen veszszük föl, akkor egy erő és egy erőpár képezte társerőkből e módon a centrális társerőket, s ezekkel a centrális tengelyt szerkeszthetjük meg. (Lásd a 21. § 5-ben a 84-ik ábrára nézve mondottakat.)

## 25. §.

## Egyensúlyban levő, vagy erőpárt eredményező térbeli erők.

*1. A térbeli erőpárok egyensúlya.* Azt, hogy egyensúlyban vannak-e a térben működő tetszőleges erőpárok vagy sem: mind tengelyértékeik erőpoligónjának vetületeiből, mind közvetetlenül az erőpárok vetületeiből meg lehet itélni.

*Tekintve ugyanis, hogy egyensúlyban levő erőpárok eredőjének tengelyértéke zérus: kitetszik a 21. § 4-ben előadottakból, hogy a térben működő tetszőleges erőpárok akkor vannak egyensúlyban, ha tengelyértékeik erőpoligónjának két vetülete záródik; valamint akkor is, ha zérust tesz a nyomaték az erőpárok három oly vetületén, melyet nem ugyanazzal a síkkal párhuzamosan, különben tetszőleges irányokban, akár ugyanarra akár más-más síkra szerkesztettünk.*

***2. A térben működő tetszőleges erők.*** Akár egyensúlyban vannak a térben működő tetszőleges erők, akár erőpárból áll eredőjük, térbeli erőpoligónjuknak mind a két esetben záródnia kell, minthogy egyik esetben sem lehet az erőknek mérhető eredőjük. Ha tetszőleges irányban, tetszőleges síkra vetitünk egyensúlyban levő, vagy erőpárt eredményező valamely erőrendszert, akkor tehát az erővetületek is vagy egyensúlyban vannak, vagy erőpárt eredményeznek. S viszont, ha valamely erőrendszer legalább két vetületén, vagy egyensúlyban vannak, vagy erőpárt eredményeznek az erővetületek: a térbeli erők is vagy egyensúlyban vannak vagy erőpárt eredményeznek. Egyensúlyban különösen akkor van valamely erőrendszer, ha térbeli erőpoligónja záródik és ha az eredőjét képező erőpár zérus, minek föltételeit az előbbeni pontban az imént adtuk elő.

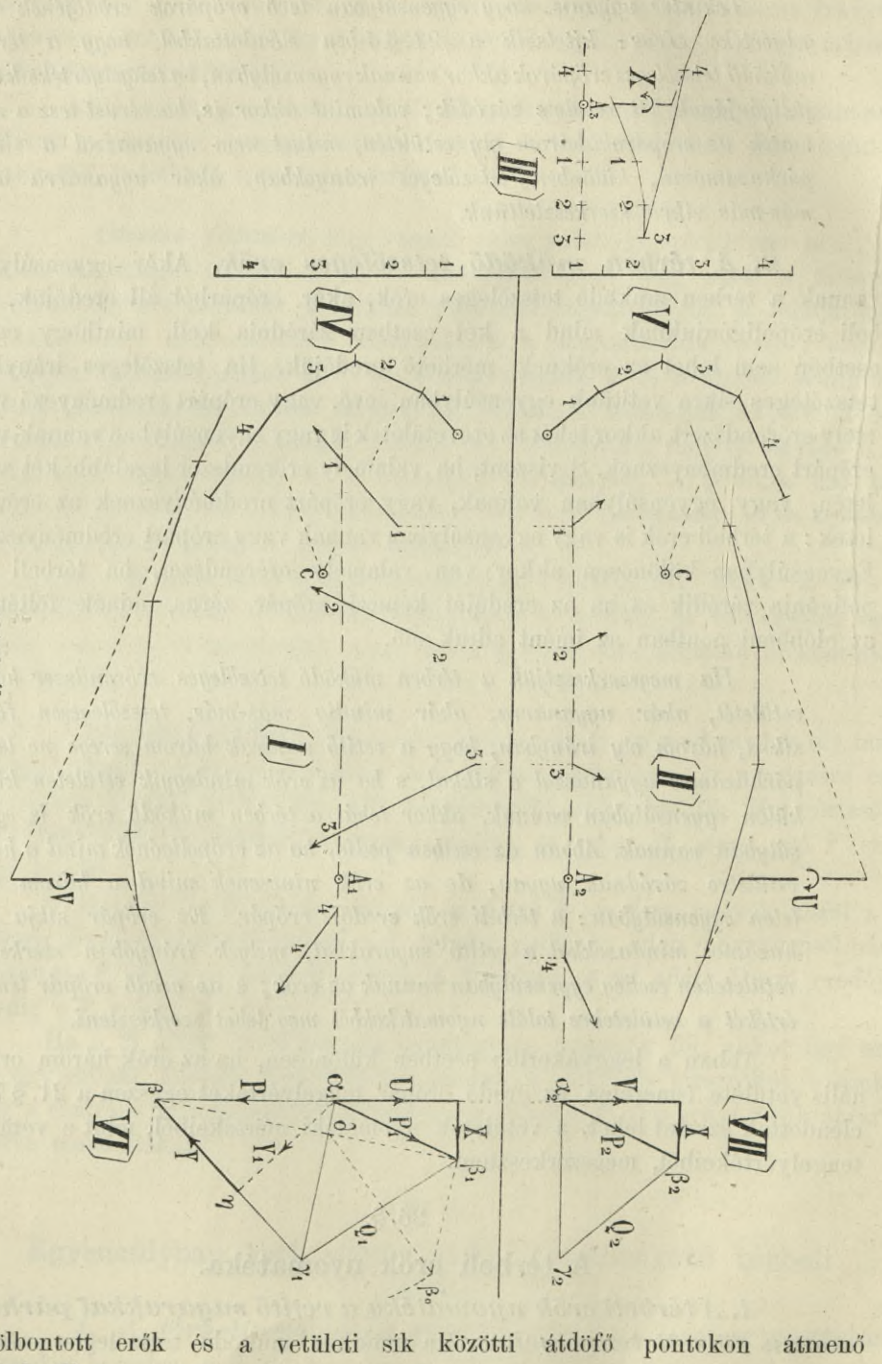
*Ha megszerkesztjük a térben működő tetszőleges erőrendszer három vetületét, akár ugyanarra, akár mindig más-más, tetszőlegesen fölvett síkra, három oly irányban, hogy a vetítő sugarak három serege ne legyen párhuzamos ugyanazzal a síkkal, s ha az erők mindegyik vetületen különkülön egyensúlyban vannak, akkor tehát a térben működő erők is egyensúlyban vannak. Abban az esetben pedig, ha az erőpoligónok mind a három vetületre záródnak ugyan, de az erők nincsenek mind a három vetületen egyensúlyban: a térbeli erők eredője erőpár. Ez erőpár síkja párhuzamos mindazokkal a vetítő sugarakkal, melyek irányában szerkesztett vetületeken esetleg egyensúlyban vannak az erők; s az eredő erőpár tengelyértékét a vetületekre talált nyomatékokból meg lehet szerkeszteni.*

Abban a leggyakoribb esetben különösen, ha az erők három ortogonális vetülete ismeretes, az eredő erőpár tengelyértékét egészen a 21. § 7-ban előadottak szerint lehet, a vetületek nyomatéki mértékeiből, mint e vetületek tengelyértékeiből, megszerkeszteni.

## 26. §.

## A térbeli erők nyomatéka.

***1. A térbeli erők nyomatéka a vetítő sugarakkal párhuzamosan fölvett tengelyekre.*** Ha a térben működő tetszőleges erőket, a tetszőleges $i$ irányban, a tetszőleges $\mathfrak{A}$ síkra vetítjük, akkor ezzel oly két csoportra bontottuk föl őket, melyek egyike a vetületi síkra eső, az erővetületekkel egyenlő, másika pedig a vetítő sugarakkal párhuzamos irányú,



101-ik ábra. 1 t. = 1 cm, 1 m. = 1 cm. c = 4 m.

a fölbontott erők és a vetületi sik közötti átdöfő pontokon átmenő erőkből áll.

*A vetítő sugarakkal párhuzamosan fölvehető tengelyre az utóbbi csoporthoz tartozó erőknek nem lévén nyomatéka, kitetszik a mondottakból, hogy bármely irányban, és bármely síkra vetítettünk is valamely erőrendszert, a térbeli erők nyomatéka, a vetítő sugarakkal párhuzamos tengelyekre nézve, egyenlő az erővetületek nyomatékával.*

Ha merőleges irányban vetítettünk valamely erőrendszert valamely síkra, akkor tehát épp úgy szerkeszthetjük meg a térbeli erők nyomatékát a vetületi síkra merőlegesen fölvehető bármely tengelyre, mint a síkbeli erőkre nézve a 13—14. §-ban előadtuk.

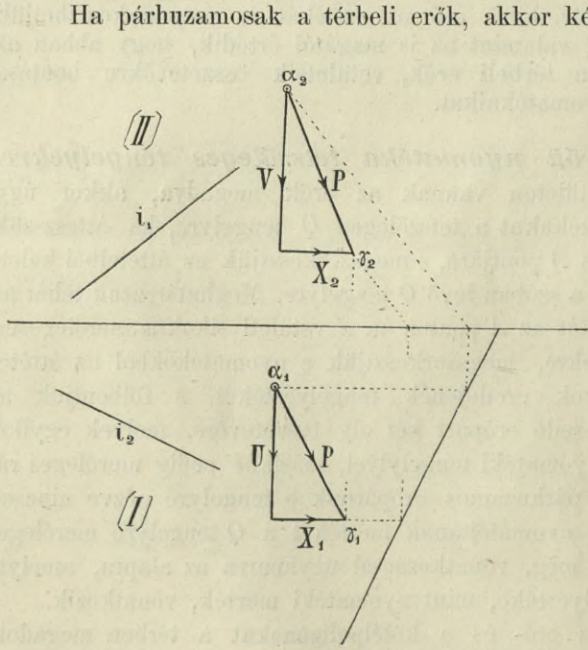
A 101. I—V ábrák az 1—4-gyel számozott erők három ortogonális vetületét mutatják. Az erővetületek nyomatékait a 14. § 3-ból ismert módon, t. i. egészen úgy szerkesztettük meg, mint a 22. § 3-ban a 95-ik ábra kapcsán magyaráztuk. Az 1—4-gyel számozott térbeli erők nyomatéki mértéke arra a tengelyre, melynek vetülete pl. az $A_2$ átmetsző egyenes $A_2$ pontja, $U$; arra a tengelyre, melynek vetülete az $A_1$ pont, $V$; arra a tengelyre pedig, melynek vetülete az $A_3$ pont, $X$, vonatkozással az átmetsző egyenesekre merőlegesen fölvett összetevők erőpoligónjainak $c$ magasságára mint nyomatéki alapra. A forgatás értelme sorban a $V, U$ és $X$ nyilakkal van megjelölve. Ha a nyomatéki tengely vetülete nem esik az erővetületeket átmetsző egyenesre, akkor a merőleges összetevők nyomatékához hozzá kell adni, az előjelek tekintetbe vételével, még az átmetsző egyenesre eső összetevők nyomatékát. Magától érthető, hogy nemcsak valamennyi, de tetszőleges számú, közvetetlenül egymásután következő erő nyomatékát is megszerkeszthetjük az imént mondottak szerint, valamint az is magától értődik, hogy abban az esetben, ha párhuzamosak a térbeli erők, vetületeik összetevőkre bontása nélkül szerkesztjük meg nyomatékaikat.

**2. *A térbeli erők nyomatéka tetszőleges tengelyekre.*** Ha három ortogonális vetületen vannak az erők megadva, akkor úgy határozzuk meg a nyomatékukat a tetszőleges $Q$ tengelyre, ha átteszszük őket a $Q$ tengely tetszőleges $A$ pontjára, s megszerkesztjük az áttételből keletkező erőpárok nyomatékát a szóban levő $Q$ tengelyre. Meghatározzuk tehát az említett erőpárok nyomatékát az $A$ ponton át, a vetületi síkokra merőlegesen fölvett $A_1$; $A_2$; $A_3$ tengelyekre, megszerkesztjük e nyomatékokból az áttétel folytán keletkező erőpárok eredőjének tengelyértékét, s fölbontjuk az ekképpen meghatározott eredő erőpárt két oly összetevőre, melyek egyikének síkja párhuzamos a nyomatéki tengelylyel, másikáé pedig merőleges rá. Minthogy a $Q$ tengelylyel párhuzamos erőpárnak e tengelyre nézve nincsen nyomatéka, a térbeli erők nyomatékának mértékét a $Q$ tengelyre merőleges erőpár tengelyértéke adja meg, vonatkozással ugyanarra az alapra, amelyre a fölbontott erőpár tengelyértéke, mint nyomatéki mérték, vonatkozik.

Ha megrajzoltuk az erő- és a kötélpoligónokat a térben megadott valamely erőrendszer három ortogonális vetületére, akkor ez úton könnyen meg lehet szerkeszteni, akár valamennyi, akár tetszőleges számú közvetetlenül egymásután következő erő nyomatékát, minden tetszőleges tengelyre nézve. S amint a 22. § 3-ból tudjuk, ugyanez erő- és kötélpoligónok fölhasználásával a térbeli erők társerőit, tehát egyensúlyozó erőit is meg lehet találni, akár valamennyi, akár tetszőleges számú közvetetlenül egymásután következő erőre.

A megelőző pontban már említett 101. I—VII ábrákon példaképpen az 1—4-gyel számozott erők nyomatékát, a térben fölvett $A$ ponton át, a $Q$ egyenessel párhuzamosan vont tengelyre nézve szerkesztettük meg. Az $A$ ponton át, a vetületi síkokra merőlegesen fölvett $A_1, A_2$ és $A_3$ tengelyekre nézve a nyomatéki mértékek sorban a $V$, $U$ és $X$ hosszak, melyek ennélfogva egyszersmind a tengelyértékek a térbeli erők áttételéből keletkező erőpárnak, a három vetületi síkra eső összetevőjére. Megszerkesztettük tehát e tengelyértékekből a VI—VII ábrákon ez erőpár $P$ tengelyértékének vetületeit, fölbontottuk a $P$ erőt két oly összetevőre $Y$ és $Y_1$-re, melyek közül $Y$ párhuzamos a $Q$ tengelylyel, $Y_1$ pedig merőleges rája, s meghatároztuk a VI ábrán az $Y = \beta\eta$ összetevő valódi nagyságát. Magyarázatul csak azt említjük meg, a hasonló föladatra nézve a 21. § 5-ban a 84-ik ábra kapcsán már előadottakra való tekintettel, hogy a térbeli $\alpha\beta\gamma$ háromszögnek, az $\alpha\gamma$ vízszintes oldala körül végrehajtott leforgatása céljából, e háromszög $\delta\beta_0$ magasságának valódi nagyságát szerkesztettük meg, a vetítő háromszög leforgatása útján. (VI ábra.) Az $Y$-t $= 1{,}65$ t.-ra találtuk; $c = 4$ m.-nek volt fölvéve. A térbeli erők nyomatéka az $A$ ponton át a $Q$ iránynyal párhuzamosan vont tengelyre nézve tehát $\mathsf{N} = 6{,}60$ m. t. nagyságú; a térben, az $Y$ nyíl felé nézve, az erők e tengely körül ↻ felé forgatnak, tekintve, hogy az $U$, $V$ és $X$ tengelyértékek előjele a VI—VII ábrákon szintén e szerint van, a vetületi síkokra eső egyes erőpár-összetevők forgató értelmére nézve, fölvéve.

Ha párhuzamosak a térbeli erők, akkor két vetületük alapján is meg lehet szerkeszteni nyomatékukat minden tetszőleges tengelyre nézve, tekintve, hogy az erők áttételéből keletkező erőpár síkja ez esetben párhuzamos az erőkkel, tengelyértéke tehát rájuk merőleges síkon van. Legyen ugyanis $i$ az erők iránya; $U$ és $V$ az erők áthelyezéséből eredő erőpár két vetületének tengelyértéke. (102. I—II ábra.) Ha erő gyanánt mérjük föl e két tengelyértéket, a térben fölvett valamely $\alpha$ pontból, mint a tengelyértékek erőpoligónja kezdőpontjából, akkor a szóban levő eredő erőpár tengelyértékének végpontján átmenő három síkot ismerünk. Át kell mennie ugyanis e ponton annak a két síknak, melyeket az $U$ és $V$ tengelyértékek

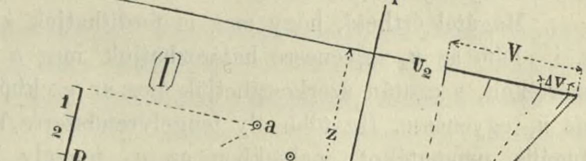


102-ik ábra.

végpontjain át, e tengelyértékekre merőleges irányban föl lehet venni, tekintve, hogy valamely erőpár mindegyik vetülete ez erőpár oly összetevője, melyhez tartozó másik összetevő síkja párhuzamos a vetítő sugarakkal. E két sík a vetületi tengelylyel párhuzamos irányú $X$ egyenesben metsződik; ebbe kell tehát esnie a keresett tengelyérték végpontjának. Át kell azonban mennie e ponton annak a síknak is, melyet az $\alpha$ kezdőponton át az erőkre merőlegesen föl lehet venni, tekintve, hogy ebbe a síkba esik, amint épp láttuk, a keresett tengelyérték. Ha megszerkesztjük az $\alpha$ kezdőponton át, az erők $i$ irányára merőlegesen fölvett sík $\gamma$ metsző pontját a föntebb említett $X$ egyenessel, akkor az $\alpha\gamma$ vonalszakasz az erők áttételéből keletkező erőpárok eredőjének tengelyértéke. (102.I—II ábra.)

Magától érthető egyébiránt, hogy, ha párhuzamosak a térben működő erők, nyomatékukat, az imént előadott általános módon kivül, mint eredőjük nyomatékát is meg lehet szerkeszteni a térben fölvett minden tetszőleges tengelyre nézve, de e végből szintén meg kell rajzolni az erő- és kötélpoligónokat az erők két vetületére.

***3. A vetületi síkra merőleges irányú erők sztatikai és magasabb rendű nyomatéka, a vetületi síkkal párhuzamos tengelyekre nézve.*** Ha a vetületi síkra forgatjuk a föladatban kijelölt $P$ erőket, átdöfő pontjaik körül, velük párhuzamos, különben tetszőleges sík irányában, akkor a leforgatott erők sztatikai nyomatéka, a vetületi síkon, velük párhuzamosan vonható minden tetszőleges $u_1$ egyenes minden pontjára nézve ugyanaz, ami a térbeli erők nyomatéka az $u_1$ tengelyre. (103-ik ábra.) Úgy találjuk meg tehát a vetületi síkra merőleges irányba ható tetszőleges $P$ erők nyomatékát, a vetületi síkon kijelölt $u_1$, vagy ezzel párhuzamos bármely más egyenesre, ha a $P$ erőket, átdöfő pontjaikon át, az $u_1$ egyenessel párhuzamos irányban, a vetületi síkban működő erőknek tekintjük, s megszerkesztjük az ekképpen fölvett *síkbeli* $P$ erők nyomatékát az $u_1$ egyenes pontjára nézve. (103.I—II ábra.) Ha e *síkbeli* erők egyikének $P_n$-nek nyomatéki mértéke $\alpha$-ra, mint alapra nézve, $\Delta Y$,



103-ik ábra.

valamennyi $P$ erőé pedig $Y$, akkor a *térbeli* erők nyomatéka $\mathsf{N}=aY$, s a $P_n$ erőé külön $\Delta\mathsf{N}=a\Delta Y$.

Ha a térbeli $P$ erők centrifugális nyomatékát keressük az $u_1$ és $u_2$ tengelyekre nézve, akkor az imént talált $\Delta Y$ nyomatéki mértékeket a térbeli $P$ irányvonalakban ható új erőknek képzeljük, s megszerkesztjük ez új erők sztatikai nyomatékát, — miután a vetületi síkra, az $u_2$ irányba forgattuk volna le őket, átdöfő pontjaik körül, — az $u_2$ egyenes pontjaira nézve, (III ábra,) ugyanazon a módon, mint az imént a térbeli $P$ erők sztatikai nyomatékát az $u_1$ egyenes pontjaira szerkesztettük volt meg. Ha a térbeli $P_n$ erő távolsága az $u_1$ és $u_2$ egyenesektől sorban $x$ és $z$, és ha $\Delta V$ a $P_n$-hez tartozó $\Delta Y$ erő nyomatéki mértéke az $u_2$ egyenes pontjaira, vonatkozással a $b$ alapra, akkor ugyanis

$$\Delta Y=\frac{Px}{a};\quad \Delta V=\frac{z\Delta Y}{b}=\frac{zxP}{ab}.$$

A második sorú, t. i. a $\Delta Y$ képzelt erőkre rajzolt kötélpoligón oldalaival, az $u_2$ egyenesen levágott hosszúságok tehát a térbeli $P$ erők *centrifugális nyomatékainak* mértékei, az $u_1$ és $u_2$ tengelyekre nézve, és vonatkozással $a$- és $b$-re mint a két alaphosszúságra. Az egymásután következő egyes kötélpoligón-oldalaktól egymásután levágott egyes $\Delta V$ vonalszakaszok sorban az egyes $P$ erőkre külön-külön adják meg a centrifugális nyomaték mértékét; a szélső oldalaktól levágott $V$ hosszúság valamennyi $P$ erőét összesen; tetszőleges két oldaltól levágott hosszúság pedig az e két oldal közötti $\Delta Y$-okhoz tartozó $P$ erőkét. Ha az $u_2$ tengely összeesik $u_1$-gyel, akkor a térbeli $P$ erők *tehetetlenségi nyomatékát* találjuk meg e módon.

Magától érthető, hogy meg is fordíthatjuk a szerkesztés egymásutánját, t. i. előbb az $u_2$ egyenesre határozhatjuk meg a térbeli $P$ erők nyomatéki mértékeit, s ezután szerkeszthetjük meg az ezekből képzelt erők nyomatékait az $u_1$ egyenesre. Ha több oly tengelyrendszerre kell meghatározni a centrifugális nyomatékot, melyekben az $u_1$ tengely közös, akkor előbb ez $u_1$ tengelyre szerkesztjük meg a $P$ erők $\Delta Y$ nyomatéki mértékeit, s csak a második kötélpoligónt kell a $\Delta Y$ erőkre az egyes $u_2$ tengelyek irányához képest többször megrajzolni, de ezt is csak akkor, ha az $u_2$ tengelyek különböző irányúak; míg abban az esetben, ha a szóban levő tengelyrendszerek $u_2$ tengelyei párhuzamosak egymással, a második kötélpoligónt is csak egyszer kell megrajzolnunk, s az e kötélpoligón szélső, (vagy esetleg más közbefoglaló) oldalaitól bármely $u_2$ irányú egyenesen levágott $V$ hosszúság a térbeli $P$ erők centrifugális nyomatéki mértéke, az állandó $u_1$ egyenesre mint egyik, s arra az $u_2$ egyenesre mint másik tengelyre, melyen a $V$ hosszúságot levágtuk.

Azt is látjuk továbbá a föntebb mondottakból, hogy miképpen szerkeszthetjük meg a térbeli $P$ erők magasabb rendű nyomatékait. Ha a második kötélpoligónnal talált $\Delta V$ hosszakat is a térbeli $P$ irányvonalakban működő erőknek képzeljük, s ha megszerkesztjük, — miután ezeket is a vetületi síkra forgattuk volna átdöfő pontjaik körül, az $u_3$ tengelylyel párhuzamos irányba, — e $\Delta V$ erők $U$ nyomatéki mértékét $c$-re mint alapra nézve, akkor az $U$ hosszúság a térbeli $P$ erők harmadfokú nyomatékának mértéke az $u_1, u_2, u_3$ tengelyekre, vonatkozással a három erőpoligón $a, b, c$ magasságaira mint alapokra stb.

---

## V. FEJEZET.

# A sík idomok súlypontja, tehetetlenségi nyomatéka és belső magja.

## 27. §.

## A sík idomok súlypontja.

Ha valamely sík idom egyes végtelen kis elemeinek $dF$ területeit, akár a térben, akár az idom síkjában működő, tetszőleges irányú párhuzamos erőknek tekintjük, akkor ez erőrendszer súlypontját az idom *súlypontjának* nevezzük, s ha a $dF$ erőket az idom síkján fekvő támadó pontjaik körül forgatjuk, akkor eredőjük az idom súlypontja körül forog. Amint ezekből látjuk, a sík idom súlypontját egészen úgy szerkeszthetjük meg, mint a térben működő oly párhuzamos erőkét, melyek támadó pontjai ugyanazon a síkon vannak. (20. § 2.)

Ami a szerkesztés végrehajtását illeti, világos, hogy az idomot tetszőleges módon, tetszőleges számú részre oszthatjuk, és hogy az egyes idomrészek területeit súlypontjaikon átmenő eredőikkel pótolhatjuk, tekintve hogy, ha csoportonkénti részeredőivel pótolunk valamely erőrendszert, a pótló erők eredője ugyanaz mint a pótolt erőrendszeré. Akképpen szerkesztjük meg ez okból valamely sík idom tetszőleges $i$ irányú súlyvonalát, hogy fölosztjuk a szóban levő idomot alkalmas módon fölvett egyenesekkel, vagy esetleg más vonalakkal, alkalmas számú részre; az egyes idomrészek $\Delta f$ területi mérő hosszait ezután sorban ez idomrészek súlypontján átmenő, síkjukra eső, $i$ irányú erőknek tekintjük, s kötélpoligón rajzolása útján megszerkesztjük ez erők eredőjének irányvonalát. Ha még egy irányra ismételjük a szerkesztést, akkor ezzel az idom egy második súlyvonalát kapjuk meg, s a két súlyvonal metszéspontján a súlypontot. Az, hogy a második súlyvonal megszerkesztése végett újra beosztjuk-e az idomot vagy sem, az eredményre magától érthetőleg befolyástalan.

Ha valamely idomnak egy vagy több úgynevezett *felező egyenese* van, (t. i. ha vannak az idomban oly egyenesek, melyek más irányokban húzott párhuzamos húrok felező pontjain mennek át,) akkor minden ily egyenes átmegy az idom súlypontján. Ha a felezett húrokkal párhuzamos irányban, végtelen keskeny sávokra képzeljük ugyanis az idomot beosztva, akkor minden ily sáv súlypontja a húr középpontjára esik, az egész idom súlypontja tehát a húrok felező pontjait összekötő egyenesre. Oly idomra, melynek *egy* felező egyenese van, ezek következtében csak *egy* súlyvonalat kell kötélpoligón segítségével megszerkeszteni, tetszőleges oly irányra, mely a felező egyenessel nem párhuzamos. Ha pedig egynél több felező egyenese van valamely idomnak, akkor a súlypont ezek metszéspontjára esik.

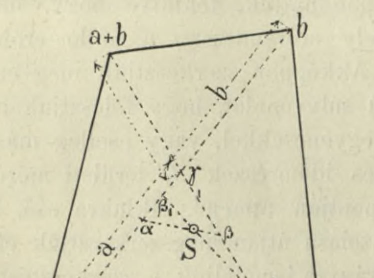
Ami az imént előadottak végrehajtását illeti, rendesen párhuzamos egyeneseket veszünk föl beosztó vonalak gyanánt, (lásd pl. a 109—111-ik ábrákat, melyeken a tehetetlenségi nyomatékokat is megszerkesztettük,) a beosztás folytán keletkező egyes idomrészek súlypontjait pedig az alább azonnal előadandók alapján határozzuk meg.

*1. A háromszög* súlypontja a három felező vonal metszéspontjára esik. Az egyik oldallal párhuzamosan húzott súlyvonal ennek következtében az ehhez az oldalhoz közelebb eső harmadon metszi mindazokat az egyeneseket, melyeket a szemközt fekvő sarokpontból ez oldalon, vagy ennek meghosszabbításán fekvő valamely ponthoz vonhatunk. Könnyen belátható erre való tekintettel, hogy, ha ugyanakkora párhuzamos erőket veszünk föl a térben, a háromszög sarokpontjain át, bármely irányban, (pl. az idom síkjára merőlegesen), ez erők eredője a háromszög súlypontján megy át. Ha $y_1$, $y_2$, $y_3$ a három sarokpont ordinátája a háromszög síkján fölvett tetszőleges koordináta-tengelyre nézve, akkor a súlypont ordinátája tehát

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

*2. A parallelogramm* súlypontja az idom két felező vonalának metszéspontja.

*3. A szabálytalan négyszög.* Oszszuk a négyszöget az egyik átlójával két háromszögre, s nevezzük a másik átló két szakaszának hosszát $a$ és $b$-nek. (104-ik ábra.) A két háromszög területe ekkor, — mivelhogy alapjuk közös, — úgy viszonylik egymáshoz, mint $a:b$-hez. Ha az $a$ háromszög területét, az imént mondottak alapján, a sarokpontjain át ható $a$ erőkkel pótoljuk, akkor a $b$ háromszög területét a maga sarokpontjain, az $a$ erőkkel párhuzamosan fölveendő $b$ erőkkel kell pótolnunk. A beosztó átló végpontjain ez úton $a+b$ nagyságú erők keletkeznek, a szemközt fekvő sarokpontokon pedig az egyiken $a$, a másikon $b$ nagyságú egy-egy erő. Vegyük föl mindez erőket a négyszög síkjára merőlegesen. Ha akképp határozzuk meg az $\alpha$ pontot az $ab$ átlón, hogy ez átló két szakaszát fölcserélve mérjük föl a vég-




*104-ik ábra.*

pontokból, akkor e ponton megy át az $a$ és $b$ erők $a+b$ eredője. A négyszög másik két sarokpontján fölvett $a+b$ erők $2(a+b)$ eredője pedig a másik átló $\beta$ felező pontján megy át. Az $\alpha\beta$ egyenes tehát a négyszög súlyvonala, s ha $S$ a súlypont, akkor:

$$\beta S = \frac{1}{3}\alpha\beta.$$

*Ha fölcserélten mérjük föl valamely négyszög egyik átlóján a másik átló képezte két szakaszt, s ha az ekképp talált pontot a másik átló felező pontjával összekötjük, akkor a négyszög súlypontja ez összekötő vonalon, a felezett átlóhoz közelebb eső harmadon van; ha mind a két átlóra végrehajtjuk az imént leírt szerkesztést, a négyszög két súlyvonalát kapjuk meg. Könnyen belátható továbbá az imént mondottakból, hogy a négyszög súlypontja összeesik mindama háromszögek súlypontjával, melyek egyik sarokpontját a négyszög bármelyik átlója két szakaszának fölcserélt fölmérésével lehet megszerkeszteni, másik két sarokpontja pedig a másik átlón bármiképpen fölvett oly két pont lehet, melyek a négyszögnek ez átlón levő sarokpontjaitól egyenlő távol vannak, e két sarokponttal tehát össze is eshetnek; ezen az alapon szintén könnyen meg lehet szerkeszteni a négyszög súlypontját.*

A 104-ik ábrán fölvett erőkhöz hozzá lehet továbbá tenni, — a nélkül, hogy ennek következtében súlypontjuk megváltoznék, — bármely más oly erőket, melyek maguk között egyensúlyban vannak. Hozzá lehet tehát ez erőkhöz tenni a többi között $a$ ponton a $b$ erőt, a $b$ ponton az $a$ erőt, ha a $\gamma$ ponton a $-(a+b)$ erőt is fölveszszük, a többivel párhuzamos irányban. Ez úton azonban a négyszög sarokpontjain ugyanakkora és egyforma előjelű erők keletkeznek, az átlók metszéspontján pedig ugyanakkora, de a többivel ellenkező előjelű erő.

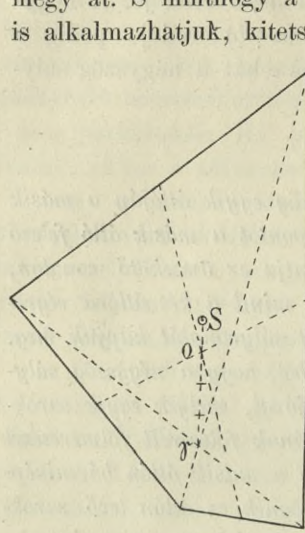
*Ha valamely négyszög sarokpontjain át tetszőleges, de ugyanakkora, és egyenlő előjelű párhuzamos erőket veszünk föl a térben, az átlók metszéspontján át pedig még egy ugyanakkora nagyságú és irányú, de ellenkező előjelű erőt, akkor ez öt erő eredője a négyszög súlypontján megy át. A négyszög súlypontja ordinátájának egyenlete ennek következtében*

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5}{3}$$

*és ebben $y_{1-4}$ a négy sarokpontnak, $y_5$ pedig az átlók metszéspontjának ordinátája.*

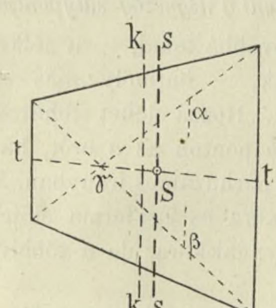
E tételből, és a föntebb már mondottakból, a négyszög súlypontja megszerkesztésének még több más módja következik, melyek közül e helyen csak a következőt említjük meg.

Ha az imént emlitett egyenlő nagyságú és párhuzamos erők közül, a négyszög szemközt fekvő oldalain egymás mellett levő két-két erőt eredőjével pótoljuk, akkor ugyanis ez eredők a nevezett oldalak felező pontjaira esnek; s ha ezeket az eredőket is összeteszszük, akkor az új eredő, — tehát a négyszeres erő — a felező pontokat összekötő egyenes középpontján megy át. S minthogy a mondottakat a másik két szemközt fekvő oldalpárra is alkalmazhatjuk, kitetszik a föntebbiekből, hogy, (105-ik ábra,) ha a szemközt fekvő oldalpárak felező pontjait összekötő egyenesek $o$ metszéspontján, (mint e két összekötő vonal középpontján,) tetszőleges erőt veszünk föl, az átlók $\gamma$ metszéspontján pedig vele párhuzamosan, negyedrész akkora, és az előbbihez képest ellenkező előjelű másik erőt, e két erő eredője a négyszög $S$ súlypontján megy át. Az $S$ súlypont tehát a $\gamma o$ összekötő vonal megnyujtásán van, s az $So$ távolság $= \frac{1}{3}\, o\gamma$. Magától értődik, hogy a súlypont megszerkesztésének e különböző módjait geometriai úton is le lehet egymásból származtatni.



*105-ik ábra.*

**4. *A trapéz*** súlypontjának megszerkesztésére a következő két mód mutatkozik legegyszerűbbnek. Jegyezzük meg mindenekelőtt, hogy a párhuzamos oldalakat felező *tt* egyenes a trapéz felező egyenese, tehát egyik súlyvonala, és hogy e felező egyenesre esik az átlók $\gamma$ metszéspontja is. (106-ik ábra.) Azok az $\alpha$ és $\beta$ pontok pedig, melyeket a két átlón a szakaszok fölcserélésével szerkeszthetünk meg, a $k$ középvonallal párhuzamos egyenesen vannak, s amint a szabálytalan négyszögre nézve a 104-ik ábra kapcsán mondottakból tudjuk, a trapéz súlypontja az $\alpha\beta\gamma$ háromszögével összeesik.



*106-ik ábra.*

*Akképpen szerkeszthetjük tehát meg a trapéznak a k középvonallal párhuzamos irányú ss súlyvonalát, ha fölcseréljük az egyik átlón a másik átló képezte szakaszokat, s három egyenlő részre osztva az ekkép talált pont és az átlók metszéspontja között levő távolságot, az átlók metszés pontjától távolabb eső harmadon át a trapéz k középvonalával párhuzamost húzunk.*

*A súlypont megszerkesztésének egy második módja az imént mondottakból, de az általános négyszögre nézve a föntebb előadottakból is következik. A mint ugyanis a 105-ik ábra kapcsán mondottakból kitetszik, a középvonallal párhuzamos súlyvonal az idom szélesebb oldalára esik, s a középvonaltól mért távolsága akkorra, mint az átlók metszéspontja és a középvonal közötti távolság harmada.*

**5. *A parabolaszegment.*** Az alább következőkben a *fél* parabola-szegment $S_1$ súlypontjának koordinátáit számítjuk ki, (107-ik ábra,) tekintve, hogy az egész szegment súlypontja ott van, hol a két szegmentfél súlypontjait összekötő egyenes a tengelyt átmetszi. A koordináta-rendszer tengelyei gyanánt a parabolaív tetőpontján átmenő társtengelyeket veszszük föl. A parabola egyenlete ennek következtében:

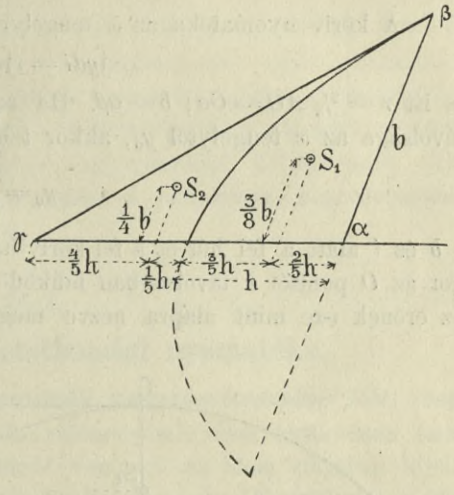
$$y^2 = \frac{b^2}{h} x.$$

Ha $F_1$ a fél parabolaszegment területe, $\mathbf{M}_x$ és $\mathbf{M}_y$ ennek nyomatéka sorban $x$ és az $y$ tengelyre, $F_2$ pedig a parabolaív és a két végponti érintőtől határolt idom fele részének területe, akkor

$$F_1 = \frac{2}{3} bh \sin\alpha\,; \quad F_2 = \frac{1}{3} bh \sin\alpha$$

$$\mathbf{M}_x = \frac{\sin^2\alpha}{2} \int_0^h y^2\,dx = \frac{1}{4} b^2 h \sin^2\alpha$$

$$\mathbf{M}_y = \sin^2\alpha \int_0^h xy\,dx = \frac{2}{5} bh^2 \sin^2\alpha.$$




*107-ik ábra.*

Ha $x_1 y_1$ a fél parabolaszegment $S_1$ súlypontjának koordinátáit jelentik, akkor tehát:

$$y_1 = \frac{\mathbf{M}_x}{F_1 \sin\alpha} = \frac{3}{8} b\,; \quad x_1 = \frac{\mathbf{M}_y}{F_1 \sin\alpha} = \frac{3}{5} h.$$

A külső $o\beta\gamma$ parabola-idom a $\gamma\alpha\beta$ háromszög és a fél parabolaszegment különbsége. Ha a $\gamma\alpha\beta$ háromszög és az $o\alpha\beta$ szegment területeit a súlypontjaikon átmenő, egymáshoz képest ellenkező előjelű párhuzamos erőknek tekintjük, akkor a két erő eredője tehát a külső $\gamma o\beta$ idom súlypontján megy át. Ha $x_2$ $y_2$-vel jelöljük ez idom $S_2$ súlypontjának koordinátáit, és ha előbb az $x$, s ezután az $y$ tengelyre állítjuk föl az $^1/_3$ $bh \sin\alpha$-val osztott nyomatéki egyenletet, a területek képében fölvett éppen említett erők és eredőjük között, akkor az

$$y_2 = b - 2y_1\,; \quad -x_2 = 2x_1 - h$$

egyenletek származnak, melyekből

$$y_2 = \frac{1}{4} b\,; \quad x_2 = -\frac{1}{5} h$$

következik.

**6. A körszektor** súlypontja a csúcspontból $^2/_3$ sugárral vont $\alpha\gamma\beta$ körív súlypontjával esik össze. (108-ik ábra). Ami pedig valamely körív súlypontját illeti, könnyen belátható, (két épszögű háromszög hasonlóságából,) hogy, ha a koordináta-tengelyeket a kör $O$ középpontján veszszük föl, még pedig az $x$ tengelyt párhuzamosan az $\alpha\beta$ húrral, az $y$ tengelyt pedig erre merőleges irányban, és ha $di$-vel jelöljük az ívelem hosszát

$$\frac{di}{dx} = \frac{r}{y}.$$

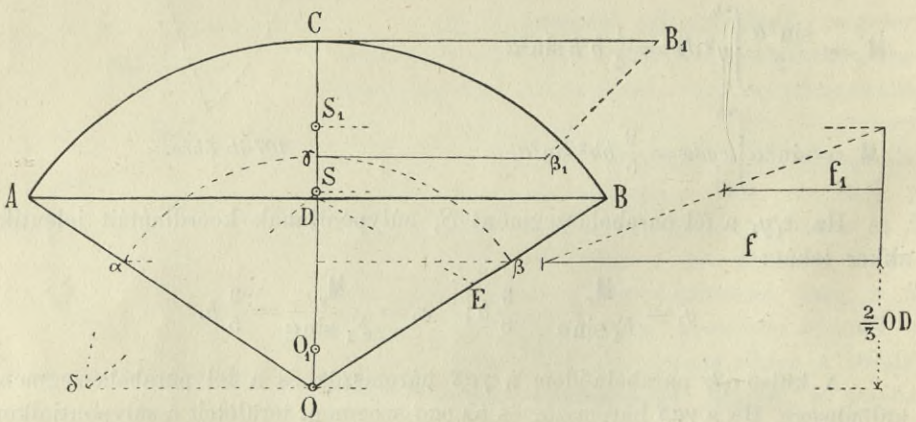
A körív nyomatéka az $x$ tengelyre, ha $r$ a sugár, $b$ a húr hossza:

$$\int y di = r\int dx = rb.$$

és itt $r = {}^2/_3\, AO = O\alpha$; $b = \alpha\beta$. Ha az $\alpha\beta$ körív hossza $i$, súlypontjának távolsága az $x$ tengelytől $y_0$, akkor tehát:

$$y_0 = \frac{rb}{i}$$

s $b$ és $i$ alatt a fél húr és a fél körív hosszát is lehet érteni. Ha $b$ hosszúságot az $O$ ponttól $r$ távolságban működő függőleges erőnek képzeljük, akkor ez erőnek $i$-re mint alapra nézve meghatározott nyomatéki mérő hossza az




*108-ik ábra.*

$y_0$ képlet szerint egyenlő az $y_0$ távolsággal. Lefejtjük tehát a $CB$ körívet $CB_1$-re, s átvetítjük a $B_1$ pontot $O$ pontból a $\gamma\beta_1$ vízszintesre, megszerkesztve ekképpen a $\gamma\beta$ körív $i = \gamma\beta_1$ hosszát. Ezután fölmérjük a $\gamma$ pontból a $\gamma O$ függőlegesre $\gamma O_1 = {}^1/_2\alpha\beta$-át, s meghúzzuk a $\delta S$ kötélpoligón-oldalt az $O_1\beta_1$ sugárral párhuzamosan; az $S$ metszéspont ekkor az imént mondottak következtében az $OACB$ körszektor súlypontja. A félkör súlypontjának távolsága az átmérőtől a föntebbi képlet alapján $= \frac{2r}{\pi}$. A félkör képezte szektor súlypontjának ordinátája ennek következtében

$$y_0 = \frac{4r}{3\pi}.$$

Ugyanez tehát a negyedkör-szektor súlypontjának távolsága az idomot határoló sugarak egyikétől.

7. *A körszegment* területe körszektor és háromszög területének különbsége. (108-ik ábra.) Ha az $OACB$ körszektor és az $OAB$ háromszög területeit a súlypontokon át ható párhuzamos erőknek tekintjük, s az egyiket $+$, a másikat $-$ előjellel veszszük, akkor e két erő eredője az $ACB$ körszegment súlypontján megy át. A körszektor fele része területének $f$ mérő hossza $\frac{1}{2}$ $OC$-re, mint alapra a $CB_1$ ívhosszúság. S ha $DE \parallel CB$ húzzuk meg, akkor az $E$ pontnak az $OC$ függőlegestől mért távolsága az $ODB$ háromszög területének $f_1$ mérő hossza ugyanarra az alapra. Ha az $f$ és $f_1$ hosszakat fölcserélt módon a szektor és a háromszög súlypontjainak vízszintes vetítő sugaraira mérjük, és a végpontokat egyenesekkel kötjük össze, akkor ez egyenesek metszéspontjának vetítő sugara a mondottak következtében a körszegment $S_1$ súlypontján megy át.

## 28. §.

## A sík idomok tehetetlenségi nyomatéka.

1. *A tehetetlenségi nyomaték megszerkesztése két, (esetleg három) kötélpolygónnal.* Ha valamely sík idom területének sztatikai, vagy magasabbrendű nyomatékáról van szó, az idom síkjában kijelölt tengelyekre nézve, akkor minden végtelen kis elemnek $dF$ területét az idom síkjára merőleges irányban ható erőnek kell tekinteni, s az idom sztatikai vagy magasabbrendű nyomatéka alatt az ekképpen fölveendő $dF$ erők nyomatékát értjük, melyet ennélfogva egészen azon a módon szerkesztünk meg, amint a térben működő tetszőleges párhuzamos erőkre a 26-ik § 3-ban előadtuk.

A *sztatikai* nyomaték megszerkesztése végett az idomot e mellett, alkalmasan fölvett egyenesekkel, vagy esetleg más vonalakkal, tetszőleges részekre lehet osztani, s minden egyes ily rész $dF$ erőit ez idomrész súlypontján átmenő, és ez idomrész $\Delta F$ területével egyenlő erővel pótolhatjuk, mint a $dF$ erők eredőjével, tekintve, hogy bármi módon is helyettesítünk valamely erőrendszert részeredőkkel, a helyettesítő erők sztatikai nyomatéka minden tengelyre nézve egyenlő a helyettesített erőkével. A beosztó vonalakat rendesen a nyomatéki tengelylyel párhuzamos irányban, egymástól alkalmas távolságban fölvett egyenesek képezik. Ha egyenes vonalak határolják a beosztott idomot is, akkor tehát a beosztás következtében belül trapézek keletkeznek, az idom két szélén pedig vagy háromszögek, vagy szintén trapézek. Abban az esetben pedig, ha görbe vonalak szegélyezik az idomot, legegyszerűbb oly közel venni föl a beosztó vonalakat, hogy a közibük eső görbe vonal-szakaszokat elég pontosan parabola-íveknek vagy egyeneseknek, a beosztás folytán keletkező egyes sávokat tehát vagy trapézeknek vagy oly idomoknak lehessen tekinteni, melyeket trapézre és parabola-szegmentre lehet bontani. (Lásd p. o. a 109.I ábrát.) A két szélső idomrészt, — ha ezeket is görbe vonalak határolják, — rendesen parabola-szegmenteknek tekintjük. Ami pedig az egyes idomrészek súlypontjait illeti, azokon a sávokon, melyek szélessége a párhuzamos oldalak hosszához képest csekély, a súlyvonalakat elég pontosan a középvonalakon vehetjük föl, (27-ik § 4,) a többire pedig a 27. §-ban előadott módon határozzuk meg.

A magasabb rendű nyomatékok közül az alább következőkben csak a *tehetetlenségi* nyomatékot fogjuk részletesebben tárgyalni. Képzeljük ennek meghatározása céljából előbb, hogy a $tt$ tehetetlenségi nyomatéki tengelylyel párhuzamos irányban *végtelen keskeny* sávokra van osztva az idom; tekintsük e sávok $df$ területi mérő hosszait a $tt$ tengelylyel párhuzamos erőknek, (t. i. miután leforgattuk volna a térbeli $df$ erőket az idom síkjára, a $tt$ egyenessel párhuzamos irányba,) s tegyük föl, hogy megszerkesztettük a már idézett 26-ik § 3-ban előadott módon, két kötélgörbe segítségével, előbb ez erők sztatikai, ezután tehetetlenségi nyomatékát, külön-külön és összesen. (A területi mérő hosszak meghatározása végett esetleg még egy harmadik kötélvonalat is rajzolunk, erről azonban csak e szakasz végén, a példákban lesz megint szó.) Oszszuk be ezután az idomot, a föntebb a sztatikai nyomatékra nézve már megemlített módon, a $tt$ egyenessel párhuzamos irányban, egymástól alkalmas távolságokban fölvett egyenesekkel, *mérhető szélességű* részekre. Legyen ez idomrészek $n$-ikének területi mérő hossza $\Delta f$, sztatikai nyomatéki mérő hossza $\Delta m$, legyen továbbá ez $n$-ik idomrész egyik végtelen keskeny $t$ irányú sávjának területi mérő hossza $df$, nyomatéki mérő hossza $dm$. (109. I ábra.) Az *első* kötélvonal a sztatikai nyomatékokat szummálja, ezt tehát, a föntebb említettek nyomán, a $df$ erők helyett a $\Delta f$ erőkre lehet megrajzolni, az egyes $\Delta f$-eket az egyes idomrészek $t$ irányú súlyvonalaiban működő erőknek képzelve. Az egyes $\Delta m$ szakaszok, melyeket e kötélpoligón megnyujtott oldalai a $t$ egyenesről levágnak, sorban az egyes idomrészek területei sztatikai nyomatékainak mérő hosszai $ab$-re mint alapra, ha $a$ a területmérés alapja, $b$ a $\Delta f$ erők háromszögének magassága. (II—III ábra.)

A második kötélpoligónnal, — amint föntebb láttuk, — a $dm$ erők nyomatékait kell összeadnunk. Az első kötélpoligón segítségével a $t$ egyenesen megszerkesztett $\Delta m$ hosszakat tehát a hozzájuk tartozó idomrészek $dm$ *erőinek súlyvonalaiban működő* $t$ irányú erőknek kell tekinteni, (mire nézve az alább következőkben még részletesebb megjegyzéseket fogunk tenni,) s ezekre kell a második kötélpoligónt megrajzolni. (Lásd a 7-tel számozott $\Delta f$- és $\Delta m$-et az I ábrán.) Ha ez megtörtént, akkor az az $i$ hosszúság, (IV ábra,) melyet e kötélpoligón megnyujtott szélső oldalai a $t$ egyenesről levágnak, a $dm$-ek sztatikai, tehát a $df$-ek tehetetlenségi nyomatékának mérő hossza. Ha $c$ a $\Delta m$ erők háromszögének magassága, (III ábra,) $x$ pedig a $dF$ elem távolsága $t$ tengelytől, akkor ugyanis

$$i = \frac{\int xdm}{c}; \quad dm = \frac{xdf}{b} = \frac{xdF}{ab}$$

és így

$$i = \frac{\int x^2 dF}{abc}.$$

Ha **I**-nek nevezzük az idom tehetetlenségi nyomatékát, akkor

$$\mathbf{I} = abci,$$

$i$ tehát az **I** tehetetlenségi nyomaték mérő hossza, vonatkozással $a, b, c$-re mint a három alaphosszra. Ha a szerkesztés célja az **I** kiszámítása, akkor úgy kell tehát az $a, b, c$ hosszakat fölvennünk, hogy szorzatuk kerek szám legyen.

Ha a tengelyt bizonyos előre megadott $t$ irányban, az idom eleve ismeretlen súlypontján át kell fölvennünk, akkor meghatározzuk előbb a $t$ irányú beosztás alapján szerkesztett első kötélpoligón segítségével a $t$ tengelyt, mint az idom $t$ irányú súlyvonalát, (a megnyújtott szélső oldalak metsző pontján át párhuzamost húzva a $t$ iránynyal,) és ezután az ekképpen meghatározott $t$ tengelyre állapítjuk a további szerkesztést, miután előbb e tengelyen át is beosztó vonalat vettünk volna föl az idomon, s miután megfelelőleg kiegészítettük volna a $\Delta f$-ek erő- és kötélpoligónját. (Az imént érintett föladat megoldásának más módját a jelen pont végén fogjuk előadni.)

Ha a tömör rudak hajlító szilárdsága

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{I}}{e}\sigma = \mathbf{K}\sigma$$

alapképletében szereplő $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{I}}{e}$ modulus szerkesztendő meg, a rúd keresztmetszeti idoma valamelyik szélére nézve, ($\sigma$ a húzó vagy nyomó feszültség a keresztmetszet szóban levő szélén, $e$ a keresztmetszet e szélének távolsága a neutrális tengelytől, **I** pedig a tehetetlenségi nyomaték ugyane tengelyre,) akkor legcélszerűbb a második erőháromszög $c$ magasságát az $e$ távolsággal egyenlőnek venni föl, (109. III ábra,) mely esetben

$$\mathbf{K} = abi\text{; és } \mathbf{M} = \sigma abi;$$

s $a$ és $b$ akképpen veendő föl, hogy szorzatuk kerek szám legyen.

Ha pedig valamely idom $r$ tehetetlenségi sugara képezi a kérdés tárgyát, akkor legegyszerűbb a második erőháromszög magasságát, (vagy már az első erőháromszögét,) az idom $f$ területi mérő hosszával venni egyenlőnek. Ha ugyanis az

$$r^2 = \frac{\mathbf{I}}{F} = \frac{bci}{f}$$

képletben $c = f$-nek veszszük föl, akkor

$$r^2 = bi,$$

az $r$ tehetetlenségi sugarat tehát mint a $b$ és $i$ közötti, (ha $b = f$-nek vettük föl, akkor mint a $c$ és $f$ közötti,) középső geometriai arányost, könnyen meg lehet szerkeszteni.

A föntebb mondottakban már említettük, hogy az egyes $\Delta m$ erőket a második kötélpoligón megszerkesztésére sorban a *dm erők súlyvonalaiban* kell fölvenni, és csak igen keskeny sávokon lehet a $\Delta m$ erőket, az eredmény pontosságának csorbitása nélkül, olyanoknak tekinteni, melyek a $\Delta f$ erőkkel ugyanazokra az irányvonalakra esnek. (Lásd pl. az

1, 8, 9, 10-el számozott sávokat a 109. I ábrán.) Szélesebb idomrészekre meg kell ellenben határozni a $\Delta m$ erő irányvonalát, mint a $dm$-ek súlyvonalát, mire a következők jegyzendők meg. Nevezzük a tetszőleges $A$ idomban a $t$ tengelylyel párhuzamosan fölvett tetszőleges $dF$ elem szélességét $dx$-nek, magasságát, a középvonalban mérve, $y$-nak, távolságát a $t$ tengelytől $x$-nek, akkor

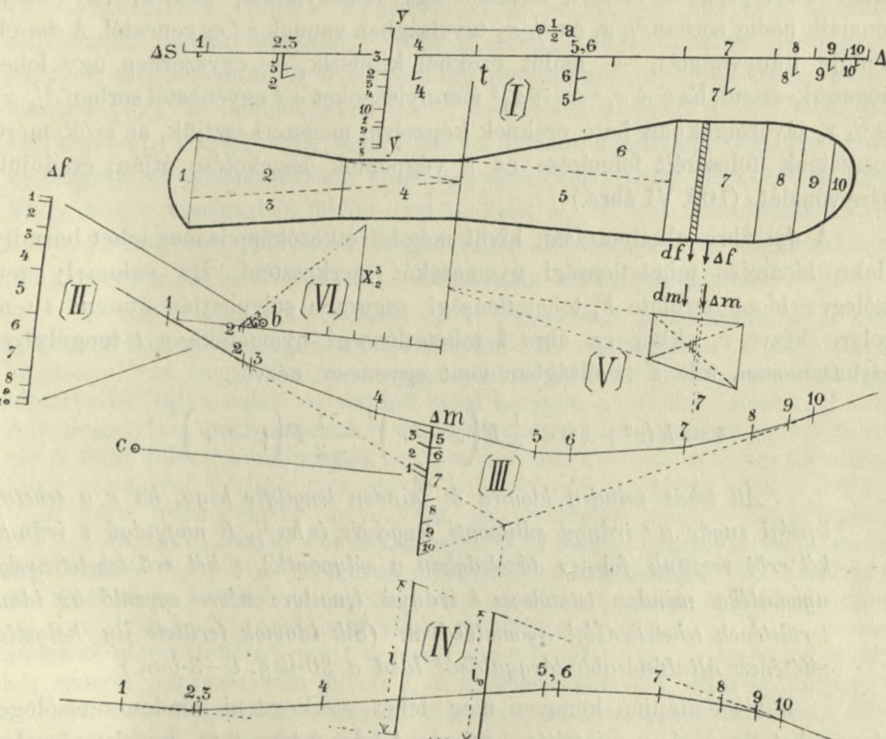
$$dm = \frac{xydx}{ab}.$$

Képzeljük az $xy$ szorzatok mérő hosszait, az $y$ középmagasságok meghosszabbításán, valamely $x$-koordináta tengelytől, tetszőleges léptékben fölmérve, és a talált pontokat összekötve. Az ekképpen leszármaztatott ábrát a következőkben a $dm$-ek ábrájának fogjuk nevezni, tekintve hogy, ha ez ábrát a $t$ tengelylyel párhuzamos irányban $dx$ szélességű sávokra osztva képzeljük, minden ily sáv területe megadja a $dm$-et az adott $A$ idomban ugyanama párhuzamosok között levő $dx$ sávra. S ha ugyanazokkal, különben tetszőleges távolságokban húzott párhuzamosokkal osztjuk részekre a $dm$-ek ábráját, melyekkel az $A$ idomot, akkor tehát a $dm$-ek súlyvonalait az $A$ idom egyes részeire, sorban a $dm$-ek ábrája egyes részeinek súlyvonalai adják meg.

Görbe vonalakkal határolt részeikben már a területmérés és a súlyvonalak megszerkeszthetősége végett is keskeny részekre, (sávokra,) osztjuk az idomokat, s e sávok súlyvonalaiban, (ha a sávok trapézek, akkor középvonalaikban,) veszszük föl a $\Delta m$ erőket is, amint ezt már megemlítettük. Ott ellenben, hol egyenesek szegélyezik az idomokat, lehetőleg kevés beosztó vonalat veszünk föl, és a $dm$-ek ábrája alapján határozzuk meg a második kötélpoligón $\Delta m$ erőinek irányvonalait az ekképpen keletkező széles idomrészekre, esetleg annélkül, hogy a $dm$-ek ábráját valóban meg kellene rajzolni.

Ott nevezetesen, ahol párhuzamos egyenesek határolják esetleg a tetszőleges $A$ idomot, a $dm$-ek képletében $y$ állandó, a $dm$-ek vonala tehát oly egyenes, mely az $x$-koordináta tengelyt a $t$ tengelylyel ugyanegy pontban metszi. Ha oly parallelogrammból áll valamely idomrész, melynek egyik oldala a $t$ egyenesre esik, (mint pl. a 4-gyel számozott rész a 109. I ábrán,) akkor a $dm$ ábrának hozzátartozó része tehát háromszög, a $dm$-ek eredője ennek következtében az $A$ idom e parallelogrammjának $t$-től távolabb eső harmadába esik. Ha átvágja a $t$ tengely az $A$ idomnak párhuzamosokkal határolt részét, akkor a $t$ tengelyen át is veszünk föl beosztó vonalat, és ez úton két oly parallelogrammot kapunk, melyek mindegyikére az épp mondottak állanak. Ha pedig a $t$ egyenesnek csak az iránya ismeretes, akkor csak az első kötélpoligón megszerkesztése után egészitjük ki az előbbi beosztást, újabb beosztó vonalat véve föl a $t$ egyenesen, és megfelelőleg kiegészitve az első erő- és kötélpoligónt, amint ezt már föntebb megemlitettük. (Lásd pl. a 6—7-tel számozott idomrészeket a 118. I ábra függőleges beosztásában.) Ha végre a $t$ tengelyen túl esik a parallelogrammból álló idomrész, (lásd pl. a 7-tel számozott részt a 109-ik ábrán,) akkor a *dm*-ek ábrájának hozzátartozó része könnyen megrajzolható trapéz, s a *dm*-ek eredője e trapéz súlypontján megy át. (109. V ábra.)

Ha oly ***trapézból*** áll az *A* idom egyik része, melyet a *t* tengely átvág, (mint pl. a szögvas keresztmetszetében az egyik szárral párhuzamosan húzott súlyvonal a másik szárat,) akkor két trapézre osztjuk ez idomrészt a *t* egyenessel, ezután ezek mindegyikét egy parallelogrammra és egy oly háromszögre bontjuk, melynek csúcspontja a *t* egyenesre esik, s amelynek



*109-ik ábra.*

területe az egyik trapézen pozitív, a másikon negatív jelű. (Ily fölosztás p. o. a 109. I ábra 5 és 6-tal számozott részén látható.) A parallelogrammra az előbb mondottakat alkalmazzuk. A háromszöghöz tartozó *dm*-ek vonala pedig, — mivelhogy a *dm*-ek képletében $y =$ const. $x$, — oly parabola, melynek tengelyei a koordináta-tengelyek; a szóban levő háromszög *dm*-jeinek eredője ennek következtében külső parabolaszelvény súlypontján, a 27. § 5-ban a 107-ik ábra kapcsán mondottak szerint tehát a háromszög magasságának a *t* egyenestől számított harmadik negyedén megy át. (109. I ábra, 6-ik szám.)

Ha a *t* tengelyen kivül eső, (szélesebb), trapézból áll valamely idomrész, ezt többnyire föl lehet nehézség nélkül osztani egy parallelogrammra és egy oly trapézra, melynek megnyujtott oldalai a $t$ egyenesen metsződnek. (109. I ábra, 2—3-ik szám.) A parallelogrammra a föntebb mondottakat alkalmazzuk. (A 3-mal számozott parallelogrammra a *dm*-ek eredője a 2-vel számozott trapéz súlyvonalára esik, tehát a 3 számú $\varDelta m$ erő oda, a hová a 2 számú $\varDelta f$ erő.) A trapéz pedig oly két háromszög különbségéből áll, melyek csúcspontjai a $t$ egyenesre esnek; a hozzája tartozó *dm* idomrész ennélfogva két külső parabolaszegment-fél különbsége. Ha sorban $x_1$- és $x_2$-nek nevezzük a trapéz párhuzamos oldalainak távolságait a $t$ tengelytől, akkor e fél parabola-idomok területei úgy viszonylanak, mint $x_1{}^3 : x_2{}^3$, súlyvonalaik pedig sorban $^3/_4\, x_1$ és $^3/_4\, x_2$ távolságban vannak a $t$ egyenestől. A *dm*-ek eredője irányvonalát, — amint ezekből kitetszik, — egyszerűen úgy lehet megszerkeszteni, ha a $\pm x_1{}^3$ és $\mp x_2{}^3$ mennyiségeket a $t$ egyenestől sorban $^3/_4\, x_1$ és $^3/_4\, x_2$ távolságokban ható erőknek képzelve, megszerkesztjük, az erők mérő hosszainak fölcserélt fölmérése és a végpontok összekötése útján, eredőjük irányvonalát. (109. VI ábra.)

A *dm* ábra alkalmazásán kivül még következőképp is meg lehet bármily alakú idomrész tehetetlenségi nyomatékát szerkeszteni. Ha valamely tetszőleges idom területe $F$, tehetetlenségi sugara a súlypontján átmenő $t$ tengelyre nézve $r$, akkor ez ábra $\mathbf{I}$ tehetetlenségi nyomatéka a $t$ tengelylyel párhuzamosan, tőle $x$ távolságban vont egyenesre nézve

$$\mathbf{I} = F(r^2 + x^2) = \frac{1}{2} F\left(x + r\right)^2 + \frac{1}{2} F\left(x - r\right)^2$$

*Áll tehát minden idomra és minden tengelyre hogy, ha $r$ a tehetetlenségi sugár a $t$ irányú súlyponti tengelyre, és ha $^1/_2\, F$ nagyságú $t$ irányú két erőt veszünk föl $\pm r$ távolságban a súlyponttól, e két erő tehetetlenségi nyomatéka minden tetszőleges $t$ irányú tengelyre nézve egyenlő az idom területének tehetetlenségi nyomatékával. (Sík idomok területe ily helyettesítésének általánosabb tárgyalását lásd a 30-ik §. 1—3-ban.)*

E tétel alapján könnyen meg lehet szerkeszteni minden tetszőleges idom tehetetlenségi nyomatékát bármely $t$ irányú tengelyre, ha oly részekre osztjuk az idomot, melyek $r$ tehetetlenségi sugarai a $t$ irányú súlyponti tengelyeikre nézve mind ismeretesek; és ha, — az egyes idomrészek $\varDelta F$ területeit súlypontjaiktól $\pm r$ távolságban fölvett $^1/_2\, \varDelta F$ nagyságú, $t$ irányú erőkkel pótolva, — megszerkesztjük ez erők tehetetlenségi nyomatékát.

Megjegyzendő, hogy ezt akkor is megtehetjük, ha az idom eleve ismeretlen súlypontján át fölveendő $t$ irányú tengelyre keressük a tehetetlenségi nyomatékot, mivelhogy az épp említett erők eredője az idom $t$ irányú súlyvonalára esik.

Többnyire trapézekre, parallelogrammokra és háromszögekre alkalmazzuk az épp mondottakat, és a trapézt vagy két háromszögre, vagy egy parallelogrammra és egy háromszögre osztjuk. Nevezzük a $t$ irányra merőlegesen mért magasságot, — mind a trapézre, mind a háromszögre, — $h$-nak, a $t$ irányú oldal hosszát pedig, szintén mind a két idomra, $b$-nek. Könnyen belátható, hogy ekkor a $t$ irányú súlyponti tengelyre nézve, a parallelogrammra

$$r = \sqrt{\frac{bh^3}{12\,bh}} = \frac{h}{3\sqrt{2}}.$$

a háromszögre pedig

$$r = \sqrt{\frac{bh^3}{18\,bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}.$$

A centrális ellipszis megszerkesztése végett, — melyet a következő szakaszban fogunk tárgyalni, — több tengelyre kell az idomok tehetetlenségi sugarait meghatározni. A tehetetlenségi nyomatékot az egyes tengelyekre ez esetben vagy a föntebbiekben imént részletesen tárgyalt módon lehet megszerkeszteni, mindig újra osztva be az idomot mindegyik tengelyre nézve, e tengelylyel párhuzamosan vont egyenesekkel. (Lásd pl. a 118-ik ábrát.) Vagy a $\pm r$ távolságban fölvett, épp említett $\frac{1}{2}\Delta F$ erők behozatalán alapuló, a 30. § 2-ben még bővebben megismertetendő módszert is alkalmazhatjuk, mely esetben az idom többszöri beosztásának szükségességét elkerüljük.

A 109. I ábrán a beosztás a $t$ tengelylyel párhuzamos, s a külön e végből húzott $\Delta s$ egyenes felső oldalán, kis vonalakkal és a folyó számok beirásával van megjelölve; a $\Delta s$ egyenes alatt kihúzott kis egyenesek az egyes idomrészek súlyvonalait és területi mérő hosszait, a $\Delta f$-eket, jelentik. (I ábra.) A $t$ tengelylyel párhuzamosan vont $y$ egyenesre a középmagasságokat mértük rá, a fölül fölvett kezdőponttól, és a végpontokat sorban az egyes idomrészek folyó számaival jelöltük meg. A $\Delta f$ mérő hosszakat ezután mint $y$ erőjü és $\frac{1}{2}\Delta s$ karú nyomatékokat egyenként szerkesztettük meg, a 2. § 9 végén a 6—7-ik ábrákat illetőleg mondottak szerint. Az $y$-ok erőpoligónjában a magasság tehát $= \frac{1}{2}a$, és e jelet irtuk ez erőpoligón csúcspontjára is. A szerkesztés többi része a föntebb előadottak után bővebb magyarázat nélkül is érthető.

A 118. I—XI ábrákon további példaképpen hengerelt T-vas keresztmetszeti idoma tehetetlenségi sugarait szerkesztettük meg, a súlyponton át, a két szárral párhuzamosan fölvett $t_1$ és $t_2$ tengelyekre. (A centrális ellipszis és a belső mag megrajzolása végett.) Minthogy az idom két szimmetrikus félből áll, s ez okból a fél idom tehetetlenségi sugara a szóban levő tengelyek mindegyikére nézve ugyanaz mint az egészé: a szerkesztést csak a szimmetriatengely egyik oldalára eső idom részre hajtottuk végre. E végből előbb az egyik, ezután a másik tengelylyel párhuzamosan osztottuk az idomot sávokra. A vízszintes irányú beosztásban a 4—5-el számozott trapézt két háromszögre bontottuk, s ezek $\Delta F$ területeit a súlyponttól $\pm r$ távolságban fölvett $\frac{1}{2}\Delta f$ erőkkel helyettesítettük. A beosztást az idom két szélén és kerületén jelöltük meg, s megjelöltük ezenkivül az idom két szélén a sávok középvonalait is. A sávok területeinek $\Delta f$ mérő hosszait a III és VIII ábrákon vonalozva húzott kötélpoligónok rajzolása útján, akképpen szerkesztettük meg egyenként és összegeikben, hogy a

$$\Delta f = \frac{y\Delta s}{a}$$

képlet alapján, $\pm y$ mérő hosszúságú erőkből álló erőpárokat vettünk föl a $\Delta s$-ek végpontjain, rájuk merőleges irányban, és megszerkesztettük nyomatékaik mérő hosszait. Megszerkesztettük tehát a II és VII ábrákon, az $y$-al jelölt egyeneseken, az $y$-ok átvetítése és az $a$ csúcspontok fölvétele útján, a $\pm y$ erőpárok $a$ magasságú erőpoligónjait, s ezután, a már említett III és VIII ábrákon, ez erőpárok kötélpoligónjait. A $t_2$ irányú beosztásban az 1-gyel számozott sáv e szerkesztésekben, nagyobb pontosság elérése végett, kétszeres szélességgel és fél magassággal szerepel; a $t_1$ irányú beosztásban ellenben a 6—7-tel számozott sávok fél szélességgel és kettős magassággal; és megjegyzendő az is, hogy az imént említett 6—7-tel számozott sávok közötti válaszvonalat csak a $t_1$ tengely megszerkesztése után lehetett fölvenni.

A $\pm y$ erőpárok kötélpoligónjainak megrajzolása után megszerkesztettük a IV és IX ábrákon, az éppen említett kötélpoligónok sarokpontjainak átvetítése útján, a $\Delta f$-ek erőpoligónjait. Ezután megszerkesztettük az V és X ábrákon a $\Delta f$-ek, és a VI és XI ábrákon a $\Delta m$-ek kötélpoligónjait. A tehetetlenségi nyomatékok mérő hosszait, és a tehetetlenségi sugarakat a $t_1$ és $t_2$ tengelyekre nézve, a VI és XI ábrákon sorban $^1/_2\, i_1$; $r_1$ és $^1/_2\, i_2$; $r_2$-vel jelöltük meg. A tehetetlenségi sugarat mind a két esetben az

$$r^2 = \frac{\mathbf{I}}{F} = \frac{\frac{1}{2} bci}{\frac{1}{2} f} = \frac{1}{2} ib$$

képlet alapján, mint az $^1/_2\; i$ és $b$ közötti középső geometriai arányost szerkesztettük meg, minthogy a $\Delta m$ erőpoligónjának magasságát az V és X ábrákon $c = {}^1/_2 f$-re vettük volt föl.

Végre még az jegyzendő meg az e pontban már előadottakkal kapcsolatban, hogy akképpen is meg lehet határozni valamely idom $\mathbf{I}_0$ tehetetlenségi nyomatékát a *súlypontján* át fölveendő $t$ irányú tengelyre nézve, ha megszerkesztjük ez idom centrifugális nyomatékát két oly tengelyre, $t_0$ és $t_1$-re, melyek párhuzamosak a $t$ iránynyal, s melyek közül $t_0$ a súlyponton megy át, $t_1$ pedig $t$-vel párhuzamosan bárhol fölvehető. Ha ugyanis a két tengely távolsága $q$, s valamely $t$ irányú, $dx$ szélességű és $dF$ területű sáv távolsága a $t_0$ tengelytől $x$, akkor az idom területének $Z$ centrifugális nyomatéka a $t_0$ és $t_1$ tengelyekre nézve:

$$Z = \int x(x+q)\, dF = \int x^2\, dF = \mathbf{I}_0$$

minthogy a $t_0$ tengely a súlyponton megy át, s minthogy ennek következtében $q\int x\, dF = o$.

Úgy is megszerkeszthetjük tehát valamely idom $\mathbf{I}_0$ tehetetlenségi nyomatékát a súlypontján átmenő $t$ irányú $t_0$ tengelyre nézve, ha a $t$ irányú tetszőleges $t_1$ tengelyt veszszük föl, és akképpen rajzoljuk meg mind a $\Delta f$-ek, mind a $\Delta m$-ek kötélpoligónját, mint ha a $t_1$ egyenesre kerestetnék a tehetetlenségi nyomaték. Ha ez megtörtént, akkor ugyanis a $\Delta f$-ek kötélpoligónja megnyujtott szélső oldalainak metszéspontján át, a $t$ iránynyal párhuzamosan húzott egyenes a $t_0$ tengely, és az az $i_0$ hosszúság, melyet a $\Delta m$-ek kötélpoligónjának megnyujtott szélső oldalai a $t_0$ egyenesen levágnak, a keresett $\mathbf{I}_0$ tehetetlenségi nyomaték mérő hossza; és megjegyezzük, hogy a szélesebb idomrészekre e szerkesztésben a $dm$-ek ábrájára mondottakat alkalmazhatjuk, de a $\pm r$ távolságban fölvett $^1/_2\, \Delta F$ erőkkel is pótolhatjuk az ily idomrészek területeit, tekintetbe véve, hogy e helyettesités, amint a 30. § 2-ben látni fogjuk, a centrifugális nyomatékra nézve is érvényes. A 109. IV ábrán pl. az $i_0$ hosszúság ennélfogva a tehetetlenségi nyomaték mérő hossza az I ábrán látható idom $t$ irányú súlyponti tengelyére nézve.

E módszert főképpen akkor alkalmazhatjuk célszerűen, ha kisérletek útján kell valamely vasrúd keresztmetszeti idomát méretezni. Ekkor ugyanis gyakran meg kell változtatni az övek szélein fölvett méreteket, s ennek következtében esetleg az idom súlypontja is megváltozik. Ha az imént előadott módon rendezzük a szerkesztést, akkor a méretek e megváltoztatása következtében csak a kötélpoligónok széleit kell újra meghuzni, vagy egy-egy új oldallal kiegésziteni.

*2. A tehetetlenségi nyomaték megszerkesztése egy, (esetleg két,) kötélpoligónnal.* Az alább következőkben, — mellőzve az egyéb módokat, — a tehetetlenségi nyomaték megszerkesztésének *Mohr*-tól származó módját fogjuk még megmutatni.*)

Oszszuk be a föladatban kijelölt idomot, megint a $t$ tengely irányában, alkalmas távolságokban fölvett egyenesekkel, mérhető szélességű oly részekre, melyek $\Delta f$ területi mérő hosszait, és $t$ irányú súlyvonalait, könnyen meg lehet szerkeszteni, és rajzoljuk meg a $\Delta f$ erők kötélpoligónját, egészen úgy, mint a megelőző pontban mondottuk. (110-ik ábra.) Képzeljük most a szóban forgó idomot, szintén a $t$ tengelylyel párhuzamosan, végtelen keskeny, $dF$ területű sávokra is fölosztva, s rajzoljuk meg a $\Delta f$ erők kötélpoligónja fölhasználásával a 15. §-ban mondottak szerint, a $df$ erők kötélgörbéjét is, (a 110. IV ábrán a $\Delta f$-ek kötélpoligónja szaggatott vonalakkal van meghúzva, a $df$-ek kötélgörbéje pedig folytonos vonallal,) megszerkesztve a beosztó vonalak és a $\Delta f$-ek kötélpoligónja közötti metszéspontokat, s oly görbét rajzolva e pontokon át, melyen az egyes pontok érintői sorban az éppen emlitett kötélpoligón-oldalak. Nevezzük a tetszőleges $df$ erő nyomatéki mérő hosszát a $t$ tengely pontjaira nézve, és vonatkozással a $b$ nyomatéki alapra, $dm$-nek, (IV ábra,) a területmérő alapot $a$-nak, a $df$ erő távolságát a $t$ tengelytől $z$-nek, s ama végtelen kis $\gamma\alpha\beta$ háromszög területét, melyet a $df$-et közbefoglaló kötélvonal-oldalak megnyujtása és a $t$ egyenes határolnak, $dF_1$-nek, akkor

$$dF_1 = \frac{1}{2} z\, dm = \frac{1}{2} \frac{z^2 df}{b} = \frac{1}{2} \frac{z^2 dF}{ab}.$$

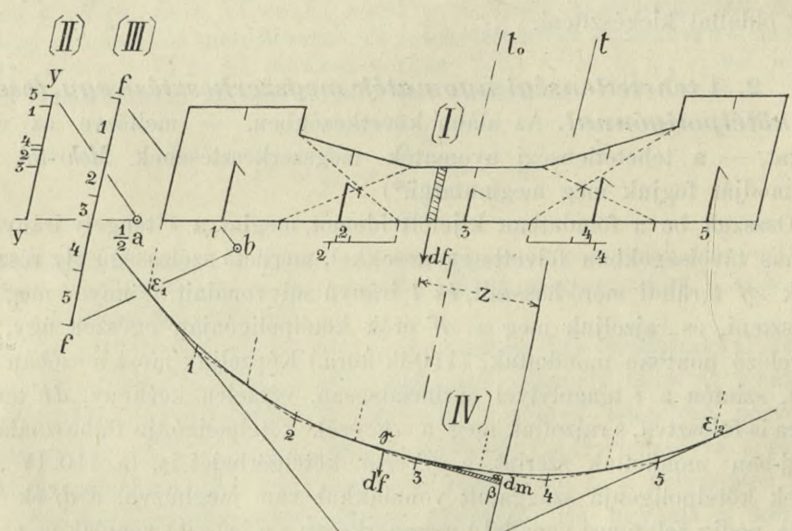
A $dF_1$ területek összege azonban egyenlő az $\varepsilon_1 \gamma \varepsilon_2 \eta \delta$ kötélidom területével, kötélidomnak nevezve rövidség végett azt az idomot, melyet a

*) A megelőző pontban előadott módot, (a $dm$-ábra alkalmazását kivéve,) ezzel szemben rendesen a *Culmann*-félének nevezik, s megjegyzendőnek véljük, hogy azért különböztettük meg a föladat két megoldását, a nevek helyett, a jellemző kötélpoligónok száma alapján, minthogy a grafosztatika alapvető módszereinek túlnyomólag legnagyobb része tudvalevőleg *Culmann*-tól származik, s így félreértésre szolgáltathat okot, ha nevét következetesség nélkül az egyik vagy másik tétel tárgyalásában idézik.

$df$-ek kötélgörbéje, (nem a $\Delta f$-ek kötélpoligonja!) e kötélgörbe két végpontjának érintője, és a $t$ tengely határolnak. Ha ez idom területét $F_1$-gyel, a keresett tehetetlenségi nyomatékot pedig $\mathbf{I}$-val jelöljük, akkor a föntebbi $dF_1$ egyenlet alapján tehát:

$$F_1 = \frac{\mathbf{I}}{2ab}; \text{ miből } \mathbf{I} = 2abF_1.$$

*Ha a tetszőleges $A$ idom területét a $t$ tengelylyel párhuzamos irányú erőnek tekintjük, s megrajzoljuk a $df$ erők kötélgörbéjét, akkor a kötélidomnak $2ab$-vel megsokszorozott területe tehát egyenlő az $A$ idom tehetetlenségi nyomatékával.*




*110-ik ábra.*

Ha a $t_0$ súlyponti tengelyre keressük a tehetetlenségi nyomatékot, akkor a kötélidom alatt az az idom értendő, melyet a kötélgörbe, és e görbe két végpontjának érintői határolnak. (110. IV ábra.)

Ha az $r$ tehetetlenségi sugarat keressük, a tetszőleges $t$ tengelyre nézve, akkor tekintettel az

$$r^2 = \frac{\mathbf{I}}{F} = \frac{2bF_1}{f}$$

képletre, legcélszerűbb a $\Delta f$-ek erőpoligónjában a magasságot $b = {}^1\!/_2\, f$-nek venni föl, mely esetben

$$r^2 = F_1$$

az $r$ tehetetlenségi sugár tehát egyenlő a kötélábrával ugyanakkora területű négyzet oldalával.

Ha pedig valamely tartó keresztmetszeti idomának K modulusa képezi a kérdés tárgyát, a keresztmetszet valamelyik szélére nézve, és ha az idom e szélének távolsága a neutrális tengelytől $e$, akkor

$$K = \frac{I}{e} = \frac{2abF_1}{e}.$$

Legcélszerűbb tehát ez esetben, úgy venni föl az $a$ és $b$ hosszakat, hogy szorzatuk kerekszám legyen, a kötélábra $k$ területi mérő hosszát pedig $^1/_2\, e$-re, mint alapra határozni meg, tekintetbe véve, hogy ha $k = F_1 : {}^1/_2\, e$, akkor

$$K = abk$$

s így mind a K modulust, mind a belső erők

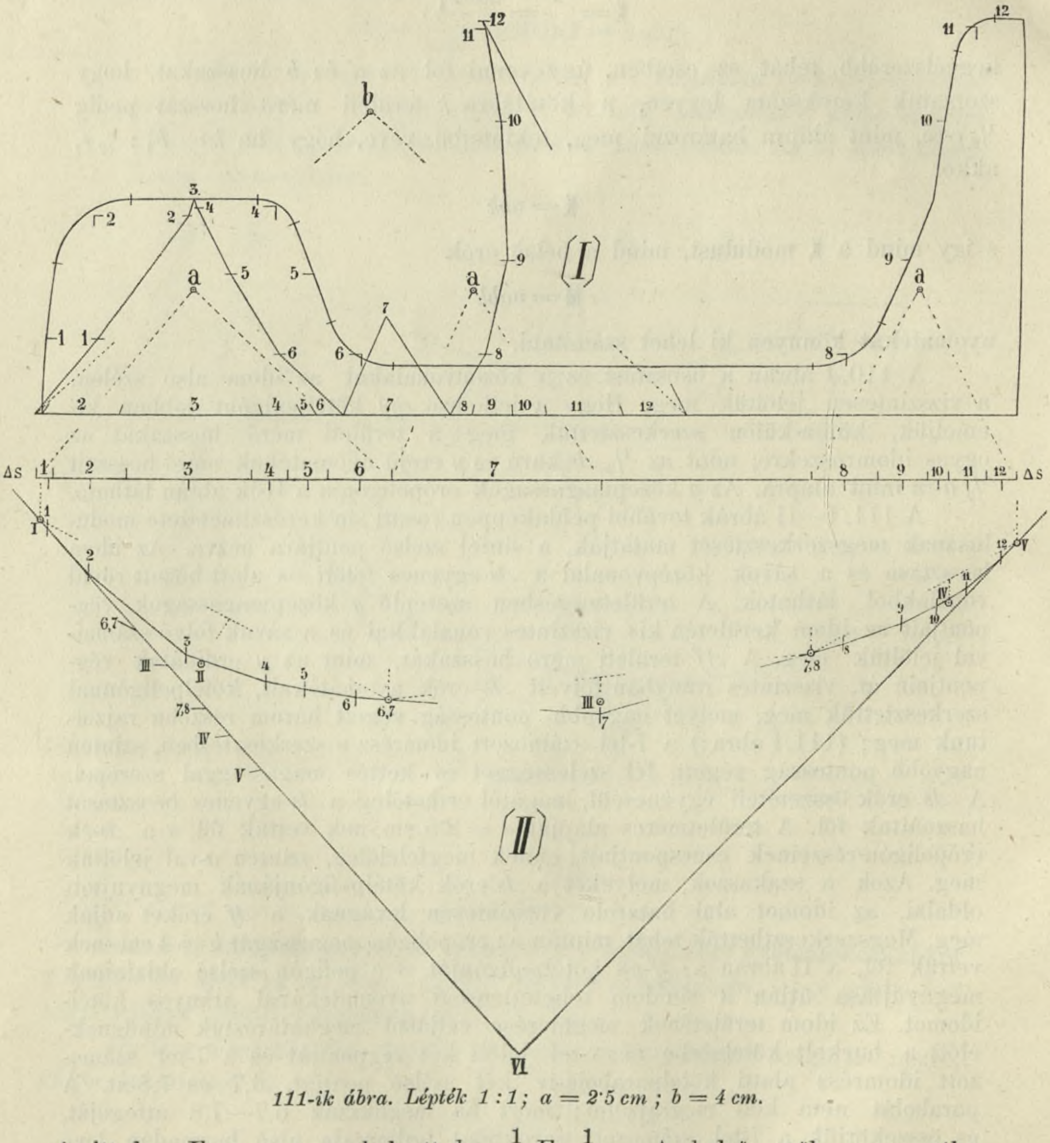
$$M = \sigma abk$$

nyomatékát könnyen ki lehet számitani.

A 110. I ábrán a beosztást és a középvonalakat az idom alsó szélén, a vízszintesen jelöltük meg. Hogy a jellemző *egy* kötélpoligónt jobban kiemeljük, külön-külön szerkesztettük meg a területi mérő hosszakat az egyes idomrészekre, mint az $^1/_2\, \Delta s$ karú és $y$ erejű nyomatékok mérő hosszait $^1/_2\, a$-ra mint alapra. Az $y$ középmagasságok erőpoligónja a II-ik ábrán látható.

A 111. I—II ábrák további példaképpen vasuti sín keresztmetszete modulusának megszerkesztését mutatják, a sínfej szélső pontjára nézve. Az idom beosztása és a sávok középvonalai a $\Delta s$ egyenes fölött és alatt húzott rövid vonalakból láthatók. A területmérésben szereplő $y$ középmagasságok végpontjait az idom kerületén kis vízszintes vonalakkal és a sávak folyó számaival jelöltük meg. A $\Delta f$ területi mérő hosszakat, mint az $y$ ordináták végpontjain át, vízszintes irányban fölvett $\Delta s$ erők nyomatékait, kötélpoligónnal szerkesztettük meg, melyet nagyobb pontosság végett három részben rajzoltunk meg; (111. I ábra;) a 7-tel számozott idomrész e szerkesztésben, szintén nagyobb pontosság végett, fél szélességgel és kettős magassággal szerepel. A $\Delta s$ erők összetételi egyeneséül, magától érthetőleg a $\Delta s$ egyenes beosztását használtuk föl. A területmérés alapját $a = 2{\cdot}5$ cm.-nek vettük föl, s a $\Delta s$-ek erőpoligón-részeinek csúcspontjait, ennek megfelelőleg, szintén $a$-val jelöltük meg. Azok a szakaszok, melyeket a $\Delta s$ erők kötélpoligónjának megnyujtott oldalai, az idomot alul határoló vizszintesen levágnak, a $\Delta f$ erőket adják meg. Megszerkeszthettük tehát, miután az erőpoligón magasságát $b = 4$ cm.-nek vettük föl, a II ábrán a $\Delta f$-ek kötélpoligónját, s e poligón szélső oldalainak megnyujtása útján a sínidom tehetetlenségi nyomatékával arányos kötélidomot. Ez idom területének megmérése céljából meghatároztuk mindenekelőtt a burkolt kötélgörbe I és V-tel jelölt két végpontját és a 7-tel számozott idomrész alatti kötélparabola-ív két szélső pontját, 6,7 és 7,8-at. A parabolát nem kell megrajzolni; mert ha meghúzzuk 6,7—7,8 átfogóját, és összekötjük a 7-tel számozott sarokpont ordinátája alsó harmadán levő III pontot a parabolaív végpontjaival, akkor a parabolaszegmenttel egyenlő területű háromszöget kapunk. A kötélgörbe I — (6,7) és a (7,8) — V részeit a területmérés alkalmával parabola-íveknek tekintettük szegmentjeiket velük egyenlő területű háromszögekkel pótoltuk, s ezek csúcspontjait sorban II és IV-gyel számoztuk meg. Végre átváltoztattuk az I, II, (6,7), III, (7,8), IV, V, VI poligónt az ugyanakkora területű V, V, VI háromszöggé, s megszerkesztettük ennek $k$ területi mérő hosszát a sínfej és a súlypont közötti $e$ távolság felére, mint alapra nézve. A sínfej szélére számított modulus ugyanis

$$\mathsf{K} = \frac{\mathsf{I}}{e} = \frac{ab\,F_1}{e_1} = abk\,,$$




*111-ik ábra. Lépték 1 : 1; a = 2·5 cm ; b = 4 cm.*

és itt $k = F_1 : e_1$ vagy a helyett $k = \frac{1}{2} F_1 : \frac{1}{2} e_1$. A belső erők nyomatéka

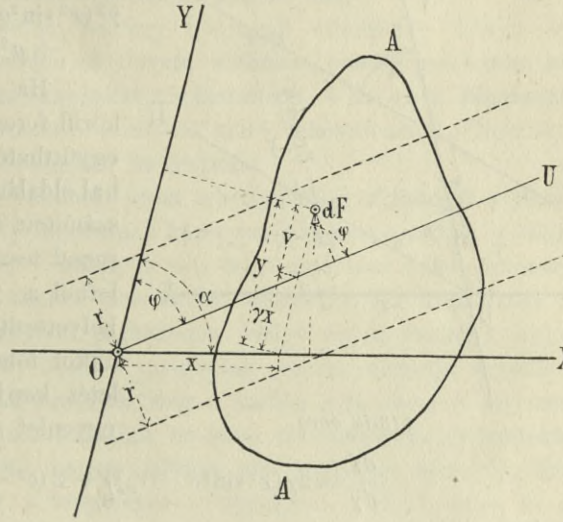
$$\mathsf{M} = abk\sigma.$$

A $k$ mérő hosszat $k = 7{\cdot}45$ cm.-nek találtuk, $\mathsf{K}$ tehát $= 74{\cdot}5$ cm$^3$. Ha a hajlító igénybevétel következtében a sínfej szélén keletkező nyomás cm$^2$-ként $\sigma = 1{\cdot}0$ tonna, akkor a belső erők nyomatéka, amint látjuk, $\mathsf{M} = 0{\cdot}745$ m. t.

## 29. §.

## A tehetetlenségi ellipszisek, és a centrális ellipszis.

*1. A tehetetlenségi ellipszisek.* Azt, hogy miképpen változik valamely $A$ idom tehetetlenségi nyomatéka, ha az $OU$ tengely a tetszőleges $O$ pont körül forog, (112-ik ábra,) akképpen lehet igen egyszerűen szemlélhetővé tenni, ha oly két egyenest húzunk, a mondott tengelylyel párhuzamosan, ennek minden helyzetére, melyeknek a tengelytől mért távolsága egyenlő a tengelyről tengelyre változó tehetetlenségi sugárral, $r$-rel. E párhuzamosak ugyanis, amint azonnal látni fogjuk, ellipszist burkolnak. Ezt az ellipszist általánosságban az $A$ idom-t e h e t e t l e n s é g i e l l i p s z i s é n e k nevezzük, abban az esetben pedig, ha a tengely forgási középpontja az idom súlypontjára esik, ez idom c e n t r á l i s e l l i p s z i s é n e k.*)




*112-ik ábra.*

Ha a tengely forgásának $O$ középpontján át a tetszőleges $OXY$ koordinátarendszert veszszük föl, akkor áll, az ábrán látható jelzés esetében, hogy

$$v = y - \gamma x,$$

és itt $\gamma$ állandó szorzót jelent. Ha $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}_y$, $\mathbf{I}_x$-vel az idom tehetetlenségi nyomatékát sorban az $OU$, $OY$, $OX$ tengelyekre; $r$, $r_y$, $r_x$-szel a tehetetlenségi sugarakat ugyane tengelyekre; $\mathfrak{Z}$-vel a centrifugális nyomatékot az $X$ és $Y$ tengelyekre nézve; $c$-vel e centrifugális nyomaték sugarát, t. i. a $\sqrt{\frac{\mathfrak{Z}}{F}}$ mennyiséget; végre $F$-fel az $A$ idom területét jelöljük, akkor áll tehát a föntebbi egyenlet következtében, hogy

$$\int v^2 dF = \int y^2 dF + \gamma^2 \int x^2 dF - 2\gamma \int xy dF$$

$$\mathbf{I} \operatorname{cosec}^2 \varphi = \operatorname{cosec}^2 \alpha \, (\mathbf{I}_x + \gamma^2 \mathbf{I}_y - 2\gamma \mathfrak{Z})$$

$$r^2 \operatorname{cosec}^2 \varphi = \operatorname{cosec}^2 \alpha \, (r_x^2 + \gamma^2 r_y^2 - 2\gamma c^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

*) *Mohr* és *Müller-Bresslau* kör segítségével határozzák meg a tehetetlenségi nyomatékot a forgó tengely tetszőleges helyzetére, valamint a tartók keresztmetszeti idoma neutrális tengelyét és belső magját is. (*Mohr* Beitr.: Hannov. Zeitschr. 1870 és 1877. és *Müller-Bresslau:* Grap. Stat. d. Bauk. Band. I.) E módszerek megismertetése azonban a jelen mű kiszabott keretén kivül esik.

Az $OU$ tengelytől $r$ távolságban húzott párhuzamosnak egyenlete azonban, a 113-ik ábra tanúsága szerint,

$$y = \gamma x + r \operatorname{cosec} \varphi,$$

amiből

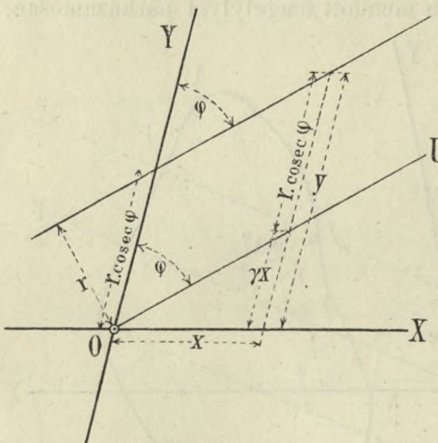
$$r^2 \operatorname{cosec}^2 \varphi = (y - \gamma x)^2,$$

s ha ezt az 1-gyel számozott egyenletbe helyettesítjük és ezután $\gamma$ szerint rendezünk, akkor sorban a következő egyenletek keletkeznek:

$$(y - \gamma x)^2 \sin^2\alpha = r_x^2 + \gamma^2 r_y^2 - 2\gamma c^2;$$

$$\gamma^2 (x^2 \sin^2\alpha - r_y^2) + 2\gamma (c^2 - xy \sin^2\alpha)$$

$$+ y^2 \sin^2\alpha - r_x^2 = o \quad . \quad . \quad (2)$$




*113-ik ábra.*

Ha az $OU$ tengely az $O$ pont körül forog, akkor ez egyenletben a $\gamma$ együttható a változó. Ha az egyenlet bal oldalán levő függvénynek $\gamma$ szerint számított differenciális hányadosát zérussal teszszük egyenlővé, s ez egyenletből a $\gamma$-át meghatározva, visszahelyettesítjük az eredeti egyenletbe, akkor tehát a burkolt görbe egyenletét kapjuk meg. A föntebbi 2. sz. egyenlet szerint azonban

$$\frac{df}{d\gamma} = 2\gamma (x^2 \sin^2\alpha - r_y^2) + 2 (c^2 - xy \sin^2\alpha),$$

és így

$$\gamma = \frac{xy \sin^2\alpha - c^2}{x^2 \sin^2\alpha - r_y^2}.$$

A burkolt görbe egyenlete ezek folytán,

$$x^2 r_x^2 \sin^2\alpha + y^2 r_y^2 \sin^2\alpha - 2xyc^2 \sin^2\alpha - r_x^2 r_y^2 + c^4 = o \quad . \quad (3)$$

Amint ebből látjuk, a burkolt görbe oly ellipszis, melynek középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontjára, tehát a tengely forgásának középpontjára esik, és a fölvett $OX$ és $OY$ tengelyek akkor konjugált átmérők a tehetetlenségi ellipszisben, ha $c = o$ és ha az $xy$-os tag ennek következtében az egyenletből kiesik; tehát akkor, ha a centrifugális nyomaték e tengelyekre nézve zérus.

*Kitetszik az eddig mondottakból mindenekelőtt, hogy valamely idom centrifugális nyomatéka az idom minden tehetetlenségi ellipszisének minden konjugált átmérőpárjára nézve zérus.*

A tehetetlenségi ellipszis egyenlete konjugált átmérőkre nézve a 3-mal számozott képlet alapján a következő:

$$\left(\frac{x}{r_y \operatorname{cosec} \alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_x \operatorname{cosec} \alpha}\right)^2 = 1,$$

a fő átmérőkre nézve pedig

$$\left(\frac{x}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_x}\right)^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Ha ismerjük valamely idom tehetetlenségi ellipszisében egyik tetszőleges konjugált átmérőpár irányát, (esetleg a két fő átmérőét,) akkor könynyen megszerkeszthetjük az ellipszist, ha meghatározzuk a mondott két konjugált átmérőre a tehetetlenségi sugarakat, s ha megrajzoljuk mindegyik átmérőhöz a vele párhuzamos irányú, és tőle $\pm r$ távolságban levő két egyenest. A föntebb mondottak szerint ez úton ugyanis az ellipszis konjugált átmérőivel párhuzamos érintők parallelogrammját, esetleg a fő átmérőkkel párhuzamos érintők épszögű négyszögét kapjuk meg.

Abban az esetben pedig, ha egy konjugált átmérőpár iránya sem ismeretes eleve, a középponton át fölvett, különben tetszőleges három tengelyre kell a tehetetlenségi sugarakat meghatározni, s az ezek fölhasználásával vont három pár párhuzamos érintőből kell a tehetetlenségi ellipszist, a *Pascal-Brianchon*-féle tételek alapján, megrajzolni.

Ha megszerkesztettük valamely idom tehetetlenségi ellipszisét a tetszőleges $O$ pontra, mint a tengely forgásának középpontjára nézve, akkor, — tekintettel a föntebb előadottakra, — könnyen meg lehet határozni a tehetetlenségi nyomatékot az $O$ ponton átmenő tetszőleges tengelyre. Ha meghúzzuk az ellipszisnek a kijelölt tengelylyel párhuzamos irányú egyik érintőjét, akkor ennek a tengelytől mért távolsága a mondottak szerint megadja ugyanis a tehetetlenségi sugarat; s ha ismerjük még a szóban levő idom $S$ súlypontját is, akkor könnyen meghatározhatjuk ez idom tehetetlenségi nyomatékát, nemcsak az $O$ ponton átmenő, hanem minden más tengelyre nézve is. Mert ha $r$ a tehetetlenségi sugár a tetszőleges $u$ tengelyre, $r_1$ az $O$ ponton át az $u$-val párhuzamosan vont $u_1$ egyenesre nézve, s ha az $S$ súlypont távolsága az $u_1$ egyenestől $y_1$, az $u$ egyenestől pedig $y$, akkor tudvalevőleg:

$$r^2 = r_1{}^2 - y_1{}^2 + y^2.$$

Ami végre az ugyanahhoz az idomhoz tartozó tehetetlenségi ellipszisek egymásközötti geometriai vonatkozásait illeti, önként következik a föntebb mondottakból, hogy azokban a tehetetlenségi ellipszisekben, melyek középpontjai ugyanegy egyenesen vannak, az ezzel párhuzamos érintők mind a két oldalon szintén ugyanazokba az egyenesekbe esnek.

Világos továbbá, hogy valamely idom centrifugális nyomatéka az olyan tengelyrendszerekre nézve, melyekben az egyik pl. az $x$ irányú koordinátatengelyek az idom súlypontján átmenő ugyanegy egyenesbe esnek, az $y$ tengelyek pedig párhuzamosak egymással, ugyanaz. Mert ha az első kötélgörbével a közös $x$ tengelyre szerkesztjük meg a $dF$ területelemek $dm$ nyomatéki mértékeit, s a második kötélgörbével pedig a $dm$-ek nyomatékait az $y$ tengelyre, akkor a második kötélgörbe szélső oldalai a $dm$-ek erőpoligonjának záródása következtében párhuzamosak egymással, tehát valamennyi $y$ irányú egyenesen ugyanazt a hosszúságot vágják le.

Ha tekintetbe veszszük, hogy a centrifugális nyomaték bármely tehetetlenségi ellipszis minden konjugált átmérőpárjára nézve zérus, akkor kitetszik tehát a föntebbiekből, hogy valamely idom ama tehetetlenségi ellipsziseiben, melyek középpontjai az idom súlypontján átmenő ugyanegy egyenesen vannak, az erre az egyenesre eső ellipszisátmérők konjugált átmérői párhuzamosak egymással, és egyenlő nagyok.

*2. A centrális ellipszis.* Valamely idom tehetetlenségi ellipszisei közül főképpen a centrális ellipszis nagyobb fontosságú. Erre az ellipszisre ez okból, a megelőző pontban előadottakon kivül, még a következőket kell e helyen megjegyeznünk. Tudjuk hogy, ha felező egyenese van valamely idomnak, ez egyenes átmegy az idom súlypontján. (27-ik §.) Vegyük föl már most a koordináta-rendszert az ily idomra akképpen, hogy az $x$ tengely az idom felező egyenesébe essék, az $y$ tengely pedig a felezett húrokkal párhuzamos legyen. Ha ez idom egyik tetszőleges $dF$ elemének koordinátái $+x$ és $+y$, akkor szükségképpen van az ábrán egy másik elem, melynek kordinátái $+x$ és $-y$. Két-két ilyen elem centrifugális nyomatéka az $x$ és $y$ tengelyekre nézve

$$(xydF - xydF)\sin^2\alpha = o.$$

Világos tehát, hogy az egész idom centrifugális nyomatéka e tengelyekre nézve szintén zérus.

*A felező vonalas idomok centrális ellipszisében, a mondottaknál fogva, az idom felező egyenesével, és a felezett hurokkal párhuzamosan, konjugált átmérők vannak. Ha szimmetrikus az idom, akkor a centrális ellipszis egyik főtengelye a szimmetriatengelyre esik. Ha pedig két oly szimmetriatengelye van valamely idomnak, melyek nem állanak egymásra merőlegesen, akkor ez idom centrális ellipszise kör, tehetetlenségi nyomatéka tehát a súlypontján átmenő minden tengelyre nézve ugyanaz.*

A felező vonalas idomok centrális ellipszisét akképpen rajzoljuk meg ezek következtében, hogy megszerkesztjük a tehetetlenségi sugarat a felező egyenesre, (esetleg a szimmetria-tengelyre,) és a felezett húrokkal párhuzamos irányú súlyponti tengelyre; és ezután a konjugált átmérőivel (esetleg a fő átmérőivel,) párhuzamos érintők parallelogrammjából szerkesztjük meg az ellipszist, a megelőző pontban már említett módon.

Ha két oly szimmetria-tengelye van az idomnak, melyek nem merőlegesek egymásra, akkor megszerkesztjük a tehetetlenségi sugarat az idom súlypontján át fölvett bármely tengelyre, s ez megadja a centrális kör sugarát.

Ha ellenben sem szimmetria-tengelye, sem egyéb felező egyenese nincsen az idomnak, akkor súlypontján át fölvett *három* tengelyre kell a tehetetlenségi sugarakat meghatározni, s e tengelyekkel párhuzamosan vont három pár érintő fölhasználásával kell a centrális ellipszist megszerkeszteni.

A 118-ik ábrán T-vas keresztmetszeti idomának centrális ellipszisét rajzoltuk meg példaképpen. Minthogy a főtengelyekre nézve értett tehetetlenségi sugarak megszerkesztését a 28. § 1-ban már megmutattuk, a végrehajtott szerkesztés bővebb magyarázata nem szükséges.

## 30. §.

## A centrális ellipszis főbb alkalmazásai.

***1. Az oly idomok, melyek a tehetetlenségi és a centrifugális nyomatékra nézve egyenértékűek.*** E szakasz alább következő pontjaiban a centrális ellipszis elméletének alkalmazásai köréből közlünk néhány tételt.*) Megelőzőleg meg kell azonban határoznunk, hogy mik a föl tételek arra, hogy két sík idom, (melyek egyike, vagy esetleg mindketteje, egyes pontokon összezsúfoltnak képzelt területekből is állhat,) a tehetetlenségi és a centrifugális nyomatékot illetőleg, minden tetszőleges tengelyre vagy tengelyrendszerre nézve egyenértékű legyen.

Ha valamely sík idom egyik $dF$ elemének koordinátáit valamely, általában ferdeszögű, rendszerre nézve $x$- és $y$-nal, és valamely más, szintén tetszőleges rendszerre nézve $x_1$ és $y_1$-gyel jelöljük meg, akkor mind az $x$ mind az $y$ elsőfokú függvénye az $x_1$ és $y_1$-nek. S ha a két tengelyrendszer fölvétele egészen általános, ha nevezetesen a kezdőpontok nem esnek össze, a tengelyek pedig nem párhuzamosak egymással, akkor mind az $x$ mind az $y$ oly függvény, melynek egyik tagja az $x_1$-et, egy másik tagja az $y_1$-et tartalmazza, egy harmadik tagja pedig független $x_1$ és $y_1$-től. Ha az idomnak az $x$ és $y$ tengelyekre számított centrifugális nyomatékát az $x_1 y_1$ koordinátákban fejezzük ki, akkor tehát a következő egyenletet kapjuk:

$$\int xydF = \alpha\int x_1{}^2 dF + \beta\int y_1{}^2 dF + \gamma\int x_1 y_1 dF + a\int x_1 dF + b\int y_1 dF + K\int dF \ldots (5)$$

és az $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ és $K$ együtthatók itt csak a két tengelyrendszer kezdőpontjainak helyzetétől és tengelyeinek irányaitól függnek, $x, y$ és $x_1, y_1$ pedig a koordináta-tengelyektől mért merőleges távolságokat is jelenthetik. Egészen ily alakú a tehetetlenségi nyomaték képlete is, mivelhogy a föntebb mondottak szerint az $\int x^2 dF$ képletében az $x_1$ és $y_1$-et illetőleg ugyanazok a tagok szerepelnek, mint az $\int xydF$ centrifugális nyomaték egyenletében.

*Akkor egyenértékű tehát két idom egymással, mind a tehetetlenségi, mind a centrifugális nyomatékot illetőleg, minden tetszőleges tengelyre vagy tengelyrendszerre nézve, ha súlypontjaik összeesnek, területeik egyenlőek egymással, és ha tehetetlenségi és centrifugális nyomatékuk valamely, tetszőlegesen választható tengelyrendszerre nézve ugyanaz.*

---

*) A megelőző §-ban tárgyalt tehetetlenségi ellipszis *Clebsch*-től származik. (*Crelle* J. f. M. 1860. p. 73.) Más módon keletkező tehetetlenségi ellipszist már előbb *Poinsot* származtatott le. (J. de Math. pures et appl. 1851. p. 74; és *Poinsot* Rot. des corps. 1851; p. 66.) Az alább következő 2 és 4—5-ik pontokban előadott alkalmazások azonban már *Culmann*-tól vannak, valamint a neutrális tengely és a belső magnak a következő 31-ik §-ban tárgyalt elmélete is. (*Culmann* Graph. Stat. 1-te Aufl. 1866; p. 160—204. — 2-te Aufl. 1875. p. 392—427.) Az épp említett 31. § 2-ban 9—10 sz. képlet, ebben az általánosságban, *Ritter*-től (*Zürich*) van. (Civ. Ing. 1876. p. 309.)

Abban az esetben, ha a tengelyek a két rendszerben párhuzamosak, $x$ nem függ $y_1$-től, s viszont $y$ nem függ $x_1$-től. Az $x$ és $y$ tengelyekre számított centrifugális nyomaték képlete ez esetben tehát:

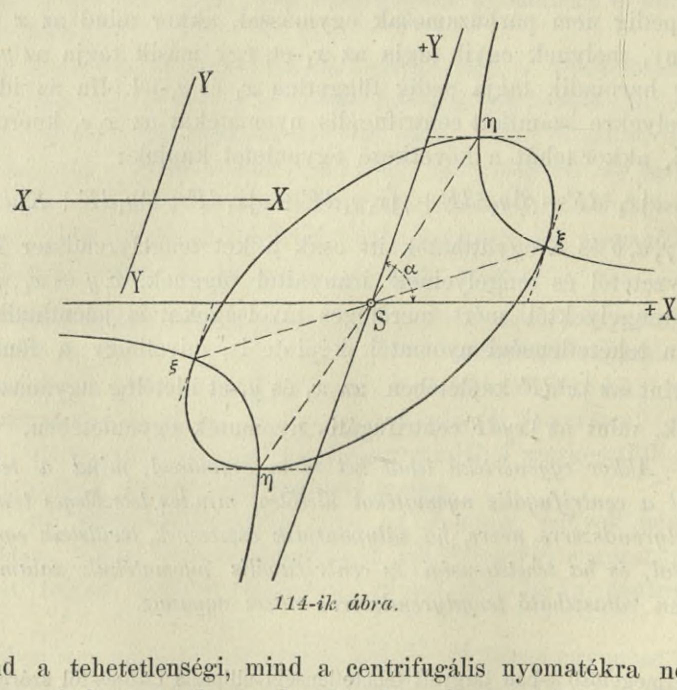
$$\int xy dF = \alpha \int x_1 y_1 dF + a \int x_1 dF + b \int y_1 dF + K \int dF \quad . \quad . \quad (6a)$$

az $y$ tengelyre számitott tehetetlenségi nyomaték képlete pedig:

$$\int x^2 dF = \beta \int x_1{}^2 dF + a_1 \int x_1 dF + K_1 \int dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6b)$$

és itt $\alpha, a, b, K, \beta, a_1$ és $K_1$ megint függetlenek $x_1$ és $y_1$-től. A helyettesités föltételei, amint e képletekből látjuk, hasonlóak mint azok, melyeket az 5. sz. egyenlet alapján az imént előadtunk, kivéve hogy az idom tehetetlenségi nyomatéka csakis a tehetetlenségi nyomatékot illető helyettesítés föltételei között szerepel.

*2. Az idomok területének helyettesítése két erővel.* Hogy miképpen lehet valamely idom $F$ területét csupán csak a tehetetlenségi nyomatékra nézve $F_1 = \frac{1}{2} F$ nagyságú két erővel helyettesíteni, már a 28. §. 1-ban láttuk. Állapitsuk meg most annak a föltételeit, hogy a helyet-




*114-ik ábra.*

tesités mind a tehetetlenségi, mind a centrifugális nyomatékra nézve érvényes legyen, minden tetszőleges oly tengelyrendszerre nézve, melyben a tengelyek irányai előre meg vannak adva. Vegyük föl e végből a koordinátarendszer $X$ és $Y$ tengelyeit a helyettesitendő idom $S$ súlypontján át, azokban $X, Y$ az irányokban, melyekre az idom $F$ területe az $F_1$ erőkkel helyettesitendő, (114-ik ábra,) és nevezzük ama pontok koordinátáit, melyeken az $F_1$ területek mint erők fölveendők $x_1\ y_1$ és $x_2\ y_2$-nek, a koordináta rendszer szögét pedig $\alpha$-nak. Mindenekelőtt kitetszik a 6$a$—$b$ egyenletek kapcsán imént mondottakból, hogy, ha egymással egyenlő nagyságú két területtel helyettesítendő az idom, $F_1 = {}^1/_2 F$-nek kell lennie, mert csak így egyezik a helyettesítő területek összege a helyettesítendő idom területével. A többi föltételek arra, hogy az $x_1\, y_1$ és $x_2\, y_2$ pontokon összezsúfolt ${}^1/_2 F$ nagyságú két terület egyelőre csakis a *centrifugális* nyomaték tekintetében legyen egyenértékű az adott sík idommal, minden oly rendszerre nézve, melyben e tengelyek párhuzamosak az $S$ súlyponton át imént fölvett $X$ és $Y$ tengelyekkel, a 6$a$ egyenlet alapján, a következők:

$$x_1 + x_2 = o\,;\; y_1 + y_2 = o$$

$$\frac{1}{2} x_1 y_1 + \frac{1}{2} x_2 y_2 = c^2 \operatorname{cosec}^2\alpha$$

és itt $c^2$ az $xy$ tengelyekre számított centrifugális nyomaték és az $F$ terület közötti osztalékot jelenti.

A keresett $x_1\, y_1$ és $x_2\, y_2$ pontoknak, — amint a két első egyenletből látjuk, — a helyettesítendő idom súlypontjától egyenlő távol kell lenniök, s összekötő vonaluknak ugyane ponton kell átmennie. Az is kitetszik a föntebbi egyenletekből, hogy mindkét keresett pont geometriai helye ugyanegy másodrendű görbe. Ha az első két egyenletből a harmadikba helyettesítünk, s $x_1\, y_1$ és $x_2\, y_2$ helyett, elhagyva e jelzőket, $xy$-t irunk, akkor továbbá az

$$xy = c^2 \operatorname{cosec}^2\alpha$$

egyenlet következik. A szóban levő másodrendű görbe tehát oly hiperbola, melynek aszimptótáit a helyettesítendő idom súlypontján át, az $X$ és $Y$ irányokkal párhuzamosan vont egyenesek képezik; és a helyettesítő ${}^1/_2 F$ területeket, a *centrifugális nyomatékot illetőleg*, e hiperbola bármely átmérőjének végpontjain föl lehet venni.

Hogy azonban az $Y$ tengelyre számított *tehetetlenségi* nyomatékra nézve is érvényes legyen a helyettesítés, a 6$b$ egyenlet következtében az

$$x^2 \sin^2\alpha = r^2$$

egyenletnek is kell állania, és ha ebből a hiperbola egyenletébe helyettesítünk

$$x = \pm\, r \operatorname{cosec}\alpha\,;\; y = \pm\, \frac{c^2 \operatorname{cosec}\alpha}{r_y}$$

keletkezik. Könnyen belátható, a 3-mal számozott képletből, (29. § 1,) hogy ez egyenletek a centrális ellipszis egyenletének is megfelelnek, és hogy a $\pm\, x$, $\pm\, y$ koordinátájú pontok az $Y$-nal konjugált ellipszis-átmérő végpontjainak koordinátái.

*Ha az $X$ és $Y$ tengelyek iránya előre ismeretes, akkor akképpen helyettesíthetjük tehát legegyszerűbben valamely sík idom $F$ területét, a centrifugális nyomatékot illetőleg, a mondott irányokban fölvehető minden tetszőleges $X$ és $Y$ tengelyre nézve, ha az idom centrális ellipszisén, akár az $x$, akár az $y$ iránynyal konjugált átmérő végpontjain ${}^1/_2\, F$ nagyságú területeket veszünk föl. Ha az* $\dfrac{x \textit{ iránynyal}}{y \textit{ iránynyal}}$ *konjugált tengely végpontjain vettük* *föl az $^1/_2 F$ területeket, ezek a tehetetlenségi nyomatékra nézve is helyettesítik az idom területét minden oly tengelyre nézve, mely az $\frac{x \text{ iránynyal}}{y \text{ iránynyal}}$ párhuzamos.*

Ha oly részekre osztunk valamely idomot, melyek centrális ellipszisei ismeretesek, akkor könnyen megszerkeszthetjük e tétel alapján, — anélkül hogy más-más tengelyre nézve más-más irányban kellene az idomot beosztani, — a tehetetlenségi nyomatékot az $X$ vagy $Y$-nal párhuzamosan vont bármely tengelyre, s a centrifugális nyomatékot az $X$ és $Y$-nal párhuzamosan fölvett bármily tengelyrendszerre, ha az imént mondottakat minden egyes idomrész $\Delta F$ területére alkalmazva, az egész idom területét, az egyes idomrészekre sorban talált $^1/_2 \Delta F$ területekkel pótoljuk, s ezek tehetetlenségi, vagy centrifugális nyomatékát szerkesztjük meg.

*3. A sík idomok területének helyettesítése három erővel.* Az idom síkjára merőlegesen fölvett $^1/_3 F$ nagyságú *három* erővel is pótolhatjuk minden tetszőleges idom $F$ területét, mind a tehetetlenségi, mind a centrifugális nyomatékra nézve, még pedig akképpen, hogy ez erők támadó pontjai teljesen függetlenek attól, hogy mely tengelyre keressük a tehetetlenségi, vagy mely tengelyrendszerre a centrifugális nyomatékot.*)

A közelebbi föltételeket illetőleg mindenek előtt az tetszik ki az 5-tel számozott egyenlet kapcsán e §-ban mondottakból, hogy, — ha három *egyenlő nagy* területtel helyettesitendő valamely $F$ területű idom, — a helyettesitő területek mindegyikének $^1/_3 F$-et kell tennie, mert csak így egyezik a helyettesitő terület az eredetivel. Ha a helyettesitendő idom tehetetlenségi főtengelyeit veszszük koordináta-tengelyekül, és ha $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$-val jelöljük ama pontok koordinátáit, melyeken az $^1/_3 F$ nagyságú területek fölveendők, $r_1$- és $r_2$-vel pedig a helyettesitendő idom tehetetlenségi sugarát sorban az $y$ és az $x$ tengelyre, akkor a helyettesités többi föltételei, az imént már idézett 5 sz. egyenlet kapcsán előadottak folytán tehát a következők:

$$x_1 + x_2 + x_3 = o \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3 r_1^2$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = o \qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3 r_2^2$$
$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = o.$$

Minthogy ez öt föltételi egyenletben hat szabadon választható mennyiség van, mindenek előtt az tetszik ki, hogy a föladatot végtelen sokféle módon meg lehet oldani. Ha kiküszöböljük az öt egyenlet segitségével *két* támadó pont koordinátáit, s ha az ekkép keletkező egyenletben a harmadik támadó pont rendezőit $xy$-nal jelöljük meg, akkor a következő egyenlet keletkezik:

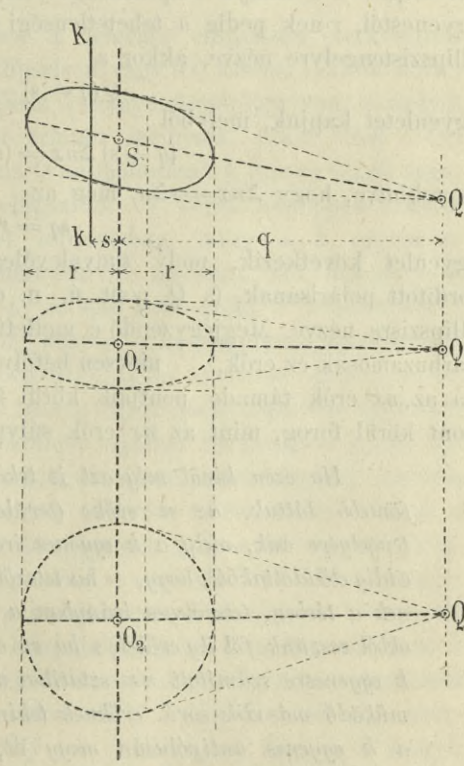
$$\left(\frac{x}{r_1 \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_2 \sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$

s minthogy a keresett három támadó pont koordinátáit az öt föltételi egyenletben tetszőleges módon föl lehet egymással cserélni, ez egyenlet mind a

*) *Routh.* Dinam. of rigid bodies; 1882; p. 25.

három támadó pont geometriai helyének egyenlete. A keresett három pont tehát, a mint a föntebbi egyenletből kitetszik, oly ellipszisen van, mely a helyettesítendő idom centrális ellipszisével geometriailag hasonló s melyben a főtengelyek $\sqrt{2}$-szerte akkorák, mint a centrális ellipszisben. Ha ez ellipszis ismeretes, akkor könnyen megtalálhatjuk tehát az $^1/_3$ $F$ nagyságú helyettesítő erők támadó pontjait. Az egyiket ugyanis bármiképpen vehetjük föl a támadó pontok ellipszisének tetszőleges $\alpha$ pontján; s ha az $\alpha$ támadó pontot fölvettük, akkor a másik kettő az $\alpha$ ponton átmenő ellipszis-átmérő ama társirányú húrjának két végpontján van, mely a mondott átmérő túlsó felének, (az $\alpha$ ponttól számítva,) középpontján megy át, mivelhogy csak ekkor zérus a helyettesítő erők nyomatéka, mind az $x$ mind az $y$ tengelyre nézve. Ha ismerjük a centrális ellipszis egyik tetszőleges konjugált átmérő-párjának irányát, akkor a három támadó pontot ezek alapján az ellipszis többi részének megszerkesztése nélkül is meghatározhatjuk.

Ha oly részekre osztunk valamely idomot, melyekre a centrális ellipszis egyik társiránypárját ismerjük, akkor meg lehet tehát e tétel alapján szerkeszteni ez idom tehetetlenségi nyomatékát minden tetszőleges tengelyre, és centrifugális nyomatékát minden tetszőleges tengelyrendszerre, anélkül hogy az egyes idomrészek támadóponti ellipsziseinek több mint három-három pontját kellene megrajzolni.



*115-ik ábra.*

### *4. Oly erők eredője, melyeket más erők (vagy terület-elemek,) sztatikai nyomatékainak lehet tekinteni.*

A szilárdságtani problemák grafikai tárgyalásában igen gyakran megtörténik, hogy oly $P_1P_2 \ldots P$ erőket veszünk föl bizonyos pontokon, a vetületi síkra merőleges irányban, (vagy, hogy valóban működnek ily erők,) melyeket más erők, vagy esetleg bizonyos területelemek sztatikai nyomatékainak képzelhetünk. Az ily erők egyenlete, — ha sorban $x_1x_2 \ldots x$-vel jelöljük az egyes erők átdöfő pontjainak távolságait a vetületi síkon levő valamely $k$ egyenestől, $n_1n_2 \ldots n$-nel pedig az egyes erőktől független, tetszőleges előjelű szorzókat, — általában $P = nx$. Hogy meghatározhassuk a $P$ erők eredőjének átdöfő pontját, képzeljük az $n$ együtthatókat oly területelemeknek, melyeket a $P$ erők átdöfő pontjain veszünk föl, s szerkeszszük meg e területelemek $S$ súlypontját, és centrális ellipszisét. (115-ik ábra.) Ha a $P$ erők eredőjét $Q$-nak nevezzük, s ennek átdöfő pontját a vetületi síkon szintén $Q$-val jelöljük meg, és ha $y$-nak nevezzük a $P$ erők átdöfő pontjainak távolságait a $QS$ egyenestől, akkor áll, hogy

$$\Sigma nxy = o,$$

mivelhogy a $P = nx$ erők nyomatéka a $Q$ ponton átmenő minden egyenesre zérus.

*Minthogy pedig a $\Sigma nxy$ összeget az $n$ területelemek centrifugális nyomatékának is tekintjük, kitetszik az imént mondottakból, hogy a $P = nx$ erők eredőjének átdöfő pontja, az $n$ területelemek centrális ellipszisén, a $k$ egyenes irányával konjugált átmérő valamely pontja.*

Ha a $k$ egyenesre fejezzük ki ezután az $P = nx$ erők és ezek $Q$ eredője közötti nyomatékegyenlőséget, és $q$-nak nevezzük a $Q$ átdöfő pont távolságát a $k$ irányú ellipszistengelytől, $s$-nek a $S$ súlypont távolságát a $k$ egyenestől, $r$-nek pedig a tehetetlenségi sugarat az épp már említett $k$ irányú ellipszistengelyre nézve, akkor a

$$Q(q + s) = \Sigma nx^2$$

egyenletet kapjuk, melyből

$$(q + s)\Sigma nx = (r^2 + s^2)\Sigma n$$

és tekintve, hogy $\Sigma nx = s\Sigma n$, még az

$$sq = r^2 \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

egyenlet következik, mely tudvalevőleg a $Q$ átdöfő pont $180^0$-kal megfordított polárisának, (a $Q$ pont ú. n. *antipolárisának*,) egyenlete a centrális ellipszisre nézve. Megjegyzendő e mellett, hogy az $nx$ erők iránya, — ha csak párhuzamosak ez erők, — nincsen befolyással eredőjük átdöfő pontjára. Mert ha az $nx$ erők támadó pontjaik körül forognak, akkor eredőjük a $Q$ átdöfő pont körül forog, mint az $nx$ erők súlypontja körül.

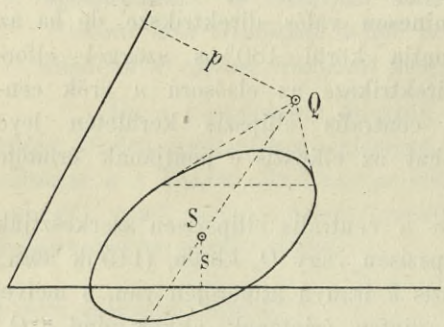
*Ha ezen kivül még azt is tekintetbe veszszük, hogy a $Q$ pont, amint föntebb láttuk, az $n$ erők (területelemek) centrális ellipszisének ama tengelyére esik, mely a $k$ egyenes irányával konjugált, akkor kitetszik az eddig előadottakból, hogy, — ha tetszőleges előjelű párhuzamos $n$ erők működnek a térben, tetszőleges irányban a vetületi síkhoz képest, vagy ha más okból veszünk föl ily erőket, s ha ez erőknek a vetületi síkon fekvő tetszőleges $k$ egyenesre számított $nx$ sztatikai nyomatékait az $n$ erők irányvonalaiban működő második sorú erőknek tekintjük, — a második sorú erők eredője a $k$ egyenes antipólusán megy át, az elsősorú erők centrális ellipszisén. Ha viszont a második sorú erők eredőjének $Q$ átdöfő pontja ismeretes, akkor a $k$ egyenes a $Q$ pont antipolárisa. S az imént kimondott tételek állanak akkor is, ha az átdöfő pontok távolságát a $k$ egyenestől nem merőleges, hanem bármely más irányban mérjük, tekintve, hogy, — ha* *más-más irányban mérjük le a szorzó karokat, — valamennyi $nx$ erő ugyanabban az arányban változik meg az előbbi értékekhez képest.*

Ha a $k$ egyenes megváltozik, akkor a $Q$ pont is elmozdul, még pedig akképpen, hogy, ha a $k$ egyenes valamely benne fölvett $A$ pont körül forog, a $Q$ pont egyenes vonalban mozdul el, t. i. az $A$ pont antipolárisában. Abban a két sík rendszerben, mely ez úton keletkezik, az egyik rendszer minden $k$ egyenesének, a másik rendszer egyik $Q$ pontja felel tehát meg, s a $k$ egyenesen lévő minden pontnak a $Q$ ponton átmenő egyenes. A szóban forgó két sík rendszer, a mint ezekből látjuk, reciprocitásban van egymással, még pedig poláris reciprocitásban, tekintve, hogy a tetszőleges $Q$ pontnak mind a két sík rendszerben ugyanaz a $k$ egyenes felel meg, és megfordítva. A két sík rendszernek nincsen valós direktriksze, de ha az egyiket az első sorú $n$ erők súlypontja körül $180^0$-os szöggel elfordítjuk, akkor az új sík rendszerek direktriksze az elsősorú $n$ erők centrális ellipszise, mivelhogy ekkor a centrális ellipszis kerületén levő minden $Q$ pontnak e pont polárisa, tehát az ellipszis e pontjának érintője felel meg.

Ha a $k$ egyenes antipólusát nem a centrális ellipszisen szerkesztjük meg, hanem valamely más oly $O_1$ ellipszisen vagy $O_2$ körön, (115-ik ábra,) melynek középpontja a centrális ellipszis $k$ irányú átmérőjén van, s melyet a centrális ellipszis $k$ irányú érintői szintén érintenek, akkor mind e $Q_1$, $Q_2$, .... antipólusok a centrális ellipszis $Q$ antipólusának $k$ irányú vetítő sugarára esnek, tekintve hogy mindez ellipszisek és körök akképpen vannak egymással és a centrális ellipszissel affinitásban, hogy a $k$ egyenesre merőleges irányú hosszak léptéke valamennyire ugyanaz. Ha ismeretes a $k$ egyenes, és az $n$ területelemek (t. i. az első sorú erők,) $r$ tehetetlenségi sugara a $k$ irányú súlyponti tengelyre nézve, s ha ismeretes továbbá a $k$ irány konjugált átmérője a centrális ellipszisre, akkor tehát *kör* segítségével is könnyen meghatározhatjuk a bármely $k$ irányú egyenesnek megfelelő $Q$ pontot, a nélkül hogy a centrális ellipszist meg kellene rajzolni. Ha pedig a $Q$ pont van megadva, s ha ismeretes a $QS$ egyenes konjugált átmérőjének iránya a centrális ellipszisre, és az $r$ tehetetlenségi sugár ez átmérőre nézve, akkor viszont a $k$ egyenest lehet hasonló módon megszerkeszteni, t. i. a $QS$ egyenes konjugált átmérőjén fölvett valamely $O_2$ pontból $r$ sugárral leírt kör segítségével. Magától értődik különben hogy, ha ismerjük a $k$ egyenes konjugált átmérőjét, vagy megfordítva a $QS$-sel konjugált átmérő irányát: az adott $k$ egyenesnek megfelelő $Q$ pontot, vagy megfordítva az adott $Q$ pontnak megfelelő $k$ egyenest, az imént megmutatott módon kivül, minden más oly szerkesztéssel is meg lehet határozni, mely azt eredményezi, hogy a $k$ irányú súlyponti tengelyre nézve értett $r$ tehetetlenségi sugár a középső geometriai arányos legyen a $Q$ pontnak és a $k$ egyenesnek az éppen említett $k$ irányú súlyponti tengelytől mért merőleges távolságai között. — (Lásd a 7. sz. egyenletet.)

*5. A centrifugális nyomaték meghatározása a megelőző tétel alapján.* A megelőző pontban előadottakból a centrifugális nyomaték meghatározásának egy további módja következik, melyet *Culmann* a rugalmas deformáció elméletében igen gyakran alkalmaz, (utána *Ritter* is,) és melynek megismertetését ez okból szükségesnek véljük.

*Minthogy ugyanis a föntebbiekben az első sorúnak nevezett n erőkön bármily párhuzamos erőket, vagy ilyeneknek képzelt bármely terület-elemeket lehet érteni: önként következik a megelőző pontban mondottakból, hogy akképpen is meghatározhatjuk minden tetszőleges nagyságú és előjelű párhuzamos erők, (vagy esetleg valamely sík idom területének,) centrifugális nyomatékát, a vetületi síkon fölvett bármely tengelyrendszerre nézve, ha meghatározzuk sztatikai nyomatékukat a két tengely egyikére, s ha ezt e tengely Q antipólusában működő új erőnek tekintve, meghatározzuk nyomatékát a másik tengelyre. (116 ik ábra.) Akképp is meghatározhatjuk továbbá a szóban levő centrifugális nyomatékot az imént mondottak következtében, ha megsokszorozzuk az erők összegét előbb súlypontjuknak az egyik tengelytől mért s távolságával, s ezután e tengely Q antipólusának a másik tengelytől mért p távolságával. És világos, hogy mindez akkor is áll, ha az erők nem merőlegesek a vetületi síkra, s. ha a centrifugális nyomaték szorzó karjai alatt az átdöfő pontok és a tengelyek közötti, akár merőleges, akár más irányokban mért távolságokat értjük; csak azt kell megjegyezni, hogy az s és p távolságokat mindig ugyanazokban az irányokban kell lemérni, melyekben a centrifugális nyomaték szorzó karjait.*



*116-ik ábra.*

31. §.

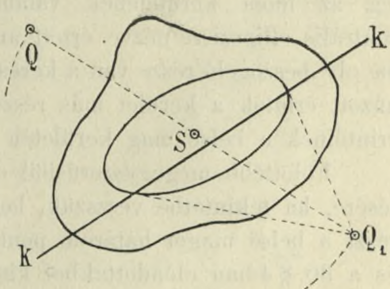
## A neutrális tengely, a belső mag, és ennek alkalmazásai.

*1. A rudak keresztmetszeteinek neutrális tengelye.* A hajlító szilárdság elmélete, amint tudjuk, azon a föltevésen alapszik, hogy, ha a szilárdsági tengelyre merőleges irányú keresztmetszetet veszünk föl a rúd tetszőleges helyén, (lásd 4. § 2,) a keresztmetszet különböző pontjain keletkező húzó vagy nyomó feszültségek úgy viszonylanak egymáshoz, mint e pontoknak a keresztmetszet síkján fekvő valamely egyenestől mért távolságai. Ez egyenest a keresztmetszet n e u t r á l i s  t e n g e l y é n e k nevezzük, azt a fölületet pedig, melyet valamennyi keresztmetszet neutrális tengelyei együttesen képeznek, a rúd n e u t r á l i s  r é t e g é n e k. Ha $dF$

a neutrális tengelytől $x$ távolságban levő valamely keresztmetszeti elem területe, $\sigma_1$ a négyzet egységenkénti húzó vagy nyomó feszültség $x = 1$ távolságban a neutrális tengelytől, akkor a $dF$ elemen, a keresztmetszetre merőleges irányban ható húzó vagy nyomó erő ennélfogva $dQ = \sigma_1 x\, dF$. A $dQ$ erők, amint ebből látjuk, a keresztmetszet síkjára merőleges erőkként tekintett $dF$ terület-elemeknek, a neutrális tengelyre számított sztatikai nyomatékaival arányosak, eredőjüknek meghatározására tehát a megelőző 30-ik §. 4-ben előadottakat alkalmazhatjuk. A $dQ$ erők $Q$ eredője azonban, mint a keresztmetszetre ható külső erők $R$ eredőjének merőleges összetevője, ama ponton kell hogy menjen át, melyen a külső erők éppen említett $R$ eredője, vagy, — ha nem lehet ez erőket *egy* erővel pótolni, — a keresztmetszet síkjára eső erőpár társerője, (4. §. 2,) a keresztmetszet síkját átdöfi.

*Kitetszik tehát az imént mondottakból, hogy hajlító, és ezzel egyidejűleg esetleg húzó vagy nyomó szilárdságára is igénybe vett valamely rúd tetszőleges keresztmetszetének neutrális tengelye, az e keresztmetszetre ható külső erők eredője átdöfő pontjának antipolárisa, a keresztmetszeti idom centrális ellipszisén.*

Ha $Q$ a keresztmetszetre ható külső erők eredőjének átdöfő pontja, akkor a keresztmetszet $k$ neutrális tengelyét ennélfogva akképpen szerkesztjük meg legegyszerűbben, ha átforgatjuk a $Q$ átdöfő pontot az idom $S$ súlypontja körül 180°-kal a másik oldalra, s megszerkesztjük az ekképpen talált $Q_1$ pont $k$ polárisát, a keresztmetszeti idom centrális ellipszisén. (117-ik ábra.)



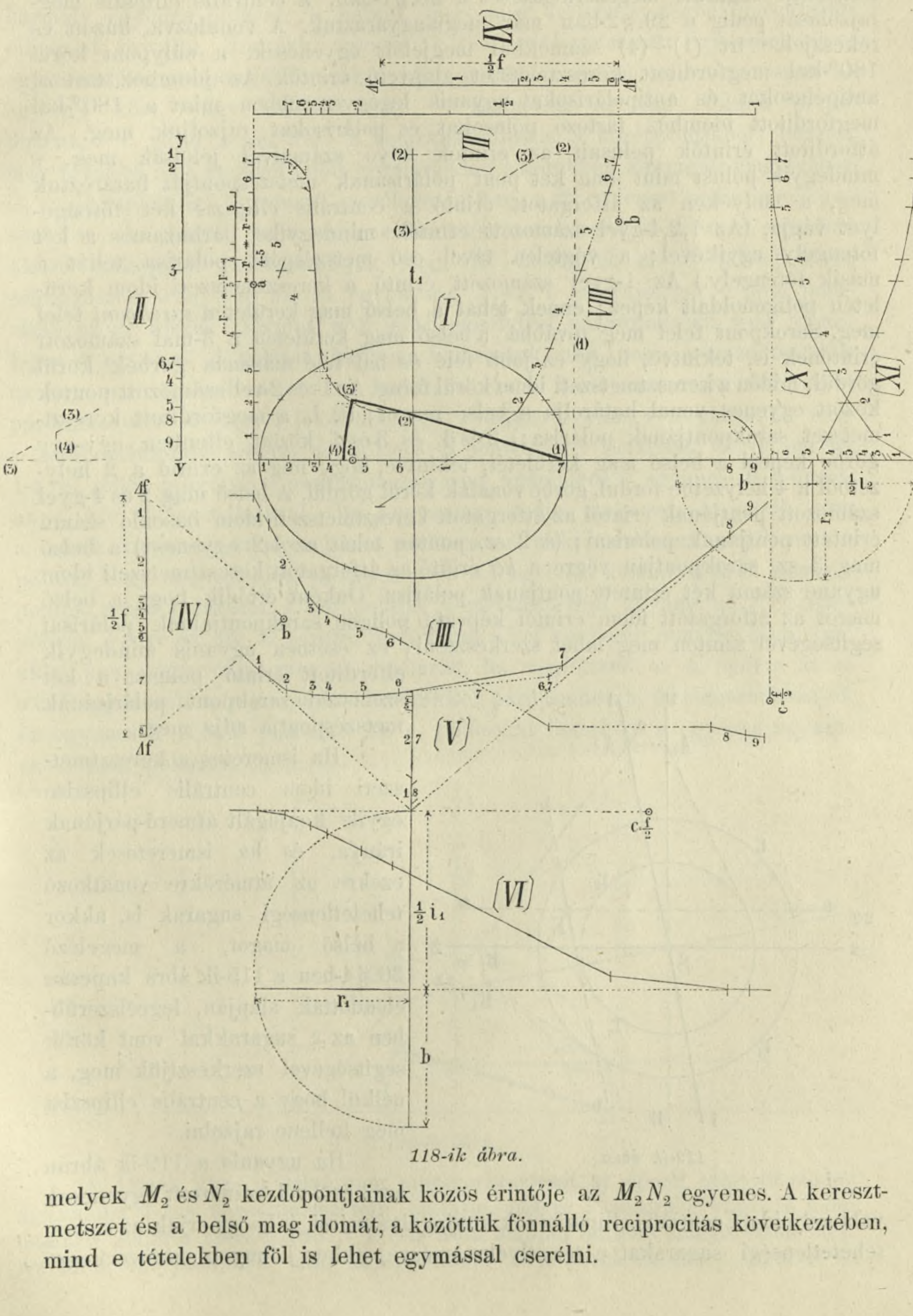
117-ik ábra.

*Ha csak hajlító szilárdságára van valamely rúd egész hosszában, vagy esetleg csak valamely keresztmetszete helyén, igénybe véve, akkor a külső erők eredője párhuzamos a keresztmetszet síkjával, a Q átdöfő pont végtelen távol esik, a neutrális tengely tehát a keresztmetszeti idom súlypontján megy át, s a centrális ellipszis arra az átmérőjére esik, mely a külső erők eredőjének párhuzamosaival konjugált.*

**2. *A belső mag.*** Ha a keresztmetszetre ható külső erők eredője átdöfő pontjának, a keresztmetszeti idom súlypontjától mért távolsága, bizonyos határértéknél többet tesz, akkor a neutrális tengely a keresztmetszeti idomot átmetszi, minek következtében a keresztmetszet különböző pontjain egymáshoz képest ellenkező előjelű igénybevételek keletkeznek, t. i. a neutrális tengely egyik oldalán húzás, másikon nyomás; míg az ellenkező esetben a keresztmetszeti idom egész kiterjedésében mindenütt ugyanazon módon van az anyag igénybe véve. Az átmenetet a két eset között az képezi, ha az átdöfő pont annyira van a keresztmetszet súlypontjától, hogy a neutrális tengely a túlsó oldalon éppen érinti a keresztmetszeti idom kerületét. E határesetben az anyag a keresztmetszet egész kiterjedésében mindenütt ugyanakképen van ugyan még igénybe véve, a neutrális tengely érintette ponton vagy pontokon azonban az igénybevétel zérusra száll le. Van tehát minden keresztmetszetnek bizonyos, határozottan körülvonalozható belső része, mely abban különbözik az ezen kivül eső résztől, hogy míg a külső erők eredőjének átdöfő pontja e belső részből ki nem lép, a keresztmetszet minden pontján egyforma előjelű igénybevétel uralkodik. A keresztmetszeti idom e belső részét a b e l s ő m a g n a k nevezzük, s kerületének megszerkesztésére a megelőző pontban előadottakat alkalmazzuk.

Kitetszik ugyanis az épp mondottakból hogy, ha a neutrális tengely a keresztmetszeti idom kerületét valamely ponton érinti, a nélkül, hogy a kerület valamely más részét esetleg átmetszené, az eredő átdöfő pontja a belső mag kerületének valamely pontján van. Áll tehát hogy, ha akképpen fordul el a neutrális tengely a keresztmetszeti idom kerülete körül, hogy forgása közben ez idom mindamaz érintőit leírja, melyek nem metszik át esetleg az idom kerületének valamely más részét: a forgó érintőnek a centrális ellipszisre nézve értett antipólusa a belső mag kerületét irja le. De ha oly beszögelő része van a keresztmetszeti idom kerületének, hogy a hozzája húzott érintők a kerület más részét átvágják, akkor az ilyen beszögelő rész érintőinek a belső mag kerületén nem felelnek meg pontok.

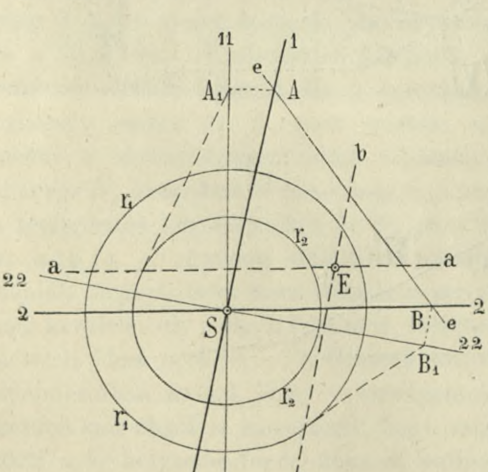
Fölöttébb megegyszerűsbül ezek alkalmazása a belső mag megszerkesztésére, ha tekintetbe veszszük, hogy egyrészt a keresztmetszeti idomot, másrészt a belső magot határoló pontok és egyenesek, amint az előbbi pontban és a 30. § 4-ban előadottakból kitetszik, poláris reciprocitásban levő két sík rendszer elemeit képezik. Ha a keresztmetszeti idomnak *görbe* vonal határolta valamely részén az $N_1$ pont érintője az $n_1$ egyenes, (s ha az érintő nem metszi a keresztmetszeti idom valamely más részét,) akkor ugyanis az $n_1$ egyenes $N_2$ antipólusa a belső mag egy pontja, és az $N_1$ pont $n_2$ antipolárisa, a reciprocitás következtében az $N_2$ pont érintője. A keresztmetszeti idomnak az $a_1; b_1; c_1 \ldots$ egyenes oldalakkal határolt valamely részén pedig, (ha ez oldalak megnyujtásai nem metszik a keresztmetszeti idom más részét), a belső mag kerületén oly poligón felel meg, melynek $A_2; B_2; C_2$ sarokpontjai a keresztmetszeti idom $a_1; b_1; c_1 \ldots$ oldalainak antipólusai, és melynek $A_2 B_2; B_2 C_2 \ldots$ oldalai sorban az $a_1 b_1; a_2 b_2 \ldots$ sarokpontok antipolárisai, ami egyébiránt egyszerűen már abból is következik, hogy míg pl. az $a_1$ érintő az $a_1 b_1$ sarokpont körül a $b_1$ helyzetbe fordul át,az $A_2$ antipólus *egyenes* vonalon, még pedig az $a_1 b_1$ pont antipolárisán, mozdul el az $A_2$ helyzetből a $B_2$ helyzetbe. Abban az esetben végre, ha akképp metsződik a keresztmetszeti idom kerülete valamely részén két görbe vonal az $m_1 n_1$ sarokpontban, hogy az e sarokponton a két görbéhez húzott $m_1$ és $n_1$ érintők nem metszik a kerület valamely más részét: az $m_1 n_1$ sarokpontnak a belső mag kerületén az $m_1$ érintő $M_2$ antipólusától az $n_1$ érintő $N_2$ antipólusáig érő *egyenes* vonal felel meg; az $M_2N_2$ egyenes két oldalán pedig oly görbe vonalak következnek a belső mag kerületén,



*118-ik ábra.*

melyek $M_2$ és $N_2$ kezdőpontjainak közös érintője az $M_2N_2$ egyenes. A keresztmetszet és a belső mag idomát, a közöttük fönnálló reciprocitás következtében, mind e tételekben föl is lehet egymással cserélni.

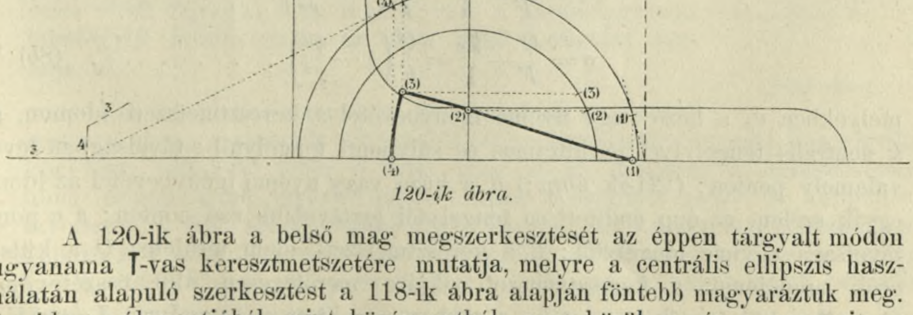
A 118. I—XI ábrák példában mutatják a föntebb előadottak alkalmazását, T alakú vas keresztmetszete belső magjának megszerkesztésére. A tehetetlenségi sugarak megszerkesztését a 28. § 1-ban, a centrális ellipszis megrajzolását pedig a 29. § 2-ban már megmagyaráztuk. A vonalozva húzott és rekeszjelbe írt (1)—(4) számokkal megjelölt egyenesek, a súlypont körül 180°-kal megfordított keresztmetszet alapvető érintői. Az idomhoz tartozó antipólusokat és antipolárisokat ugyanis legegyszerűbben mint a 180°-kal megfordított idomhoz tartozó pólusokat és polárisokat rajzoljuk meg. Az átfordított érintők pólusait az érintők folyó számaival jelöltük meg, s mindegyik pólust mint ama két pont polárisának metszéspontját határoztuk meg, a melyeken az átforgatott érintő a centrális ellipszis két főtengelyét vágja. (Az 1,2,4-gyel számozott érintők mindegyike párhuzamos a két főtengely egyikével; a végtelen távol eső metszéspont polárisa tehát a másik főtengely.) Az 1-gyel számozott érintő a keresztmetszeti idom kerületén poligónoldalt képez; ennek tehát a belső mag kerületén *sarokpont* felel meg. Sarokpont felel meg továbbá a belső mag kerületén a 3-mal számozott érintőnek is, tekintve, hogy ez jobb felé és bal felé más-más görbék körül gördül, midőn a keresztmetszeti idom körül forog. Az 1- és 2-vel számozott pontok között egyenes vonal határolja a belső magot; (t. i. a megfordított keresztmetszet sarokpontjának polárisa;) 2 és 3, és 3 és 4 között ellenben egy-egy görbe képezi a belső mag kerületét, tekintve, hogy míg az érintő a 2 helyzetből a 4 helyzetbe fordul, görbe vonalak körül gördül. A belső mag 2 és 4-gyel számozott pontjának érintői az átforgatott keresztmetszeti idom hasonló számú érintett pontjának polárisai; (a 2 sz. ponton tehát az 1,2 egyenes;) a belső mag 3 sz. sarokpontján végre a *két* érintő az átforgatott keresztmetszeti idom ugyane számú két érintett pontjának polárisa. Önként értődik, hogy a belső magot az átforgatott idom érintői képezte poligón sarokpontjainak polárisai segítségével szintén meg lehet szerkeszteni; ez esetben ugyanis mindegyik elfordított érintő pólusát a két szomszéd sarokpont polárisának metszéspontja adja meg.



*119-ik ábra.*

Ha ismeretes a keresztmetszeti idom centrális ellipszise egyik konjugált átmérő-párjának iránya, és ha ismeretesek az ezekre az átmérőkre vonatkozó tehetetlenségi sugarak is, akkor a belső magot, a megelőző 30. § 4-ben a 115-ik ábra kapcsán előadottak alapján, legcélszerűbben az e sugarakkal vont körök segítségével szerkesztjük meg, a nélkül hogy a centrális ellipszist meg kellene rajzolni.

Ha ugyanis a 119-ik ábrán az 1 és 2-vel számozott egyenesek valamely idom centrális ellipszisének konjugált átmérői, és ha ismerjük az $r_1$ és $r_2$ tehetetlenségi sugarakat e tengelyekre nézve, akkor könnyen megszerkeszthetjük első sorban a szóban levő 1 és 2-vel jelölt átmérők bármely pontjának polárisát, vagy megfordítva, ez átmérők egyikével párhuzamosan vont bármely egyenes pólusát, a nélkül, hogy meg kellene e végből a centrális ellipszist rajzolni. Húzzunk ugyanis a 2 és 1-gyel számozott egyenesek egy-egy tetszőleges pontjából, mint középpontból, sorban $r_2$ és $r_1$ sugárral egy-egy kört, vagy húzzuk meg, — amint ez az épp említett ábrán történt, — mind a két kört a centrális ellipszis $S$ középpontjából; húzzuk meg továbbá az 1 és 2-vel jelölt egyenesekkel a körökben konjugált tengelyeket is, vonjuk tehát az 11 egyenest merőlegesen 2-re, a 22 egyenest pedig merőlegesen 1-re. Az 1-gyel jelölt egyenesen fekvő tetszőleges $A$ pont $a$ polárisát akkor akképpen szerkeszthetjük meg, ha átvetítjük az $A$ pontot 2-vel párhuzamos irányban az 11 egyenesre, $A_1$-re, s megrajzoljuk e pont polárisát az $r_2$ körön. Viszont a 2 jelű tengelylyel párhuzamosan vont tetszőleges $a$ egyenes $A$ pólusát akképpen határozzuk meg, hogy megszerkesztjük ez egyenes $A_1$ pólusát az $r_2$ körön, s ezt a 2-vel számozott tengelylyel párhuzamosan az 1-gyel jelölt tengelyre vetítjük. Ugyanígy szerkesztjük meg a 2-vel számozott tengely tetszőleges $B$ pontjának $b$ polárisát, és viszont az 1-gyel jelölt tengelylyel párhuzamosan vont tetszőleges $b$ egyenes $B$ pólusát, az $r_1$ kör fölhasználásával. Oly $e$ egyenesre pedig, mely sem az egyik, sem a másik konjugált átmérővel nem párhuzamos, akképpen szerkesztjük meg a pólust, hogy megrajzoljuk ez egyenes és a tengelyek közötti $A$ és $B$ metszéspontok $a$ és $b$ polárisait. E két poláris $E$ metszéspontja ugyanis az $e$ egyenes pólusa. Végre az oly $E$ pontra, mely mind a két konjugált átmérőn kivül van, akképpen szerkesztjük meg az $e$ polárist, ha meghúzzuk az $E$ ponton át az $a$ és $b$ egyeneseket, a konjugált átmérőkkel párhuzamosan, és megszerkesztjük ez egyenesek $A$ és $B$ pólusait. Az e pólusokat összekötő $e$ egyenes ugyanis az $E$ pont polárisa.




*120-ik ábra.*

A 120-ik ábra a belső mag megszerkesztését az éppen tárgyalt módon ugyanama T-vas keresztmetszetére mutatja, melyre a centrális ellipszis használatán alapuló szerkesztést a 118-ik ábra alapján föntebb magyaráztuk meg. Az idom súlypontjából, mint középpontból, vont körök $r_1$ és $r_2$ sugarait az épp említett 118. VI. és XI. ábrákon mértük le. A 180°-kal elfordított idom érintőinek pólusait, és ezekből az idom belső magját ezután e körök fölhasználásával, az épp előadott módon szerkesztettük meg. A megfordított keresztmetszeti idom érintőit megint szaggatott kihúzással és folyó számokkal jelöltük meg. — A végrehajtott szerkesztés egyéb részeit illetőleg arra utalunk, amit ugyanez idom belső magja megszerkesztésére a 118-ik ábra magyarázata alkalmával mondottunk.

Abban az esetben, ha valamely idom centrális ellipszise egyik konjugált átmérő-párjának iránya sem ismeretes eleve, legegyszerűbb, ha a hat érintő egyik tetszőleges párhuzamos párjának $A$ és $B$ érintett pontjait határozzuk meg legelőbb, és ezzel az $A$ és $B$ érintők irányával konjugált $AB$ átmérőt. Ezután egy harmadik érintő $P$ érintett pontját határozzuk meg, s megszerkesztjük e pont fölhasználásával $AB$-nek konjugált átmérőjét, $CD$-t; ennek megtörténte után ismerjük ugyanis az $r_1$ és $r_2$ tehetetlenségi sugarakat az $AB$ és $CD$ konjugált átmérőkre nézve, megrajzolhatjuk tehát az $r_1$ és $r_2$ sugarú körök fölhasználásával az idom belső magját.

*Amint ezekből kitetszik, a belső magot mindig két kör szerkesztése alapján rajzoljuk meg legegyszerűbben, s a 118-ik ábrán főképp csak a megelőzőleg előadottak jobb megvilágítása céljából mutattuk meg a megszerkesztést a centrális ellipszis fölhasználásával.*

Ami a belső mag analitikai elméletét illeti, ennek köréből csak a következőket véljük e helyen megemlítendőknek.

*a)* A neutrális tengelynek és a belső mag méreteinek analitikai meghatározása. Ha a keresztmetszeti idom szabályos alakú, és ha ismeretes ennélfogva a külső erők eredője átdöfő pontján átmenő centrál-ellipszis-átmérő konjugált átmérőjének iránya és ismeretes ez átmérőre nézve a tehetetlenségi sugár is, akkor *számítás útján* határozzuk meg legkönnyebben mind a neutrális tengely helyzetét, mind a belső mag méreteit. Az ide tartozó föladatok megoldására vagy a megelőző 30. § 4-ban leszármaztatott:

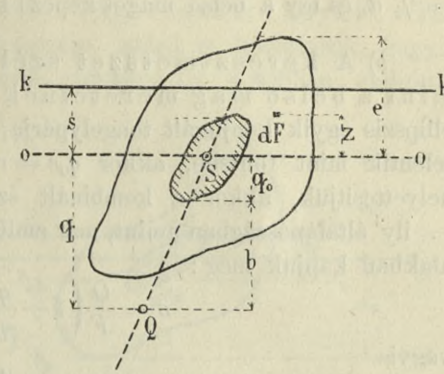
$$r^2 = qs \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

képletet alkalmazhatjuk, vagy a kombinált szilárdság következő két alapegyenletének egyikét:

$$\sigma_z = \frac{Q}{F} - \frac{\mathsf{M}z}{\mathsf{I}} = \frac{Q}{F}\left(1 - \frac{qz}{r^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

$$\sigma = \frac{Q}{F} - \frac{\mathsf{M}e}{\mathsf{I}} = \frac{Q}{F}\left(1 - \frac{qe}{r^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8b)$$

melyekben $\sigma_z$ a húzó vagy nyomó igénybevétel a keresztmetszeti idomon, a $k$ neutralis tengelylyel párhuzamos $oo$ súlyponti tengelytől $z$ távolságban levő valamely ponton; (121-ik ábra;) $\sigma$ a húzó vagy nyomó igénybevétel az idom egyik szélén, az épp emlitett $oo$ tengelytől legtávolabb eső ponton; $e$ e pont távolsága ugyane tengelytől; $F$ a keresztmetszeti idom területe; $Q$ a külső erők eredőjének a keresztmetszet sikjára merőlegesen álló összetevője; $Qq = \mathsf{M}$ a külső erők nyomatéka a többször említett $oo$ tengelyre, $\mathsf{I} = r^2F$ a keresztmetszeti idom tehetetlenségi nyomatéka, $r$ pedig tehetetlenségi sugara ugyane tengelyre. A $z$, $e$ és $s$ távolságok az $oo$ tengelytől az ellenkező oldal felé számitandók $+$-nak, mint a $q$ távolság; $+\sigma$ és $+\sigma_z$ pedig oly értelmű-nek tekintendő, mint a $Q$ erő. A 8$b$ képlet a 8$a$-ból egyszerűen $z = e$ helyettesitése útján keletkezik. Viszont a 7. sz. képletet is le lehet vezetni a 8$a$ képletből. Minthogy ugyanis a neutrális tengelyben a $\sigma_z$ igénybevétel zérus, a 8$a$ képletbe $z = s$ és $\sigma_z = o$ helyettesithető, amiből $qs = r^2$ következik.

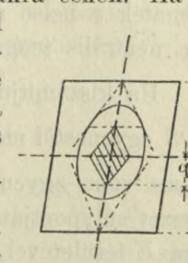



*121-ik ábra.*

A neutrális tengelynek a súlyponttól mért távolságát, az imént mondottak szerint, a 7. sz. egyenletből közvetetlenül kiszámithatjuk. De meghatározhatjuk e távolságot a 8$a$ egyenletből is, mivel ha ebben $z = s$, akkor $\sigma_z = o$.

A belső mag méretét viszont vagy akképpen állapithatjuk meg, hogy kiszámitjuk a 7. sz. egyenletből, $s = e$ behelyettesitése után, a $q$ távolság $q_0$ értékét; vagy akképpen, hogy a 8$b$ képletből számitjuk ki e távolságot, $\sigma = o$ behelyettesitése után. Mind a két esetben az $r^2 = eq_0$ egyenletet kapjuk.

*Parallelogramm, esetleg épszögű négyszög alakú* keresztmetszeti idom esetében pl. (122-ik ábra,) a felező vonalak konjugált tengelyek a centrális ellipszisen, a belső mag tehát oly négyszög, melynek sarokpontjai, mint a parallelogramm oldalainak antipólusai, a felező vonalakra esnek. Ha két szemközt fekvő oldal távolsága $m$, a másik két oldal hossza $s$, akkor $e = {}^1/_2\, m$; $F = sm$; a tehetetlenségi nyomaték az $s$ oldalakkal párhuzamos súlyponti tengelyre nézve $I = {}^1/_{12}\, sm^3$; tehát $r^2 = {}^1/_{12}\, m^2$; és ennélfogva a belső mag szélének távolsága az $s$ oldalakkal párhuzamos súlyponti tengelytől $q_0 = \frac{r^2}{e} = {}^1/_6\, m$, ami azt az ismeretes tételt fejezi ki, hogy a belső mag a parallelogramm mindegyik középvonalán az idom belső harmadát foglalja el.




*122-ik ábra.*

*Kör alakú* keresztmetszet. Ha körből áll a keresztmetszeti idom, a centrális ellipszisből a keresztmetszeti idommal koncentrikus kör lesz, (29. § 2,) tehát a belső mag is az, minthogy a keresztmetszeti idom érintői mind egyenlő távol vannak a centrális körtől, az antipólusok távolsága a kör középpontjától tehát állandó. Ha $d$ a keresztmetszeti idomot képező kör átmérője, akkor a belső mag körének sugara $q_0 = {}^1/_8\, d$, mivelhogy $I = {}^1/_{64}\, \pi d^4$; $F = {}^1/_4\, \pi d^2$; $e = d$. A kör belső magja, amint látjuk, az idom belső negyedét foglalja el.

*Gyűrűalakú keresztmetszeti idom* esetében a belső mag az előbbiekhez hasonló okokból ismét a keresztmetszeti idommal koncentrikus kör. Ha $d$ a külső, $d_1$ a belső átmérő, akkor $I = {}^1/_{64}\pi\,(d^4 - d_1{}^4)$; $F = {}^1/_4\,\pi\,(d^2 - d_1{}^2)$; $e = {}^1/_2\,d$, és így a belső magot képező kör sugara $q_0 = {}^1/_8\,d\left[1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]$ stb.

*b*) A keresztmetszet szélein keletkező igénybevétel, mint a belső mag méreteinek függvénye. Ha $QS$ és $oo$ a centrális ellipszis egyik konjugált tengelypárja, (121-ik ábra,) és ha $q_0, e, r$ ugyanazt jelentik mint föntebb, akkor $q_0 e = r^2$; ha $r$ ez értékét a $8b$ egyenletbe helyettesítjük, akkor a kombinált szilárdság alapegyenletét a következő, — ily általánosságban amint, már említettük *Ritter*-től (Zürich) származó, — alakban kapjuk meg:

$$\sigma = \frac{Q}{F}\left(1 - \frac{q}{q_0}\right) = -\frac{Qb}{Fq_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

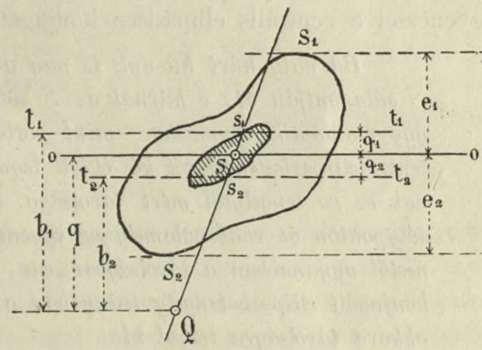
vagyis

$$\sigma = \frac{\mathsf{M}_h}{Fq_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

és itt $b = q_0 - q$; (121-ik ábra;) $\sigma$ a húzó vagy nyomó igénybevétel az $oo$ tengelytől legtávolabb eső ponton, a $Q$ átdöfő ponttól *távolabb* eső oldalon; $\mathsf{M}_b$ a külső erők nyomatéka a neutrális tengelylyel párhuzamosan vont amaz egyenesre, mely a $QS$ egyenes és a belső mag kerülete közötti metszéspontun megy át, a $Q$ átdöfő ponthoz *közelebb* eső oldalon; $b$ pedig a $Q$ pont távolsága ugyanez egyenestől. Ha az $oo$ tengelytől az *innenső* oldalon legtávolabb eső ponton keressük a húzó vagy nyomó igénybevételt, akkor a 9 sz. egyenletben a — előjel +-ra változtatandó át, s $q_0$ alatt ennek következtében a belső mag és a $QS$ egyenes közötti *túlsó* metszéspont távolsága az $oo$ egyenestől értendő. A 9—10 sz. egyenletek tehát ekkor is érvényesek, csak hogy az $\mathsf{M}_b$ nyomaték a belső mag és a $QS$ egyenes közötti *túlsó* metszéspontján átmenő, és a neutrális tengelylyel párhuzamos irányú tengelyre vonatkozik.

Ha kiszámítjuk a külső erők $\mathsf{M}_b$ nyomatékát, a belső mag kerületén a $QS$ egyenestől metszett $\frac{\text{túlsó}}{\text{innenső}}$ ponton át, a neutrális tengelylyel párhuzamosan vont egyenesre, s elosztjuk e nyomatékot ez egyenesnek a keresztmetszet súlypontjától mért $q_0$ merőleges távolságával, és a keresztmetszeti idom $F$ területével, akkor azt a húzó vagy nyomó $\sigma$ feszültséget kapjuk tehát meg, mely a keresztmetszet $\frac{\text{innenső}}{\text{túlsó}}$ oldalán, a neutrális tengelylyel párhuzamos irányú súlyponti tengelytől legtávolabb eső ponton keletkezik. Azt, hogy mily előjelű a $\sigma$ a keresztmetszet egyik vagy másik szélén, legegyszerűbben nem az $\mathsf{M}_b$ nyomaték előjeléből, hanem abból itéljük meg, hogy az eredő átdöfő pontja a belső magba esik-e vagy sem.

*c*) Az az eset, ha a külső erők eredője a belső mag szélén megy át. Ismeretes, hogy a $\sigma_0$ húzó vagy nyomó igénybevétel a keresztmetszeti idom ama pontjain, melyek a $k$ neutrális tengelylyel párhuzamosan fekvő *oo súlyponti* tengelyben vannak $= Q:F$, t. i. épp oly nagy mint ha súlyponton menne át a keresztmetszetre ható külső erők eredője, bármilyen legyen is valójában ez eredő irányvonalának helyzete. (Ez az ismeretes tétel különben igen egyszerűen abból is következik, hogy, ha a keresztmetszetre ható külső erők eredőjét, a 4. § 2-ban említett módon, a keresztmeszeti idom súlypontján átmenő $Q$ merőleges erőre, a keresztmetszet síkjára eső $N$ nyíró erőre, s az **M** nyomatékú hajlító erőpárra bontjuk: a $Q$ erő előidézte igénybevétel a keresztmetszet minden pontján $= Q:F$, az **M** erőpár pedig a neutrális tengelylyel párhuzamos irányú súlyponti tengely körül forgat, és így azokon a pontokon, melyek e tengelyen vannak, semmi igénybevételt sem idéz elő.)



*123-ik ábra.*

Ha már most a belső mag szélének valamely $s_1$ pontján megy át a külső erők eredője, (123-ik ábra,) akkor a neutrális tengely a keresztmetszeti idom *túlsó* szélét valamely $S_2$ ponton érinti. Minthogy az igénybevétel az $S_2$ ponton ez okból zérus: a neutrális tengelylyel párhuzamos irányú *oo* súlyponti tengelytől a *másik* oldalon legtávolabb eső $S_1$ ponton a húzó vagy nyomó igénybevétel:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \frac{h}{e_2}\cdot$$

és itt $e_2$ a neutrális tengely érintette pont távolsága a súlyponti *oo* tengelytől, $h$ pedig a keresztmetszeti idom két széléhez a neutrális tengelylyel párhuzamosan vont érintők közötti távolság. Ha

$$e_1 = e_2 = e, \text{ akkor } h = 2e, \text{ tehát } \sigma_1 = 2\frac{Q}{F}\cdot$$

Ha az eredő a belső mag szélének valamely pontján megy át, és ha a neutrális tengelylyel párhuzamosan vont *oo* súlyponti tengelytől, a keresztmetszeti idom kerületén legtávolabb eső két pont távolsága a mondott súlyponti tengelytől a keresztmetszeti idom mind a két oldalán ugyanaz, akkor a legnagyobb húzó vagy nyomó igénybevétel, (t. i. a húzó vagy nyomó igénybevétel a keresztmetszet amaz oldalán, melyre az eredő átdöfő pontja esik, az *oo* súlyponti tengelytől legtávolabb eső ponton,) még egyszer akkora, mintha a keresztmetszeti idom súlypontján menne át az eredő.

*d)* A belső mag kiterjedése a keresztmetszet súlypontján át vont egyeneseken. Ha az eredő átdöfő pontja $s_1$- vagy $s_2$-re esik, (123-ik ábra,) akkor a neutrális tengely sorban egyszer az $S_2$, másszor az $S_1$ érintővel esik össze. Áll tehát, hogy $r^2 = q_2 e_1 = q_1 e_2$ vagyis, hogy:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{e_1}{e_2}$$

és itt $q_1$ és $q_2$ sorban az $s_1$ és $s_2$ pontok távolsága az $oo$ egyenestől, $e_1$ és $e_2$ az $S_1$ és $S_2$ pontok távolsága ugyanez egyenestől, az $oo$ tengely pedig a $QS$ egyenessel a centrális ellipszisen konjugált.

*Bármely húrt húzunk is meg a belső magban, a keresztmetszeti idom $S$ súlypontján át: e húrnak az $S$ súlypont két oldalán fekvő két szakasza úgy viszonylik egymáshoz, mint sorban a húr egyenesével konjugált $oo$ centrálellipszis-tengelytől két oldalt legmesszebb eső két keresztmetszeti pontnak ez $oo$ tengelytől mért távolsága. S ha a keresztmetszeti idomon az $S$ súlyponton át vont valamely $oo$ egyenestől legmesszebb eső két pont ez egyenestől ugyanabban a távolságban van, akkor a belső mag az $oo$ egyenessel konjugált ellipszis tengely irányában az $S$ súlypont mindkét oldalán ugyanakkora távolságra terjed ki.*

---

VI. FEJEZET.

# Alapvető tételek a tartókra ható külső erők elmélete köréből, síkbeli erők esetére.

32. §.

## Bevezető megjegyzések.

***1. A tartókra ható külső erők erőpoligónja- és kötélvonalának fogalma.*** Bármily alakú és szerkezetű valamely tartó, többnyire meg lehet rajta különböztetni bizonyos hosszirányt, melyben a kiterjedése rendesen határozottan nagyobb mint a szélesség irányában, s a tartóra ható külső erők támadó pontjai rendesen a hosszirányban sorakoznak egymásután. A különböző átmetszéseket másrészt, ha nem is párhuzamosan egymással, de egészben mégis mind hasonló irányban, még pedig rendesen a szélesség irányában veszszük föl, tekintve hogy ez esetben a belső erők meghatározása, könnyen érthetőleg, egyszerűbb, mintha egyszer a szélesség irányában, másszor a hossz- vagy valamely más közbeeső irányban vennők őket föl; s ami az átmetszések iránya és a külső erők támadó pontjai közötti e viszonylagos helyzetet illeti, az imént mondottak az oly tartókra is állanak, melyeken határozottan kifejezett hosszirányt nem lehet megkülönböztetni.

Ha abban a sorban számozzuk a külső erőket, amelyben támadó pontjaik a tartón egymásután következnek, és ha több átmetszést veszünk föl egymásután a tartó egyik végétől a másik felé, akkor az 1- és 2-vel számozott erők támadó pontjai között fölvett valamely átmetszésre tehát csak a legelső erő hat; (124.I ábra;) a 2- és 3-mal számozott erők között fölvett valamely I. átmetszésre a két első erő stb. S ha általában az $n$-ik és az erre legközelebb következő $n+1$-ik erők támadó pontjai között veszünk föl átmetszést, akkor erre az 1-től $n$-ig számozott külső erők hatnak a tartó ama vége felől, melytől az erők számozása kiindul.

Amint a következő 33—34-ik §-okból ki fog tünni, akképpen lehet ennek következtében a szerkesztést rendezni, hogy ugyanegy erőpoligón és kötélvonal segitségével lehessen az eredőket és nyomatékokat valamennyi átmetszésre nézve megszerkeszteni. Ezt az erő- és kötélpoligónt a következőkben, rövidség kedveért, a t a r t ó r a h a t ó k ü l s ő e r ő k e r ő- é s k ö t é l p o l i g ó n j á n a k (e s e t l e g k ö t é l g ö r b é j é n e k,) f o g j u k n e v e z n i.

*2. A külső erők támadó pontjainak viszonylagos helyzete.* Az erők támadó pontjait a következő két §-ban *mérhető* távolságokban levőknek, (az erőket tehát koncentráltaknak,) fogjuk tekinteni. Magának a tartónak súlya (a tartó saját súlya) ugyan, a dolog természeténél fogva, megoszló erőt képez, s gyakran a megterhelést képviselő súlyok vagy egyéb erők szintén megoszlók. Imeretes azonban a 15. §-ban mondottakból, hogy a kötélpoligónokra leszármaztatott tételek a kötélgörbékre is érvényesek, ha az egyes kötélpoligón-oldalak alatt a kötélgörbe egyes pontjainak érintőit értjük, mint azokat az egyeneseket, melyekbe a végtelen közel erők közötti végtelen rövid kötélvonal-elemek esnek. Igen gyakran akképpen veszszük különben számításba a tartó saját súlyát is, mintha az alkalmas módon szakaszokra osztott tartó egy-egy részének súlya egy-egy pontban koncentrálódnék. Más esetekben pedig külön határozzuk meg a tartó saját súlya okozta belső erőket, és külön azokat, amelyeket a megterhelés idéz elő. (Lásd a 4-ik pontban azonnal mondandókat.) S ha tekintetbe is veszszük ez esetben a tartó *saját súlyának* megoszlását, a *megterhelés* többnyire mégis koncentrált erőkből áll.

*3. Az átmetsző felületek alakja.* Önként érthető, hogy az egyes átmetszéseket akképpen veszszük föl, amint a belső erők meghatározása kivánja. A rácsos tartók belső erői elméletében, amint a következő fejezetből látni fogjuk, többnyire közönyös az átmetszés alakja. A tömör tartókban működő belső erők meghatározása végett ellenben rendesen sik átmetszéseket kell fölvenni. Ha csak koncentrált erők hatnak a tartóra vagy ennek egy részére, akkor egyébiránt mindazokra a tetszőleges alakú átmetszésekre, melyeket közvetetlenül egymásután következő tetszőleges két erő között fölvehetünk, ugyanazok a külső erők hatnak; ugyanaz tehát a külső erők eredője is mindez átmetszésekre nézve.

Minthogy a jelen fejezetben előadandók célja a külső erők elmélete mindama tételeinek tárgyalása, melyeket egyrészt a tömör, másrészt a rácsos tartókban keletkező belső erők meghatározására alkalmazunk, a következő két §-ban tetszőleges, tehát általánosságban szabálytalan alakú átmetszéseket fogunk fölvenni; a 35-ik §-ban pedig a megelőzőkben leszármaztatott általános tételeket a sík átmetszések esetére fogjuk alkalmazni és részletezni.

*4. Az egész tehernek egyes részekben történő számbavétele.* Végre még azt szükséges előrebocsátani, hogy gyakran nem az egész teherre nézve egyszerre határozzuk meg az egyes átmetszésekre ható külső erők eredőit, nyomatékait, és egyéb szilárdsági behatásait, hanem a teher egyes részei okozta egyes részekben. Oszszuk be ugyanis a tartó megterhelését, (akár súlyokból áll, akár más, esetleg nem párhuzamos erőkből,) tetszőleges számú csoportra, s határozzuk meg a reakciókat e csoportok mindegyikére külön-külön, t. i. mindegyik csoportra akképpen, mintha a terhet képviselő erőknek, (esetleg tehát a súlyoknak,) csak az e csoportba sorolt része hatna a tartóra. Jelöljük meg az $A$; $B$; $C$; ... $N$ ... $M$ támaszpontokon keletkező, (általánosságban nem párhuzamos irányú,) azokat a reakciókat, melyeket az *egész* teher okoz, sorban a föntebbi betükkel, azokat a reakciókat, melyeket a teher föntemlített *első* része magában véve idéz elő, ugyane sorrendben $A_1 B_1 C_1 \ldots N_1 \ldots M_1$-gyel, azokat, melyek a teher *második* része után származnak $A_2 B_2 C_2 \ldots N_2 \ldots M_2$-vel stb., és határozzuk meg a tetszőlegesen fölvett valamely átmetszésre ható ama külső erők $R_1$; $R_2$; $R_3$; ... $R_n$ .. $R_u$ eredőit, melyek akkor keletkeznének, ha a tehernek sorban csak az 1-ső, 2-ik, 3-ik ... $u$-dik része hatna a tartóra. A fölvett átmetszésre az egész teher behatása következtében működő külső erők $R$ eredője akkor, — amint az azonnal mondandókból ki fog tünni, — az $R_1 R_2 \ldots R_u$ erők eredője.

Könnyen belátható ugyanis mindenekelőtt, hogy a teher föntemlített egyes részei következtében a tetszőleges $n$-ik támaszponton keletkező $N_1 N_2 \ldots N_u$ reakciók eredője egyenlő az e támaszponton az egész teher következtében keletkező $N$ reakcióval. Mert ha minden támaszponton meghatározzuk a teher egyes részei okozta reakciók eredőjét, akkor ez eredők együttvéve a támaszpontokon (vagy lapokon) működő oly erőket képeznek, melyek szükségképpen egyensúlyban vannak a tartó egész megterhelésével. Ha tehát a reakciók sztatikailag határozottak, akkor ez erők szükségképpen a keresett reakciók. De ez akkor is áll, ha a reakciók sztatikailag határozatlanok. Abban az esetben ugyanis, ha a tartó megtámasztott pontjai a bekövetkező deformáció dacára sem mozdulhatnak el a reakció-összetevők irányvonalaiban: akképen határozzuk meg a teher minden egyes része okozta reakciókat, hogy a megtámasztott pontok a megtámasztott irányokban el ne mozdulhassanak; akkor sem mozdulhatnak el tehát e pontok a többször említett irányokban, ha mind e reakciók az egész teherrel együttvéve egyidejűleg hatnak a tartóra. Az az eset pedig, ha a megtámasztott pontok a reakciók irányában elmozdulhatnak, a jelenleg tárgyalt tétellel semmi összefüggésben sincsen, mivelhogy a megtámasztott pontok elmozdulása okozta reakciók egyedül az elmozdulások nagyságától függnek, nem pedig a tehertől, mely okból ezeket a reakciókat mindenesetre külön kell meghatározni, és utólag tenni össze a megterhelés következtében keletkező reakciókkal.

Abból azonban, hogy a teher többször említett egyes részei okozta reakciók eredője minden egyes támaszponton az összes teher előidézte reakcióval egyenlő, közvetetlenül az következik, hogy, ha a teher minden egyes részét a hozzája tartozó reakcióval egészitjük ki, ezzel egyszerűen annyi csoportra osztjuk az egyes átmetszésekre ható külső erőket, ahány részre osztottuk volt a tartó megterhelését; hogy tehát valamely átmetszésre a teher egyes részei során ható külső erők $R_1 R_2 R_3 .. R_n$ eredői egyszerűen az ez átmetszésre ható összes külső erők egyes csoportjainak eredői.

Amint ezekből látjuk, meghatározhatjuk, (akár számítás, akár szerkesztés útján,) a tartó tetszőleges megterhelése okozta reakciót minden tetszőleges támaszponton, mint a megterhelés egyes részei előidézte egyes reakciók eredőjét; (ha ugyanabban az egyenesben működnek az egyes reakciók, akkor mint ezek összegét;) valamely átmetszésre ható külső erők eredőjét, mint a megterhelés egyes részei után ez átmetszésre ható $R_1, R_2, R_3 \ldots R_n$ erők eredőjét; és valamely átmetszésre ható külső erőknek valamely pontra számitott nyomatékát, mint a megterhelés egyes részei után a mondott átmetszésre és a mondott pontra nézve meghatározott nyomatékok összegét. Minthogy pedig a belső erők a külső erők összetevői, ennek folytán meg lehet határozni, ugyane módon, valamely átmetszés helyén tetszőleges egyenes irányában működő belső erőt is, mint a megterhelés egyes részei következtében ugyanez egyenes irányában keletkező egyes belső erők összegét. Önként értődik továbbá, hogy, ha két vagy három összetevőjéből határozzuk meg a reakciót valamely támaszponton, a mondottakat mindegyik összetevőre is alkalmazhatjuk; a X-ik fejezetben pedig be fogjuk bizonyitani, hogy a tartók rugalmas deformációja okozta elmozdulás, tetszőleges ponton, tetszőleges egyenes irányában, szintén azoknak az egyes elmozdulásoknak összege, melyeket az erők egyes csoportjai, — esetleg az egyes erők, — egyenként okoznak e ponton, ez egyenes irányában.

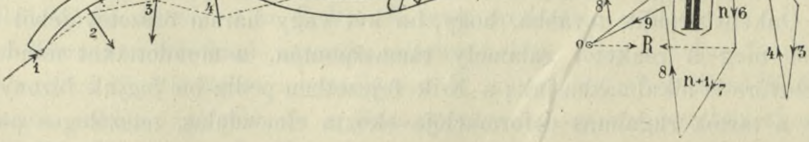
Az imént mondottakra való tekintettel külön-külön határozzuk meg nevezetesen igen gyakran azokat a nyomatékokat, vagy eredőket, vagy belső erőket stb., melyeket egyrészt magának a tartónak, másrészt a tartó támasztotta szerkezetnek súlya külön-külön okoz; vagy azokat a nyomatékokat, eredőket, belső erőket stb., melyeket egyrészt a tartó és a reá támasztott szerkezet súlya, másrészt a mozgó teher okoz, utólagosan adva össze, az előjelekre való tekintettel, a külön-külön talált két részt. A tartók elhajlásának elméletében pedig többnyire külön-külön határozzuk meg azokat az egyes elmozdulásokat, melyeket a tartóra ható egyes külső erők, a kijelölt ponton, a szóban levő irányban, egyenként véve okoznak, s ezeket az egyes elmozdulásokat is utólagosan adjuk össze, mint a keresett egész elmozdulás egyes részeit.

A következő §-ban pl. úgy fogjuk megszerkeszteni a 128. I ábrából látható csuklós ívtartó $A$ és $B$ reakcióit, hogy külön határozzuk meg azokat az $A_1$ és $B_1$ reakciókat, melyeket a $A$ és $C$ csuklók között működő súlyok okoznak, és külön azokat az $A_2$ és $B_2$ reakciókat, melyek az ívet a $C$ és $B$ csuklók között megterhelő súlyok következtében keletkeznek, s hogy ezután az $A_1$ és $A_2$ és a $B_1$ és $B_2$ reakciók eredőit szerkesztjük meg. A 141. IV és 146. IV ábrákon továbbá külön szerkesztettük meg azokat az eredőket, melyeket a megoszló súly, s külön azokat, melyeket az egyes pontokra koncentrált súlyok idéznek elő; a 136. I—IV ábrákon pedig külön azokat a nyomatékokat, melyeket a hídszerkezet saját súlya, és külön azokat, melyeket a mozgó teher idéz elő, stb.

## 33. §.

## Az íveken és függő tartókon fölvett átmetszésekre ható külső erők.

***1. Általános megjegyzések.*** A síkbeli erőkkel megterhelt ívekre és függő tartókra, s általánosságban minden oly szerkezetre, melyre a külső erők mind ugyanabban a síkban hatnak, de nem mind párhuzamosak egymással, úgy lehet, az előbbi §-ban mondottakra való tekintettel, a külső erők eredőit, ugyanegy erő- és kötélpoligón segítségével valamennyi átmetszésre nézve megszerkeszteni, ha abban a sorrendben teszszük össze a tartóra ható külső erőket, melyben támadópontjaik a tartón egymásután következ-



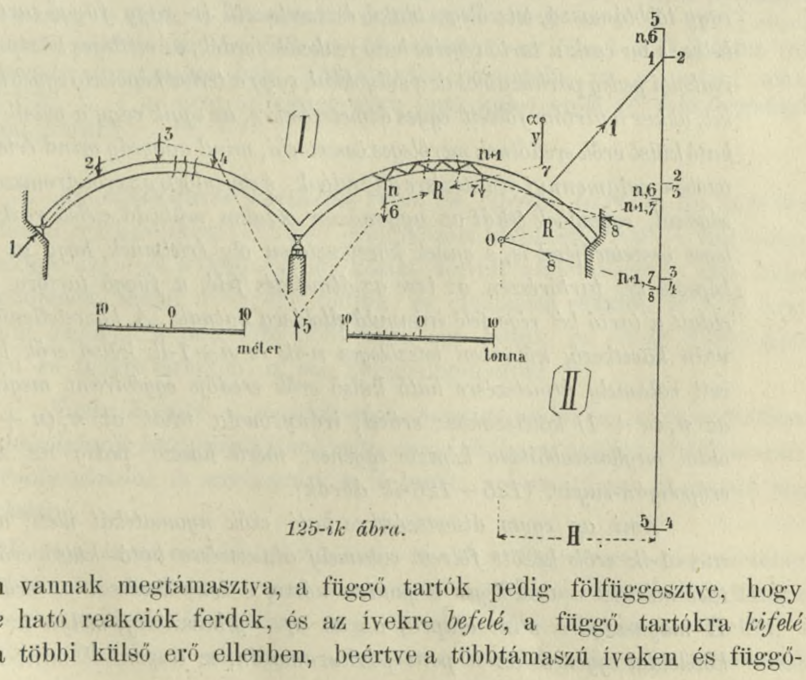
*124-ik ábra.*

nek. (124. I—II ábra.) Tudjuk ugyanis, hogy valamely kötélvonal $n$, $(n+1)$ kötélszakaszereje, az e kötéloldalt megelőző erők eredője. (10. §. 1.) Ha azonban az erők sorrendje a kötélvonalon ugyanaz mint a tartón, akkor az $n$, $(n+1)$ oldalt a kötélpoligónon szükségképpen ugyanazok az erők előzik meg, mint a tartón az $n$-ik és az $n+1$-ik erők között bármiképpen fölvett valamely átmetszést.

*Ha a külső erők mind ugyanabban a síkban hatnak valamely tartóra vagy egyéb szerkezetre, de nem mind párhuzamosak egymással, akkor egyszerűen akképpen szerkesztjük meg, az imént mondottak következtében, erőpoligónjukat és kötélvonalukat, hogy abban a sorrendben teszszük őket össze, melyben támadópontjaik a tartó egyik végétől a másik felé egymásutan következnek. S ha átmetszést veszünk föl a tartón, a tetszőleges n-ik* *és az erre legközelebb következő $n + 1$-ik erők között, akkor az erre átmetszésre az egyik vagy a másik oldal felől ható külső erők eredője mind nagyságra és előjelre, mind irányvonalra nézve egyenlő az ugyanaz oldal felől ható kötélszakaszerővel abban az $n, (n + 1)$ kötéloldalban, mely ugyanama két erő közé esik a kötélvonalon, melyek között az átmetszést a tartón fölvettük. A tetszőleges $n$-ik és $n + 1$-ik erők között a tartón fölvett valamely átmetszésre ható külső erők $R$ eredőjének irányvonala tehát az $n, (n + 1)$ kötéloldalra esik, mérő hossza az $n, (n + 1)$ erőpoligón-sugárral egyenlő, s kezdőpontját az összetett külső erők értelmeit megjelelő nyilak mutatják, úgy mint minden más eredőét. Valamely átmetszésre ható erők nyomatékát általánosságban eredőjük nyomatékával fejezzük ki.*

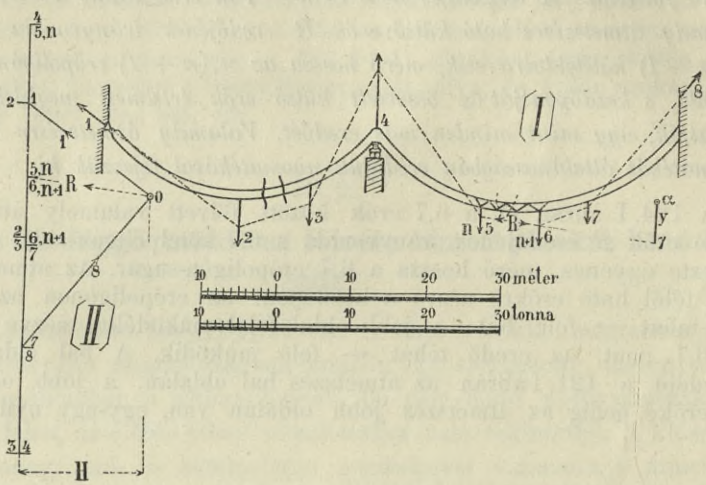
A 124. I ábrán pl. a 6,7 erők között fölvett valamely átmetszésre ható külső erők $R$ eredőjének irányvonala a 6,7 kötélpoligón-oldal megnyujtása képezte egyenes, mérő hossza a 6,7 erőpoligón-sugár. Az átmetszésre a bal oldal felől ható erőkre nézve a kezdőpont az erőpoligónon az $o$ pont, az eredő tehát → felé hat; a jobb oldal felől működőkre nézve a kezdőpont a 6,7 pont, az eredő tehát ← felé működik. A bal oldalon levő erők eredője a 121. I ábrán az átmetszés bal oldalán, a jobb oldal felől működő erőké pedig az átmetszés jobb oldalán van, egy-egy nyíllal, megjelölve.

**2. *A párhuzamos erőkkel megterhelt ívek és függő tartók.*** Az ívek és a függő tartók rendesen súlyokkal, vagy egyéb párhuzamos külső erőkkel, (pl. víz- vagy szélnyomással,) vannak megterhelve, s az ívek




*125-ik ábra.*

akképpen vannak megtámasztva, a függő tartók pedig fölfüggesztve, hogy a *végeikre* ható reakciók ferdék, és az ívekre *befelé*, a függő tartókra *kifelé* hatnak, a többi külső erő ellenben, beértve a többtámaszú íveken és függő-tartókon a középső oszlopok reakcióit is, mind párhuzamos egymással (125. I és 126. I ábra). A külső erők kötélpoligónján a kötélszakasz-erők merőleges összetevője ez esetben az egész kötélvonal hosszában állandó, (11. § 2,) és egyenlő a kötélszakasz-erőkkel ugyanazon az oldalon működő szélső reakció merőleges összetevőjével.




*126-ik ábra.*

*Ha súlyokkal vagy más párhuzamos külső erőkkel van valamely két- vagy többtámaszú, tetszőleges alakú és szerkezetű ív- vagy függő tartó megterhelve, s ha csak a tartó végeire ható reakciók ferdék, az esetleges középső oszlopok reakciói pedig párhuzamosak a súlyokkal, vagy a terhet képviselő egyéb külső erőkkel, akkor a tartón fölvett egyes átmetszésekre, az egyik vagy a másik oldal felől ható külső erők eredőinek merőleges összetevői, mind nagyság mind értelem tekintetében valamennyi átmetszésre állandóak, s egyenlőek az erőháromszög magasságával, egyenlőek tehát az ugyanazon oldalon működő szélső reakció merőleges összetevőjével is, s ennek következtében oly értelmüek, hogy az átmetszés képezte két tartórészen, az ívre az átmetszés felé, a függő tartóra pedig két oldalt a tartó két vége felé irányuló eltolásra hatnak. A közvetetlenül egymásután következő, különben tetszőleges $n$-ik és $n+1$-ik külső erők között fölvett valamely átmetszésre ható külső erők eredője egyébiránt megint egyenlő az $n, (n+1)$ kötélszakasz erővel, irányvonala tehát az $n, (n+1)$ kötéloldal meghosszabbítása képezte egyenes, mérő hossza pedig az $n, (n+1)$ erőpoligón-sugár.* (*125—126-ik ábrák*).

*Ami az egyes átmetszésekre ható erők nyomatékát illeti, az $n$-ik és $n+1$-ik erők között fölvett valamely átmetszésre ható külső erők nyomatéki mértéke a tetszőleges $\alpha$ pontra nézve, s vonatkozással az erőháromszög $H$ magasságára mint alapra, az az $\alpha\gamma$ — $y$ hosszúság, melyet az $n, (n+1)$ kötéloldal egyenese az $\alpha$ pont párhuzamosán, ez $\alpha$ pontból mint kezdőpont-*

*tól mérve, levág; s a fölvett átmetszésre ható külső erők ugyanoly értelemben forgatnák az α pont körül, mint az n, (n + 1) kötélszakasz-erő merőleges (esetleg vízszintes) összetevője, ha ezt a nyomatéki mértéknek az n, (n + 1) kötéloldal metszette γ végpontján át ható erőnek tekintjük, ugyanez α pont körül. (Lásd 14. § 2.)*

A súlyokkal megterhelt, szokásos alakú ív- és függő tartókon, mint már mondottuk, rendesen a *balról* ható erőket értjük az egyes átmetszésekre ható erők alatt, s erre való tekintettel legcélszerűbb, ha abban a sorrendben teszszük össze a külső erőket, kötélpoligónjuk megszerkesztése céljából, melyben *jobbra felé* következnek egymásután a tartón. Ez esetben ugyanis, az összetétel folyamán, a kötélszakaszerők képében talált egyes részeredők, előjel tekintetében is megadják sorban az egyes átmetszésekre ható eredőket; noha különben abból is igen könnyen meg lehet határozni az eredők előjelét, hogy, (ha a balról működő erők eredőjét értjük,) vízszintes összetevője az imént mondottak nyomán $\frac{\text{ívtartón}}{\text{függőtartón}}$ fölvett valamely átmetszésre $\frac{\text{jobbra}}{\text{balra}}$ felé hat.

A 125. I ábrán a 6 és 7, és a 126. I ábrán az 5 és 6 erők között vettünk föl példaképpen átmetszéseket, s ez átmetszésekre mind a két oldal felől ható külső erők eredőit egy-egy nyíllal jelöltük meg, hasonló módon mint a 124. I ábrára nézve imént megjegyeztük. Az eredő nagyságát a 125. II ábrán $R = 22{\cdot}0$, a 126. I ábrán $R = 16{\cdot}9$ tonnának találtuk. A 125. I ábrán a fölvett átmetszésre balról ható külső erők az α pont körül ↻ felé forgatnak; a szélső reakciók vízszintes összetevője $H = 21{\cdot}1$ t., a nyomaték mérő hossza $y = 6{\cdot}2$m. a nyomaték tehát $N = 130{\cdot}8$ m. t. A 126. I ábrán látható tartó példájában $y = 5{\cdot}5$ m., $H = 16{\cdot}8$ t., az 5 és 6 erők között fölvett valamely átmetszésre ható külső erők nyomatéka az α pontra tehát $N = 92{\cdot}4$ m. t., s az erre az átmetszésre ható külső erők ↺ felé forgatnak az α pont körül.

*3. **Az elválasztó csuklós ívek és függő tartók.*** Ha az *m* és a közvetetlenül reá következő *n* külső erők között elválasztó csukló van elrendezve, akkor az *m* és *n* külső erők között fölvett átmetszésekre ható külső erők eredőjének, amint a 6. §-ból tudjuk, ez elválasztó csuklón át kell mennie. Amint azonban a megelőző pontokban épp láttuk, ez eredő irányvonala az íveken és függő tartókon az *mn* kötélpoligon-oldal.

*Kitetszik tehát a mondottakból, hogy az ívekre és a függőtartókra ható külső erők kötélpoligónjának valamennyi elválasztó csuklón át kell mennie, bármily alakúak és szerkezetűek is a tartók, s bármiképpen is vannak meg terhelve.*

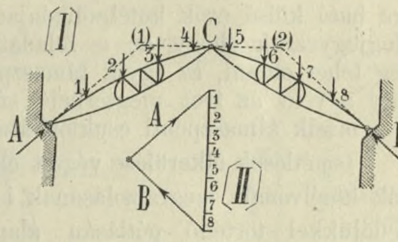
Fontos az az eset is, ha valamely ív- vagy függő tartó szerkezetében több csukló van alkalmazva, mint a mennyit a reakciók sztatikailag határozottá tétele megkíván. Vizsgáljuk meg e tekintetben először az íveket, s tegyük föl előbb, hogy akképpen vannak a csuklók valamely *kéttámaszú* íven elrendezve, hogy mind a külső erők kötélvonalára esnek. Ha az ív megterhelése az előbbihez képest valamely szakaszon megnagyobbodik, akkor a hídnyilás e részén az ív lehajlik, többi részén pedig, fölemelkedik. Ha oly hosszaságú kötélvonalat rajzolunk az új megterhelésre, melyre a csuklók, távolságaiknál fogva ráesthetnének, akkor e kötélvonal épp ott emelkedik tehát a megelőzőnél magasabbra, ahol a teher megnagyobbodott, a tartó többi részén pedig az előbbi kötélvonal alá esik, tekintve, hogy az erőpoligónsugarak, tehát a kötélvonal-elemek közötti szögek is, öregbedő súlyokkal öregbednek, kisebbedő súlyokkal szintén kisebbednek. Hat több csukló van az ívtartón, mint a mennyit a reakciók sztatikailag határozottá-tétele megkiván, s ha ezek már eredetileg sem esnek mind a külső erők kötélvonalára, akkor a tartó, amint ezekből látjuk, bedől, mivel a csuklók és a kötélvonal közötti távolság a tartó deformációja következtében nem kisebbedik, hanem megnagyobbodik.

Épp az ellenkező áll a függő tartókra. Ha oly függő tartón változtatjuk ugyanis meg azt a megterhelést, melyre a csuklók eredetileg mind a külső erők kötélvonalára estek volt, akkor ott mozdul el lefelé mind a tartó, mind a külső erők kötélvonala, ahol a teher megnagyobbodott, s ott emelkedik följebb, a hol a megterhelés aránylag megkisebbedett. A tartó deformációjának eredménye tehát oly új egyensúlyi helyzet elérése, melyben valamennyi csukló megint a külső erők kötélvonalára esik.

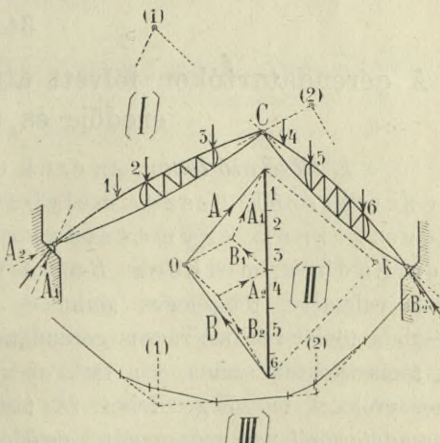
Amit a két támaszú ívekről és függő tartókról imént mondottunk, a több támaszú ívek és függő tartók minden hídnyilására áll. Kitetszik tehát a föntebbiekből, hogy az *ívek* szerkezetében nem szabad több elválasztó csuklót elrendezni, mint amennyit a reakciók sztatikailag határozottá-tétele megenged; hogy a függő tartókat ellenben bármennyi csuklóval föl lehet szerelni, vagy esetleg teljesen hajlékony kötelekből is lehet képezni, föltéve hogy a különböző egyensúlyi helyzetek közötti lengések nem nagyobbak, mint a mennyit a hídpálya használata megenged. (A hajlékony szerkezetű, pl. láncokból vagy drótkötelekből készitett függő tartókat ez okból úgynevezett merevítő gerendákkal kötjük össze, t. i. oly gerenda-tartókkal, melyek elég erősek, hogy mindig eloszszák a mozgó terhet a függőtartó egész hosszára.)

***4. A tartó egyes szakaszaira ható külső erők pótlása eredőikkel.*** A szerkesztés egyszerűsbítése végett gyakran eredőjükkel pótoljuk a külső erőket a tartó egy vagy több szakaszán, úgy szerkesztve meg a külső erők kötélvonalát, mintha az egyes külső erők helyett minden ily szakaszra eredőjük hatna. Magától értődik azonban, hogy csak azokon a szakaszokon használhatjuk föl, a végrehajtott szerkesztést az egyes átmetszésekre ható külső erők eredőjének és nyomatékának meghatározására, melyeken egyenként vettük tekintetbe a külső erőket. Ha más helyeken is kell átmetszéseket fölvennünk, akkor ki kell előbb egészíteni a részben az eredők fölvétele alapján rajzolt kötélvonalat, utólagosan szerkesztve meg az ily szakaszokon az egyes erők közötti kötélpoligón-oldalakat, az eredőt közbefoglaló két oldal között.

E l s ő  p é l d a. A 127. I ábra teszőleges alakú és szerkezetű, három csuklós oly ívtartó vetületét mutatja, melyen az *A* és *B* támaszponti csuklók a *C* tetőponti csukló függőlegeséhez képest szimmetrikusan vannak elrendezve, s melynek megterhelése az egyenlő távol, egyenlő nagy *G* súlyokból áll. Minthogy mind a súlyok, mind a csuklók szimmetrikusak a hídnyilás középvonalához képest, a külső erők kötélpoligónja is két szimmetrikus félből áll, a tetőponti kötélpoligón-oldal tehát vízszintes. A tetőponti csukló bal és jobb oldalán működő súlyok eredőinek sorban (1)- és (2)-vel jelölt irányvonalait, mint az egyik és a másik oldalon működő súlyok közötti középvonalakat, könnyen megszerkeszthetjük. Ha megnyujtjuk a tetőponti *C* kötélpoligón-oldalt, míg az (1) és (2) irányvonalakat át nem metszi, és összekötjük e pontokat sorban az *A* és *B* támaszponti csuklókkal, akkor az *A* és *B* reakciók irányvonalait kapjuk meg, (I ábra,) tekintve, hogy a megnyujtott *A* és *B* kötélpoligón-oldalaknak, a szintén megnyujtott *C* kötélpoligón-oldalt, a közbefoglalt súlyok eredőinek irányvonalaiban kell átmetszeniök. Ha az *A* és *B* irányvonalakkal párhuzamos sugarakat húzunk az erőpoligónban, megkapjuk az *A* és *B* reakciók mérő hosszait; (II ábra;) az ív vetületén szerkesztett *A* (1) (2) *B* poligón pedig abban az esetben a külső erők kötélpoligónja, ha eredőjükkel pótoljuk a súlyokat a tartó mindegyik felén. E kötélpoligónt könnyen ki lehet tehát egészíteni, megrajzolva, az egyes súlyok közötti poligón-oldalakat, az *A* és *C* s a *B* és *C* egyenesek, mint megnyujtott szélső poligón-oldalok fölhasználásával.



127-ik ábra.



128-ik ábra.

M á s o d i k  p é l d a. Ha az ív nem szimmetrikus és esetleg a megterhelés sem az, (128. I ábra,) akkor külön szerkesztjük meg az *AC* oldalon levő súlyok okozta $A_1$ és $B_1$, és külön a *BC* oldalon levő súlyok okozta $A_2$ és $B_2$ reakciókat; s az egész teher folytán keletkező *A* és *B* reakciókat ezután sorban mint az $A_1$ és $A_2$, és a $B_1$ és $B_2$ reakciórészek eredőit. (32. § 4.) E végből mindenekelőtt az *AC* és *BC* ívrészeket megterhelő súlyok eredőinek (1) és (2) irányvonalait határozzuk meg ismét, ha kell, kisérleti kötélpoligón segítségével, amelyhez az erőpoligón *k* csúcspontját bármiképpen fölvehetjük. (II—III ábra.) Ezután megszerkesztjük az *A* és *C* pontok között levő súlyok okozta külső erők kötélpoligónjának két szélső oldalát, megnyujtva *BC* összekötő egyenest, míg az (1) eredőt át nem vágja, s a metszéspontot az *A* ponttal kötve össze. Ha az $A$ és $C$ között levő súlyok erőpoligónja két szélső pontján át az $A_1$ és $B_1$ sugarakat az éppen említett $A(1)$ és $C(1)$ szélső kötélpoligón-oldalakkal párhuzamosan húzzuk, akkor megkapjuk az $A_1$ és $B_1$ reakciók mérő hosszait. (II ábra.) Most megszerkesztjük az erőpoligónon, egészen hasonló módon, a (2) irányvonal fölhasználásával, az $A_2$ és $B_2$ reakciók mérő hosszait, s ezután az $A_1$ és $A_2$, és a $B_1$ és $B_2$ reakció-részek eredőit, melyek, — amint már láttuk, — a keresett $A$ és $B$ reakciókkal egyenlők. (II ábra.) Ha az $A$ és $B$ csuklókon át párhuzamosakat vonunk a reakcióknak az erőpoligónban ekképpen meghatározott irányaival, akkor ez uton a keresett reakciók irányvonalait találjuk meg; ennek megtörténte után az ívre ható külső erők kötélpoligónját is nehézség nélkül meg lehet rajzolni. (Megjegyezzük, hogy az e föladatot a 16. § 3-ban előadottak alapján is meg lehet oldani, az egyik támaszponti csuklón átmenő oly erőt keresve, hogy a vele az ívet megterhelő súlyokra rajzolt kötélpoligón a tetőponti és a másik támaszponti csuklón átmenjen.)

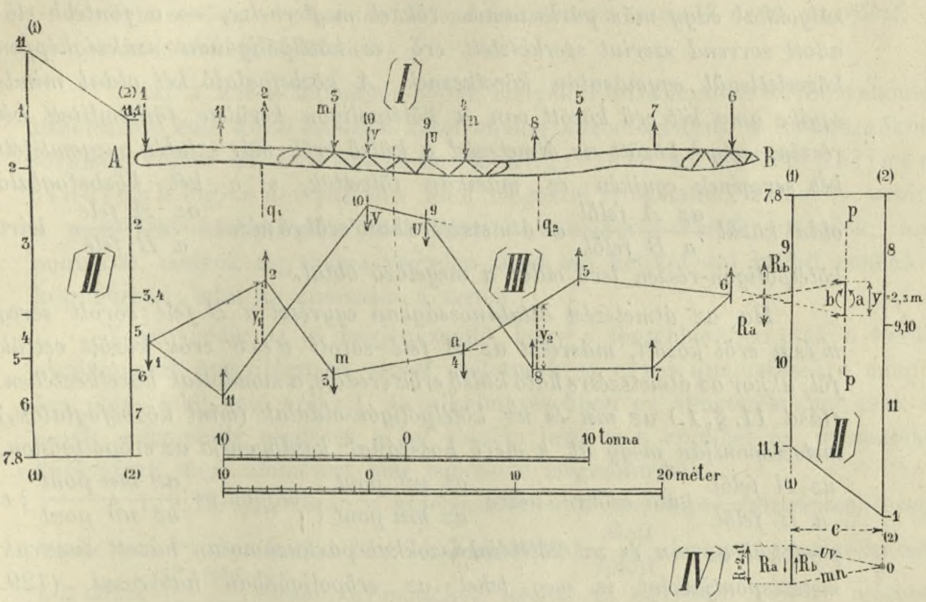
Ismétlések elkerülése végett előre megjegyezzük e helyen, hogy a külső erők kötélvonala megrajzolásának imént előadott, — egyes erőcsoportoknak eredőjükkel történő pótlásán alapuló, — módját nemcsak az ívek és függőtartók, hanem a gerendatartók elméletében is alkalmazzuk, még pedig mind az oly tartószakaszokra, melyekre koncentrált erők, mind különösen olyanokra, melyekre megoszló erők hatnak, tekintve hogy megoszló erők kötélgörbeit tudvalevőleg csakis ez úton lehet megszerkeszteni. Igy a támaszlapok reakcióit mindig eredőjükkel pótoljuk, s csak utólag rajzoljuk meg esetleg a megoszló reakciók kötélgörbéit. (Lásd pl. a 134 és 143—145-ik ábrákat.)

## 34. §.

## A gerendatartókon fölvett átmetszésekre ható külső erők eredője és nyomatéka.

***1. Első módszer.*** Az erők egyik részét abban a sorrendben teszszük össze, melyben a tartó $A$ végétől $B$ felé következnek egymásután, a többi erőt pedig abban a sorrendben, melyben $B$-től $A$ felé követik egymást. Jelöljük meg valamely, tetszőleges alakú és szerkezetű, tömör vagy rácsos, vagy részben tömör részben rácsos gerendatartó két végét $A$ és $B$-vel. (129-ik ábra.) A támaszpontok száma, s a tartó megterhelése súlyokkal vagy más párhuzamos erőkkel, tetszőleges lehet. (A támaszponti reakciók azonban, minthogy *gerendatartóról* van szó, magától értődőleg párhuzamosak a súlyokkal, vagy a megterhelést képviselő más erőkkel.) Oszszuk be a tartóra ható külső erőket egészen tetszésszerinti módon két seregre, és szerkeszszük meg erő- és kötélpoligónjukat akképpen, hogy az erőpoligón magasságának alkalmas fölvétele után, az egyik sereghez tartozó külső erőket abban a sorban teszszük össze, melyben $A$-tól $B$ felé következnek, s ezután, folytatva az összetételt, a másik seregbe osztott erőket viszont abban a sorrendben, melyben $B$-től

*A* felé követik egymást. (A 129. I—III ábrákon látható példában, az I ábrán hosszabb nyilakkal és 1—6 számokkal megjelölt erőket abban a sorrendben tettük össze, melyben *A*-tól *B* felé követik egymást, a rövidebb nyilakkal és 7—11-el megjelölt erőket ellenben abban, melyben *B*-től *A* felé következnek egymásután. Az erőket két párhuzamoson tettük össze, s az erőpoligónt



*129-ik ábra. C = 5 t.*

két, egymáshoz képest párhuzamoson eltolt részben rajzoltuk meg. (II ábra.) A kötélpoligón a III-ik ábrán látható, s önként értődőleg záródik. Nevezzük az *A*-tól *B* felé sorakozás rendjében összetett erőket röviden a *B* felé soroltaknak, a kötélpoligón ama részét, melyen ez erők szerepelnek, *B* felé leírtnak; a többi erőt pedig, megkülönböztetés végett, *A* felé soroltnak, a kötélpoligónnak ez erőkhöz tartozó részét pedig *A* felé leírtnak, és jelöljünk meg minden átmetszést, a külső erők két seregében, a hozzája kétoldalt legközelebb eső két-két erő folyó számával akképpen, hogy p. o. az I ábrán vonalozva húzott átmetszést egyrészt a 3 és 4, másrészt a 9 és 10-zel számozott erők között fölvettnek mondjuk. Könnyen belátható, hogy bárhol is veszünk föl átmetszést a tartón, a reá ható külső erők a kötélpoligónon szükségképpen közvetetlenül egymásután következnek, és hogy, ha az átmetszést általánosságban a *B* felé sorolt erők csoportjában az *m* és *n* erők között, a másik seregben pedig az *u* és *v* erők között vettük föl, a reá ható külső erőket a kötélpoligónban az *mn* és *uv* oldalak foglalják közbe. A 10. §. 9, továbbá a 11. §. 1 és a 13. §. 1-ban előadott, s a 46-ik és 58-ik ábrák kapcsán már példákban is alkalmazott tételek alapján könnyen meg lehet tehát ezek következtében szerkeszteni az épp említett erő- és kötélpoligón fölhasználásával, minden tetszőleges átmetszésre ható erőknek mind eredőjét, mind nyomatékát.

*Bárhol veszünk ugyanis föl valamely gerendatartón a szokásos módon átmetszést, (32. §. 1,) a reá ható külső erők, — bármily alakú és szerkezetű, és bármennyi támaszpontú is a tartó, s bármiképpen van is súlyokkal vagy más párhuzamos erőkkel megterhelve, — a föntebb előadott sorrend szerint szerkesztett erő- és kötélpoligónon szükségképpen közvetetlenül egymásután következnek. A közbefoglaló két oldal mindegyike ama két erő között van a kötélpoligón kerülete föntemlített két részén, melyek között az átmetszést a külső erők már szintén megemlített két seregének egyikén és másikán fölvettük, s e két közbefoglaló oldal közül* $\dfrac{\text{az } A \text{ felől}}{a\ B \text{ felől}}$ *az átmetszésre ható erőkre nézve* $\dfrac{\text{az } A \text{ felé}}{a\ B \text{ felé}}$ *leírt kötélpoligón-részen levő oldal a megelőző oldal.*

*Ha az átmetszést általánosságban egyrészt a B felé sorolt sereg m és n erői között, másrészt az A felé sorolt u és v erők között vettük föl, akkor az átmetszésre ható külső erők eredője, a mondottak következtében, (lásd 11. §. 1,) az mn és uv kötélpoligón-oldalak (mint közbefoglalók,) metszéspontján megy át, s mérő hosszának kezdőpontja az erőpoligónon,* $\dfrac{\text{az } A \text{ felől}}{a\ B \text{ felől}}$ *ható erőkre nézve* $\dfrac{\text{az } uv \text{ pont}}{\text{az } mn \text{ pont}}$, *végpontja* $\dfrac{\text{az } mn \text{ pont}}{\text{az } uv \text{ pont}}$; *e pontokat az mn és uv kötélszakaszokkal párhuzamosan húzott sugarak metszéspontjaiként is meg lehet az erőpoligónban határozni, (129. IV ábra,) ami különösen akkor szükséges, ha az m,n,u,v erők vagy egyáltalán nem, vagy nem mind ismeretesek, valamint akkor is, ha a külső erőket, — mint pl. a 129-ik ábrán is, — két párhuzamoson tettük össze. Az átmetszésre ható külső erők nyomatéki mérő hossza a tetszőleges pp párhuzamos pontjaira nézve, és vonatkozással az erőpoligón C magasságára mint nyomatéki alapra, az az y hosszúság, melyet az mn és uv kötéloldalak (mint közbefoglalók,) e párhuzamoson levágnak, (129. III ábra,) s az átmetszésre* $\dfrac{A \text{ felől}}{B \text{ felől}}$ *ható külső erők úgy forgatnak a mondott pp párhuzamos pontjai körül, mint a kötélszakasz-erők merőleges összetevője, ha ezt az y nyomatéki mértéken,* $\dfrac{\text{az } mn}{\text{az } uv}$ *kötéloldal metszette ponton működő erőnek tekintjük, (s ha a kötélszakasz-erőt oly értelműnek veszszük, mint a 10. §. 1-ban mondottuk, t. i. amilyennek az összetétel folyamán mint részeredőt találtuk,) a nyomatéki mérték pontjai körül forgat. (Lásd 13. §. 1.) Ugyanarra az átmetszésre, vagy más-más átmetszésekre ható erők különböző nyomatéki mértékeinek előjele, — amint ezekből kitetszik, — attól függ, hogy mily értelműek a nyomatéki mértékek, ha a megelőző kötéloldalakra, mint x tengelyekre vonatkozó ordinátáknak tekintjük őket. A* ↻

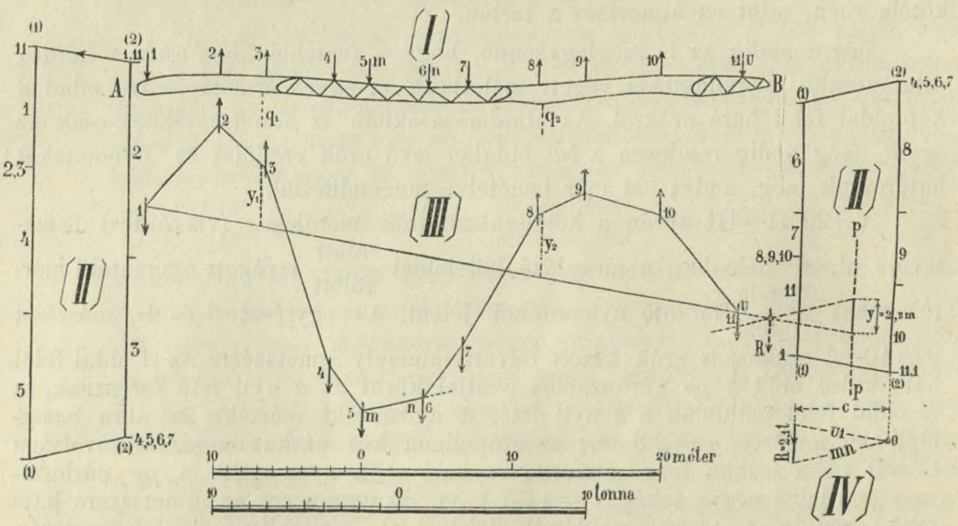
*felé forgató erők nyomatéki mértékei mind ugyanarra felé esnek a megelőző kötéloldalaktól, a ↺ felé forgatóké pedig az előbbiekhez képest az ellenkező oldalra. Az, hogy merre helyezkednek a ↻ felé forgató, és merre a ↺ felé forgató erők nyomatéki mértékei, a segéderő értelmétől függ, tehát attól, hogy melyik oldalon veszszük föl az erőpoligón csúcspontját, vagy esetleg, — t. i. ha két párhuzamoson teszszük össze az erőket, — a második párhuzamost.*

Azt a két kötélpoligón-oldalt, melyek a tetszőlegesen fölvett valamely átmetszésre ható külső erőket a kötélvonalon közbefoglalják, a következőkben rövidség végett az átmetszésnek megfelelő két kötélpoligón-oldalnak fogjuk nevezni. Ott, ahol megoszló erők hatnak valamely tartóra, a megfelelő kötélpoligónoldalak alatt a kötélgörbe-érintők értendők, ama pontokon, melyek ugyanama végtelen közel eső két-két erő között vannak a kötélgörbén, mint az átmetszés a tartón.

Végre pedig az is megjegyzendő, hogy a föntebbiekben csak a kérdés általánosabb megvilágítása végett szólottunk az egyes átmetszésekre mind a két oldal felől ható erőkről. Az alkalmazásokban az átmetszéseknek csak az egyik, még pedig rendesen a *bal* oldalán levő erők eredőjét és nyomatékát határozzuk meg, amint ezt már ismételve megemlítettük.

A 129. II—III ábrán a kötélszakasz-erők merőleges (vízszintes) összetevője pl. ← felé hat, a megelőző kötéloldal $\frac{\text{alatt}}{\text{fölött}}$ levágott nyomatéki mérték tehát $\frac{\text{↻ felé}}{\text{↺ felé}}$ forgató nyomatékot jelent. Az egyrészt 3 és 4-, másrészt 9 és 10-zel számozott erők között fölvett valamely átmetszésre az $A$ oldal felől ható külső erők a $pp$ párhuzamos pontjai körül az $a$ nyíl felé forgatnak, a $B$ oldal felől működők a $b$ nyíl felé. A nyomatéki mérték, az ábra hosszléptékén lemérve $y = 2{\cdot}3$ m.; az erőpoligón két párhuzamosának távolsága $C = 5$ t.; a szóban forgó átmetszésre ható erők nyomatéka a $pp$ párhuzamos pontjaira nézve tehát $N = 11{\cdot}5$ t. m. Az ugyanerre az átmetszésre ható erők eredője a meghosszabbított 3,4 és 9,10 kötélpoligón-oldalak metszéspontján megy át; mérő hosszát a IV ábrán szerkesztettük meg, párhuzamos sugarakat húzva az erőpoligón második párhuzamosán fölvett $o$ ponton át a 3,4 és 9,10 kötéloldalakkal. Az $A$ oldal felől, és másrészt a $B$ oldal felől működő erők eredőjét sorban $R_a$- és $R_b$-vel, és egy-egy nyillal jelöltük meg, mind a IV-ik ábrán a mérő hosszúság mellett, mind a III-ikon az irányvonalon; az eredő mérő hosszát az erők léptékén lemérvén, $R$-et $2{\cdot}1$ tonna nagyságúnak találtuk. (Az e pontban mondottak további alkalmazásai a 141 és 146-ik ábrákon láthatók.)

***2. Második módszer.*** Az erőket mind abban a sorrendben teszszük össze, melyben a tartó egyik végétől a másik felé következnek. A külső erők kötélpoligónját a legtöbb esetben nem az előbbi pontban tárgyalt összetételi sorrend alapján, hanem akképpen rajzoljuk meg, hogy az erőket, — amint az imént megemlítettük, — mind abban a sorrendben teszszük össze, amelyben a tartón egymásután következnek. Világos, hogy e módszer a megelőző pontban előadottnak csupán egyik külön esete, még pedig az a legegyszerűbb, melyben az egyik seregre beosztott erők száma zérus. Ha a tartóra ható két szélső erő egyikét 1-gyel, másikát $u$-val jelöljük meg, akkor a kötélvonalnak $u$-tól 1 felé leirt része, amint ezekből látjuk, az egy $u1$ oldalból áll, melyet a következőkben, gyakori körülírások elkerülése végett, **záró oldalnak** fogunk nevezni. (130. III ábra.) Tekintve továbbá, hogy az egyes átmetszések viszonylagos helyzetének meghatározása végett a jelen esetben elégséges ha egyszerűen az átmetszéshez két oldalt legközelebb eső két erőt nevezzük meg, az is önként következik a már mondottakból, *hogy az egyes átmetszésekhez tartozó két-két kötéloldal közül az egyik mindig a záró oldal, a másik pedig az a kötélpoligón-oldal, mely ugyanamaz, — esetleg egymáshoz végtelen közel eső, — két erő között van a kötélvonalon, mint az átmetszés a tartón.*




*130-ik ábra. C = 5 t.*

Ha abban a sorrendben tettük össze a külső erőket, melyben a tartó $A$ végétől $B$ vége felé következnek, akkor az $m$ és a közvetetlenül reá következő $n$ jelű erők között fölvett valamely átmetszésre $\frac{A \text{ felől}}{B \text{ felől}}$ ható erőkre nézve $\frac{\text{a záró oldal}}{\text{az } mn \text{ oldal}}$ az őket megelőző, $\frac{\text{az } mn \text{ oldal}}{\text{a záró oldal}}$ pedig a reájuk következő oldal. Ismerve ezek nyomán minden átmetszésre nézve mind a reá ható külső erőket megelőző, mind az ezek után következő kötéloldalt, könnyen megszerkeszthetjük az előbbi pontban előadott tételek alapján minden tetszőleges átmetszésre nézve akár az $A$, akár a $B$ oldal felől ható erőknek eredőjét is, nyomatékát is. Minthogy azonban a két oldal felől valamely átmetszésre ható külső erők között, az eredőt vagy a nyomatékot illetőleg, csak az előjel tekintetében van különbség, s minthogy különben első sorban mindig csak az egyiknek lehetőleg egyszerű meghatározása képezi a föladatot, az alább következő tételeket csak az egyik oldalról ható erőkre fogjuk kimondani.

*Ha abban az* $1, 2, 3 \ldots u$ *sorrendben teszszük ugyanis össze a föladatban kijelölt valamely gerendatartóra ható külső erőket, melyben ezek a tartó* $A$ *vége felől* $B$ *vége felé következnek egymásután, s ha azokat a külső erőket nevezzük az egyes átmetszésekre hatóknak, melyek ez átmetszések* $A$ *oldalán vannak, akkor az általánosságban az* $m$ *és a követetlenül utána következő* $n$ *erők között fölvett valamely átmetszésre ható külső erők* $R$ *eredője az esetleg meghosszabbítandó* $mn$ *kötélpoligón-oldal és a záró oldal közötti metszésponton megy át; mérő hosszának kezdőpontja az erőpoligónban az* $1,u$ *pont, végpontja az* $mn$ *pont, s e pontokat mint a záró oldallal és az* $mn$ *kötéloldallal párhuzamosan vont sugarak metszéspontjait is meg lehet az erőpoligónban szerkeszteni, akár egy, akár két párhuzamoson tettük össze a külső erőket; (130. III—IV-ik ábra ;) ha az eredő mérő hossza az erőpoligónban a záró oldallal párhuzamosan vont* $1,u$ *sugár* $\frac{\text{fölé}}{\text{alá}}$ *esik, akkor az eredő tehát* $\frac{\text{fölfelé}}{\text{lefelé}}$ *működik. A mondott átmetszésre ható erők nyomatékának mértéke a tetszőleges* $pp$ *párhuzamos pontjaira nézve, és vonatkozással az erőpoligón* $C$ *magasságára, mint nyomatéki alapra, az az* $y$ *vonalszakasz, melyet az esetleg meghosszabbított záró oldal és* $mn$ *kötélpoligón-oldal e párhuzamoson levágnak, s az (*$A$ *felől ható) külső erők úgy forgatnak a* $pp$ *párhuzamos pontjai körül, mint forgat a nyomatéki mérték pontjai körül az* $mn$ *kötélszakasz-erő merőleges összetevője, (függőleges külső erők esetén tehát vízszintes összetevője,) ha ez összetevőt a nyomatéki mértéken, az* $mn$ *kötéloldal metszette ponton működő erőnek tekintjük, s ha a kötélszakasz-erőt oly értelműnek veszszük, amilyennek az összetétel folyamán mint részeredőt találtuk. (III ábra.) Ugyanarra az átmetszésre, vagy más-más átmetszésekre ható külső erők nyomatéki mértékeinek előjelére nézve, ezek következtében, a záró oldalnak koordináta-tengely szerepe van, s a ↺ felé forgató erők nyomatéki mértékei mind ugyanarra felé esnek a záró oldaltól, a ↻ felé forgatóké pedig mind a másik oldalra. Az, hogy a záró oldal melyik oldalán vannak a ↺ felé forgató, s melyikre a ↻ felé forgató erők nyomatéki mértékei, a segéderő értelmétől függ, tehát attól, hogy mely oldalon veszszük föl az erőpoligónban a segéderő kezdőpontját. Ha súlyokkal vagy más függőleges erőkkel megterhelt tartó esetén oly kötélvonalat szerkesztünk a külső erőkre, amely, — a záró oldal kivételével, — húzott kötél egyensúlyi vetületét mutatja, akkor a bal oldali kötélszakasz-evők vízszintes összetevője* ← *felé hat, a balról az átmetszésre* *ható, és* $\dfrac{\circlearrowleft \textit{ felé}}{\circlearrowright \textit{ felé}}$ *forgató külső erők nyomatéki mértékei tehát a záró oldal* $\dfrac{\textit{alá}}{\textit{fölé}}$ *esnek. Az ellenkező esetben a nyomatéki mértékek előjele is az ellenkező az előbbihez képest.*

A 130. I—IV ábrák az imént előadottak alkalmazását mutatják ugyanarra a példára, amelyet más módon a 129. I—IV ábrák kapcsán már az előbbi pontban tárgyaltunk. Az erőket abban a sorrendben számoztuk meg és tettük össze, (két párhuzamoson,) melyben jobbra felé következnek egymásután a tartón. Az erőpoligón magasságát megint $C = 5$ t.-ra vettük föl. A kötélszakasz-erők vízszintes összetevője $\leftarrow$ felé hat, a kötélvonal tehát a záró oldal kivételével húzásra igénybevett kötél egyensúlyi vetülete, s az egyes keresztmetszetekre bal felől ható és $\dfrac{\circlearrowleft \text{ felé}}{\circlearrowright \text{ felé}}$ forgató erők nyomatéki mértékei ennélfogva a záró oldal $\dfrac{\text{alá}}{\text{fölé}}$ esnek. Példaképpen ugyanazon erők között vettünk föl átmetszést mint a megelőző példában a 129. I ábrán, s megszerkesztettük a reá ható külső erők $R$ eredőjét, és $y$ nyomatéki mértékét ugyanama *pp* párhuzamos pontjaira, mint a már említett megelőző példában. Az 5-ik és 6-ik erők között fölvett valamely átmetszésre ható külső erők $R$ eredője pl. a megnyujtott 5,6 oldal és a záró oldal közötti metszésponton megy át; ugyane két kötéloldal megnyujtása vágja le a nyomatéki mértéket is a tetszőleges *pp* párhuzamoson; (III-ik ábra;) és ha az erőpoligón *második* párhuzamosán fekvő valamely ponton át párhuzamos sugarakat húzunk e két kötéloldalhoz, akkor ezek az erőpoligón *első* párhuzamosán az $R$ eredő mérőhosszát vágják le. (IV-ik ábra.) Az eredő nagyságát $R = 2{\cdot}1$ t.-nak találtuk; a nyomatéki mértékeket pedig $y = 2{\cdot}3$ m.-nek; a nyomaték ennélfogva $N = 11{\cdot}5$ m. t. A fölvett átmetszésre balról ható külső erők a *pp* párhuzamos pontjai körül $\circlearrowright$ felé forgatnak, tekintve hogy az $y$ nyomatéki mérték a záró oldal fölé esik; ez erők eredője pedig lefelé működik, tekintve hogy mérő hosszát a záró oldallal párhuzamosan vont sugár alá esőnek találtuk.

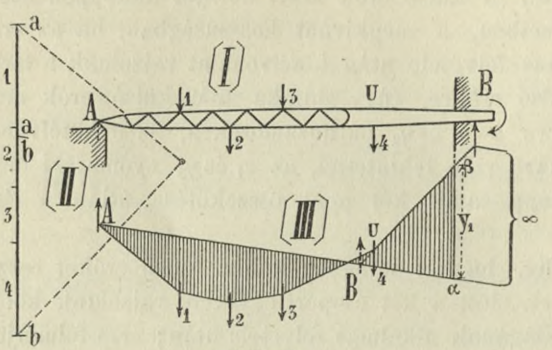
*3. Harmadik módszer.* A külső erők kötélpoligónja egyes részeinek, esetleg az egész kötélpoligónnak megszerkesztése, nyomatéki ordinátták fölhasználása útján. Vegyünk föl valamely gerendatartón, és a reá ható külső erők kötélpoligónján, az erőkkel párhuzamos irányban, tetszőleges két egyenest $q_1$-et és $q_2$-öt, s nevezzük azt a két hosszúságot, melyet a kötélvonal záródó kerülete e két párhuzamoson levág, sorban $y_1$ és $y_2$-nek. (129. I és III, és 130 I és III ábra.) Ha oly két átmetszést veszünk föl, melyek vetületei a $q_1$ és $q_2$ egyenesek, akkor az $y_1$ és $y_2$ hosszúságok, a fönntebb előadottak szerint, az ez átmetszésekre ható erők nyomatéki mértékei, sorban a $q_1$ és $q_2$ egyeneseken fekvő pontokra nézve, (l. a következő 35. § 1-ban részletesebben mondandókat,) s ha e nyomatéki ordinátákat ismerjük, akkor könnyen megszerkeszthetjük a külső erők kötélpoligónjának a $q_1$ és $q_2$ párhuzamosok közötti, vagy esetleg ezeken túl terjedő részét, a tartó bármily hosszúságú szakaszára, még akkor is, ha a tartóra e szakaszon kivül ható külső erők nem ismeretesek.

Ha mind abban a sorrendben teendők ugyanis össze a külső erők, melyben a szóban forgó szakasz egyik végétől a másik felé egymásután következnek, akkor az $y_1$ és $y_2$ nyomatéki mértékek a záró oldal két pontját határozzák meg. (130. III ábra.) A külső erők kötél ábráját akképpen szerkeszthetjük meg tehát ez esetben, a megkivánt hosszúságban, ha az erőpoligón magasságának alkalmas fölvétele után kötélvonalat rajzolunk a tartó megfelelő szakaszára ható külső erőkre, (úgy mintha más külső erők nem hatnának a tartóra,) s fölmérve a $q_1$ és $q_2$ párhuzamosokra, az e kötélvonalon fekvő pontokból, előjeleikre való tekintettel, az $y_1$ és $y_2$ nyomatéki mértékeket, meghúzzuk az ekképp talált két pont összekötése útján a záró oldalt.

Abban az esetben pedig, ha két seregben kell a külső erőket összetenni, (129. III ábra,) mindenek előtt a két csoport egyikére rajzolunk kötélvonalat, az erőpoligón magasságának alkalmas fölvétele után; erre fölmérjük a $q_1$ és $q_2$ párhuzamosokra, az e kötélvonal metszette pontokból, az $y_1$ és $y_2$ nyomatéki mértékeket, előjeleik tekintetbe vételével, s végre oly kötélvonalat rajzolunk az erők második csoportjára, mely az $y_1$ és $y_2$ hosszúságok fölmérésével talált pontokon megy át, tekintettel lévén mind a két csoport részére végzett szerkesztésben az előre megállapitott összetételi sorrendre és arra is, hogy az erők második csoportjának erőpoligónjában mind a magasság, mind a segéderő merőleges összetevőjének előjele ugyanaz legyen, mint az első seregre már előbb megrajzolt erőpoligónban. Az erő és kötélpoligón megrajzolása arra a csoportra, melylyel a szerkesztést megkezdjük, önként értődőleg, semmi nehézséget sem okoz. Az erők második seregének kötélpoligónját pedig szintén meg lehet nehézség nélkül szerkeszteni, esetleg kisérleti kötélpoligón rajzolása útján, tekintve hogy a szóban levő kötélvonal két pontja, és a segéderő merőleges összetevőjének mind nagysága mind előjele ismeretes. (Lásd a 16. § 2-ban, a 68-ik ábra kapcsán mondottakat, s a 141- és 146-ik ábrákon látható alkalmazásokat.)

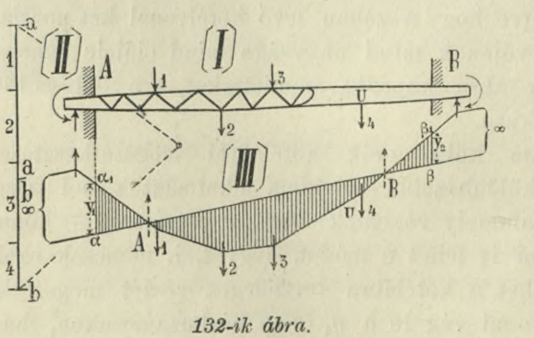
A gerendatartókra ható külső erők kötélábrái megszerkesztésének imént előadott módját a legkülönbözőbb esetekben alkalmazzuk, hol az egész kötélábrának, hol az ábra valamely részének megszerkesztésére, s könnyen belátható, hogy általánositani is lehet e módot, hogy t. i. nemcsak azokból a nyomatéki mértékekből lehet a kötélábra tetszőleges részét megszerkeszteni, melyet a záródó kötélvonal vág le a $q_1$ és $q_2$ párhuzamosokon, hanem bármely más két nyomatéki mértékből is.

P é l d á k. Ha az $A$ végén csuklóra támaszkodó, $B$ végén befalazott, és az $1, 2, 3, \ldots u$ súlyokkal megterhelt gerendatartón az $A$ reakciót ismeretesnek veszszük föl, (131. I—III ábra,) s ha megszerkesztjük a külső erők erő- és kötélpoligónját, abban a sorrendben téve össze az erőket, melyben ⟶ felé következnek, akkor a II—III ábrákból látható eredményt találjuk. Ha az utolsó súly után következő $u\beta$ kötélszakasz-erőt a $B$ reakció függőleges komponensével összeteszszük, akkor ugyanis az első $A\alpha$ oldallal párhuzamos irányú kötélpoligón-oldalt, s ha összeteszszük az erre talált kötélszakasz-erőt a $B$ reakciónak, a végtelen távol egyenesre eső, végtelen kis összetevőjével, akkor az $Aa$-val összeeső kötélpoligón-oldalt kell találnunk, tekintve hogy a kötélvonalnak záródnia kell. E helyett azonban akképpen szerkesztjük meg a kötélábrát, hogy nem az $A$ reakciót, hanem az $y_1$ nyomatéki ordinátát határozzuk meg a rugalmassági elmélet alapján. Ezután megrajzoljuk a tartóra ható súlyok $1, 2 \ldots u$ kötélvonalát, nem véve számba a reakciókat. Végre fölmérjük a befalazás függőlegesére a szélső $u\beta$ kötéloldal metszette ponttól az $y_1$ nyomatéki ordinátát, s meghúzzuk a záró oldalt, összekötve az $y_1$ ordináta fölmérése útján talált pontot azzal a ponttal, melyen az $A$ függőleges a legelső súly előtti kötélpoligón-oldalt átmetszi. Ha a külső erők kötélvonalát ekképpen megrajzoltuk, s a záró oldallal párhuzamos sugarat húzunk az erőpoligónban, akkor megkapjuk az $A$ és $B$ reakciók $aa$ és $bb$ mérőhosszait. Megjegyzendő, hogy a $B$ reakció eredőjének irányvonala azon a ponton megy át, melyen a $u\beta$ kötélpoligón-oldal és a záró oldal, mint közbe-foglaló oldalak, metsződnek. (III ábra.)




*131-ik ábra.*

Mindkét végén befalazott gerendatartóra ható külső erők kötélvonalának alakja arra az esetre, ha valamennyi erőt abban a sorrendben teszszük össze, melyben → felé következnek, a 132. III ábrán látható. Ha összeteszszük ugyanis az $\alpha\beta$ egyenesen fölvett segéderőt az $A$ reakció függőleges és erőpárbeli összetevőjével, akkor az $\alpha_1 1$ kötélpoligón-oldal keletkezik. S ha az $\alpha_1 1$ kötélszakasz-erőt előbb sorban az egyes súlyokkal s végre a $B$ reakció függőleges és erőpárbeli komponensével teszszük össze, akkor oly kötélpoligón-oldalra kell akadnunk, mely megint az $u\beta$ oldalra esik.




*132-ik ábra.*

E kötélábrát akképpen rajzoljuk meg, hogy megszerkesztjük a súlyok $1, 2, \ldots u$ kötélvonalát, s ezután fölmérjük a befalazások függőlegeseire, a rugalmassági elmélet alapján előbb meghatározott $y_1$ és $y_2$ nyomatéki ordinátákat, a súlyok kötélvonala két szélső oldala metszette pontokból. Ha az ekképpen talált két pontot összekötjük, a záró oldalt kapjuk meg, s ha ezzel párhuzamos sugarat húzunk az erőpoligónban, megtaláljuk az $A$ és $B$ reakciók $aa$ és $bb$ mérő hosszait; önként értődik, hogy e reakciók irányvonalai azokon a pontokon mennek át, melyeken a súlyokra nézve szerkesztett kötélvonal szélső két oldala, vagy esetleg meghosszabbításuk, a záró oldalt metszi. (III ábra.)

Más esetekben nem az egész kötélpoligónt rajzoljuk meg, hanem csak egyes *részeit*. Abban az esetben nevezetesen, ha egyes külső erők nem ismeretesek, rendesen akképpen járunk el legegyszerűbben, ha az ismeretlen erők irányvonalaival szakaszokra osztjuk a tartót, és előzetesen meghatározva a kötélábrának ez erők irányvonalaira eső ordinátáit, külön-külön szerkesztjük meg a kötélpoligónt, egy vagy több, vagy esetleg valamennyi tartószakaszra. (Lásd pl. a később a 145—147; 150—151-ik ábrák kapcsán tárgyalt példákat.) Mindegyik szakasz részére megszerkesztett erő- és kötélpoligónt külön föl lehet használni, mind az eredő, mind a nyomaték meghatározására, mindazokra az átmetszésekre nézve, melyek a tartó e szakaszán fölvehetők, egészen függetlenül a tartó más szakaszaira esetleg szintén végrehajtott szerkesztéstől. S ha a tartó több szakaszára szerkesztjük meg az erő- és kötélpoligónt, akkor egészen közönyös, hogy mily segéderőket veszünk föl az egyes szakaszokon, föltéve, hogy a magasság valamennyi erőpoligónban helyesen, t. i. a nyomatéki alappal egyenlőre van fölvéve, s hogy a szerkesztés a föntebb előadott egyéb szabályoknak is megfelel. Önként értődik azonban hogy, ha összefüggésben rajzoljuk is meg egymás után az egyes kötélpoligónokat a tartó valamennyi szakaszára, (t. i. akképpen, hogy két szomszéd szakasz kötélpoligónja mindenütt ugyanabban a pontban metszi a közbe eső válaszvonalat,) e részek még sem egyesülnek a tartóra ható külső erők egységes, egész kötélvonalává, (lásd pl. az épp idézett ábrákat,) tekintve, hogy az egyes kötélábra-részeket más-más segéderőkkel szerkesztettük meg, s hogy, ha ez egyes ábrarészekre végrehajtott szerkesztést az egész tartóra megnyujtanók, mindegyik kötélvonal-rész meghosszabbítása más-más ábrát képezne; ez azonban nem akadályozza meg az egyes kötélábra-részeknek az eredők és a nyomatékok meghatározására való fölhasználását.

Az ismeretlen erőket ellenben, — ha ezek irányvonalai képezik a beosztó vonalakat, — nem lehet az egyes kötélábra-részekből közvetetlenül megszerkeszteni, mivelhogy nincsenek oly kötélpoligón-oldalak, melyek ez erőket közbefoglalnák. E nehézséget akképpen lehet elkerülni, ha a keresett $P$ erő, és a hozzája két oldalt legközelebb eső erők között egy-egy átmetszést veszünk föl, a $P$ erővel párhuzamos irányban, (ha megoszló erők hatnak a $P$ erő mellett a tartóra, akkor ez átmetszéseket végtelen közel a $P$ erőhöz veszszük föl,) s ha megszerkesztjük e két átmetszés mindegyikére nézve a reá ható külső erők eredőjét. Ha a tartó két végét megint $A$-val és $B$-vel jelöljük meg, s ha a keresett $P$ erő $\frac{A \text{ oldalán}}{B \text{ oldalán}}$ fölvett épp említett átmetszésre az $A$ oldal felől ható külső erők eredőjét $\frac{R_1\text{-nek}}{R_2\text{-nek}}$ nevezzük, akkor az $R_2$ erő ugyanis az $R_1$ és $P$ erők eredője, egyenlő tehát az $R_1$ és $P$ erők algebrai összegével. Akképpen határozhatjuk meg tehát az ismeretlen $P$ erőt, ha a $P$ erő túlsó oldalán fölvett átmetszésre ható erők $R_2$ eredőjéből egyszerűen kivonjuk, (előjele tekintetbe vételével,) a $P$ erő innenső oldalán fölvett átmetszésre ható erők $R_1$ eredőjét. Ha megszerkesztjük a 35. § 2-ban azonnal tárgyalandó módon az eredők ábráját, akkor ebben közvetetlenül megtaláljuk az esetleg ismeretlen erőket is, az ez erők irány vonalaira eső lépcsők magasságai képében. Már e helyen megjegyezzük azonban, hogy az ismeretlen erők meghatározásának imént tárgyalt módja tökéletesen azonos azzal, melyen az eredők ábrája lépcsőinek magasságát találjuk meg.

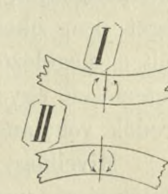
## 35. §.

## A nyomatékok és az eredők ábrája a gerendatartók elméletében.

*1. A nyomatékok ábrája.* A jelen §-ban arra a fontos külön esetre térünk át, midőn a gerendatartókon fölvett átmetszések oly síkokból állanak, melyek a külső erőkkel párhuzamosak, (súlyokkal megterhelt tartókon függőlegesek,) s ezek síkjára merőlegesek, és midőn a nyomatéki tengely az átmetszés síkjában van, s az erők síkjára merőleges. (Egy-egy átmetszés vetületét tehát egy-egy, az erőkkel párhuzamosan vont egyenes képezi, s a nyomatéki tengelyek vetületét ez egyenes pontjai.) Ha az átmetszést $k$-val jelöljük meg, (134. I ábra,) akkor az imént említett módon értelmezett nyomatékot a következőkben, sokszor ismétlődő körülírások elkerülése végett, röviden a $k$ párhuzamosra, — súlyokkal megterhelt tartó esetében a $k$ függőlegesre nézve meghatározott nyomatéknak fogjuk nevezni; és ha a következőkben az erőkkel párhuzamosan fekvő valamely $k$ egyenesre meghatározott nyomatékról van szó, és világosan ki nincs mondva, hogy a nyomatéki tengely az átmetszésen kivül van, akkor mindig önként értődőnek kell tekinteni, hogy oly átmetszést vettünk föl, melynek vetülete a mondott $k$ párhuzamos, s hogy a nyomaték alatt az ez átmetszésre ható külső erők nyomatékát a $k$ egyenes pontjaira nézve, (még helyesebben ama tengelyekre nézve, melyek vetületei a $k$ egyenes pontjai,) kell érteni. Az ily nyomaték mértéke azonban, — amint a megelőző szakaszban mondottakból kitünik, s a mint ott a 3-ik pontban meg is említettük, — az az $y$ hosszúság, amelyet a külső erők kötélábrájának záródó kerülete, a keresztmetszet vetülete képezte egyenes meghosszabbításán levág.

*A gerendatartókra ható külső erők kötélábráját ez okból, ha az előbbi §-ban tárgyalt módok egyikén van megszerkesztve, a nyomatékok ábrájának nevezzük, a nyomatékot az imént hangsúlyozott értelemben értve. Ha mind abban a sorrendben teszszük össze a külső erőket, melyben a tartó egyik végétől a másik felé következnek, akkor a kötélvonal a nyomatékok vonala a záró oldalra, mint egyik koordináta-tengelyre, és oly koordináta-rendszerre nézve, melynek másik* *tengelye az erőkkel párhuzamos. Az ekképpen rajzolt kötélábrán az erőkkel párhuzamosan húzott egyes ordináták ugyanis mind nyomatéki mértékek, vonatkozással az erőpoligón magasságára mint nyomatéki alapra, még pedig mindegyik y ordináta arra a k átmetszésre nézve, melynek vetülete az ordináta meghosszabbítására esik. (134. I és III ábra.) A záró oldal egyik oldalán levágott ordináták az egyik, a másik oldalra esők pedig a másik értelemben forgató erők nyomatékát mérik, s a megelőző 34. § 2-ban, a nyomatéki ordináták előjelét illetőleg általánosságban mondottak, különben is minden tekintetben érvényesek erre az esetre is.*

Ha a balról ható külső erők ↺ felé, tehát jobbról hatók ↻ felé forgatnak, akkor a tartó felső széle megrövidül, alsó széle meghosszabbodik, (133. I ábra,) a tartó felső szélén tehát nyomásra, alsó szélén húzásra vétetik igénybe; ha pedig az ellenkező módon forgatnak a külső erők, (II ábra,) akkor a tartó széleinek igénybevétele is az ellenkező az előbbihez képest. Ha a tartó nem vízszintes irányban terjed ki, akkor úgy kell vetületét e tétel helyes alkalmazása céljából fordítanunk, hogy egyik vége balra, másik jobbra essék.



*133-ik ábra.*

Másrészt az is kitetszik továbbá a föntebb mondottakból, hogy minden nyomatéki vonal kötélvonal, s hogy a nyomatékok vonala a tartó oly szakaszán, melyre tetszőleges értelmű, egyenletesen megoszló erők hatnak, parabola; oly szakaszon, melyre szabálytalanul megoszló erők hatnak, szabálytalan görbe vonal; az oly szakaszon pedig, melyre koncentrált erők hatnak, oly poligón, melynek sarokpontjai az erők irányvonalaira esnek.

*Abban az esetben, ha két seregben teszszük össze a külső erőket, a megelőző 34. § 1-ban mutatott módon, a kötélábrának az erőkkel párhuzamosan húzott húrjai képezik a nyomatéki mértékeket, még pedig mindegyik húr megint arra az átmetszésre nézve, melynek vetülete e húr meghosszabbítására esik, és úgy, hogy a nyomatéki alapot ismét az erőpoligón magassága képezi. A nyomatékok előjele tekintetében mindaz érvényes, amit ez iránt a megelőző 34. § 1-ban mondottunk. Ha ama pontokon, melyeken a kötélvonal kerületének két része esetleg metsződik, az erőkkel párhuzamosakat húzunk, s ezekkel mind a kötélábrát, mind a tartót szakaszokra osztjuk, a nyomatékok előjele szakaszról szakaszra megváltozik.*

**2. *Az eredők ábrája.*** Oly ábrát is kell gyakran a tartók keresztmetszeti méreteinek megállapitása végett szerkeszteni, melyen az előjeleik tekintetbe vételével, a tetszőlegesen fölvett $x$ tengelytől, az erőkkel párhuzamos irányban fölmért egyes ordináták, sorban az erőkkel párhuzamosan fölvett egyes átmetszésekre ható külső erők eredőinek mérő hosszai, t. i. mindegyik $R$ ordináta arra a $k$ átmetszésre nézve, melynek vetülete ez ordinata meghosszabbítására esik. (134. I és IV ábra.) Ez ábrát az e r e d ő k á b r á j á n a k, s azt a vonalat, mely a fölmért ordináták végpontjait összeköti, a z e r e d ő k v o n a l á n a k fogjuk nevezni; az előjeleket pedig mindig úgy fogjuk megállapítani, hogy a fölfelé működő eredők mérőhosszait az $x$ tengely fölé, a lefelé működőkét e tengely alá fogjuk a függőlegesekre ráméni.

Az eredők ábrája, amint ezekből látjuk, első sorban a külső erőkkel párhuzamosan, és síkjukra merőlegesen fölvett *sík* átmetszésekre adja meg az eredőket. Tudjuk azonban, hogy abban az esetben, ha az erők mérhető távolságokban működnek egymástól, (koncentráltak,) valamely sík átmetszésre nézve meghatározott eredő az ugyanama két erő között fölvehető bármely más átmetszésre ható erők eredőjét is megadja.

Ha ismerjük a tartóra ható külső erőket, s megrajzoltuk ezek erő- és kötélpoligónját, akkor az eredők ábrájának megszerkesztése semmi nehézséget sem okoz, tekintve, hogy az egyes átmetszésekre ható erők eredőit a megelőző 34. §-ban mondottak nyomán könnyen meg lehet határozni. Tetemesen egyszerűsbíthető azonban a szerkesztés, ha előre ismerjük az eredők vonalának alakját, mire nézve a következőket jegyezzük meg.

Mivelhogy az eredő ugyanama két erő között fölvett valamennyi átmetszésre ugyanaz, mindenekelőtt az következik a föntebb mondottakból, *hogy ott, ahol a külső erők mérhető távolságokban hatnak a tartóra, az eredők vonala az $x$ tengelylyel párhuzamos irányú egyenesekből áll, tehát lépcsőzetes vonalat képez a külső erők megnyujtott irányvonalai között.*

Minthogy továbbá valamely átmetszésre ható eredőt az ez átmetszésre ható egyes külső erők összetétele útján lehet megszerkeszteni, erre való tekintettel az is világos, hogy valamely átmetszésre ható külső erők eredőjéből akképpen szerkeszthetjük meg valamely tovább következő átmetszésre ható erőkét, ha összeteszszük a megelőző átmetszésre talált eredőt a két átmetszés közötti erőkkel.

Ott, ahol koncentrált erők hatnak a tartóra, ez okból minden egyes lépcső magassága egyenlő az e lépcső egyenesében működő erő mérő hosszával, s ha fölfelé hat az erő, akkor a lépcső emelkedik, (amaz oldal felől számítva, a honnan a ható erők eredőinek ábráját keressük,) az ellenkező esetben alászáll. Ha részekben rajzoltuk meg e külső erők kötélpoligónját, s ha a beosztó vonalakat az ismeretlen erőkön át vettük föl, akkor egy-egy ismeretlen erő mérő hossza egyenlő az irányvonalára eső lépcső magasságával, az erő értelmét pedig a lépcső értelme szabja meg. (Lásd pl. a 146. IV, 147. VI, 150. IV ábrákat, melyeken az eleve ismeretlen egyes reakciókat sorban ugyanazokkal a betűkkel jelöltük meg, mint a támaszpontokat.)

Ha ellenben *megoszlók* az erők, akkor az eredők vonala általánosságban *görbe* vonal, tekintve, hogy egymáshoz végtelen közel eső ordinátái végtelen keveset különböznek egymástól. E görbe tetszőleges két ordinátájának különbsége egyenlő ama megoszló erők összegének mérő hosszával, melyek az e két ordináta meghosszabbítása közötti tartószakaszra hatnak. Különben pedig áll a megoszló erőkkel megterhelt tartószakaszokra is, amit föntebb a koncentrált erőkkel megterheltekre kimondottunk, hogy t. i., — ha a tartó $A$ vége felől ható külső erők eredőinek ábráját keressük, — a tartó oly részén, melyre $\frac{\text{lefelé}}{\text{fölfelé}}$ hatnak a külső erők, az eredők vonala, $A$-tól $B$ felé $\frac{\text{alászáll}}{\text{fölfelé emelkedik}}$, bármilyen alakú is különben e vonal.

Hogy alaposabban megállapíthassuk az eredők vonalának alakját a tartó oly szakaszán, melyre tetszőleges értelmű, és tetszőleges módon megoszló erők hatnak, legyen az erőkkel párhuzamosan fölvett tetszőleges átmetszésre ható külső erők eredője $R$, a $dx$-szel tovább fölvett átmetszésre ható erőké tehát $R+dR$. Ha $q$-val jelöljük a megoszló erők hosszegységenkénti nagyságát a fölvett átmetszések közötti $dx$ szakaszon, akkor a föntebb mondottak szerint $dR = qdx$. Az eredők vonalának érintője és a rendező tengely közötti $\varphi$ szög *tang*-e ennek következtében, az átmetszés megnyujtásán levő ponton:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{dR}{dx} = q.$$

*Ha $q$ állandó, vagyis ha tetszőleges értelmű, de egyenletesen megoszló erő hat a tartóra, akkor az eredők vonala tehát oly egyenes, mely annál nagyobb szöget képez az $x$-tengelylyel, minél nagyobb az erő. Abban az esetben pedig, ha $q$ nem állandó, vagyis ha egyenlőtlenül oszlik meg az erő, az eredők vonala oly görbe vonal, melyen az egyes pontok érintői annál nagyobb szöget képeznek az $x$-tengelylyel, minél nagyobb erő hat a tartó ama pontjára, mely az eredők görbéjének érintett pontján át, az erőkkel párhuzamosan húzott egyenesre esik.*

Ha ismerjük a megoszló erők értelmét és nagyságuk változását, (t. i. azt, hogy kisebbek vagy nagyobbak-e a megoszló erők valamely ponton, mint azon innen és túl,) akkor ismerjük tehát az előadottak következtében nemcsak azt, hogy merre felé esik vagy emelkedik az eredők vonala, de azt is, hogy merre felé homorúak, és merre felé domborúak e vonal különböző szakaszai. (Lásd a következő pont végén, a példában mondandókat.)

Ha egyes koncentrált erőkön kivül egyidejűleg megoszló erők is hatnak valamely gerendatartóra, vagy ennek valamely részére, (a megoszló erőt, más eseteket nem emlitve, pl. a tartó saját súlya is képezheti, a koncentrált erőket pedig pl. a tartó támasztotta szerkezetről átvitt súlyok,) akkor az eredők vonala a koncentrált erők irányvonalaiban lépcsőket képez, és ezek között, egyenetlenül megoszló erők esetén görbe vonalakból áll, egyenletesen megoszló erők esetén pedig ferde egyenesekből. (Lásd a 134. I és IV ábrákon a 10—13-mal számozott súlyokkal megterhelt szakaszt.)

Megjegyzendő végre, a későbbi gyakori alkalmazásokra való tekintettel, hogy, ha az eredők alatt az egyes átmetszésektől a tartó *A* vége felé eső külső erők eredőit értjük, és ha a tartó *A* végén veszünk föl átmetszést, a legszélső *E* erő és a reá legközelebb következő erő között, (ha e két erő végtelen közel van egymáshoz, tehát végtelen közel az *E* erőhöz,) akkor az erre az átmetszésre ható külső erők eredője a mondott szélső *E* erő; (134. I és IV ábra;) az olyan átmetszésre pedig, melyet a tartó másik, *B* végén levő legszélső *U* erő és az azt megelőző erő között veszünk föl, (esetleg végtelen közel az *U* erőhöz,) a külső erők eredője az ellenkezőre megváltoztatott előjelű *U* erő, minthogy az ily átmetszésre a *B* oldal felől működő erők eredője az *U* erő, s minthogy ez egyensúlyban tartja az *A* oldal felől ható erőket.

***3. A nyomatékok és az eredők ábrája közötti összefüggés.*** A megelőző §-ban mondottakból tudjuk, hogy valamely átmetszésre ható erők eredőjének mérő hossza az a hosszúság, melyet az ehhez az átmetszéshez tartozó két kötélpoligón-oldallal párhuzamosan vont sugarak vágnak le az erőpóligónban, a külső erők összetételi egyenesén. Valamely keresztmetszetre ható külső erők eredője ez okból annál nagyobb, minél nagyobb szöget képeznek egymással az átmetszéshez tartozó kötélpoligón-oldalak.*) A nyomatéki ábra alakjáról tehát az eredők nagyságára is következtethetünk.

Ami az eredő előjelét illeti, ezt amint tudjuk az szabja meg, hogy merre felé esik mérő hossza az erőpoligónban, az erőket megelőző oldallal párhuzamosan húzott sugártól. Ha valamely maximális vagy minimális nyomatéki keresztmetszet két ellenkező oldalán, hozzája végtelen közel eső két keresztmetszetet veszünk föl, akkor az ezekre ható eredők, amint ezekből látjuk, egymáshoz képest szükségképpen ellenkező értelműek.

*Minden maximális vagy minimális nyomaték ordinátájának meghosszabbítása egy-egy oly egyenest képez ennek következtében, melynek ellenkező oldalain fölvett átmetszésekre egymáshoz képest ellenkező előjelű eredők hatnak. Ez egyeneseket az eredők előjelének változására való tekintettel á t m e n e t i  f ü g g ő l e g e s e k n e k fogjuk nevezni. Az átmeneti függőlegesek, amint az épp mondottakból látjuk, a maximális és minimális nyomatékok átmetszésein mennek át.*

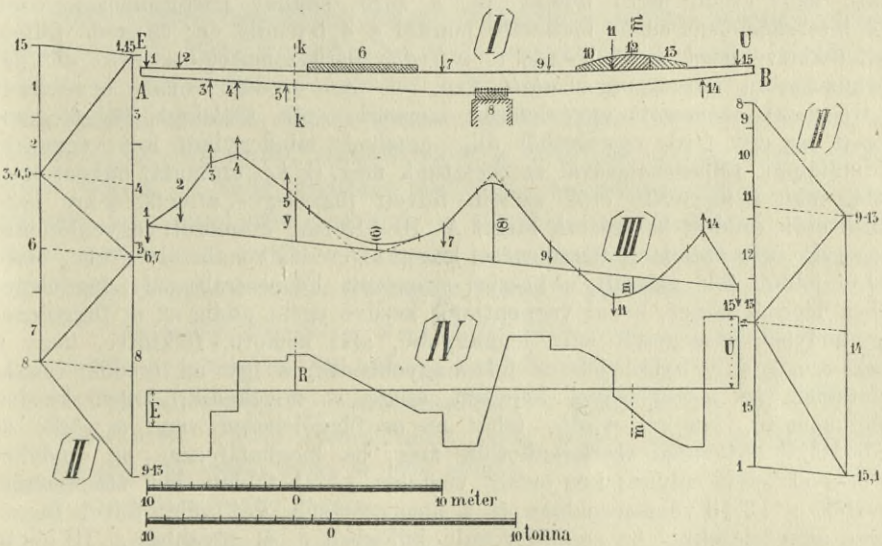
*) Ha a nyomatékot az erőkkel párhuzamosan fölvett valamely átmetszésre $M$-mel jelöljük meg, ennek $C$-re mint alapra megszerkesztett mérő hosszát $y$-nal, a nyomatéki ordinátát a $dx$-szel távolabb fölvett keresztmetszetre tehát $y + dy$-nal, s ha megszerkesztjük a nyomatéki ábrán a $dy$-t, az erőpoligónban pedig a keresztmetszetre ható erők $R$ eredőjét, akkor az ekképpen keletkező két háromszög hasonlóságából $dy : dx = R : C$, ebből pedig az ismert

$$\frac{dM}{dx} = R$$

alapegyenlet következik.

Ha megszerkesztettük a külső erők kötélábráját, akkor tehát az egyes átmetszésekre ható külső erők eredőinek előjeleit, az imént mondottak következtében az egész tartó hosszában előre ismerjük.

Példa. A 134. I ábrán látható tartóra példaképpen a III a nyomatékok, IV az eredők ábráját mutatja, az egyes átmetszésekre *balról* ható külső erőkre. Az erők súlyokból és reakciókból állanak, melyeket tetszés szerint vettünk föl, de önként értődőleg mégis úgy, hogy egyensúlyban legyenek; mérő hosszaik II ábrán megszerkesztett erőpoligónból láthatók, melyet egymáshoz képest párhuzamosan eltolt két részben, két párhuzamoson rajzoltunk meg. A koncentrált erőkön kivül megoszlókat is fölvettünk, még pedig egyenletesen megoszló súlyt és reakciót, (6 és 8-ik sz.) és egyenlőtlenül megoszló súlyt. (10, 12 és 13-ik sz.) A fölvett súlyok alatt akár a tartóra ható valamely terhet lehet érteni, akár magának a tartónak súlyát, s



*134-ik ábra. C = 5 t.*

az utóbbi esetben azt tételezzük föl, hogy azokon a szakaszokon, melyeken megoszló súlyt vettünk föl, a tartó súlyának megoszlását is tekintetbe vettük, a tartó többi szakaszán pedig eredőikkel helyettesitettük az egyes tartószakaszok súlyait. Az erőket abban a sorrendben tettük össze, melyben balról jobbra felé következnek. A kötélvonalat a koncentrált erőkre a rendes módon szerkesztjük meg; az egyenletesen megoszló súlyra és reakcióra nézve, mint egy-egy oly parabola-ívet, melynek érintői a vele kétoldalt kapcsolkozó kötélpoligón-oldalak; az egyenlőtlenül megoszló súlyt a 10, 12 és 13-mal számozott részekre osztottuk, s a kötélgörbét e súly-részek eredőire megrajzolt kötélpoligón fölhasználásával szerkesztettük meg, a 15. §. 2-ből ismert módon.

Az eredők ábrájának megszerkesztése dolgában a következők jegyzendők meg. Ha két párhuzamoson teszszük össze a külső erőket, — mint a jelen esetben történt, — akkor az erőpoligónt egymás mellé sorolt csupa oly *részből* állónak tekinthetjük, melyeken az erők hol az *első*, hol a *második* párhuzamoson vannak fölmérve, (a második párhuzamoson az ellenkezőre megváltoztatott előjellel,) s melyeken a csúcspont mindegyik *részre* mindig a szemközt levő párhuzamoson van. (A II ábrán az erőpoligón ez egyes részeit, nagyobb világosság végett, a szélső sugarak meghúzásával tettük láthatóvá.) Párhuzamosat vontunk ez okból ez egyes erőpoligón-részek mindegyikének csúcspontján át a záró oldallal, (a II ábrán e párhuzamosak vonalozva vannak meghúzva,) s ezután teljesen ugyanakképpen használtuk föl az egyes erőpoligón-részeket, a tartó egyes szakaszain, az eredők megszerkesztésére, mint ha ugyanegy egyenesen tettük volna össze az erőket, tekintetbe véve azonban magától értődőleg, hogy a *második* párhuzamoson az ellenkezőre megváltoztatott előjellel vannak az erők fölmérve: az eredőkre ezen a párhuzamoson talált mérő hosszakat tehát az ellenkezőre megváltoztatott előjellel kell az eredők ábrájába átmérni. (A 134. IV ábrán csak fél léptékben mértük föl a II ábrán talált mérő hosszakat.) A 4 és 5 közötti átmetszésekre ható eredő mérő hossza pl. a záró oldallal párhuzamosan vont, s 4, 5-tel számozott sugár metszette ponttól a 4, 5 pontig ér; ez eredő fölfelé hat, tekintve hogy mérő hossza a *második* párhuzamoson, a záró oldallal párhuzamosan húzott sugár *alatt* van. — Az eredők vonala egyébiránt a 6 és 8-cal számozott egyenletesen megoszló erők széleinek függőlegesei között egy-egy ferde egyenesből áll, amelyek mindegyikét két végpontja ordinátáinak fölhasználásával szerkesztünk meg. (E két ordinátát önként értődőleg mint a megoszló erők szélein fölvett függőleges átmetszésekre ható külső erők eredőit határoztuk meg.) A 10—13-mal számozott egyenlőtlenül megoszló súly széleinek függőlegesei között az eredők vonala oly görbe, mely balról jobbra felé alászáll, a 11-gyel számozott koncentrált súly függőlegesében lépcsőt képez, s bal végpontjától kezdve egész addig az $m$ függőlegesig, melyben a megoszló súly legnagyobb, alul homorú, (tekintve, hogy e szakaszon a súly balról jobbra felé nagyobbodik, s így az eredők vonala érintőinek az $x$-tengelylyel képezett szöge is növekedik,) innen kezdve fölül homorú, inflekció-pontja tehát az $m$ függőlegesen van; a görbe öt ordinátáját akképpen szerkeszthetjük meg, ha meghatározzuk az eredőket a 11-gyel jelölt súlyhoz két oldalt végtelen közel fölvett két átmetszésre, továbbá a 12, 13 válaszvonalban, és a megoszló súly két szélén fölvett függőleges átmetszésekre. Az eredők vonala különben a 4, továbbá a III ábrán rekeszjeles (6)- és (8)-cal, végre a 11-gyel számozott függőlegesekben átvágja az $x$-tengelyt, mivelhogy a nyomaték e függőlegesek mindegyikében vagy maximum vagy minimum, s így mindegyikük egy-egy átmeneti függőlegest képez az eredőkre nézve. E függőlegeseket már az eredők ábrájának megszerkesztése előtt ismerjük, s ha szakaszokra osztjuk velük a tartót, akkor az is előre ismeretes, hogy balról jobbra számítva az 1-ső, 3-ik és 5-ik szakaszokon lefelé működik az egyes átmetszésekre balról ható erők eredője; a 2-ik, 4-ik és 6-ikon pedig fölfelé; valamint azt is előre tudjuk, hogy az 1 és 2-ik erők közötti szakaszon az eredő egyenlő az első erővel, a 14 és 15-ik erők közötti szakaszon pedig az ellenkezőre megváltoztatott előjelű 15-ik erővel. Előre ismeretes végre, hogy az 1 függőlegestől a 2, 3 közötti szakaszig, továbbá a 6-tal számozott megoszló súly két széle között, végre a 9-cel számozott súlytól a 14-gyel számozott reakciót megelőző szakaszig az eredők vonala jobbra felé alászáll, a tartó többi részén pedig fölfelé emelkedik.

***4. Előzetes megjegyzések a következő szakaszokban tárgyalt speciális esetekre.*** Amint részben már az 5. §-ban megemlítettük: a gerendatartók között a két- és a többtámaszúakat, a kéttámaszúak között a végeiken és a végeiken belül megtámasztottakat, a többtámaszúak között pedig az elválasztó csuklósakat és a csuklótlanokat, vagyis a sztatikailag határozott és a sztatikailag határozatlan reakciójúakat különböztetjük meg. A kéttámaszú gerendatartók magától érhetőleg sztatikailag határozott reakciójúak, minthogy párhuzamos erők egyensúlyozása, velük párhuzamos két erővel, sztatikailag mindig határozott. A gerendatartók, még pedig a sztatikailag határozott reakciójúak közé sorolhatjuk végre a csak egyik végükön megtámasztott, t. i. a szilárdsági szempontból végükön befalazottnak tekinthető gerendatartókat is, melyek részletesebb tárgyalása azonban fölösleges, tekintve hogy bárhol veszünk is föl átmetszést: a tartó megtámasztatlan vége felől reá ható külső erők mind ismeretesek.

Mind e tartók tetszőleges irányú párhuzamos erőkkel lehetnek ugyan megterhelve, de többnyire súlyokból áll a megterhelésük. Midőn az eddig a 34-ik és a jelen §-ban előadottakat a következő §-okban a gerendatartók éppen említett speciális eseteire alkalmazzuk, a megterhelést ezért súlyokból állónak fogjuk föltételezni. Hasonló okból a tartó *jobb* és *bal* oldali végéről fogunk szólani, az eddigi általános megjelölés használása helyett. Könnyen belátható, hogy ezzel nem csorbítjuk a tárgyalás általánosságát, minthogy minden gerendatartó vetületét akképpen lehet esetleg elfordítani, hogy a megterhelést képviselő erőket súlyoknak lehessen tekinteni.

*Valamely átmetszésre ható külső erők alatt a következő §-okban mindig az átmetszés bal oldalán működő erőket fogjuk érteni, s ezek eredőjét akkor fogjuk +-nak mondani, ha fölfelé hat, (a jobb oldalon levőké tehát lefelé,) nyomatékukat pedig akkor, ha az átmetszés bal oldalán levő erők ↻ felé, (a jobb oldalon levők tehát ↺ felé,) forgatnak a nyomatéki tengely körül.*

A föladat tárgyát egyébiránt a külső erők kötélvonalának megszerkesztése, a nyomatékok és az eredők ábráiban uralkodó törvények leszármaztatása, s a sztatikailag határozott reakciójú tartókon (t. i. a kéttámaszú gerendatartókon, és a többtámaszú csuklós gerendatartókon,) a reakciók meghatározása fogja képezni. Ami ugyanis az általános alakú vagy sík átmetszésekre ható külső erők eredőinek és ez erők nyomatékainak megszerkesztését illeti, az átmetszéseken, vagy az ezeken kívül fekvő tetszőleges tengelyekre nézve, erre a külső erők kötélvonalának megrajzolása után egyszerűen a megelőző §-ban előadottakat alkalmazzuk, mely okból a tárgyalást e kérdésre nem fogjuk kiterjeszteni.

Megjegyzendő még végre, hogy abban az esetben, midőn lapokra támaszkodnak a gerendatartók, és midőn reakcióik sztatikailag határozottak, a támaszlapokat reakcióik irányvonalaiban elrendezett támasztó csuklókkal képzeljük helyettesítve, mind a reakciók eredőinek meghatározása, mind a külső erők kötélvonalának megrajzolása végett. Könnyen belátható ugyanis, hogy, ha akképpen állapítjuk meg a reakciókat, mint ha az épp említett módon elrendezett csuklókra támaszkodnék a tartó, ez úton a támaszlapok reakcióinak eredőit kapjuk meg, tekintve, hogy ugyanazokra az irányvonalakra esnek, melyekre ezek, és tekintve, hogy a tartóra ható súlyokat vagy egyéb párhuzamos erőket szintén egyensúlyozzák, épp úgy, mint a támaszlap-reakciók eredői. Ha a külső erők kötélvonalát is akképpen rajzoljuk meg, mintha a tartó a reakció-eredők irányvonalaiban elrendezett csuklókra támaszkodnék, ezzel, az épp mondottak következtében, a reakció-eredők alapján szerkesztett kötélvonalat kapjuk meg, melyet a megoszló támaszlap-reakciók kötélgörbéi utólagos megrajzolása útján, a 33. § 4-ben mondottak szerint, ha szükséges, könnyen ki lehet egészíteni. A támaszlap reakciók eredőin ekképpen fölvett csuklókon át, a külső erőkkel párhuzamosan vont egyenesek távolságát, a gerendatartó elméleti hídnyilásának nevezzük. *Ha — mint rendesen — igen rövidek a támaszlapok a hídnyilások nagyságához képest, akkor egyenletesen megoszlóknak tekintjük a reakciókat, eredőik irányvonalait tehát a támaszlapok középvonalain veszszük föl.*

A sztatikailag határozatlan reakciójú tartókra szintén úgy állapitjuk meg rendesen a reakciókat, mintha csuklókra támaszkodnának, de ez abban az esetben is csak megközelítőleg helyes, ha a támaszlapok hossza a hídnyilások nagyságához képest, — mint rendesen megtörténik, — igen csekély, minthogy a csuklókra támasztott tartó még akkor sem hajlik el teljesen úgy, mint ha lapokra támaszkodnék, s így a reakciók sem teljesen azonosak a két esetben. Abban, a gyakorlati alkalmazásokban egyébiránt csak egész kivételes esetben, ha a támaszlapok hosszúak, megközelítőleg sem lehet őket a szilárdsági számításokban vagy szerkesztésekben csuklókkal pótolni.

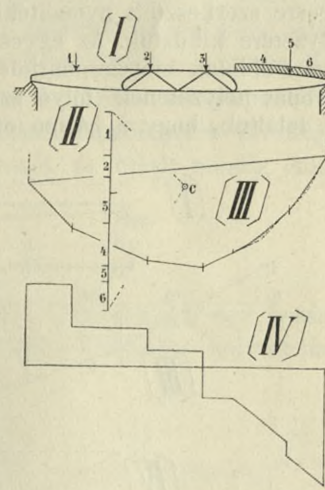
*Az épp mondottak következtében, a következő 37—40-ik §-okban csak annyiban fogjuk a lapra támaszkodást tekintetbe venni, a mennyiben ez a reakció-eredők alapján rajzolt kötélpoligónok kiegészítésének megmutatása végett szükséges, vagy a kérdés megvilágítása végett célszerű. (L. pl. a 143—145-ik ábrákat.) Később pedig mindig csuklókra támaszkodóknak fogjuk a gerendatartókat föltételezni. Hosszabb támaszlapok alkalmazását a gerendatartók szerkezetében általánosságban el kell kerülni.*

36. §.

## A két végén egy-egy csuklóra támaszkodó gerendatartó.

*1. A kötélábra megszerkesztésének első módja.* Ha mind egy csoportban teszszük össze egymással a külső erőket, (a két seregben való összetételt lásd e §. 5-ik pontjában,) akkor legcélszerűbb, ha abban a rendben soroljuk őket egymás után, melyben jobbra felé következnek. Különben egészen úgy szerkesztjük meg a kötélábrát, a mint a 12. § 4-ben ama föladat tárgyalása alkalmával adtuk elő, hogy kerestessék két adott párhuzamoson oly két erő, melyek velük párhuzamos irányú, tetszőleges számú más megadott erőt egyensúlyoznak. Megrajzoljuk ugyanis, az erőpoligón magasságának alkalmas fölvétele után, a tartóra ható súlyok kötélvonalát, (nem tekintve a reakciókat,) és összekötjük egymással ama két pontot, melyen a támaszpontok függőlegesei, — mint a reakciók irányvonalai, — e kötélpoligón szélső oldalait átmetszik. (135. III ábra.) Ez összekötő egyenes ugyanis a kötél-ábra záró oldala, tekintve hogy a reakciók és a súlyok együttvéve egyensúlyban vannak, kötélvonaluknak tehát záródnia kell. A reakciók mérőhosszait a záró oldallal párhuzamos erőpoligón-sugár meghúzása útján szerkesztjük meg.

Példa. A 135. III ábrán oly esetre szerkesztettük meg a külső erők kötélvonalát, melyben a tartó koncentrált súlyokon kivül a hídnyilás egy részén egyenletesen megoszló súlylyal is meg van terhelve. A II ábra az erőpoligónt, a III-ik a kötélvonalat, a IV-ik pedig az eredők ábráját mutatja, melynek ordinátáit az erőpoligónon mértük le, miután a záró oldallal párhuzamos sugarat meghúztuk, és a jobb oldalon kis vonallal megjelöltük.

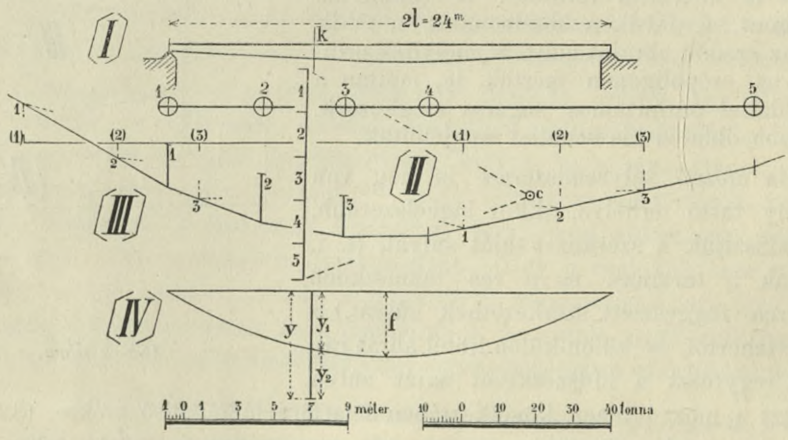


*135-ik ábra.*

Ha mozgó súlyrendszerrel is meg van valamely tartó terhelve, akkor legcélszerűbb, ha elválasztjuk a szerkezet saját súlyát, (t. i. magának a tartónak és a reá támaszkodó vagy reá függesztett szerkezetnek súlyát,) a mozgó tehertől, és külön-külön kötél-ábrát rajzolunk egyrészt a hídszerkezet saját súlya, másrészt a mozgó teher következtében a tartóra ható külső erőkre. (32. § 4.) Akképpen szerkeszthetjük meg ugyanis ez esetben a mozgó teher után működő külső erők kötélvonalát, a mozgó súlyrendszer (pl. vonat súlya) különböző helyzeteire, hogy nem a vonat helyzetét változtatjuk meg a tartóhoz képest, hanem a támaszpontok függőlegeseit húzzuk meg másmás helyzetekben a vonathoz képest. Világos ugyanis, hogy a súlyok kötélvonalát ez esetben nem kell a vonat egyes új helyzeteire újra megrajzolni, hanem akképpen lehet a szerkesztést rendezni, hogy előre megszerkesztjük a súlyok kötélvonalát egy- és mindenkorra az egész vonatra, nem tekintve hogy mely kerekek lehetnek egyidejűleg a tartón; és csak a záró oldalt húzzuk meg a támaszpontok levetítése után újra, a vonat minden új helyzetére.

Példa. A 136-ik ábrán a maximális nyomatékot szerkesztettük e módon, a hídnyilás bal harmadán át fölvett $k$ függőleges átmetszésre nézve. A hídszerkezet saját súlyát egyenletesen megoszlónak, és hosszméterenként $p = 3$ t. nagyságúnak vettük föl. A vonat az I ábrán a tartó alatt meghúzott vízszintesen megjelölt öt tengelyből áll, amelyekre eső súlyok, $\rightarrow$ felé számítva, sorban a következők: 12; 12·25; 12; 12; 10 $t$. Az elméleti hídnyilás $2l = 24{\cdot}0$ m.

A tengelysúlyok erőpoligónja a II, kötélpoligónja a III ábrán látható. Amint a behatások ábrája elméletéből (VIII-ik fejezet,) látni fogjuk, a nyomaték csak akkor lehet maximum valamely függőleges átmetszésre nézve, ha lehetőleg sok kerék van a tartón, s ha egyik legnehezebb vonatkerék az átmetszés függőlegesén van. A záró oldalt ezért a vonat rekeszjeles (1), (2) és (3)-mal jelölt arra a három helyzetére húztuk csak meg, melyekben sorban az 1-ső, a 2-ik és a 3-ik kerék van az átmetszés függőlegesén. A támaszpontok helyzetét az I ábrán a vonat alatt húzott vízszintesen, kis függőlegesekkel, és szintén sorban az éppen említett folyó számokkal jelöltük meg mindegyik támaszpontra nézve. Megjelöltük továbbá ugyane számokkal és vonalzott kihúzással az egyes záró oldalak végeit. A $k$ függőlegesre szerkesztett nyomatéki ordinátákat pedig a vonatnak mind a három helyzetére kihúztuk. Az egyes ordináták végpontjain húzott rövid egyenesek a záró oldalak metszéspontjait jelentik, az ordináták mellé írt számok pedig a vonat helyzetének folyó számai. A talált eredményeket összehasonlítva, azt találtuk, hogy a három ordináta közül a 2-vel számazott a legnagyobb,




*136-ik ábra. C = 60 t.*

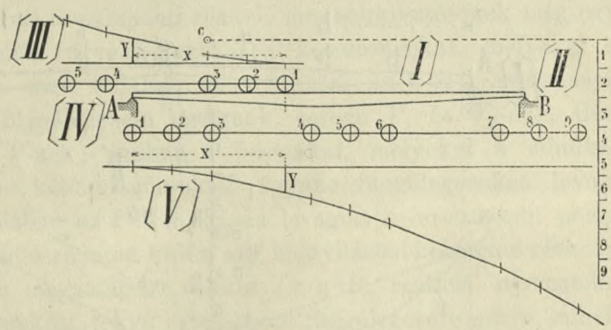
a miből az tünik ki, hogy a nyomaték a fölvett $k$ függőlegesre nézve mindaddig növekszik, míg a tartón balra felé haladó vonat 2-ik kereke e függőlegesre nem gördül, ezután pedig kisebbedik. A maximális nyomaték, amint ebből látjuk, abban a pillanatban áll be a szóban forgó függőlegesre nézve, midőn a vonat 2-ik kereke van rajta. A mozgó teher okozta maximális nyomaték mérő hossza tehát a 2-vel számozott ordináta; nevezzük ezt $y_2$-nek. (III ábra.) Hogy ezt a szerkezet saját súlya okozta nyomaték mérő hosszával összeadhassuk, megrajzoltuk a IV ábrán a külső erőknek a saját súlyra vonatkozó kötélparaboláját. (A kötélparabolákat minden hasonló esetben ívmagasságuk fölhasználásával szerkesztjük meg, erőpoligón nélkül. Ha $2l$ az elméleti hídnyilás, $p$ a hosszegységenkénti súly, akkor, amint könnyen belátható, de az alább következő 6-ik pontban le is fogjuk származtatni, a nyomaték a hídnyílás közepén $= {}^1\!/_2\, pl^2$, s e nyomaték mérőhossza a parabola $f$ ívmagassága. A jelen példában $2l = 24m$; $p = 3{\cdot}0\, t$; $C = 60\, t$; tehát $f = 3{\cdot}6$ m.) Végre hozzáadtuk a IV ábrán e parabolának a $k$ függőlegesre eső $y_1$ ordinátájához a föntebb a mozgó teherre talált $y_2$

nyomatéki mérő hosszúságot. A kettő összegét $y = 5{\cdot}9$ m.-nek találtuk; a keresett maximális nyomaték tehát $M_m = 354$ t.-m. (Azt, hogy miképpen lehet a vonat veszélyes helyzetét a nyomatékra nézve, kisérletek nélkül megállapitani, a behatások ábrája kapcsán fogjuk előadni.)

*2. A mozgó teher okozta reakciók.* Ha külön veszszük számitásba a mozgó teher (pl. vonat) súlyát, úgy amint ezt a megelőző pontban említettük, akkor könnyen megszerkeszthetjük ugyanegy kötélvonal fölhasználásával a reakciókat is, a vonat különböző helyzeteire. Nevezzük ugyanis azt az, — akár bal, akár jobboldali, — támaszpontot, mely felől a vonat jön $A$-nak, a túlsó támaszpontot $B$-nek, (137. I ábra), rajzoljuk meg a vonat súlyának erő- és kötélpoligónját, (II—III ábra,) s szerkeszszük meg a tartón levő tengelyek súlyainak $Y$ nyomatéki mérő erejét az innenső $A$ támaszpont függőlegesén levő pontokra nézve. Ha $2l$ a támaszponti függőlegesek távolsága, $c$ az erőpoligón magassága, akkor a túlsó (innensőt és túlsót mindig onnan értve, a honnan a vonat érkezik,) $B$ reakció:

$$B = Y\frac{c}{2l}\cdot$$

Minthogy itt $c$ és a $2l$ a vonat helyzetétől független egy-egy hosszúságot jelent, kitetszik ez egyenletből, hogy a vonat különböző helyzeteiben keletkező túloldali $B$ reakció különböző értékei arányosak a vonatnak e helyzeteire megszerkesztett $Y$-okkal, hogy tehát az $Y$ nyomatéki mértékek a túlsó reakció változó értékeinek mérő hosszai, az erőpoligón léptékéhez képest $c:2l$ viszonyszámmal osztott erőléptékben.



*137-ik ábra.*

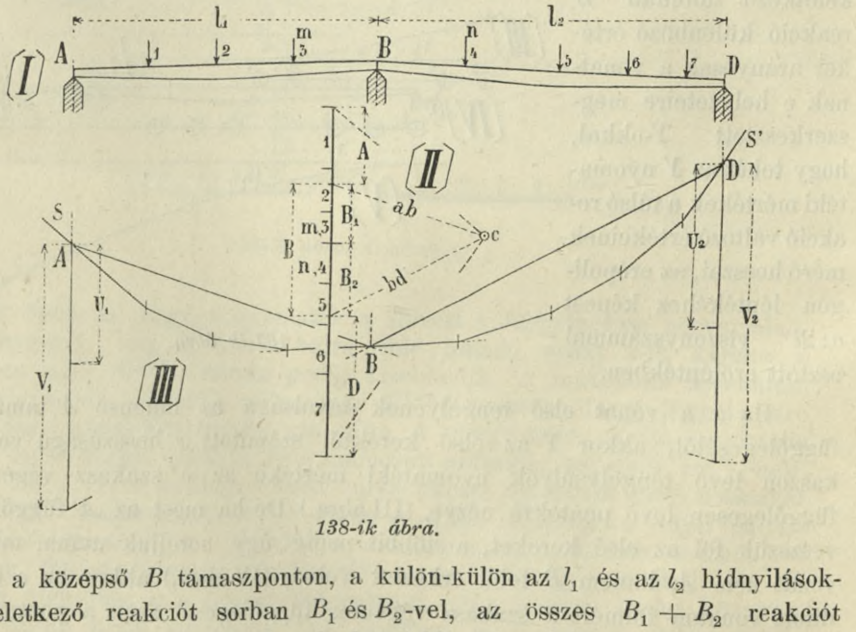
Ha $x$ a vonat első tengelyének távolsága az innenső $A$ támaszpont függőlegesétől, akkor $Y$ az első keréktől számitott $x$ hosszúságú vonatszakaszon levő tengelysúlyok nyomatéki mértéke az e szakasz végén vont függőlegesen levő pontokra nézve. (III ábra.) De ha most az $A$ függőlegesen veszszük föl az első kereket, a többit pedig úgy soroljuk utána, mintha a vonat nem $A$, hanem $B$ felől érkezett volna, (IV ábra,) akkor az e megforditott vonaton fölmért $x$ szakasz végének függőlegese azon a ponton megy át, melyen a vonat első kereke valóban van.

Ha a tengelysúlyok kötélvonalát a vonat többször emlitett megforditott helyzetére szerkesztjük meg, úgy mint az V ábra mutatja, (e kötélvonalat a következőkben röviden *a megforditott vonat kötélvonalának fogjuk nevezni,)* akkor tehát az $Y$ mérőhossz arra a függőlegesre esik, melyben a vonat valódi helyzetekor az első kerék van.

*Bármelyik oldal felől érkezik is tehát valamely súlyrendszer, (vonatsúlya, vagy megoszló súly,) a tartó tulsó támaszpontján keletkező reakció vonalát a megfordított vonat kötélvonala adja meg, vonatkozással az első tengelyt megelőző kötélpoligón-oldal meghosszabbítására mint egyik koordinátatengelyre, és oly koordináta-rendszerre, melynek másik tengelye függőleges. E kötélvonal minden függőleges ordinátája ugyanis az abban a pillanatban keletkező tulsó reakció mérő hossza, melyben a vonat első kereke ez ordináta függőlegesén van. Ha $c = 2l$, vagyis ha az erőpoligón magassága egyenlő a támaszponti függőlegesek távolságával, akkor a reakció mérőhosszainak léptéke egyenlő az erőpoligónéval, ellenkező esetben ennél $c : 2l$-szerte kisebb.*

### 3. *A kéttámaszú tartók középső oszlopainak reakciói.*

Ha két egymás melletti hídnyilás mindegyike külön van egy-egy kéttámaszú tartóval áthidalva, (138. I ábra,) akkor a középső támaszponti reakciót a következő módon határozhatjuk meg. Jelöljük meg a két hídnyilás nagyságát, a támaszpontok függőlesei között mérve, $l_1$ és $l_2$-vel, a szélső támaszpontokat és a rajtuk keletkező reakciókat, az $l_1$ és $l_2$ hídnyilásokon sorban $A$ és



*138-ik ábra.*

$D$-vel; a középső $B$ támaszponton, a külön-külön az $l_1$ és az $l_2$ hídnyilásokból keletkező reakciót sorban $B_1$ és $B_2$-vel, az összes $B_1 + B_2$ reakciót $B$-vel, végre a $B$ támaszponthoz legközelebb eső súlyt az $l_1$ oldalon $m$-mel, az $l_2$ oldalon $n$-nel.

Tudjuk, hogy az $A$; $B_1$; $B_2$ és $D$ reakciókat akképpen szerkeszthetjük meg, ha megrajzoljuk a kötélvonalat valamennyi súlyra, nem tekintve, hogy melyek vannak az $l_1$ és melyek az $l_2$ hídnyiláson, s ha meghúzzuk ezután a támaszpontok levetítése után az $AB$ és $BD$ záró oldalakat, (III ábra,) és az ezekkel párhuzamos $ab$ és $bd$ erőpoligón-sugarakat. (II ábra). Ha abban a sorrendben tettük össze a súlyokat, melyben $A$-tól $B$ felé következnek, akkor ugyanis az egyes hosszak, melyekre az $mn$ pont, és e sugarak metszéspontjai az erőpoligón függőlegesét beosztják, fölülről lefelé számítva, tudvalevőleg sorban az $A$ ; $B_1$ ; $B_2$ és $D$ reakciók merőhosszai.

*A középső támaszponti összes $B = B_1 + B_2$ reakció mérő hossza, amint ezekből látjuk, az a hosszúság, melyet az erőpoligón csúcspontján át, a két záró oldallal párhuzamosan vont sugarak az erőpoligón függőlegesén levágnak.*

Ha az $A, B, D$ reakciókra, — vagy e helyett a tartóktól a támaszpontokra átvitt $A, B, D$ súlyokra, — kötélpoligónt szerkesztünk, ugyanazt az $S$ segéderőt használva, melylyel a súlyok kötélvonalát rajzoltuk volt meg, akkor az $SABDS'$ poligónt kapjuk.

*A támaszponti reakciók kötélpoligónját, (tehát a támaszpontokra átvitt súlyokét is,) amint ezekből kitetszik, úgy szerkesztjük meg, hogy összekötjük azokat a pontokat, melyeken a támaszpontok függőlegesei a tartókra ható súlyok kötélvonalát átmetszik.*

E tételből a középső támaszponti reakció megszerkesztésének még egy módja következik. Nevezzük ugyanis azokat a hosszúságokat, melyeket a súlyok kötélvonala és a záró oldalak megnyujtásai az $l_1$ és $l_2$ hídnyilások szélső támaszpontjainak függőlegesein levágnak, sorban $V_1$ és $V_2$-nek, általában az $l$ hídnyiláson $V$-nek; azokat a hosszakat, melyeket a mindkét irányban megnyujtott $mn$ kötélpoligón-oldal ugyane függőlegeseken levág, sorban $U_1$ és $U_2$-nek, általában az $l$ hídnyiláson levágott e hosszúságot pedig $U$-nak, végre a középső támaszponton külön az $l$ hídnyilásból keletkező reakciót $B_n$-nek. Ha az erőpoligón magassága $c$, akkor $Uc$ a $B_n$ reakció nyomatéka az $l$ hídnyiláson $B$-vel szemközt fekvő támaszpont függőlegesére nézve, minek következtében $Uc = lB_n$, vagyis:

$$B_n = U\frac{c}{l}\cdot$$

$Vc$ pedig, az imént mondottak szerint, az összes $B$ reakció nyomatéka az $l$ hídnyiláson $B$-vel szemközt levő szélső támaszpont függőlegesére nézve; áll tehát hogy:

$$B = V\frac{c}{l}\cdot$$

Az $U$ és $V$ hosszúságok, amint ez egyenletből látjuk, sorban, egyrészt az $l$ hídnyilás megterhelése következtében *külön* keletkező, másrészt az *összes* középső támaszponti reakció mérő hosszai oly erőléptékben, mely $c:l$-szerte kisebb mint az erőpoligóné. Ha $c = l$, vagyis ha az erőpoligón magasságát az egyik vagy másik, általában az $l$ hídnyilással egyenlőnek vettük föl, s ha az $U$ és $V$ hosszakat ez $l$ hídnyilás szélső támaszpontja függőlegesén szerkesztjük meg, akkor e hosszak tehát ugyanabban a léptékben adják meg a középső támaszponti reakciót, egyrészt külön az $l$ nyilású tartóra, másrészt mind a két tartóra együttesen, melyben az erőpoligónt szerkesztettük meg.

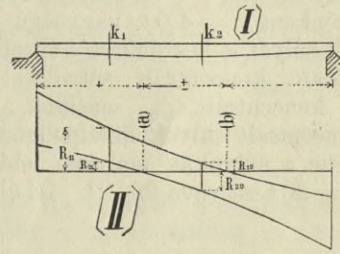
Az imént előadott módon könnyen megszerkeszthetjük tehát ugyanegy kötélpoligón segítségével a középső támaszponti reakció bármelyik részét, valamint az összes reakciót is. A 138. III ábrán pl. $U_1$ és $V_1$ sorban a $B_1$ és $B$ reakció $U_2$ és $V_2$ pedig sorban a $B_2$ és még egyszer a $B$ reakció mérő hossza. Az $U_1$ és $V_1$ mérő hosszak léptéke $c:l_1$-szerte, az $U_2$ és $V_2$ mérő hosszaké $c:l_2$-szerte kisebb az erőpoligón léptékénél. (Könnyen belátható, hogy az épp mondottakat az egynyilású tartók reakcióinak megszerkesztésére is alkalmazhatjuk, s hogy a mozgó súlyrendszer okozta reakciók megszerkesztésének a megelőző pontban előadott módja szintén ezeken alapszik.)

**4. *Tételek a nyomatékok és az eredők ábrájáról.*** Ha oly kötélvonalat rajzolunk a súlyokra, mely húzásra igénybevett kötél egyensúlyi vetülete, akkor a nyomatéki ordináták mind e záró oldal alá esnek, (tehát + nyomatékokat mérnek,) sőt ugyanarra az oldalra esnek mindazok a többi nyomatéki mértékek is, melyeket tetszőleges kötéloldalak meghosszabbításai vágnak le a támaszpontok között húzott tetszőleges függőlegeseken. Maximális nyomaték pedig csak *egy* függőlegesen keletkezhet.

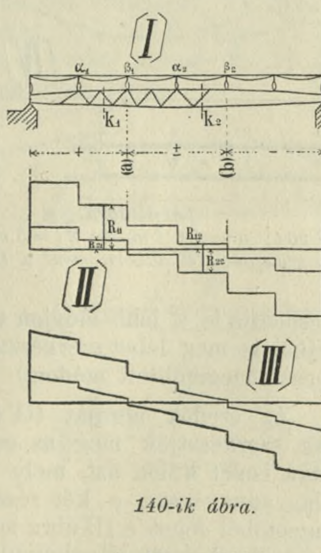
*A két végén megtámasztott gerendatartó függőleges átmetszéseire vonatkozó nyomatékok tehát az egész hídnyiláson mindenütt pozitívok, s a tartón fölvett minden tetszőleges alakú átmetszésre ható külső erők nyomatéka, az átmetszésen kívül fekvő pontokra nézve is csak akkor lehet negatív, ha e pontok függőlegesei a hídnyiláson kívül vannak. Az egyes átmetszésekre ható erők eredőinek előjelére nézve csak egy átmeneti függőleges van, s ez sohasem eshet végtelenül közel egyik támaszponthoz sem, minthogy a maximális nyomaték átmetszésének függőlegesére kell esnie. Az egyes átmetszésekre (balról) ható külső erők eredői a maximális nyomaték függőlegesétől balra fölvett átmetszésekre fölfelé hatnak, az e függőlegestől jobbra fölvettekre lefelé. Ha az állandó súlyokon kívül mozgó súlyrendszerrel is meg van terhelve a tartó, akkor a mozgó teher helyzetváltozása esetében az átmeneti függőleges is elmozdul ugyan, de csak a hídnyilás bizonyos hosszúságú részének határain belül. Oly három szakaszra lehet, ennek következtében, az állandó súlyokon kívül mozgó súlyrendszerrel is megterhelt bármely kéttámaszú, (t. i. két végén megtámasztott,) gerendatartót osztani, hogy az egyes átmetszésekre ható külső erők eredői, a középső szakaszon fölvett átmetszésekre hol fölfelé hol lefelé működnek, a baloldali szakaszon fölvett átmetszésekre ellenben mindig fölfelé, a jobboldali szakaszon fölvettekre pedig mindig lefelé, bármily helyzetben van is a mozgó súlyrendszer. A hídnyilás e három szakaszának középsőjét átmeneti szakasznak nevezzük az eredőkre nézve.*

*(A 139. I és 140. I ábrákon e szakaszok sorban $+$; $\pm$ és $-$ előjelek beirásával vannak megjelölve, tekintettel az előjeleknek a megelőző § végén történt megállapítására.)*

Kitetszik továbbá a mondottakból, hogy a maximális fölfelé és lefelé ható eredők vonalainak mindegyike átmetszi egyszer az $x$-tengelyt. Abban az esetben, ha mind az állandó súlyok, mind a mozgó súlyrendszer közvetetlenül, (t. i. átvitel nélkül,) terheli meg a tartót, e vonalak egyébiránt görbékből állanak; (139. II ábra;) abban az esetben ellenben, ha mind az állandó, mind a mozgó teher átvitel útján hat a tartóra, (140. I ábra,) s ha magának a tartónak súlyát is úgy tekintjük, mintha az egyes tartószakaszok súlyai szintén az átviteli pontokon központosulnának, a maximális eredők vonalai az $x$-tengelylyel párhuzamosan fekvő, és az átviteli pontok függőlegesei között lépcsőzetet képező egyenesekből állanak. (140. II ábra.) S ha végre a tartó súlya $\frac{\text{egyenetlenül}}{\text{egyenletesen}}$ megoszló súlyból áll, a szerkezet többi részének súlya és a mozgó teher pedig egyes pontokra háramlik át, akkor a maximális eredők vonalai oly lépcsőzetes vonalak, melyeket $\frac{\text{görbe vonalak}}{\text{ferde egyenesek}}$ képeznek az átviteli pontok függőlegesei között. (140. III ábra.) A föntebb az eredők előjele szerint megkülönböztetett három tartószakaszt mindig azok az ($a$) és ($b$) függőlegesek választják el egymástól, melyeket a maximális eredők vonalai és az $x$ tengely közötti metszéspontokon át húzhatunk meg. (139 és 140-ik ábrák.)



*139-ik ábra.*



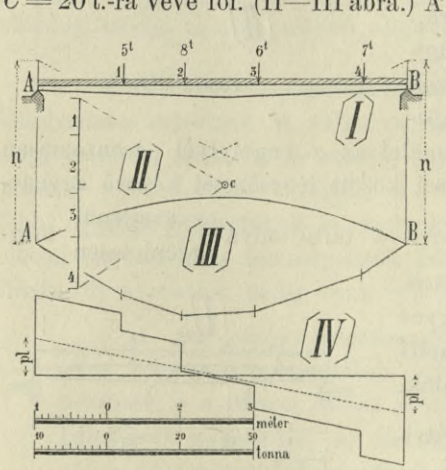
*140-ik ábra.*

Példa. A a 139- és 140-ik ábrákon, (melyeket különben konkrét adatok és léptékek fölvétele nélkül, csak vázlatképpen szerkesztettünk,) a $k_2$ átmetszésre (balról) ható külső erőkre nézve pl. $R_{12}$ a maximális fölfelé, $R_{22}$ a maximális lefelé ható eredő; a $k_1$ átmetszésre ható külső erőkre nézve pedig $R_{11}$ a maximális, $R_{21}$ a minimális fölfelé ható eredő, tekintve, hogy az $R_{11}$ ordináta is az $x$-tengely fölött van, tehát fölfelé ható eredőt jelent stb.

***5. A súlyok összetétele két seregben.*** Abban az esetben sem okoz a külső erők kötélábrájának megszerkesztése nehézséget, ha két seregben teszszük össze a tartóra ható súlyokat egymással és a reakciókkal.

Megrajzoljuk ugyanis előbb a súlyok egyik csoportja kötélpoligónját tetszés szerinti módon, és ezután a másik csoportét akképpen, hogy azokon a pontokon menjen át, melyeken az első csoport kötélvonala metszi a támaszpontok függőlegeseit.

A 141. II—III ábrák oly példában mutatják e szerkesztés végrehajtását, melyben a $2l = 5$ m. elméleti nyilású $AB$ tartó egyenletesen megoszló, hosszmeterenként $p = 4{,}0$ t. nagyságú súlyon kivül, (ebbe esetleg magának a tartónak súlyát is beszámítva képzelhetjük,) még az 1—4-gyel számozott, az I ábrán látható koncentrált súlyokkal is meg van terhelve. Az egyik seregbe a koncentrált, a másikba a megoszló súlyokat soroltuk, s előbb a koncentrált súlyok kötélpoligónját rajzoltuk meg, abban a sorrendben téve össze a súlyokat, melyben jobbra felé következnek, s a nyomatéki alapot $C = 20$ t.-ra véve föl. (II—III ábra.) A balra felé leírt kerületet, mint az egyenletesen megoszló súly kötélparaboláját, legegyszerűbben szélső $A$ és $B$ pontok érintői fölhasználásával, (erőpoligón nélkül,) szerkesztjük meg. (II. ábra) Ez érintők és a parabola között a támaszpontok függőlegesein levágott $n$ hosszúság ugyanis az egész megoszló teher nyomatéki mérő hossza, s így $n = {}^1/_2\, p\,(2l)^2 : C = 2{\cdot}5\, m$, a miből a szóban forgó érintőket és ezután a $BA$ parabolát könnyen meg lehet szerkeszteni. Az, hogy e parabolát a koncentrált súlyok kötépoligónjához képest a III ábrán látható oldalra kell rajzolni, abból következik, hogy mint kötélvonal-rész $B$-től $A$ felé van leírva, s hogy az erőpoligón csúcspontját az összetételi egyenes jobb oldalán levőnek kell képzelnünk, minthogy a koncentrált súlyok erőpoligónjának csúcspontja is a jobb oldalon van fölvéve. (Magától értődik, hogy az ívmagasságából is meg lehet szerkeszteni e parabolát, az 1-ső pontban, a 136. IV ábra kapcsán megemlített módon.)




*141-ik ábra.*
*$C = 20$ t; $p = 4$ t. 1 m.-re; $2l = 5$ m. A IV. ábra erőléptéke fél akkora, mint a II. ábráé.*

Az eredők ábráját (IV ábra,) úgy kapjuk meg legegyszerűbben, ha külön szerkesztjük meg az eredők ama részét, mely a megoszló súly, és ezután ismét külön azt, mely a koncentrált súlyok következtében keletkezik, utólag adva össze e két részt, az előjelek tekintetbe vételével. (Ugyane szempontból lehet a III ábra megszerkesztését is megokolni, ha a nyomatékok ábrájának tekintjük.) Meghúzzuk tehát először az eredők egyenesét az egyenletesen megoszló súlyra, fölmérve a támaszpontok függőlegesein a $pl = 10{\cdot}0$ tonnás erőt, mint az e súlyok előidézte reakciót, tehát mint a tartóra ható szélső erőt, (lásd a 35. § 2 végén mondottakat,) a baloldali támaszpont függőlegesén az $x$ tengely fölé, a jobboldalin e tengely alá, és összekötve az ekképpen talált két pontot. Ezután megszerkesztjük a koncentrált súlyok előidézte eredőket, ez erők erő- és kötélpoligónját önálló ábráknak tekintve, és az erőpoligónban a záró oldalhoz párhuzamos sugarat húzva. (II ábra.) Végre fölmérjük az egyenletesen megoszló súly okozta eredők egyenesétől, az előjelek tekintetbe vételével, a koncentrált súlyok után az egyes keresztmetszetekre ható eredők imént megtalált mérő hosszait, és megrajzoljuk az összes eredők lépcsőzetes vonalát, mely a megoszló súly előidézte eredők egyenesével valamennyi lépcsőn párhuzamos.

*6. Az eredő és a nyomaték kiszámítása.* Ha a tartó két végpontját és az e pontokon keletkező reakciókat $A$ és $B$-vel; az egyes súlyokat sorban $G_1$; $G_2$ ... általán $G$-vel; ezek távolságait a $B$ támaszponttól $b_1$; $b_2$ ... általán $b$-vel; végre az $A$ és $B$ függőlegesek egymástól mért távolságát, (az elméleti hídnyílást,) $2l$-lel jelöljük meg, (142. I ábra), akkor a súlyok összes nyomatéka a $B$ függőleges pontjaira nézve $\Sigma bG$, az $A$ reakció nyomatéka ugyane pontokra pedig $2lA$. A reakció ennélfogva:

$$A = \frac{\Sigma Gb}{2l} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

és itt a $\Sigma$ az egész hídnyílásra kiterjesztendő. Ha továbbá $R$-rel jelöljük a függőleges $k$ átmetszésre ható erők eredőjét, $\mathsf{M}$-mel a nyomatékot ez átmetszésre nézve, akkor

$$R = A - \overset{k}{\underset{A}{G}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

$$\mathsf{M} = Aa - \overset{k}{\underset{A}{\Sigma}} Gd \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

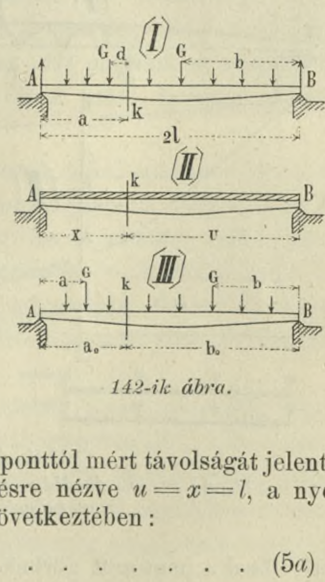
Ez egyenletekben $d$ a $G$ súly, $a$ az $A$ reakció távolsága a keresztmetszettől, a $\Sigma$-ók határai pedig ama függőlegesek betűivel vannak megjelölve, melyek között az összeadás végrehajtandó. Ha $A$ alatt a *baloldali* reakciót értjük, akkor az előjelek e mellett a rendesen elfogadott, és a föntebbiekben már megemlített megállapodás szerintiek, t. i. az $R$ akkor $+$, ha a balról ható külső erők eredője fölfelé hat, az $\mathsf{M}$ pedig akkor, ha ez erők ↻ felé forgatnak az átmetszés síkján levő tengelyek körül.

Abban az esetben, (142. II ábra,) ha hosszegységenként $p$ egységet nyomó, egyenletesen megoszló súlylyal van a tartó egész hosszában megterhelve,

$$A = B = pl\,;\; R = p(l - x), \quad . \; . \quad (4)$$

ha $x$ a fölvett $k$ átmetszés távolsága a támaszponttól, a tartó amaz oldalán, mely felől azok a külső erők hatnak, melyek eredőjét $R$-nek nevezzük. A mondott $k$ átmetszésre nézve számított $\mathsf{M}$ nyomatékot illetőleg pedig, a reakció nyomatéka az $x$ oldalon $Ax = plx$; az ugyanez oldalon levő súlyok nyomatékösszege, ($px$ eredőjük nyomatékával kifejezve,) $= - {}^1\!/_2\, xpx = - {}^1\!/_2\, px^2$, és így

$$\mathsf{M} = plx - \frac{1}{2}px^2 = \frac{1}{2}pux \quad . \; . \quad (5)$$



*142-ik ábra.*

ha $u$ és $x$ az átmetszés függőlegesének a két támaszponttól mért távolságát jelenti.

A hídnyílás középvonalán fölvett átmetszésre nézve $u = x = l$, a nyomaték, (tehát a maximális nyomaték,) ennek következtében:

$$\mathsf{M}_m = \frac{1}{2}pl^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5a)$$

A nyomaték meghatározásának egy második módja azon alapszik, hogy két szakaszra osztjuk a tartót a fölvett átmetszés függőlegesével, s külön-külön számítjuk ki, — a 32. § 4-ben előadottak alapján, — mindegyik szakaszon levő súlyok után a nyomatékot, végül összeadva az összes nyomaték e két részét. Bárhol veszszük ugyanis föl a $k$ átmetszést, (142. III ábra,) a reá ható ama külső erők nyomatéka, melyek a fölvett átmetszés egyik oldalán levő súlyok következtében keletkeznek, szükségképpen egyenlő az e súlyoktól a másik oldalon előidézett reakció nyomatékával, tekintve hogy az oly súlyok után, melyek az átmetszés ugyanazon oldalán vannak, a másik oldalról nem hat más külső erő, mint az e súlyok okozta reakció. Ha egy-egy súlyt általában megint $G$-vel jelölünk, a $B$ oldalon levő valamely súly távolságát a $B$ támaszponttól $b$-vel, az $A$ oldalon levő valamely súly távolságát az $A$ támaszponttól pedig $a$-val, s végre a fölvett függőleges átmetszés távolságát az $A$ és $B$ pontoktól sorban $a_0$ és $b_0$-sal, (142. III ábra,) akkor tehát

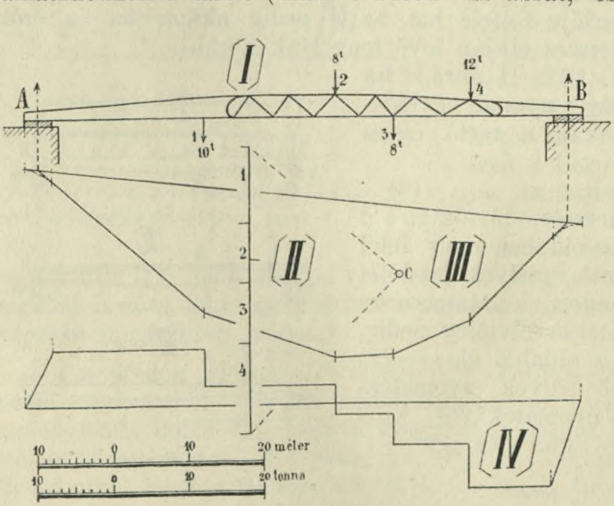
$$\mathsf{M} = \frac{a_0}{2l} \sum_B^k Gb + \frac{b_0}{2l} \sum_A^k Ga \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

A $\Sigma$-ók határait ez egyenletben ismét ama függőlegesek betűivel jelöltük meg, melyek között az összegezést végre kell hajtani.

## 37. §.

## A két végén egy-egy lapra támaszkodó gerendatartó.

Minthogy a reakciók sztatikailag határozottak, a 35. §. 4-ban előadottak alapján először úgy rajzoljuk meg a külső erők kötélpoligónját, mintha a támaszlap-reakciók eredőinek $A$ és $B$ irányvonalaiban elrendezett csuklókra támaszkodnék a tartó. (Lásd a 143. I—II ábrát, és a III ábrán a kihúzott kötélpoligónt.) Ha a támaszlapok rövidek a tartó hosszához képest, akkor egyenletesen megoszlóknak tekintjük a reakciókat, eredőiket tehát a támaszlapok súlypontjain át, vagyis vetületeik középvonalaiban veszszük föl. A megoszló reakciók kötélgörbéit könnyen meg lehet ugyan rajzolni parabolaívekként, melyek érintői a hídnyílás mindegyik oldalán a súlyok szélső kötélpoligón-oldala és a záró oldal; (lásd a pontozott görbéket a III ábrában ;) minthogy azonban a támaszlapokon át fölvett keresztmetszetekre számitott nyomatékok igen kicsinyek, rendesen beérjük a támaszlap-reakciók eredői alapján szerkesztett kötélpoligónnal, s nem egészitjük ezt ki a megoszló reakciók kötélparaboláinak megrajzolásával.




*143-ik ábra.*

*C = 20 t. Az eredők ábrájára az erőlépték fél akkora mint az erőpoligónra.*

38. §.

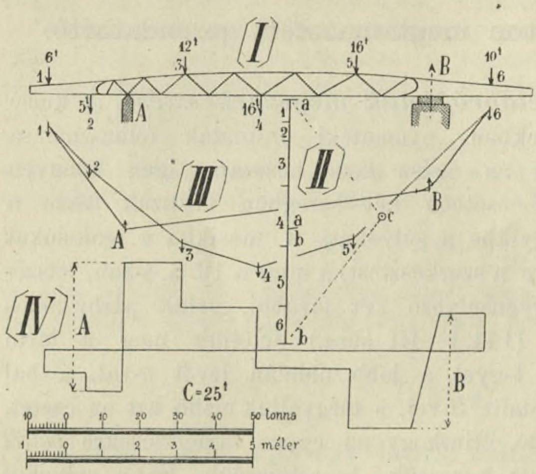
## A végein belül, két ponton megtámasztott gerendatartó.

*1. A külső erők kötélábrájának megszerkesztése.* A külső erők kötélpoligónját akár részekben, nyomatéki ordináták fölhasználása alapján, akár ugyanegy ábrán az egész tartó hosszára, igen könnyen megrajzolhatjuk. — Az utóbbi esetben két seregben teszszük össze a tartóra ható külső erőket, az egyikbe a súlyokat, a másikba a reakciókat sorolva, s különben úgy rendezve a szerkesztést, a mint a 12. §. 4-ban, tetszőleges számú párhuzamos erőt egyensúlyozó két további, velük párhuzamos erő meghatározására előadtuk. (144. I—III ábra.) Jelöljük meg a tartó bal oldalán levő legszélső súlyt 1-gyel, a jobb oldalán levőt $u$-val, a bal oldali reakciót $A$-val, a jobb oldalit $B$-vel, s tárgyaljuk előbb azt az esetet, ha csuklókra támaszkodik a tartó. Minthogy az egyes átmetszésekre *balról* ható erők eredőit és nyomatékait keressük, legcélszerűbb, ha a súlyokat abban a sorrendben teszszük össze, melyben jobbra felé, tehát úgy, amint 1-től $u$ felé következnek. Megszerkesztjük tehát e sorrend alapján előbb a külső erők erőpoligónját, kihagyva belőle a két reakció mérő hossza közötti, egyelőre még ismeretlen pontot. Ezután megrajzoljuk a rendes módon, a kötélvonalat, az $A$ és 1 közötti oldaltól az $u$ és $B$ közötti oldalig bezárólag, az erőpoligón fölhasználásával; végül a még hiányzó $AB$ oldalt húzzuk meg, összekötve az $A1$ oldal és $A$ függőleges közötti $A$ metszéspontot az $uB$ oldal és $B$ függőleges közötti $B$ metszésponttal. Ha ez $AB$ oldallal az erőpoligónban párhuzamos sugarat húzunk, akkor ez a $B$ és $A$ mérő hosszak közötti ponton megy át.

Ami az ekképpen megszerkesztett kötélvonal alkalmazását az egyes átmetszésekre ható külső erők eredőinek és nyomatékainak megszerkesztésére illeti, ez iránt csak azt említjük meg, hogy, ha a *súlyokat* tettük össze abban a sorban, a melyben jobbra felé következnek, — amint mondottuk, — akkor az egymásután az $uB$; $BA$; $A1$ tartószakaszokon fölvett átmetszésekre balról ható külső erőket a kötélvonalon sorban az $uB$; $BA$; $A1$ oldalak előzik meg.

Ha lapokra támaszkodik a tartó az oszlopokon, s ha ismerjük, vagy fölvehetjük a támaszlap-reakciók eredőinek $A$ és $C$ irányvonalait, akkor előbb a reakciók eredői alapján rajzoljuk meg a külső erők kötélvonalát, tehát egészen úgy, mintha az $A$ és $C$ irányvonalakban elrendezett csuklókra támaszkodnék a tartó, (35. §. 4,) s utólagosan szerkesztjük meg a megoszló reakciók kötélgörbéit.

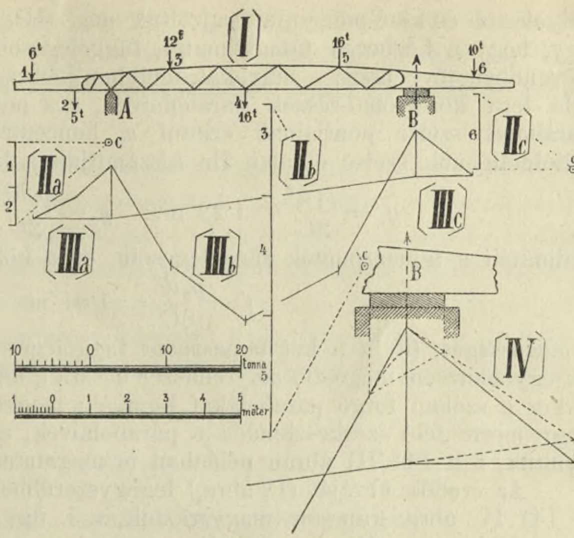
P é l d a. A 144. I—IV ábrák a mondottak alkalmazását mutatják oly tartóra, mely az $A$ oszlopon csuklóra, a $B$ oszlopon lapra támaszkodik. A II ábra az erő-, a III a kötélpoligón, IV az eredők ábrája, ugyanakkora erőléptékben rajzolva, mint az erőpoligón. A $B$ reakciót egyenletesen megoszlónak vettük föl; e reakció kötélgörbéje tehát oly parabolaív, melynek végpontjai a $B$ támaszlap széleinek függőlegesein vannak, s melyen e pontok érintői a $B6$ és $BA$ oldalak. A szerkesztés részleteinek bővebb magyarázata fölösleges.



*144-ik ábra. $C = 25\ t$.*

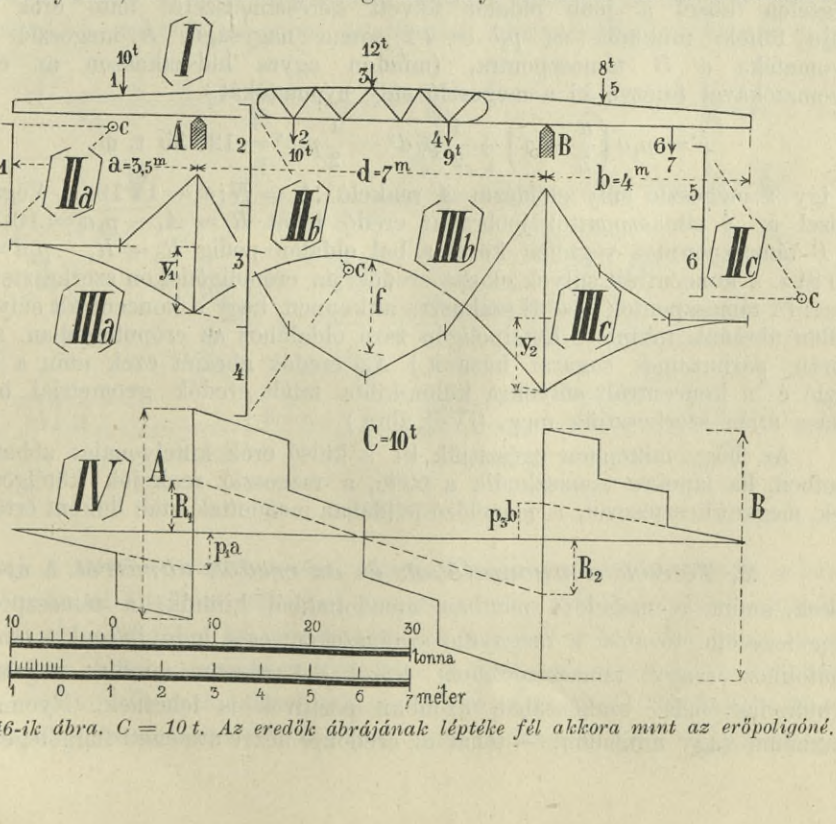
Ha három részre osztjuk a külső erők kötélábráját a támaszpontok függőlegeseivel, akkor szintén igen könnyen megrajzolhatjuk e részek mindegyikét külön-külön, a beosztó függőlegesekre eső nyomatéki ordináták fölhasználásával. Rendesen mind abban a sorrendben teszszük össze ez esetben is az egyes tartószakaszokra ható súlyokat, melyben jobbra felé következnek, az sem okoz azonban nehézséget, ha két seregre osztva teszszük őket össze. — A nyomatéki ordinátákat a támaszpontok függőlegesein mind a két esetben a két szélső tartószakaszra ható súlyok kötélvonala megrajzolásával találjuk meg. (145. III és 146. III ábrák.) A támaszpontok közötti szakaszra ezután ez ordináták fölhasználásával húzhatjuk meg a záró oldalt, vagy esetleg, (t. i. ha két seregben teszszük össze a súlyokat,) a kötélvonal visszafelé leírt részét, a 34. § 3-ban előadott módon. A támaszponti reakciókat pedig úgy szerkesztjük meg, ahogy az eredők ábrája egy-egy lépcsőjének magasságát, amint ezt már az épp idézett 34. § 3-ban előre megjegyeztük. Megszerkesztjük ugyanis a külső erők eredőjét a támaszponton innen és túl, a támaszpont (vagy támaszlap) és a hozzája legközelebb eső súly között fölvett egy-egy átmetszésre nézve, s levonjuk az utóbbi eredőből, — előjelének tekintetbe vételével, — az előbbit, önként értődvén hogy, ha különben is megrajzoltuk az eredők ábráját, ebben a reakciók mérő hosszait is megtaláltuk. (Lásd pl. a 146. IV ábrát.)

Első példa. A 145. II—III ábrák teljesen ugyanarra a tartóra és megterhelésre mutatják az erő- és kötélpoligón megrajzolását, melyek a megelőző 144-ik ábrán szerepeltek. A súlyokat mindenütt mind abban a sorrendben tettük össze, melyben jobbra felé következnek, s a kötélábrát három részben rajzoltuk meg, egészen az imént leírt módon. Az erőpoligónok a három részre külön-külön II$a$; II$b$; és II$c$-ből láthatók. Az egyes tartószakaszokra ható súlyok kötélpoligónjait egyszerűség végett úgy rajzoljuk meg, hogy a közbeeső támaszpontok (vagy a támaszlap-reakciók eredőinek) függőlegeseiben metsződjenek. A $B$ támaszlap-reakció kötélparabolájának megszerkesztését a $B$ függőleges bal oldalán nagyobb léptékben a IV ábra mutatja, melyen a kötélparabolát a támaszlap szélességének bal felén vonalozva húztuk ki. Az e parabolát a $B$ függőlegesen metsző másik parabolaívet, magától értődőleg, egészen hasonló módon szerkeszthetjük meg.




*145-ik ábra. c = 25 m.*

Második példa. A 146. I ábrán látható tartó csuklókra mtáaz-s kodik és az 1—6-tal számozott koncentrált súlyokon kivül egyenletesen megoszló súlylyal is meg van terhelve. Az 1—6-tal jelölt súlyok mérő hosszai a II*a*—*c* ábrákon láthatók; az egyenletesen megoszló súly, a támaszpontok képezte három tartószakaszon, balról számítva, sorban $p_1 = 2{\cdot}0$; $p_2 = 3{\cdot}0$; $p_3 = 1{\cdot}8$ tonna hosszméterenként; a nyomatéki alap $C = 10$ t. A súlyokat két-két seregben tettük össze az egyes tartószakaszokon, az egyikbe a koncentrált súlyokat, a másikba a megoszló súlyt sorolva. Előbb a koncentrált




*146-ik ábra. C = 10 t. Az eredők ábrájának léptéke fél akkora mint az erőpoligóné.*

súlyok erő- és kötélpoligónjait rajzoltuk meg, (II *a*—*c* és III *a*—*c* ábra,) ismét úgy, hogy a közbeeső támaszpontok függőlegesein metsződjenek, s abban a sorrendben téve össze e súlyokat, melyben jobbra felé következnek. A balra felé leírt kötélvonal-részek parabolaívek, s a megnyúló tartószakaszokon e parabolák szélső pontjainak érintői a koncentrált súlyokra imént rajzolt kötélpoligónok szélső oldalai. Ha kiszámítjuk a két szélső parabolaív

$$y_1 = \frac{p_1 a^2}{2C} = 1{\cdot}22 \text{ m.}; \quad y_2 = \frac{p_3 b^2}{2C} = 1{\cdot}44 \text{ m}$$

ordinátáit a támaszpontok függőlegesein, és a középső parabolaív

$$f = \frac{p_2 d^2}{8C} = 1{\cdot}84 \text{ m}$$

ívmagasságát, (itt *d* a két támaszpont függőlegesének távolsága, *a* és *b* pedig az egyenletesen megoszló súlyrendszer hossza a két megnyúló tartószakaszon,) akkor a szóban forgó parabolákat könnyen megszerkeszthetjük. Azt ugyanis, hogy merre felé szerkesztendők e parabolaívek, a 34. §. 3 pontban már tárgyaltuk, s a 141. III ábrán példában is megmutattuk.

Az eredők ábráját (IV ábra,) legegyszerűbben úgy rajzoljuk meg, mint a 141. IV ábra kapcsán magyaráztuk, t. i. úgy, hogy külön szerkesztjük meg előbb az eredők ama részét, a melyet a megoszló súly, és ezután azt, melyet a koncentrált súlyok okoznak. A megoszló súly okozta eredők egyeneseit a támaszpontok függőlegeseire eső ordinátáikból rajzoljuk meg. (A IV ábrán az egyeneseket vonalozva húztuk ki.) Az *A* támaszponthoz végtelen közel a bal oldalon fölvett keresztmetszetre (balról) ható erők eredője ugyanis lefelé hat és $p_1 a = 7{\cdot}0$ t. nagyságú; a *B* támaszponthoz végtelen közel a jobb oldalon fölvett keresztmetszetre ható erők eredője fölfelé működik és $p_3 b = 7{\cdot}2$ tonna nagyságú. A megoszló súly nyomatéka a *B* támaszpontra, (minden egyes hídszakaszon az eredő nyomatékával fejezve ki a megoszló súly nyomatékát,)

$$N = p_1 a \left(\frac{a}{2} + d\right) + \frac{1}{2} p_2 d^2 - \frac{1}{2} p_3 b^2 = 120{\cdot}35 \text{ t. m.}$$

s így a megoszló súly előidézte *A* reakció $A_1 = N : d = 17{\cdot}19$ t. Végtelen közel az *A* támaszponttól jobbra az eredő tehát $R_1 = A_1 - p_1 a = 10{\cdot}19$ t. a *B* támaszponthoz végtelen közel a bal oldalon pedig $R_2 = R_1 - p_2 d = -$ $10{\cdot}81$ t. A koncentrált súlyok okozta eredők az erőpoligónokon szerkesztendők meg. (A támaszpontok közötti szakaszra akképpen, hogy a koncentrált súlyokra külön ábrának tekintett kötélpoligón záró oldalához az erőpoligónban, a II*b* ábrán, párhuzamos sugarat húzunk.) Az eredők ábráját ezek után a megoszló és a koncentrált súlyokra külön-külön talált eredők geometriai összeadása útján szerkesztjük meg. (IV-ik ábra.)

Az, hogy miképpen egészítjük ki a külső erők kötélvonalát abban az esetben, ha lapokra támaszkodik a tartó, a megoszló reakciók kötélgörbéinek megszerkesztésével, a megelőző példában mondottak után önként értődik.

*2. Tételek a nyomatékok és az eredők ábráiról.* A nyomatékok, amint a megelőző pontban mondottakból kitünik, a támaszpontok függőlegesein, továbbá a megnyúló szakaszokon, és a hídnyílásnak a támaszpontokhoz (vagy támaszlapokhoz) közel eső részein mindig negatívok, a hídnyílás belső szakaszában azonban pozitívok is lehetnek. Nyomatéki maximum vagy minimum, — tehát az eredőkre nézve átmeneti függőleges, —

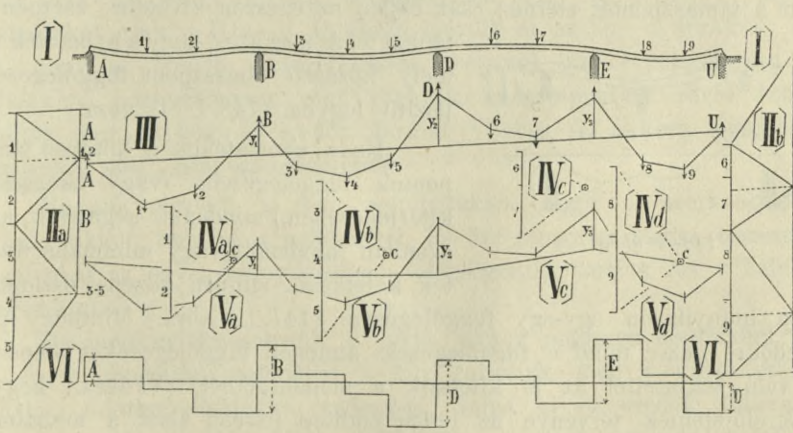
mindegyik támaszpont függőlegesén (vagy esetleg mindegyik támaszlap kiterjedésében,) van egy-egy, s egy további a hídnyílásban, egészen úgy, mint a többtámaszú gerendatartók egyes hídnyílásaiban. (Lásd pl. az alább következő 147. III és VI ábrákat.)

*Előre megjegyzendő tehát már e helyen, hogy, ha önálló tartóként alkalmazunk, és mozgó súlyrendszerrel is megterhelünk valamely, végein belül fekvő két ponton megtámasztott gerendatartót: az eredők- és nyomatékoknak, és a maximális eredők- és nyomatékoknak előjele, egyrészt a hídnyiláson, másrészt a megnyúló szakaszokon, teljesen ugyanolyan, mint valamely többtámaszú gerendatartó egyik hídnyilásán, s az e hídnyiláson túl meghosszabbodó két szakasz elején. (Lásd eziránt a következő §-ban azonnal mondandókat.)*

## 39. §.

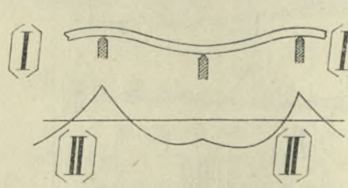
## A többtámaszú, csuklótlan gerendatartó.

***1. Tételek a nyomatékok és eredők ábráiról.*** Ha a gerendatartók nincsenek elválasztó csuklókkal fölszerelve, akkor egyensúlyozásukra két támaszpont elégséges, s a többi csak azt akadályozza meg, hogy a tartó ezek függőlegesein ne hajolhasson el többet, mint a mennyit az e támaszpontok és a még el nem hajlott tartó közötti viszonylagos helyzet esetleg megenged. A reakciók ez okból sztatikailag határozatlanok, tekintve hogy




*147-ik ábra.*

nemcsak a tartó egyensúlyozására, hanem elhajlásának csökkentésére is hatnak. De ha az általános törvények leszármaztatása végett egyelőre adottaknak veszszük őket föl, s ha megszerkesztjük a külső erők kötélvonalát, valamennyi erőt abban a sorrendben téve össze a tartó egész hosszában, melyben jobbra felé következnek, akkor szükségképpen oly vonalat kapunk, mely a hídnyilásokon más oldal felé domború, mint a támaszpontok függőlegesein, (vagy támaszlapok kiterjedésében,) mely a záró oldalt tehát bizonyos számú ponton általánosságban átmetszi. (Lásd a 147. III ábrát, amelyet azonban a súlyok és a reakciók mérő hosszainak tetszőleges fölvétele alapján, csak vázlatrajzkép szerkesztettünk meg, az erőket két párhuzamoson téve össze, s az erőpoligónt a II *a*—*b* ábrákon egymáshoz képest párhuzamosan eltolt két részben rajzolva meg.) A különböző függőleges átmetszésekre vonatkozó nyomatékok ennélfogva általánosságban különböző előjelűek. Rendesen akképpen hajlik meg a tartó, hogy fölső szélén a középső oszlopok közelében húzás, az egyes hídnyilások bizonyos hosszúságú belső szakaszain pedig nyomás keletkezik. (Lásd az 1-ső, 2-ik és 4-ik hídnyilást a 147. I ábrán.) De ha valamely hídnyilás igen kis, a mellette levő két hídnyilás pedig igen nagy súlyokkal van megterhelve, akkor az is megtörténhet, hogy a tartó fölső széle van e hídnyilás egész hosszában húzásra igénybe véve. (Lásd a 3-ik hídnyilást.) A nyomatékok a középső oszlopok közelében tehát rendesen negatívok, (az egyes keresztmetszetekre balról ható külső erők G felé forgatnak a keresztmetszetekben fekvő tengelyek körül; lásd a 35. §. 1-ben az 133-ik ábra kapcsán mondottakat); az egyes hídnyílások középső részein pedig negatívok is lehetnek ugyan, de többnyire pozitívok. (Lásd a 147. I és III ábrák közötti összefüggést.) Az azonban, hogy valamely középső támaszpont fölött is a tartó fölső széle legyen nyomva, csak abban az egészen kivételes esetben történhet meg, ha a támaszpont oly alant esik, hogy a tartónak mélyen le kell hajolnia, mielőtt a támaszpontot elérné; csak ebben az egészen kivételes esetben történhet tehát meg az is, hogy a nyomaték valamely középső támaszpont függőlegesén is pozitív legyen. (148. I—II ábra.)



*148-ik ábra.*

Ha a nyomatékok a középső támaszpontok függőlegesein, (vagy támaszlapok kiterjedésében,) mindenütt negatívok, akkor azonban maximális vagy minimális nyomaték keletkezik minden középső oszlopon, s minden hídnyiláson egy-egy függőlegesen. (147. III ábra.) Minthogy pedig az eredőkre nézve mind e függőlegesek átmeneti függőlegeseket képeznek, erre való tekintettel az is kitetszik a mondottakból, (VI ábra,) hogy az eredők előjeleinek törvénye az imént említett föltétel alatt a többtámaszú gerendatartó minden hídnyilásán ugyanaz, mint a két végén megtámasztott gerendatartón. Esetleg akkor is állhat különben e tétel, ha pozitív nyomaték keletkezik is valamelyik középső oszlopon. (Lásd a 148. II ábrát.)

*A többtámaszú (csuklótlan) gerendatartók elméletében egyedül fontos amaz esetben tehát, ha a nyomatékok a középső oszlopokon mindenütt negatívok, az egyes átmetszésekre ható külső erők eredői az átmeneti függőleges bal oldalán fölvett átmetszésekre fölfelé, a jobb oldalán föl-*

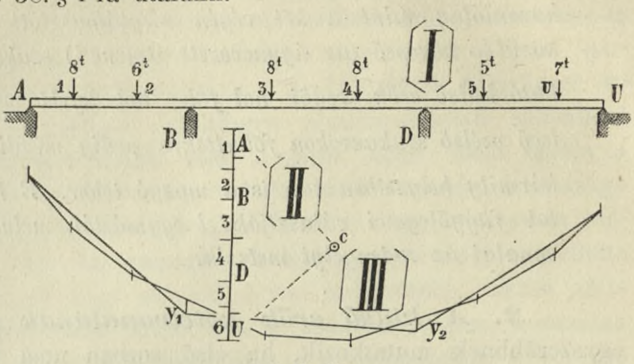
*vettekre lefelé hatnak minden egyes hídnyiláson. S ha mozgó súlyrendszerből áll a megterhelés egy része, akkor a többtámaszú gerendatartó minden hídnyilását oly három szakaszra lehet osztani, — egészen hasonlólag mint a két végén megtámasztott gerendatartót, — melyek közül a középső (az úgynevezett átmeneti) szakaszon fölvett átmetszésekre ható külső erők eredői hol föl-, hol lefelé működnek; a* $\frac{\textit{bal}}{\textit{jobb}}$ *oldalon levő szélső szakaszokon fölvettekre pedig mindig* $\frac{\textit{fölfelé}}{\textit{lefelé}}$ *hatnak az eredők, bármily helyzetben van is a mozgó teher. E három szakaszt ama pontok függőlegesei választják el egymástól, melyeken a maximális eredők vonalai az x-tengelyt metszik.*

2. ***A külső erők kötélvonalának megszerkesztése.*** Legegyszerűbbnek mutatkozik, ha első sorban nem az ismeretlen reakciókat határozzuk meg a rugalmassági elmélet alapján, hanem a támaszpontok függőlegeseire számított nyomatéki mérő hosszakat, s ezután ezek fölhasználásával nyilásonkénti részekben rajzoljuk meg a kötélábrát. Legcélszerűbb e mellett, ha mind abban a sorrendben teszszük össze az egyes hídnyilásokra ható súlyokat, melyben jobbra felé következnek, s ha úgy szerkesztjük meg a súlyok kötélvonalait az egyes hídnyilásokra, külön-külön erőpoligónok segítségével, hogy a közbeeső támaszpontok függőlegesein metsződjenek. Az igen egyszerű szerkesztés a 147. IV*a*—*d* és V*a* - *d* ábrákon világosan látható, ezért csak azt említjük meg magyarázatul, hogy az $y_1; y_2; \ldots$ nyomatéki ordinátákat csak a III*a*—*d* ábrákból mértük át az V*a*—*d* ábrákra; továbbá azt, hogy az eredők megszerkesztése céljából, az erőpoligónokon a záró oldalakkal párhuzamosan vont sugarak metszéspontjait rövid vonalakkal jelöltük meg, és hogy az eredők ábráját (VI ábra) fél akkora léptékben szerkesztettük meg, mint az erőpoligónt.

Magától értődik a már mondottakból, hogy a szerkesztés végrehajtása akkor sem okoz nehézséget, ha két csoportra osztva teszszük össze a súlyokat az egyes hídnyilásokon; elégségesnek tartjuk ezt e helyen csak megemlíteni.

Ha lapokra támaszkodik a tartó, akkor rendesen eredőikkel pótoljuk az egyes támaszlap-reakciókat, s úgy rajzoljuk meg a külső erők kötélvonalát, mintha csuklókat rendeztünk volna el ez eredők irányvonalain. Megjegyzendő azonban, hogy e föltevés, — amint ezt már a 35. §. 4-ban megjegyeztük, — az $y_1; y_2 \ldots$ nyomatéki mérő hosszak meghatározására nézve megközelítőleg is csak akkor helyes, ha a támaszlapok igen rövidek a hídnyilásokhoz képest.

Az iránt, hogy miképpen egészítjük ki a reakciók eredői alapján, nyilásonkénti részekben rajzolt kötélvonalat, a megoszló reakciók kötélgörbéi utólagos megszerkesztésével, a föntebb a 145. IV ábra kapcsán mondottakra, az iránt pedig, hogy miképpen határozzuk meg a reakciókat, (akár csuklókra, akár lapokra támaszkodik a tartó, s akár két seregre osztva, akár mind egymásután tettük össze az egyes hídnyilásokon működő súlyokat,) a 34. § 3 és a 38. § 1-ra utalunk.



*149-ik ábra.*

Végre még azt említjük meg, az alább következő 41. §-ban, a súlyok síkbeli átvitelét illetőleg mondandókra való tekintettel, hogy, ha ismeretesek akár az $A, B \ldots U$ reakciók, akár az $y_1; y_2 \ldots$ nyomatéki mérő hosszak a középső támaszpontok függőlegeseire: a külső erők kötélpoligónját úgy is megszerkeszthetjük, hogy $1, 2, 3 \ldots u$ súlyokat mind abban a sorrendben teszszük össze, melyben $A$-tól $U$-felé következnek, s ezután az $U, \ldots B, A$ reakciókat a megfordított sorrendben. A szerkesztés végrehajtása, — a mint a149. I—III ábrán is látjuk, — semmi nehézséget sem okoz; a pontosság tekintetében azonban e mód a föntebb előadott mögött áll, s ezért mindig a nyilásonkénti megszerkesztést fogjuk alkalmazni.

## 40. §.

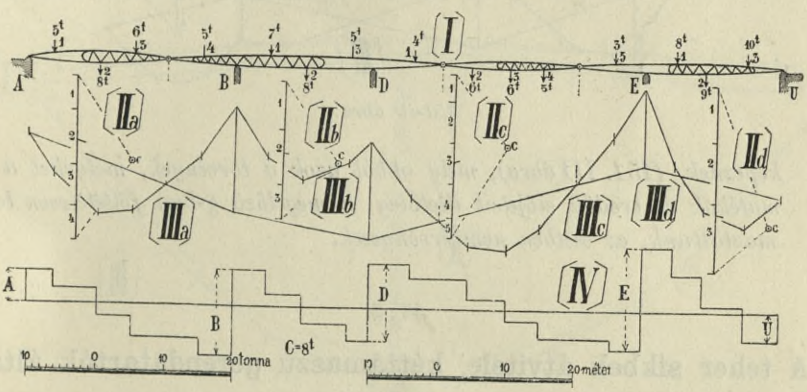
## A csuklós többtámaszú gerendatartó.

Elválasztó csuklókat a reakciók sztatikailag határozottá tétele végett rendezünk el a többtámaszú gerendatartókon. Tudjuk, hogy az $n$ nyilású tartót általánosságban $n$—1 csuklóval kell e czélból fölszerelni. (6. §.) Rendesen két-két csuklót osztunk be, fölváltva minden második középső hídnyiláson, a szélső hídnyiláson pedig — ha ezekre is jut csukló — egyet. (150. I ábra.)

A külső erők kötélpoligónját megint nyilásonkénti részekben rajzoljuk meg, hasonlólag mint a csuklótlan többtámaszú gerendatartókra, amint hogy a csuklós többtámaszú gerendatartók, magától értődőleg, különben is csak a csuklótlanok külön esetét képezik.

Rendesen mind abban a sorrendben teszszük össze az egyes hídnyilásokra ható súlyokat, melyben jobbra felé következnek, s a súlyok kötélvonalait is megint úgy rajzoljuk meg sorban az egyes hídnyilásokra, különkülön erőpoligónok alapján, hogy a közbeeső támaszpontok függőlegesein metsződjenek. Ha a súlyokkal párhuzamos irányban rávetitjük az egyes elválasztó, és a szélső támaszponti csuklókat e kötélpoligónokra, a talált pontok az egyes hídnyilások záró oldalainak pontjai, (tekintve hogy a 6. §-ban mondottak következtében, a csuklók függőlegeseire számított nyomatékok mind zérust tesznek, minthogy az ez átmetszésekre ható külső erők eredői sorban az egyes csuklókon mennek át,) a miből a záró oldalakat nyilásról nyilásra könnyen meg lehet húzni. (150. II*a* – *d*, és III*a*—*d* ábrák.)

Ha két seregben teendők össze az egyes hídnyilásokra ható súlyok, akkor szintén nem okoz nehézséget a külső erők kötélvonalának megszerkesztése nyilásonkénti részekben, mivelhogy a nyomatéki mérő hosszak, a csuklók függőlegesein, ekkor is zérust kell hogy tegyenek.



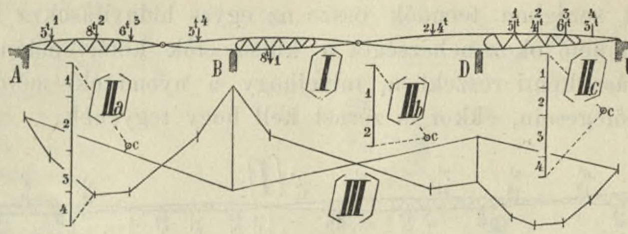
*150-ik ábra.*

*C = 8 t. Az eredők ábrája fél akkora léptékben van rajzolva, mint az erőpoligón.*

Arra az esetre, ha lapokra támaszkodik a tartó, a megelőző §-ban mondottak után csak azt említjük meg, hogy a támaszlapok pótlása a reakciók eredőinek irányvonalain elhelyezett csuklókkal, teljes pontossággal megengedhető. Ami pedig a megoszló reakciók kötélgörbéinek utólagos megrajzolását, továbbá a reakciók meghatározását illeti, — bármiképpen van a kötélábra megrajzolva, — ezekre nézve a megelőző §-ban mondottakra utalhatunk.

*Az eredők és nyomatékok előjeleinek törvényére nézve két esetet kell megkülönböztetni. Ha fölváltva minden második hídnyiláson vannak ugyanis a csuklók elrendezve, úgy mint föntebb említettük, (150. I ábra,) akkor a nyomatékok a támaszpontok függőlegesein szükségképp mind negatívok. Azok a tételek, melyeket a megelőző §-ban a nyomatékok és eredők értelmét illetőleg a többtámaszú csuklótlan gerendatartókra föltételesen származtattunk le, ebben az esetben a többtámaszú csuklós gerendatartókra tehát föltétlenül érvényesek, azzal a hozzáadással, hogy a nyomatékok a csuklós hídnyilásokon, a csuklók közötti szakaszokon mindig pozitívok, a csuklókon kivül eső szakaszokon pedig mindig negatívok; s hogy másrészt az eredőkre nézve értett átmeneti szakaszok a csuklós hídnyilásokon a csuklók közötti szakaszokra esnek, és egyik csuklóig sem érhetnek, mivelhogy a tartónak e szakaszai két végükön támasztott gerendatartókat képeznek.*

*Abban az esetben ellenben, ha a csuklók nincsenek fölváltva minden második hídnyiláson elrendezve, megtörténhet, hogy a nyomatékok egyes középső támaszpontok függőlegesein pozitívok, s esetleg minimumot sem*



*151-ik ábra.*

*képeznek, (151. III ábra), mely okból azok a törvények, melyeket a nyomatékok és eredők előjeleit illetőleg a megelőző §-ban föltételesen leszármaztattunk, ez esetben nem érvényesek.*

41. §.

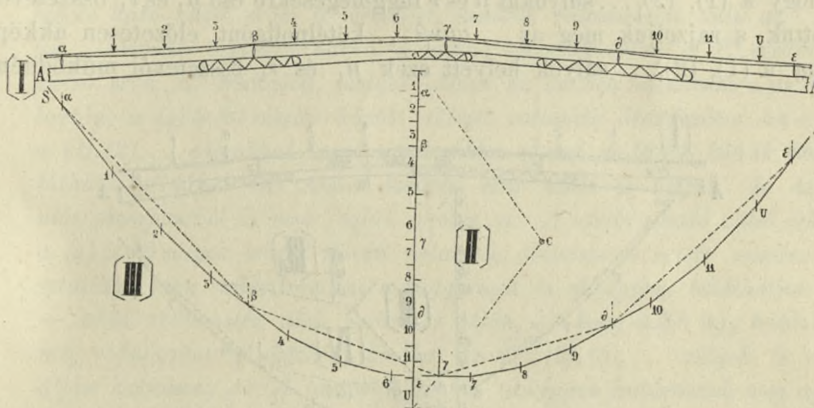
## A teher síkbeli átvitele, kéttámaszú gerendatartók által.

*1.* ***Előzetes megjegyzések.*** Többször említettük már, hogy a teher sokszor nem hat közvetetlenül a tartóra, hanem alsóbbrendű tartók viszik át az egyes súlyokat felsőbbrendűekre. Hogy az e fejezetben a megelőző §-okban előadottakat az átvitt súlyokkal megterhelt tartókra is alkalmazhassuk, mindenekelőtt azt fogjuk e §-ban megmutatni, hogy miképpen szerkesztjük meg az átvitt súlyok kötélvonalát a még át nem vittekéből, *síkbeli* súlyátvitel esetében, tehát abban az esetben, ha e súlyok mind ugyanegy síkban működnek, s ha az átviteli tartók szintén e síkban vannak elrendezve. A megismertetendő módszereket a következő két §-ban a két végükön megtámasztott, s a sztatikailag határozott reakciójú többtámaszú gerendatartókra fogjuk alkalmazni, a 44. §-ban pedig azt fogjuk tárgyalni, hogy miképpen lehet a síkbeli átvitelre nézve előbb előadottakat a térbeli átvitel esetére is alkalmazni.

*A legfontosabb építészeti alkalmazásokra való tekintettel e mellett a a teherátvitel egész elméletében mindig föl fogjuk tételezni, hogy valamennyi átviteli tartó kivétel nélkül két végén támasztott gerendatartóból áll.*

*2.* ***Az átvitt súlyok kötélpoligónja.*** A 152. I ábra általános alakban mutatja az $1, 2, 3 \ldots u$ súlyok átvitelét az $A$ tartóra az $\alpha\beta$, $\beta\gamma\ldots$ tartók útján. Konstatáljuk mindenekelőtt a következő tárgyalásokra nézve egy- és mindenkorra, hogy az $\alpha$, $\beta, \ldots$ pontokra átvitt súlyok, nagyságuk dolgában mindig egyenlőek az átviteli tartókra e pontokon ható reakciókkal, és hogy azok a súlyok, melyeket a tetszőleges $\gamma\delta$ tartó a $\gamma$ és a $\delta$ pontokra átvisz, az e tartóra ható súlyok eredőjének a $\gamma$ és a $\delta$ függőlegesekre eső összetevői, s hogy ez okból az átvitt súlyok, együttvéve, a szintén együttvett még át nem vitt súlyok összetevői.

Szerkeszszünk, ezek előrebocsátása, után az $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ . . . tartókra közvetetlenül ható 1, 2, 3 . . . u súlyokra erőpoligónt és kötélvonalat, s határozzuk meg ezek fölhasználásával az $A$ tartó $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ pontjaira átvitt súlyokat, mint az e pontokon keletkező középső támaszponti reakciókat, a 36. § 3-ban előadott módon, t. i. megszerkesztve a súlyok kötélvonalán az egyes átviteli



*152-ik ábra.*

közökre az $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ . . . záró oldalakat, és párhuzamos sugarakat húzva ezekkel az erőpoligónban. (Lásd a 152. II ábrát, melyen a záró oldalakkal párhuzamosan vont sugarak végei ki vannak húzva, az egyes pontokra átvitt súlyok mérő hosszai pedig e pontok betűivel vannak megjelölve.) Világos hogy, ha most az $\alpha, \beta, \gamma$ . . . átvitt súlyokra ugyanazzal az $S$ segéderővel szerkesztünk kötélpoligónt, melylyel a még át nem vitt 1, 2, 3 . . . súlyok kötélvonalát rajzoltuk volt meg, az $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ . . . záró oldalok képezte $S\alpha\beta\gamma \ldots S'$ vonalat kapjuk. (II—III ábra.)

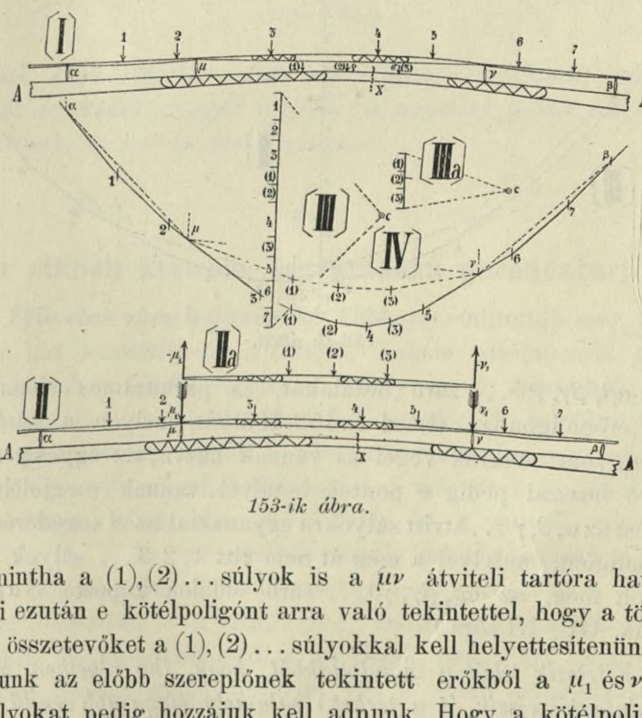
*Kitetszik tehát a mondottakból, hogy, (ha végeiken megtámasztott gerendatartók viszik át a terhet,) valamely magasabb rendű tartóra vagy bármely más szerkezetre átvitt súlyok kötélpoligónját úgy találjuk meg, ha megszerkesztjük a még át nem vitt súlyok kötélvonalát, rávetítjük az átviteli pontokat, és az ekképp talált pontokat összekötjük. Amint a mondottakból látjuk, e szerkesztés végett az egyes pontokra átvitt súlyok meghatározása nem szükséges.**)

### 3. *Részben átvitel útján, részben közvetetlenül ható teher.*

Sok esetben a tehernek csak egy részét viszik át az $\alpha\mu$ ; $\mu\nu$ ; $\nu\beta$ . . . tartók

*) Ha többtámaszúak az átviteli tartók, akkor az átvitt súlyok kötélpoligónját, — a még át nem vitt súlyokéból megszerkesztve, — a 149-ik ábra mutatja, amint ezt már előre megemlítettük.

az $\alpha, \mu, \nu, \beta, \ldots$ pontokra, (153. I ábra,) más súlyok pedig, melyeket az alább következőkben rekeszjeles számokkal fogunk, megkülönböztetés végett, megjelölni, saját irányvonalaikon hatnak a tárgyalásban levő $A$ tartóra. Legyen általában $\mu\nu$ az $A$ tartó oly átviteli köze, melyen a (1), (2), ... súlyok nem vitetnek át az $A$ tartó más pontjaira, és jegyezzük meg, hogy e súlyokat akár az $A$ tartó súlyának egyes részei képezhetik, akár tetszőleges oly súlyok, a melyek esetleg más súlyok átvitele, vagy összetevőkre oszlásából is keletkezhettek ugyan, de további átvitel nélkül hatnak az $A$ tartóra. Tegyük föl, hogy a (1), (2), ... súlyokat $\mu$ és $\nu$ függőlegesekre eső $\mu_1$ és $\nu_1$ összetevőkre bontottuk, s rajzoljuk meg az ... $\alpha\mu\nu\beta$ ... kötélpoligónt előzetesen akképen, mintha a (1), (2), ... súlyok helyett ezek $\mu_1$ és $\nu_1$ összetevői működnének,



153-ik ábra.

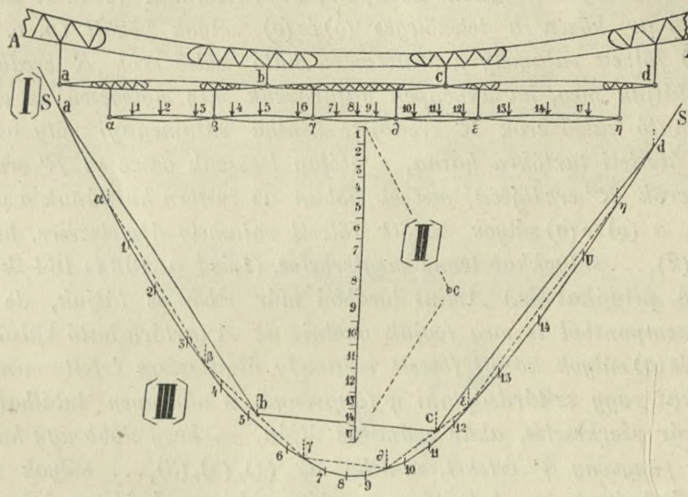
tehát úgy, mintha a (1), (2) ... súlyok is a $\mu\nu$ átviteli tartóra hatnának; és egészítsük ki ezután e kötélpoligónt arra való tekintettel, hogy a többször említett $\mu_1$ és $\nu_1$ összetevőket a (1), (2) ... súlyokkal kell helyettesítenünk. E célból le kell vonnunk az előbb szereplőnek tekintett erőkből a $\mu_1$ és $\nu_1$ erőket, a (1), (2) ... súlyokat pedig hozzájuk kell adnunk. Hogy a kötélpoligónt ehhez képest módositsuk, a $\mu_1$ súlyra következő $\mu\nu$ kötélszakasz-erőt, amint látjuk, egyszerűen össze kell tennünk sorban $(-\mu_1)$, (1), (2), ... $(-\nu_1)$ erőkkel. De ha a $\mu\nu$ átviteli tartót a valóban reá ható súlyok helyett a (1), (2), ... súlyokkal képzeljük megterheltnek, (II*a* ábra,) akkor a $(-\mu_1)$ és $(-\nu_1)$ erők az e tartóra ható reakciók, az épp emlitett $(-\mu_1)$; (1); (2); ... $(-\nu_1)$ erők tehát az e tartóra ható külső erők.

*Ha a súlyok egy részét az ..., $\alpha\mu$, $\mu\nu$, ... átviteli tartók viszik át a tetszőleges $A$ tartóra, más súlyok pedig saját irányvonalaikon hatnak reája, akkor úgy rajzoljuk meg tehát előzetesen a mondott $A$ tartóra a valóságban részben átvitellel, részben annélkül ható súlyok ... $\alpha\mu\nu\beta$ ... kötél-*

*poligónját, mintha valamennyi súly az... $\alpha\mu$, $\mu\nu$... átviteli tartókra hatna, s ezután akképpen egészítjük ki e kötélpoligónt minden egyes oly $\mu\nu$ átviteli közön, melyre át nem vitt (1), (2),... súlyok is hatnak, hogy az épp említett kötélpoligón $\mu$ és $\nu$ sarokpontjain át a mondott (1), (2),... súlyokra utólagosan külön kötélpoligónt rajzolunk. (153. IV ábra.) Az $A$ tartó $\mu\nu$ közén a tetszőleges ($\varrho$) és ($\sigma$) súlyok között (p. o. (2) és (3) között,) fölvett valamely $x$ átmetszésre ható külső erők $R$ eredőjét pedig úgy találjuk meg, ha akképpen határozzuk meg előlegesen az ez átmetszésre ható külső erők $R'$ eredőjét, mintha valamennyi súly az ..., $\alpha\mu$, $\mu\nu$,... átviteli tartókra hatna, s utólag teszszük össze ez $R'$ eredőt ama külső erők $R''$ eredőjével, melyek abban az esetben hatnának a $\mu\nu$ átviteli tartón, a ($\varrho$) és ($\sigma$) súlyok között fölvett valamely átmetszésre, ha e tartó a (1), (2),... súlyokkal lenne megterhelve. (Lásd a 163 és 164-ik ábrákon látható példákat is.) Amint továbbá már ebből is látjuk, de azonnal más szempontból is meg fogjuk okolni, az $A$ tartóra ható külső erőknek, a ($\varrho$) és ($\sigma$) súlyok között fölvett valamely átmetszésre értett minden más sztatikai vagy szilárdságtani $\varphi$ függvényét is akképpen találhatjuk meg, — akár szerkesztés, akár számítás útján, — hogy előbb úgy határozzuk meg e függvény $\varphi'$ értékét, mintha az (1), (2), (3),... súlyok is átvitel útján hatnának az $A$ tartóra; ezután akképpen határozzuk meg ugyane függvény további $\varphi''$ értékét, mintha azok a külső erők, melyek abban az esetben egyensúlyoznák a $\mu\nu$ átviteli tartót, ha ez a (1), (2),... súlyokkal lenne megterhelve, szintén az $A$ tartóra hatnának; és végre összeadjuk a $\varphi'$ és $\varphi''$ mennyiségeket, előjeleikre és esetleg irányaikra való tekintettel.*

E tétel utóbbi, általánosított része, amint már megjegyeztük, az eredőt illetőleg mondottakból is következik ugyan, de általánosabb szempontból is megvilágítható. Misem akadályoz ugyanis, sem az egyensúly, sem a szilárdság szempontjából, hogy ne vegyünk föl a $\mu$ és $\nu$ függőlegeseken sorban $\pm\mu_1$ és $\pm\nu_1$ nagyságú erőket. De ha ezt megtettük, akkor az $A$ tartóra ható külső erőket ez úton a II és II*a* ábrákon látható két csoportra osztottuk. A II ábrán látható csoport csakis súlyokból áll, még pedig oly súlyokból, melyekkel akkor lenne az $A$ tartó megterhelve, ha az 1, 2, 3,... súlyokon kivül a (1), (2),... súlyok is átvitel útján hatnának reá. A II*a* ábrán látható csoportot pedig egyensúlyban levő oly erők képezik, melyeket azoknak a külső erőknek tekinthetünk, melyek a $\mu\nu$ átviteli tartót egyensúlyoznák, ha e tartó a (1), (2)... súlyokkal volna megterhelve.

**4. *Az alsóbbrendű átvitel.*** Ha nemcsak egyszeri, hanem, esetleg több sorban ismétlődő, alsóbb rendű átvitel is van, (154. I ábra,) t. i. ha az első sorú $\alpha\beta$, $\beta\gamma$,... átviteli tartók nem támaszkodnak a tárgyalásban levő $A$ tartóra, hanem, esetleg többször ismételve, magasabb-rendű *ab*, *bc*,... tartók soraira viszik át a terhet, akkor legelőbb megint a még át nem vitt 1, 2, 3,... súlyok kötélvonalát rajzoljuk meg, s ebből az imént előadottak ismételt alkalmazása útján az átvitt súlyok egyes sorainak kötélpoligónjait, a legalsóbb rendű átviteli tartókon kezdve, és ezekről sorban a legközelebb magasabb rendű tartók átvitte súlyokra térve át. Az épp említett 154. I ábrán p. o. az $A$ tartóra nézve kétrendű átvitel van; s a III ábrán $S, 1, 2, 3 \ldots S'$



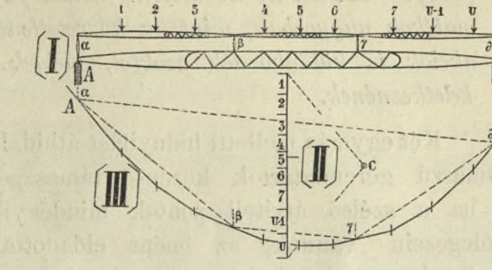
*154-ik ábra.*

a még át nem vitt, t. i. $\alpha\beta\gamma\delta \ldots$ tartókra ható súlyok kötélvonala; $S\alpha\beta\gamma \ldots S'$ az $abcd$ tartókra ható, $Sab \ldots S'$ pedig az $A$ tartóra ható súlyok kötélpoligónja. (Jobb megkülönböztetés végett az épp említett első kötélvonalat kihúztuk, a másodikat megvonaloztuk, a harmadikat pedig megint kihúztuk.)

## 42. §.

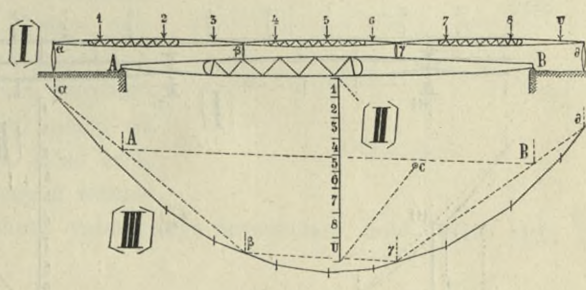
## A két végén megtámasztott, s átvitt súlyokkal megterhelt gerendatartó.

*1. Általános tételek.* Az alább következőkben a két végükön megtámasztott, s átvitt súlyokkal megterhelt gerendatartókra fogjuk a megelőző §-ban előadottakat alkalmazni, megjegyezvén, hogy a tárgyalást, — tekintettel az alsóbbrendű átvitel csekély befolyására, — az egyszeri átvitel esetére fogjuk megszorítani. Az átviteli tartókat, — amint már mondottuk, — kivétel nélkül kéttámaszú gerendatartóknak fogjuk föltételezni, különben pedig a jelen és a következő 2-ik pontban csak azokat a külső erőket fogjuk tárgyalni, melyek az átviteli tartókra vagy ezek támasztékaira ható súlyok következtében hatnak a magasabb-rendű tartókra. (E súlyok alatt az átviteli tartóknak, ezek támasztékainak, és az átviteli tartókra függesztett vagy támasztott szerkezetnek súlyát, vagy az átviteli tartókra esetleg ható más súlyokat, vagy mindezeket együttvéve érthetjük.) Azt, ha a súlyok egy része, (pl. magának a tartónak súlya,) közvetetlenül hat a tartóra, vagy a megelőző 41. § 3-ban előadott módon vehetjük tekintetbe, mit az alább következő 3—4-ik pontokban speciális esetekre is meg fogunk mutatni; vagy a súlyoknak két seregben történő összetétele alapján; vagy a 32. §. 4-ben jelzett módon, t. i. akképpen, hogy a közvetetlenül ható súlyokat külön veszszük számításba, és megint külön az átvitel útján hatókat.



*155-ik ábra.*

Az átviteli pontok beosztásához képest egyébiránt két esetet kell megkülönböztetni. Az egyikben a súlyok mind a tárgyalásban levő $AB$ tartóra vitetnek át; (155. I ábra;) a másikban a szélső átviteli pontok az $A$ és $B$ támaszpontokon túl vannak elhelyezve, s így a szélső átviteli tartók a rájuk ható súlyok egy részét az $AB$ tartón kívül eső pontokra viszik át. (156. I ábra). Az első esetre a 155. III, a másodikra a 156. III ábra mutatja a külső erők kötélábráját.



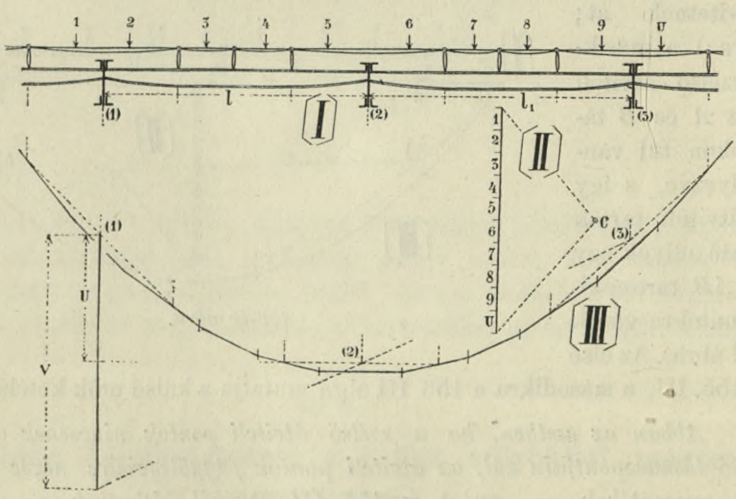
*156-ik ábra.*

*Abban az esetben, ha a szélső átviteli pontok nincsenek az $AB$ tartó támaszpontjain túl, az átviteli pontok függőlegeseire nézve számított nyomatékok —, amint a 155. III ábrából láthatjuk, — ugyanolyanok, az egyéb függőlegesekre nézve értettek pedig kisebbek, mint ha átvitel nélkül hatna a teher. Az $A$ és $B$ reakciók pedig, — ha azokat a részeket is beleértjük, melyeket a szélső, esetleg az $A$ és $B$ támaszpontok függőlegesein levő $\alpha$ és $\delta$ átviteli pontokra jutó súlyok okoznak, — szintén ugyanolyanok, mint ha közvetetlenül hatna a teher.*

E tétel második része abból következik, hogy az egyes átviteli pontokra jutó súlyok a még át nem vitt súlyok összetevői, s hogy e szerint az $A$ és $B$ reakciókra nézve közönyös, hogy a még át nem vitt súlyokat vagy ezek összetevőit, az átvitt súlyokat egyensúlyozzák-e. A tétel első, a nyomatékokat illető része pedig, a 155. III ábrán alapuló föntebbi megokoláson kivül, abból is igen egyszerűen következik, hogy az átvitt súlyok, — amint épp megemlítettük, — a még át nem vitteknek összetevői.

*Abban az esetben ellenben, ha a szélső átviteli pontok az AB tartó támaszpontjain túl vannak, s ha a szélső közök is meg vannak terhelve, (156. I—III ábra.) az átviteli pontok függőlegeseire nézve számított nyomatékok nagyobbak, mint ha közvetetlenül hat a teher, s az A és B reakciók is különböznek azoktól, melyek közvetetlen megterhelés esetében keletkeznének.*

Két egymás melletti hídnyilást áthidaló, és átvitt súlyokkal megterhelt kéttámaszú gerendatartók középső támaszponti reakciója abban az esetben, ha a szélső átviteli pontok mindegyik hídnyiláson a támaszpontok függőlegesein vannak, az imént előadottak következtében ugyanolyan, mint ha közvetetlenül hatna a teher. Arra az esetre pedig, ha a támaszpontokon nincsenek átviteli pontok, az 157. I—III ábrák mutatják az $l$ és $l_1$ tartók középső támaszpontjára, valamint a külön az $l$ hídnyilásból származó, úgy az összes reakció megszerkesztését. A szerkesztés menete a föntebb elmondottak és a 36. §. 3-ban előadottak nyomán önként érthető, s ezért

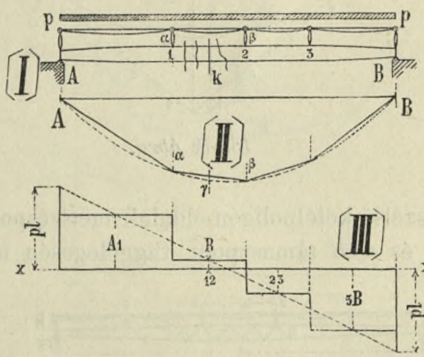


157-ik ábra.

csak azt jegyezzük meg, hogy az átviteli kötélpoligón-oldalakat a fennforgó föladat megoldására csak a (1), (2), (3) támaszpontokat áthidaló közökre kell megszerkeszteni; (tekintve hogy ezek elégségesek az $l$ és $l_1$ hídnyilások záró oldalai (1), (2), (3)-mal jelölt végpontjainak meghatározására;) és hogy, ha $c$ az erőpoligón magassága, s ha $U$ és $V$-vel jelöljük azokat a hosszúságokat, melyeket egyrészt a (1)-el jelölt, másrészt a sorban (2)-vel jelölt átviteli kötélpoligón-oldal, és a (2)(3) záró oldal meghosszabbításai vágnak le a (1) támaszpont függőlegesén: akkor $U$ az $l$ hídnyilásból külön keletkező, $V$ pedig az összes reakció mérő hossza a (2) középső támaszponton; mindkettő $c:l$-szerte kisebb erőléptékben mint a milyenben az erőpoligónt szerkesztettük.

Az átvitt súlyokkal megterhelt és két végükön megtámasztott gerendatartók elméletében főképp az az eset fontos, ha a szélső átviteli pontok nincsenek a támaszpontokon túl elrendezve. Szükségesnek mutatkozik ez okból ezt az esetet, az erők működése egyes részleteinek megvilágítása végett, az alább következő föladatok megoldásával bővebben tárgyalni.

*2. Egyenletesen megoszló súly átvitele.* Legyen a tartó elméleti nyilása $2l$, az erőpoligón magassága $C$, legyen továbbá az a megoszló súly vagy egyéb teher, mely az $AB$ tartóra vivődik át, hosszegységenkint $p$, és szorítsuk meg a tárgyalást a jelen pontban, — amint már megjegyeztük, — ismét azokra a külső erőkre, melyek az épp említett megoszló súly átviteléből keletkeznek, közvetetlenül ható súlyok működését kizárva.



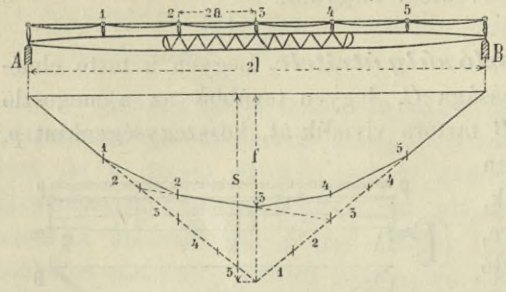
*158-ik ábra.*

Arra az esetre, ha az átviteli közök nem egyenlőek, a kötélábra megszerkesztését a 158. II ábra mutatja, és ebben a vonalozva meghúzott parabola a még át nem vitt megoszló súly kötélparabolája. Ami pedig az egyes átmetszésekre ható külső erők eredőit illeti, jelöljük meg a tetszőleges $\alpha\beta$ közön át fölvehető valamennyi átmetszésre ható külső erők eredőjét $R$-rel.

*Könnyen belátható hogy, ha a $p$ súlylyal közvetetlenül megterheltnek képzeljük az $AB$ tartót, az $\alpha\beta$ szakasz $k$ középvonalán fölvett átmetszésre ható külső erők eredője szintén $R$. (158.1 ábra.)*

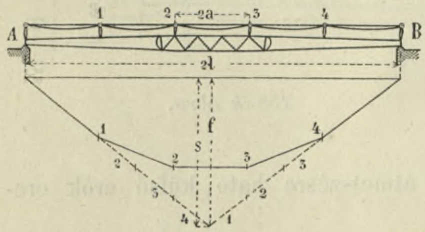
Akképpen szerkeszthetjük meg ugyanis a tetszőleges $\alpha\beta$ szakaszon fölvehető átmetszésekre, az átvitel következtében valóban ható külső erők $R$ eredőjének mérő hosszát, hogy az erőpoligónban az $AB$ záró oldallal és az $\alpha\beta$ átviteli kötélpoligón-oldallal párhuzamos sugarakat húzunk. A $p$ teherrel *közvetetlenül* megterhelt tartón, a tetszőleges $\alpha\beta$ szakasz a $k$ középvonalán fölvett átmeszésre ható erők eredőjét pedig úgy kapjuk meg, ha megint az $AB$ záró oldallal, s ezenkivül a $k$ függőlegesen levő $\gamma$ parabolapont érintőjével vonunk az erőpoligónon párhuzamos sugarakat. A $\gamma$ parabolapont azonban az $\alpha\beta$ parabolaív középvonalán van, s így e pont érintője az $\alpha\beta$ húrral párhuzamos.

*Akképpen szerkesztjük meg ez okból az egyenletesen megoszló $p$ súly átvitele következtében keletkező eredők ábráját, ha előbb a $p$ teherrel k ö z v e t e t l e n ü l megterheltnek tekintett tartóra rajzoljuk meg az eredők egyenesét, fölmérve az $A = B = pl$ reakciók mérő hosszait a fölvett x-tengelytől az $A$ függőlegesen fölfelé, a $B$ függőlegesen lefelé, s összekötve* *az ekkép talált két pontot. (III ábra). Ez egyenesnek az egyes átviteli közök középvonalaira eső A1; 12; 23; B3 ordinátái sorban az e közökön fölvett átmetszésekre ható külső erők eredőinek mérő hosszai.*



159-ik ábra.

Ha egyenlő távol vannak egymástól az átviteli pontok, akkor az átvitt súlyok kötélpoligónját egyenlő távol, egyenlő nagy súlyok kötélvonalaként rajzoljuk meg, a kötélparabola megszerkesztése nélkül. (159 és 160-ik ábra.) Ha az átviteli pontok távolsága $2a$, és ha a szélső átviteli pontok a támaszpontokon vannak, akkor a szélső kötélpoligón-oldalak metszéspontjának $s$ ordinátája ugyanis, (mint az $A$ és a $B$ támaszpont függőlegesén működő $pl - pa = p(l-a)$ erő nyomatékának mérőhossza,) $s = p(l-a)\,l : C$, s ha ez ordinátát kiszámítottuk, akkor az átvitt súlyok kötélpoligónját a 16. § 1-ban előadott módon, erőpoligón rajzolása nélkül szerkeszthetjük meg. Könnyen kiszámíthatjuk továbbá, nagyobb pontosság, vagy a kötélábra felének megszerkeszthetősége végett, a kötélpoligón $f$ ívmagasságát is Ha páros számúak ugyanis az átviteli közök, (159-ik ábra,) akkor az $f$ ívmagasság, mint a közvetetlenül működőnek tekintett $p$ teher kötélparabolájának ívmagassága, $f = \frac{1}{2}pl^2 : C$. Ha pedig átviteli köz középvonalán megy át a hídnyilás középvonala, (160-ik ábra,) akkor $f$ mint a $2l$ és a $2a$ húrhosszúságú parabolák ívmagasságainak különbsége $f = \frac{1}{2}p(l^2 - a^2) : C$.

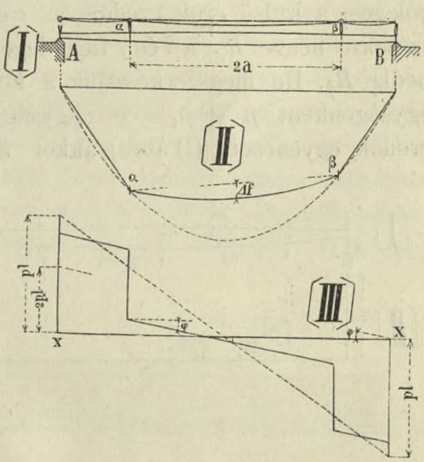


160-ik ábra.

***3. Az egyenletesen megoszló, tetszőleges $p_1$ súly átvitele, és a tartó $p_0$ súlya közvetetlen működése.*** A jelen és a következő 4-ik pontban a tárgyalásban levő *AB* tartó saját súlya tekintetbe vételének kétféle módját mutatjuk meg. Legyen e súly hosszegységenként $p_0$ nagyságú, s a tartó egész hosszára állandó. Ha tömör a tartó, akkor e súly a tartó minden pontjára megoszlik, s gyakran tekintetbe kell venni mind azt, hogy a $p_0$ súly *közvetetlenül,* mind azt, hogy a súlynak többi, hosszegységenként $p_1$ nagyságú része, átvitel útján hat az *AB* tartóra. (161-ik ábra.)

Az eredők ábráját magától értődőleg ez esetben is egészen a megelőző pontban előadott módon szerkesztjük meg, (III ábra,) a *közvetetlenül* működőnek tekintett $p_0 + p_1 = p$ teher okozta eredők egyenese középordinátáinak fölhasználásával: az eredők vonalának egyes szakaszait a $p_0$ súly nagyságára való tekintettel húzva meg e közép-ordinátåk végpontjain át az egyes lépcsőkön, még pedig legcélszerűbben a következő módon. Tudjuk hogy, ha valamely átviteli köz nagysága $2a$, az eredők egyenesének ordináta-különbsége e köz szélei között $2ap_0$. Ha fölmérjük pl. az $A$ függőlegesen az $x$ tengely fölé az összes $2p_0l$ súly mérő hosszát, (III ábra,) s ha összekötjük a kapott pontot az $x$ tengely $B$ pontjával, akkor tehát az eredők egyenesének egyes szakaszai az ekképpen talált egyenessel párhuzamosak.

Ami pedig a külső erők kötélpoligónját illeti, ezt a föntebb a 153-ik ábra kapcsán mondottak szerint szerkeszthetjük meg. (De, amint már megemlítettük, a súlyok két seregben történő összetétele alapján is megszerkeszthetjük, s továbbá akképpen is, ha az átvitt súlyokat külön, s az át nem vitteket szintén külön veszszük tekintetbe.)



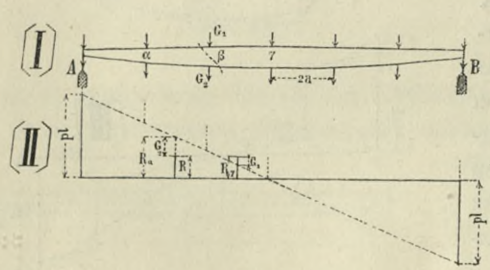
*161-ik ábra.*

Megszerkesztjük ugyanis a $p_0+p_1$ súly kötélparaboláját, (161. II ábra,) megrajzoljuk ennek segítségével az átvitt súly kötélpoligónját először úgy, mintha a $p_0$ súly is átvitetnék, (ha az átviteli közök egyenlőek, akkor e kötélpoligónt, önként értődőleg, egyenlő távol egyenlő nagy súlyok kötélpoligónjaként rajzoljuk meg,) s kiegészítjük e kötélpoligónt az egyes átviteli közökön a $p_0$ súly kötélparaboláinak meghúzásával. Ha a tetszőleges $\alpha\beta$ átviteli tartó elméleti nyilása $2a$, s a nyomatéki alap $C$, akkor az $\alpha$ és $\beta$ sarokpontok közötti parabolaív ívmagassága tehát $\triangle f = {}^1\!/_2\, p_0 a^2 : C.$ (161. II ábra.)

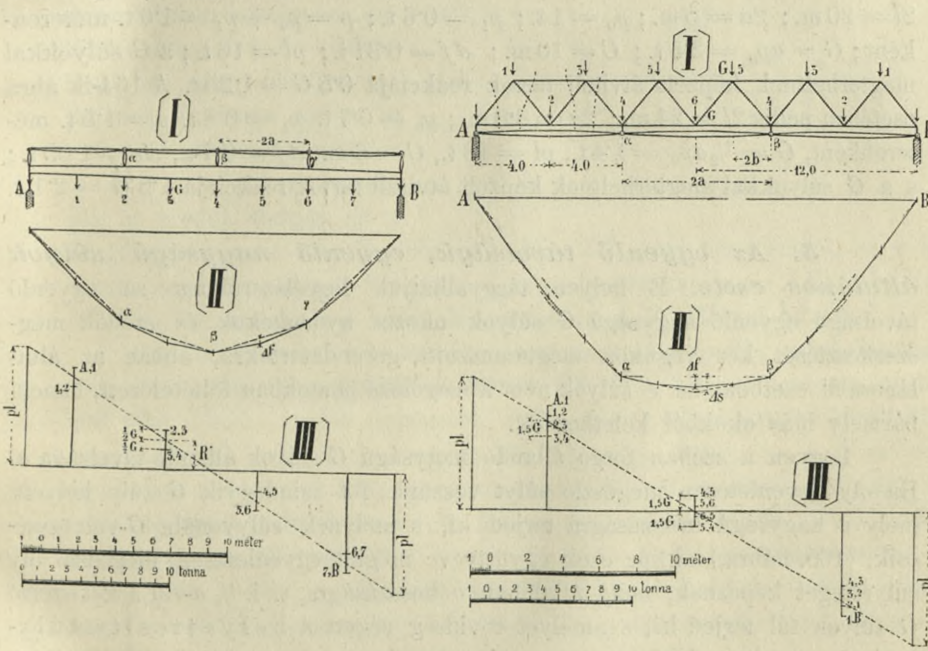
***4. Az egyenletesen megoszló, tetszőleges $p_1$ súly átvitele, s az egyes tartószakaszok súlyának egyes pontokra történő központosulása.*** Más esetekben megint állandó mind az $AB$ tartó hosszegységenkénti $p_0$ súlya, mind az egyéb, hosszegységenként $p_1$ nagyságú súly, s a $p_1$ súly megint átvitel útján hat az $AB$ tartóra, de az egyes tartószakaszok súlyát, (mint pl. a rácsos tartókon,) egyes pontokra központosulóknak kell tekinteni.

Ha egyenlők az átviteli közök, s ha ezek középvonalain fölvett függőlegesekkel kell a tartót szakaszokra osztani, az egyes szakaszok súlyai az átviteli függőlegesekre esnek. Ez esetben tehát egyik *közön* sem hat súly átvitel nélkül, (lásd pl. a 162. I ábrát, melyen csak az átviteli függőlegesek és az ezeken ható súlyok vannak megjelölve,) s ez okból egészen úgy szerkesztjük meg mind a külső erők kötélpoligónját, mind az eredők ábráját, mintha az egész $p_0 + p_1 = p$ súly az átviteli tartókra hatna. További megjegyzések tehát csak arra az esetre nézve teendők, ha a tartó egy-egy szakasza súlyának egy része a tartó felső szélére hat, más része az alsóra, s ha az átmetszést a tetszőleges $\beta$ átviteli függőlegesre eső két súly támadó pontja között veszszük föl. (162. I ábra.)

Legyen $\alpha, \beta, \gamma$ közvetetlenül egymásután következő három átviteli függőleges, a külső erők eredője az $\alpha$ és $\beta$ függőlegesek között fölvehető átmetszésekre nézve $R_\alpha$, a $\beta$ és $\gamma$ függőlegesek között fölvehető átmetszésekre nézve pedig $R_\gamma$. Ha megszerkesztjük a közvetetlenül működőnek tekintett, hosszegységenként $p_0 + p_1 = p$ nagyságú egyenletesen megoszló teher okozta eredők egyenesét, (II ábra), akkor az egyenesnek az $\alpha\beta$ és $\beta\gamma$ közök középvonalaira eső ordinátái sorban az $R_\alpha$ és $R_\gamma$ eredők mérő hosszai. S ha oly $\beta$ átmetszést veszünk föl, mely az $AB$ tartó felső szélét az $\alpha$ és $\beta$, alsó szélét a $\beta$ és $\gamma$ függőlegesek között vágja át, s ha az egyes átviteli függőlegeseken a tartó felső szélére ható súlyok nagysága $G_1$, az alsó szélére ható súlyoké pedig $G_2$, akkor a mondott $\beta$ átmetszésre ható külső erők $R$ eredőjét, — amint a I ábrán látjuk, — vagy az $R_\alpha$ eredő és a $G_2$ súly, vagy az $R_\gamma$ eredő és a $-G_1$ súly összetétele útján lehet megszerkeszteni: tehát vagy úgy, hogy a $G_2$ súly mérő hosszát az $R_\alpha$ eredő végpontja alá, vagy úgy, hogy a $G_1$ súly mérő hosszát az $R_\gamma$ eredő végpontja fölé mérjük. (II ábra.) A $G_1$ és $G_2$ súlyokat pedig könnyen ki lehet számitani, mert, ha az $AB$ tartó ama szélének hosszegységenkénti súlya, melyre a $p_1$ súly átvitetik $p_{01}$, másik szélének hosszegységenkénti súlya $p_{02}$, s ha $2a$ az átviteli tartók elméleti nyilása, akkor az $AB$ tartó egyik szélére ható súlyok $2a(p_{01} + p_1)$, a másik szélére hatók pedig $2ap_{02}$ nagyságúak.


162-ik ábra.

Az oly esetekben, ha az egyes tartószakaszok súlyainak támadó pontjai az átviteli függőlegesek közé esnek, a külső erők kötélvonalának és az egyes átmetszésekre ható erők eredőinek megszerkesztésére legegyszerübben a 41. § 3-ban előadottakat alkalmazzuk. A 163 és 164-ik ábrák oly példákra mutatják a szerkesztés végrehajtását, melyekben az átviteli közök egyenlők, s a tartó saját súlya is egyenlő részekre oszlik meg az egyes támadó pontokra. Legyen egy-egy ily tartószakasz súlya $G$. A 163-ik ábrán látható példában azt tételeztük föl, hogy e súlyokat fölváltva az átviteli függőlegesekre és a közök középvonalaira kell számitani; a 164-ik ábra mutatta példában pedig az átviteli függőlegesekre és a közök negyedeire. — Ha az egyes közökön átvitel nélkül ható $G$ súlyok eredőjét a szomszéd átviteli függőlegesekre eső összetevőivel helyettesitjük, s ez összetevőket a különben is e függőlegesekre eső $G$ súlyokkal összeadjuk, egyenlő távolságú, egyenlő nagyságú súlyok keletkeznek. Az $AB$ tartóra átvitt súlyok kötélpoligónját tehát mindkét példában akképpen lehet előzetesen, (egyenlő távolságú egyenlő nagyságú súlyok kötélpoligónja gyanánt,) megszerkeszteni, mintha az egész $p_0 + p_1 = p$ súly az átviteli tartókra hatna. (Lásd a vonalozva kihúzott poligónokat a 163. II és 164. II ábrákon.) E kötélpoligónok egyes egyenes oldalait, — amint a többször idézett 153. IV ábra kapcsán előadottakból tudjuk, — az egyes közökre átvitel nélkül ható $G$ súlyok kötélpoligónjaival kell pótolni. Ha $C$ a nyomatéki alap, s $2a$ az átviteli tartók elméleti nyilása, akkor a szóban forgó, kiegészítésképpen szerkesztendő kötélpoligónok nyílmagassága a 163. II ábrában tehát $\Delta f = \frac{1}{2} Ga : C = \frac{1}{2} p_0 a^2 : C$. A 164. II ábrán $\Delta f$ szintén $= \frac{1}{2} p_0 a^2 : C$; a megnyujtott szélső oldalak metszéspontjának ordinátája pedig a 2-ik pontban, a 159—160-ik ábrák kapcsán imént mondottakra való tekintettel, $\Delta s = p_0 (a-b) a : C$, s itt $2b$ a $G$ súlyok távolságát jelenti, s ezért $b = \frac{1}{4} a$.




*163-ik ábra. C = 10 m.* *164-ik ábra. C = 8 m.*

*Az eredők fél léptékben vannak fölmérve.*

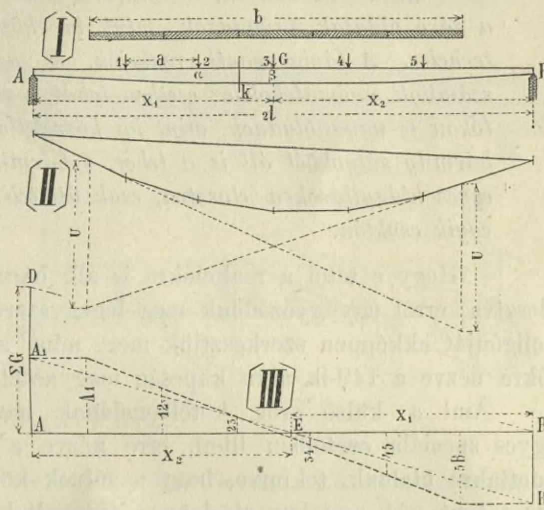
Az $AB$ tartón fölvett átmetszésekre ható külső erők eredői meghatározása végett megrajzoljuk az eredők egyenesét, úgy mintha közvetetlenül hatna a hosszegységenkénti $p_0 + p_1 = p$ súly az $AB$ tartóra. (163. III és 164. III ábrák.) Ez egyenesnek az egyes átviteli közök középvonalain meghúzott ordinátái az e közökön fölvett átmetszésekre ható külső erők eredőinek mérő hosszai, az alatt a föltevés alatt, hogy az egész $p_0 + p_1 = p$ súly az átviteli tartókra hat. Nevezzük ezt az eredőt a tetszőleges $\alpha\beta$ átviteli közre nézve, (163. III és 164. III ábra,) hasonlólag mint a 41. § 3-ban tettük, megint $R'$-nek. Hogy az $AB$ tartó ez átviteli köze egyes szakaszain fölvehető átmetszésekre ható külső erők eredőit megtaláljuk, a $G$ súlyok át *nem* vitele tekintetbe vételével: össze kell tenni az $R'$ eredőt a $G$ súlyokkal megterheltnek képzelt $\alpha\beta$ átviteli tartóra ható egyes külső erőkkel, mit úgy hajtunk végre legegyszerűbben, ha fölmérjük e külső erőket az $R'$ középordináta végpontjától, egymásután következésük sorrendjében és előjeleikre való tekintettel, tehát előbb a baloldali reakció mérő hosszát fölfelé, ezután az egyes $G$ súlyokét lefelé, mi által azonban egyszerűen a $G$ súlyokkal megterheltnek képzelt $\alpha\beta$ átviteli tartóra ható külső erők erőpoligónja jő létre. A 163. III és 164. III ábrákon az $AB$ tartó egyes szakaszain fölvett átmetszésekre ható külső erők eredőinek ez úton talált mérő hosszait sorban ugyanazokkal a számokkal jelöltük meg, melyekkel e szakaszok a tartó vetületén meg vannak jelölve. — A 163-ik ábrán látható példában $2l = 20$ m.; $2a = 5$ m.; $p_0 = 1$ t.; $p_1 = 0{\cdot}6$ t.; $p = p_0 + p_1 = 1{\cdot}6$ t. méterenként; $G = ap_0 = 2{\cdot}5$ t.; $C = 10$ m.; $\Delta f = 0{\cdot}31$ t.; $pl = 16$ t.; a $G$ súlyokkal megterheltnek képzelt átviteli tartók reakciója $0{\cdot}5\,G = 1{\cdot}25$ t. A 164-ik ábra esetében pedig $2l = 24$ m.; $2a = 8{\cdot}0$ m.; $p_0 = 0{\cdot}7$ t. $p_1 = 0{\cdot}8$ t. $p = 1{\cdot}5$ t. méterenként, $G = {}^1\!/_2 ap_0 = 1{\cdot}4$ t., $pl = 18$ t., $C = 8$ m., $\Delta f = 0{\cdot}7$ t., $\Delta s = 1{\cdot}05$ t.; s a $G$ súlyokkal megterheltnek képzelt átviteli tartók reakciója $1{\cdot}5\,G = 2{\cdot}1$ t.

***5. Az egyenlő távolságú, egyenlő nagyságú súlyok általános esete.*** E helyen tárgyalhatjuk legcélszerűbben az egyenlő távolságú egyenlő nagyságú $G$ súlyok okozta nyomatékok és eredők megszerkesztését két végükön megtámasztott gerendatartókra, abban az általánosabb esetben, ha e súlyok nem a megelőző pontokban föltételezett, hanem bármely más okokból keletkeznek.

Legyen a szóban forgó állandó nagyságú $G$ súlyok állandó távolsága $a$. Ha oly egyenletesen megoszló súlyt veszünk föl mindegyik $G$ súly helyett, mely $a$ nagyságú hosszúságra terjed ki, s melynek súlyvonala $G$-vel összeesik, (165. I ábra,) akkor ezek együttvéve megint egyenletesen megoszló oly súlyréteget képeznek, mely általában $b$ hosszúságra, t. i. $^1\!/_2\, a$-val a két szélső $G$ súlyon túl terjed ki, s amelyet rövidség végett a helyettesítő súlynak (vagy tehernek) fogunk nevezni; nagysága hosszegységenként $p = G : a$.

A külső erők kötélpoligónjára nézve csak azt említjük meg, hogy a két szélső oldal megszerkesztésére legegyszerűbben azt az $u$ hosszúságot számítjuk ki, melyet meghosszabbításuk a $b$ szakasz széleinek függőlegesein vág le. (II ábra.) E hosszúság ugyanis, mint a helyettesítő súly nyomatékának mértéke, $u = pb^2 : 2C$.

Ami az eredők megszerkesztését illeti, világos hogy, — ha tetszőleges két egymásra következő súly támadó pontját $\alpha$- és $\beta$-val jelöljük meg, — a $G$ súlyokkal megterhelt tartón, $\alpha$ és $\beta$ között fölvett átmetszésekre ható külső erők $R$ eredője ugyanaz, mint a helyettesítő súlylyal megterheltnek képzelt tartón az $\alpha$ és $\beta$ pontok közötti $k$ középfüggőlegesen fölvett átmetszésre ható külső erőké, (165. I ábra,) tekintve, hogy a helyettesítő teher ugyanazokat a reakciókat idézi elő, mint a $G$ súlyok, s tekintve, hogy az $\alpha$ és $\beta$ közötti átmetszéseket az egyik vagy a másik oldalon megelőző $G$ súlyok, a $k$ átmetszést ugyanazon az oldalon megelőző helyettesítő súly egyes részeinek eredőiből állanak.




*165-ik ábra.*

Megszerkesztjük tehát, — *a helyettesítő súly* okozta eredők egyenesének megrajzolása céljából, — mindenekelőtt az $A$ és $B$ reakciókat, legegyszerűbben akképpen, (tekintve, hogy $A + B = \Sigma G$ és hogy, ha $x_1$ és $x_2$ a $G$ súlyok eredőjének távolsága sorban az $A$ és $B$ támaszpontoktól: $A : B = x_2 : x_1$,) hogy rámérjük az eredők ábráján az $A$ függőlegesre az $x$-tengely fölé az $AD = \Sigma G$ mérő hosszúságot, az $x$ koordináta-tengelyre pedig a fölcserélt $x_1$ és $x_2$ hoszszakat, $x_2 = AE$; $x_1 = BE$-re, (III ábra,) s az ekképp talált $E$ ponton át $A_1 B_1 \parallel DB$-vel húzzuk.

Az $A$ és $B$ reakciók ez úton meghatározott $AA_1$ és $BB_1$ mérő hosszainak fölhasználásával megrajzoljuk ez után a III ábrán látható módon a helyettesítő teher okozta eredők egyenesét, melynek a $G$ súlyok közötti közök középvonalaira eső ordinátái, — amint föntebb már láttuk, — a $G$ súlyokkal megterhelt tartón, sorban az egyes közökön át fölvett átmetszésekre ható külső erők eredőinek mérő hosszai. Az I ábrán az egyes közök $A1; 12; 23; 34; 45; 5B$-vel vannak megjelölve, s az e közökön át fölvett átmetszésekre ható külső erők eredői a III ábrán sorban ugyane jelekkel. Önként értődik, hogy a mondottak akkor is érvényesek, ha a helyettesítő súly egyik vagy mindkét széle a támaszpontok függőlegesein túl esik.

## 43. §.

## A csuklós többtámaszú gerendatartó, átvitt súlyokkal megterhelve.

Ha az átviteli tartók mind kéttámaszú gerendatartók, amit e §-ban is mindig föl fogunk tételezni, — akkor a külső erők kötélpoligónját önként értődőleg megint a megelőző §-okban mondottak alapján szerkesztjük meg.

Megrajzoljuk ugyanis előbb a még át nem vitt súlyok kötélvonalát az egyes hídnyílásokra; ebből megszerkesztjük az átvitt súlyok kötélvonalát a 41. §. 2—3-ban mondottak szerint, s végre meghúzzuk a záró oldalakat az egyes hídnyilásokon, úgy mint a 40. §-ban előadtuk.

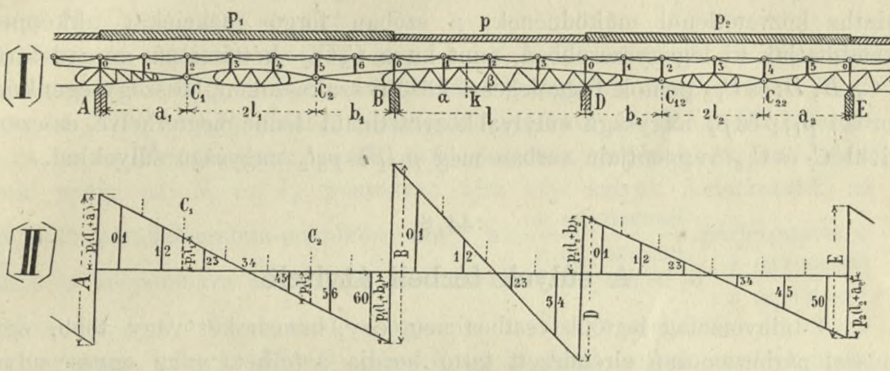
*Abban az esetben, ha minden csuklón átviteli függőleges megy át, a záró oldalak ugyanazok, mint ha közvetetlenül meg lenne a tartó terhelve. A támaszponti reakciók, és az átviteli függőlegesekre nézve számított nyomatékok ez esetben tehát a csuklós többtámaszú gerendatartókon is ugyanolyanok, mint ha közvetetlenül hatna a teher a tartóra, bármily súlyokból áll is a teher, s bármiképpen vannak is a csuklók az egyes hídnyílásokra elosztva, csak átviteli függőleges menjen át mindegyik csuklón.*

Hogy e tétel a reakciókra is áll, bármiképpen vannak is a csuklók elosztva, erről úgy győződünk meg legegyszerűbben, ha a külső erők kötélpoligónját akképpen szerkesztjük meg, mint a csuklótlan többtámaszú tartókra nézve a 149-ik ábra kapcsán magyaráztuk.

Ami a külső erők kötélvonalának megszerkesztését a megterhelés egyes speciális eseteiben illeti, erre nézve a megelőző 42. §. 2—4-ban előadottakra utalunk, tekintve, hogy a súlyok kötélvonalának megszerkesztését ott a fontosabb esetekre részletesen tárgyaltuk, a záró oldalak meghúzása pedig magától értődőleg egyáltalában nem okozhat nehézséget. Az eredők ábráját illetőleg szintén az egyenletesen megoszló teher átvitelének esetére szorítkozhatunk, tekintve, hogy az épp idézett 42. §. 3—4-ik pontban az eredőkre nézve mondottakat a többtámaszú csuklós tartókra is alkalmazhatjuk.

Legyen az átviteli tartókra ható egyenletesen megoszló súly a tárgyalásban levő tartó ...; $AB$; $BD$; $DE$; ... hídnyilásain hosszegységenként sorban ...; $p_1$; $p$; $p_2$; ... (166. I ábra,)s legyen $\alpha$ és $\beta$ tetszőleges két egymásra következő átviteli pont.

*Ha egyszer átvitel útján, másszor közvetetlenül képzeljük a szóban forgó tartót a mondott súlyokkal megterhelve, könnyen meggyőződhetünk, — egészen azon az úton, mint a kéttámaszú gerendatartókra a megelőző 42. §. 2-ban előadtuk, — hogy az $\alpha$ és $\beta$ pontok közötti $k$ középfüggőleges képezte átmetszésre, a közvetetlen megterhelés következtében ható külső erők eredője egyenlő ama külső erők eredőjével, melyek a szóban forgó teher átvitele következtében hatnak az $\alpha$ és $\beta$ között fölvehető valamennyi átmetszésre. Ha egyenletesen megoszló súlylyal vannak valamely többtámaszú csuklós tartó átviteli tartói megterhelve, akkor az e megterhelés következtében az egyes átmetszésekre ható külső erők eredőit egészen hasonlóan szerkesztjük tehát meg, mint a két végükön megtámasztott oly gerendatartókon, melyeken a szélső átviteli pontok a támaszpontok függőlegesein vannak elrendezve, t. i. akképpen, hogy megszerkesztjük, az alább azonnal előadandó módon, az eredők egyeneseit a szóban forgó* *egyenletesen megoszló súlylyal közvetetlenül megterheltnek tekintett tartó egyes hídnyilásaira, s meghúzzuk az egyes 01, 12, 23,.... átviteli közök középvonalain ez egyenes 01, 12, 23,.... ordinátáit. (166. I–II ábra.) Ez ordináták ugyanis sorban ama külső erők eredőinek mérő hosszai, melyek sorban az egyes átviteli közökön át fölvehető átmetszésekre, a*



*166-ik ábra.*

*szóban forgó súlyok átvitele következtében hatnak. Könnyen belátható a föntebb idézett megokolásból, hogy e tételek érvényesek, bármi módon vannak is a csuklók az egyes hídnyilásokra elosztva, csak sztatikailag határozottak legyenek a reakciók, és csak átviteli függőleges menjen át minden csuklón.**)

Ami pedig az egyenletesen megoszló, és közvetetlenül hatónak képzelt tehertől okozott eredők ábráját illeti, ennek megszerkesztése dolgában csak a következőket jegyezzük meg. Ha a csuklók a szokásos módon vannak elhelyezve, t. i. fölváltva minden második hídnyiláson, akkor a tetszőleges $AB$ csuklós hídnyiláson, a $C_1$ és $C_2$ csuklók közötti szakasz, két végén megtámasztott gerendatartót képez. (166. I ábra.) Ha tehát $p_1$ a hosszegységenkénti súly, $2l_1$ a $C_1$ és $C_2$ függőlegesek távolsága, $a_1$ és $b_1$ pedig a csukló és a támaszpont függőlegese közötti távolság a hídnyilás két oldalán, akkor a csuklók függőlegesein fölvett átmetszésekre ható külső erők eredői $p_1 l_1$ nagyságúak, t. i. egyenlőek a $C_1 C_2$ tartó támaszponti reakcióival. Az $AB$ hídnyiláson, végtelen közel az $A$ és $B$ támaszpontokon innen fölvett függőleges átmetszésekre nézve a külső erők eredője tehát sorban $+p_1(l_1 + a_1)$ és $-p_1(l_1 + b_1)$. (II ábra.) A legközelebbi $DE$ csuklós hídnyiláson az eredő

*) Önként értődik, hogy a végein belül, két ponton megtámasztott gerendatartóra szintén állanak e tételek, föltéve, hogy a szélső átviteli pontok nincsenek a tartó végein túl elrendezve. A sztatikailag határozatlan reakciójú többtámaszú gerendatartókra ellenben megközelitőleg is csak akkor állanak a föntebb mondottak, ha az átviteli pontok távolsága csekély, tekintve, hogy csak akkor idéz elő a közvetetlenül ható teher megközelítőleg oly reakciókat, mint az átvitt.

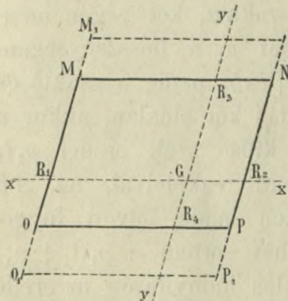
a $D$ és $E$ támaszpontokhoz végtelen közel eső függőleges átmetszésekre nézve hasonló okokból sorban $+p_2(l_2+b_2)$ és $-p_2(l_2+a_2)$ stb. Hogy a tetszőleges $BD$ csuklótlan hídnyilásra is megszerkeszthessük az eredők egyenesét, a $B$ és $D$ reakciók mérő hosszait kell meghatároznunk, és a támaszpontok függőlegeseire mint lépcső-magasságokat rámérnünk. (II ábra.) Tekintve, hogy az átvitt súlyok, — amint föntebb láttuk, — ugyanoly reakciókat idéznek elő, mintha közvetetlenül működnének, a szóban forgó reakciókat akképpen számíthatjuk ki legegyszerűbben, mint ha a $C_2C_{12}$ kéttámaszú gerendatartó a $C_2$; $B$; $D$; és $C_{12}$ pontok függőlegesei közötti szakaszokon, hosszegységenként sorban $p_1$; $p$ és $p_2$ nagyságú súlylyal közvetetlenül lenne megterhelve, és ezenkívül $C_2$ és $C_{12}$ végpontjain sorban még $p_1l_1$ és $p_2l_2$ nagyságú súlyokkal.

## 44. §.

## A súlyok térbeli átvitele.

A túlnyomólag legtöbb esetben nem egy, hanem két vagy több, egymással párhuzamosan elrendezett tartó hordja a terhet, s az egyes súlyokat fölváltva részint e tartókkal párhuzamos, részint feléjük irányuló, de szintén párhuzamosan elrendezett, — általánosságban $m$ irányú, — alsóbbrendű tartók viszik át a felsőbbrendű tartókra, míg ezek maguk vagy oszlopokra támaszkodnak, vagy további, t. i. még magasabbrendű tartókra. Az alább következő 168-ik ábra, (melyen az egyes átviteli tartókat csak egyenes vonalakkal jelöltük meg,) például oly elrendezést mutat alaprajzban, melyen a $G$ súly legelőbb az $\alpha$ és $\beta$ pontokra, innen sorban az $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2$; $a_1b_1a_2b_2$; $A_1B_1A_2B_2$ stb. parallelogrammok sarokpontjaira vivődik át.

Az alább következőkben meg fogjuk mutatni a *térbeli* átvitel következtében az egyes pontokra eső súlyok meghatározását, még pedig, — tekintettel a leggyakoribb alkalmazásokra, — ama föltétel alatt, hogy valamennyi átviteli tartó két végén megtámasztott gerendatartóból áll, és hogy e tartók, — amint épp megemlítettük, — mindegyik átviteli irányban párhuzamosak egymással.



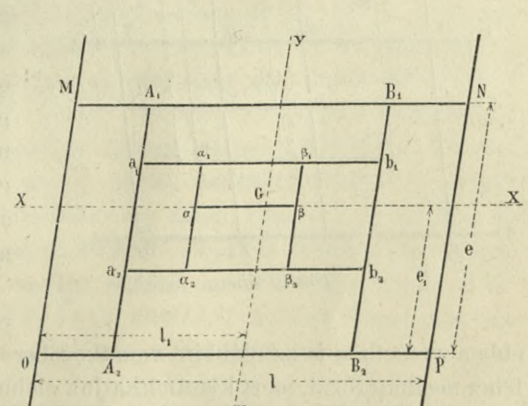
*167-ik ábra.*

Legyen valamely tetszőleges parallelogramm vetülete $MNOP$, (167-ik ábra,) s $x$ és $y$ az e parallelogrammra ható $G$ súly irányvonalának átdöfő pontján át, e parallelogramm oldalaival párhuzamosan húzott két egyenes. Könnyen be lehet bizonyítani hogy, ha akképpen hárul át a $G$ súly a szóban forgó parallelogramm sarokpontjaira, (vagyis ha akképpen oszlik a $G$ súly a parallelogramm sarokpontjaira eső párhuzamos összetevőkre,) hogy az $y$ irányú oldalakon, a végpontokra eső súlyok eredőinek $R_1$ és $R_2$ átdöfő pontjai az $x$ egyenesre esnek, akkor az $x$ irányú oldalakon, a végpontokra eső súlyok eredőinek

$R_3$ és $R_4$ átdöfő pontjai az $y$ egyenesre esnek, és megfordítva. Ha ugyanis az egyes erőket ugyanazokkal a betűkkel jelöljük meg, melyekkel átdöfő pontjaikat, s ha az $M$ és $O$ súlyok és az $N$ és $P$ súlyok eredőinek $R_1$ és $R_2$ átdöfő pontjai az $x$ egyenesre esnek, akkor áll, hogy $O:P = M:N = R_1:R_2$, amiből azonban az következik, hogy az $M$ és $N$ súlyok s az $O$ és $P$ súlyok eredői ugyanoly részekre osztják az $MN$ és $OP$ oldalakat, mint a $G$ átdöfő pont az $R_1 R_2$ összekötő vonalat.

Könnyen belátható továbbá, hogy, ha $M_1 N_1 O_1 P_1$ további oly parallelogramm, melyen $M_1 O_1$ és $N_1 P_1$ az $MO$ és $NP$ oldalak meghosszabbítására esnek, az $M_1 N_1$ és $O_1 P_1$ oldalak pedig párhuzamosak az $MN$ és $OP$ oldalakkal, és ha az $M$ és $O$ súlyok az $M_1$ és $O_1$ pontokra vivődnek át, az $N$ és $P$ súlyok pedig az $N_1$ és $P_1$ pontokra: újra oly súlyok keletkeznek, az $M_1 N_1 O_1 P_1$ parallelogramm-pontokon, hogy az $\dfrac{x \text{ egyenessel}}{y \text{ egyenessel}}$ párhuzamos oldalakon, a végpontokra eső súlyok eredőinek átdöfő pontjai az $\dfrac{y \text{ egyenesre}}{x \text{ egyenesre}}$ esnek. Az $M_1$ és $O_1$ súlyok eredője ugyanis, az imént mondottak következtében ugyanaz, mint az $M$ és $O$ súlyoké, az $N_1$ és $P_1$ súlyok eredője pedig ugyanaz, mint az $N$ és $P$ súlyoké; s minthogy ezek következtében $M_1$ és $O_1$ súlyok, és az $N_1$ és $P_1$ súlyok eredőinek átdöfő pontjai az $x$ egyenesre esnek: az $M_1$ és $N_1$ súlyok és az $O_1$ és $P_1$ súlyok eredői átdöfő pontjainak, az $MNOP$ parallelogrammal kapcsolatban imént mondottakra való tekintettel, az $y$ egyenesre kell esni.

Alkalmazzuk ezeket a térbeli átvitel föntebb már megemlített amaz *(első)* esetére, ha a tetszőleges $G$ súly előbb a legalsóbbrendű parallelogramm két szemközt fekvő oldalára, innen e parallelogramm sarokpontjaira, s ezután esetleg a további parallelogrammokra vivődik át, de ezekre akképpen, hogy minden parallelogrammról csak *egy* magasabb rendű parallelogrammra hárulnak át a súlyok. Amint a 168-ik ábrán látjuk, a $G$ súly teljesen úgy oszlik meg a legalsóbb rendű parallelogramm sarokpontjaira, s az átvitelben esetleg tovább szereplő parallelogrammok teljesen úgy következnek egymás után, mint a 167-ik ábra kapcsán az imént tárgyaltuk.



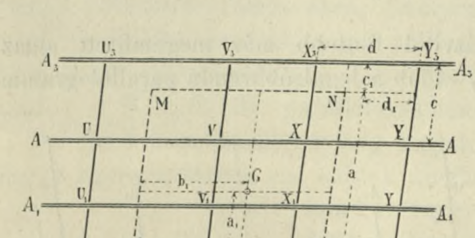

*168-ik ábra.*

Akképpen határozhatjuk meg tehát a most említett *(első)* esetben a $G$ súly átvitelében szereplő parallelogrammok bármelyikére, pl. $MNOP$-re eső súlyokat, mintha a $G$ súly irányvonalának síkjában elrendezett valamely tartó vinné át e súlyt, akár az egyik, akár a másik oldalpár irányában, a parallelogramm szemközt fekvő két oldalára, s innen ez oldalak függőleges síkjaiban elhelyezett tartók a sarokpontokra, tekintet nélkül az esetleg szereplő alsóbb rendű tartók elrendezésére. E parallelogrammok bármelyikének egyik sarokpontjára, általában $N$-re, átvitt súlynak képlete ezek folytán, ha $e_1; e; l_1; l$ a 168-ik ábrán látható hosszakat jelentik:

$$N = G\frac{e_1}{e}\frac{l_1}{l}$$

E képletben, amint látjuk, előbb az $e$, s ezután az $l$ oldal irányában van az átvitel számításba véve. Ha a két irányú átvitel sorrendjét a számításban megfordítjuk, akkor egyszerűen az $e_1 : e$ és $l_1 : l$ átviteli szorzók cserélődnek föl.

A térbeli súlyátvitelnek, az eddig tárgyalttól elütő *második* fontos esete akkor áll be, ha több mint két-két tartó támasztja a $G$ súlyt az átvitel végső, vagy esetleg valamely középső során, s ha ennélfogva az egyik vagy másik parallelogramm sarokpontjaira, (vagy esetleg már a legalsóbb rendű átviteli tartó két végpontjára) eső súlyok egynél több parallelogrammra hárulnak át. A 169-ik ábra pl. oly esetet tételez föl, melyben a $G$ súly előbb az $M,N,O,P$ parallelogramm-pontokra oszlik meg, a 168-ik ábra kapcsán épp tárgyalt módon, s ezután az $M,N,O,P$ súlyok mindegyike ama parallelogramm sarokpontjaira, melyekre az $M,N,O,P$ pontok sorban esnek. A végeredményben tehát az $A$, $A_1$, $A_2$ és $A_3$ tartók $U, V, X, Y, - U_1, V_1, X_1, Y_1$ stb. pontjaira hárul át a $G$ súly, és annak, hogy milyen az alsóbbrendű átvitel $MNOP$-ig, s e pontok mindegyikéről a fönt említett négy-négy pontra, a megelőző (első) esetre mondottakra való tekintettel nincsen befolyása. (Az említett 169-ik ábrán ezért nem is jelöltük meg az alsóbbrendü átviteli tartókat.)




*169-ik ábra.*

Könnyen belátható, hogy az egyes pontokra átvitt súlyokat ebben az esetben is az előbbire vonatkozólag előadottak ismételt alkalmazásával lehet meghatározni, mert kiszámíthatjuk előbb az $M,N,O,P$ súlyokat, s ezek mindegyikéből az ama pontokra eső súlyokat, melyekre ez a súly megoszlik. Az $U, V, X, Y, \ldots$ pontokra átvitt súlyok egyik tetszőlegesének, $X$-nek, képlete ezek következtében ugyanis:

$$X = G\frac{a_1 b_1 c_1 d_1}{abcd},$$

és itt $\frac{a_1}{a}$ és $\frac{b_1}{c}$ a $G$ súlynak az $N$ pontra vonatkozó átviteli szorzói, (169-ik ábra,) $\frac{c_1}{c}$ és $\frac{d_1}{d}$ pedig az $N$ súlynak az $X$ pontra vonatkozó átviteli számai, s megjegyezzük hogy, ha többször ismétlődik az átvitel, egyszerűen az átviteli szorzók száma nagyobbodik meg. Úgy is végre lehet azonban hajtani az e képletben megjelölt számítást, ha előbb sorban az egyik, és ezután a másik irányú átvitelek szorzószámaival sokszorozzuk meg a $G$ súlyt, úgy, mintha az egyes átvitelek nem fölváltva kétféle irányban következnének egymás után, hanem előbb sorban az egyik irányúak, s ezután, — szintén sorban, — a másik irányúak.

*Ha oly alsóbb rendű tartók viszik át a tetszőleges G súlyt a maguk között párhuzamos $A_1$ ; $A_2$ ; $A_3$.... $A_n$ tartókra, melyek fölváltva A-val és valamely más iránynyal, m-mel, párhuzamosak, akkor olyannak tekinthetjük tehát a G súly átvitelét a tetszőleges A tartóra, — akár mindig csak két-két tartóra oszoljék meg e súly az alsóbb rendű átvitel folyamán, akár többre, — mintha az m irányú, (az átvitelben közreműködő,) tartók mind a G súlyon át, az m iránynyal párhuzamosan fölvett függőleges síkban lennének elrendezve, (az A tartók irányában, magukkal párhuzamosan összetolva,) az A-val párhuzamos tartók pedig mind az A tartó síkjában, (magukkal párhuzamosan, az m irányban eltolva,) magától értődvén, — ha az átvitel első esetére vonatkozólag föntebb előadottakat figyelembe veszszük, — hogy az m irányú esetleges alsóbbrendű átvitelt csak akkor kell tekintetbe venni, ha több mint két A irányú tartóra oszlik meg a G súly.*

*Abban az esetben, ha több súlylyal vannak az $A_1$; $A_2$; .... $A_n$ tartók megterhelve, minden egyes súlyra alkalmazzuk az imént mondottakat. Meghatározzuk tehát minden egyes G súly után azt a G' súlyt, mely abban az esetben hárulna a tetszőleges A tartóra, ha az m irányú átviteli tartók mind a G súlyon átmenő m irányú síkban lennének elrendezve, s ezután olyannak tekintjük az A tartót, mintha az egyes G súlyok után számított G' súlyokkal valóban meg lenne terhelve, és mintha az A irányú átviteli tartók mind az A tartó síkjában lennének elrendezve. A G súlyok után, az imént említett módon, az A tartóra számított G' súlyokat a következőkben a térbeli átvitel következtében az A tartóra számítandó súlyoknak fogjuk nevezni.*

Ha *súlyrendszerrel*, t. i. egymással geometriailag összekötött oly $G_1$; $G_2$ ; $G_3$; .... $G_n$ súlyokkal vannak az $A_1$; $A_2$; $A_3$; ... $A_n$ tartók megterhelve, melyeket csak *együttvéve* lehet helyzetükből elvontatni, és ha $A$-val párhuzamosan mozdítjuk el e súlyrendszert, akkor az egyes $G$ súlyok után a tetszőleges $A$ tartóra számítandó $G'$ súlyok nagysága nem változik meg, irányvonalaik pedig mind együttesen mozdulnak el, mindnyájan annyira, amennyire a $G$ súlyrendszer.

*Ha tehát az $A_1; A_2; \ldots A_n$ tartókkal párhuzamosan mozdul el a reájuk ható súlyrendszer, akkor a tetszőleges A tartóra számítandó G' súlyokat a mondott tartóra síkbeli átvitel útján ható* v o n a t o t *képezőknek képzelhetjük.*

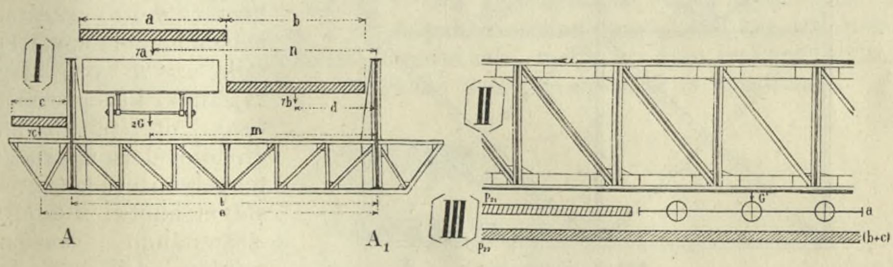
Ha ellenben az *m* irányú tartókkal párhuzamosan mozdul el a súlyrendszer, akkor a tetszőleges *A* tartóra számítandó *G'* súlyok *irányvonalai* változatlanok, s csak a *G'* súlyok *nagysága* változik meg, úgy, mintha másképp rendeztetnének el az egyes *G'* súlyok az *A* tartóra számítandó vonatban.

*Akképpen találhatjuk tehát meg, valamely, magával párhuzamosan elmozdítható súlyrendszer veszélyes helyzetét, a tetszőleges A tartón létesülő valamely szilárdsági behatásra nézve, ha előbb az m irányú tartókkal párhuzamos irányban képzeljük a súlyrendszert elvontatva (föltéve hogy, mint pl. a vasúti hidakon, ennek lehetősége nincsen, kizárva,) mindaddig, míg a G' súlyok a legveszélyesebb módon nem csoportosulnak; megállapítjuk a súlyrendszer e helyzete alapján a szóban forgó A tartóra számítandó G' súlyokat; és ezután az A tartó hosszában vontatottnak képzeljük az ekképp talált G' súlyokból álló vonatot, úgy mintha síkbeli átvitel útján hatna az A tartóra.*

Abban az esetben, ha az *A* tartókkal párhuzamos sorban vannak a *G* súlyok, a tetszőleges *A* tartó veszélyes megterhelésének meghatározása céljából, addig toljuk el e sort, magával párhuzamosan, az *m* irányban, míg a szóban levő *A* tartóra számítandó *G'* súlyok legnagyobb értéküket el nem érik, és a *G* súlysor e helyzetét egészen akképpen állapítjuk meg, mintha *síkbeli* átvitel útján hárulnának át a *G* súlyok az $A_1; A_2; \ldots A_n$ tartókra. Ha az *A* tartóval párhuzamos több súlysor van, akkor legegyszerűbb, ha külön állapítjuk meg mindegyik sor után a szóban levő *A* tartóra számítandó vonat súlyát, és ha ezután úgy képzeljük, mintha egyidejűleg több vonat súlyával lenne az *A* tartó, síkbeli átvitel útján megterhelve. Ha föl lehet e sorokat egymással, cserélni, (mint pl. a közúti hídakon, a párhuzamos tengelysorokat egymás között, vagy a kocsik mellett esetleg fölveendő egyenletesen megoszló mozgó teherrel,) akkor arra nézve, hogy e soroknak az *m* irányban értett mily egymásutánja a legveszélyesebb a tetszőleges *A* tartóra nézve: a föntebb mondottak következtében megint csak az *m* irányú síkbeli átvitel törvényei irányadók.

A következő §-okban az egyes tartókra ható súlyok alatt, a föntebb előadottakra való tekintettel, mindig az e tartókra a térbeli átvitel következtében számítandó súlyokat fogjuk érteni; újra hangsúlyozzuk azonban, — félreértés elkerülése végett, hogy az oly, egyébiránt kivételes esetben, mikor az ugyanegy csoportba tartozó átviteli tartók nem mind párhuzamosak egymással, vagy nem mind kéttámaszú gerendatartókból állanak : az e §-ban előadott tételek nem érvényesek, és hogy ekkor csakis esetről esetre lehet, az átvitel fennforgó módjára való tekintettel, az egyes tartók egyes pontjaira átvitt súlyokat megállapítani.

*Első példa.* A 170. I—II ábrákon oly közúti vas-rácshíd vázlatos keresztmetszete és hosszvetülete látható, melyet kereszttartókkal összekötött két főtartó, $A$ és $A_1$ tart. A híd mozgó megterhelése egy sor teherkocsi (tetszőleges számú tengely) súlyából áll, s föl van tételezve, hogy a híd a kocsik mellett és után, és az $A$ tartó melletti gyalogló úton egyenletesen megoszló, a hídpálya négyzetegységén $\gamma$ egységet nyomó egyenletesen megoszló mozgó súlylyal is meg lehet terhelve. Az egyenletesen megoszló súlylyal megterhelhető hídpálya-réteg szélessége a gyaloglóúton $c$, a kocsik mellett $b$, s a kocsik mögött $a+b$. (I. ábra.) A kereszttartók merőlegesek a főtartókra; az esetleges alsóbbrendű tartók vagy a fő- vagy a kereszttartókkal párhuzamosak, mind kéttámaszúak, s különben bármi módon el lehetnek rendezve. A föladat tárgyát az $A$ tartóra számítandó *mozgó teher* megállapítása képezi, minthogy a hídszerkezet saját súlya a két hídtartóra egyszerűen megfeleződik.




*170-ik ábra.*

A jelen és az ehhez hasonló egyéb esetekben legcélszerűbb, ha oly sávokra osztjuk a hídpályát, az $A$ tartóval párhuzamos egyenes vagy egyenesek fölvétele útján, melyeken a súlyok egy-egy külön elvontatható rendszert képeznek, s melyek után az $A$ tartóra számítandó vonatok vagy csak tengelyekből, (s ezek előtt és után esetleg egyenletesen megoszló mozgó teherből,) vagy csak egyenletesen megoszló súlyból állanak. A jelen esetben a már említett $a, b$ és $c$ szélességű sávokra osztottuk ennélfogva a hídpályát, s a $b$ és $c$ sávokat összefoglaltuk a számításban, mivel mindkettő egyenletesen megoszló súlylyal van megterhelve. Ha az $a$ pályarétegen egy-egy tengelyre jutó súly általán $2G$, akkor az $A$ tartóra egy-egy tengely után számítandó súly, ha $n$- és $l$-lel az I ábrán látható hosszakat jelöljük:

$$G' = 2G\frac{m}{l}$$

Az egyenletesen megoszló teher súlya, a hídpálya hosszméterén, a kocsik mögötti (s esetleg az előttük levő) sávon $\gamma a$, a $b$ és $c$ sávokon pedig sorban $\gamma b$ és $\gamma c$. (I ábra.) Az $A$ tartóra, a térbeli átvitel következtében számítandó egyenletesen mozgó súly tehát, a tartó hosszegységén, az $a$ réteg után:

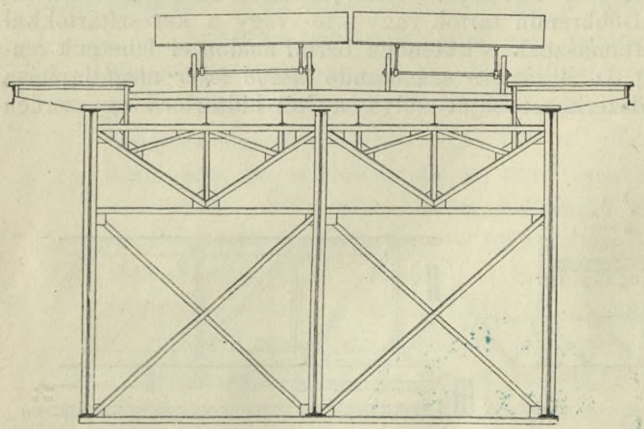
$$p_{21} = \frac{\gamma a n}{l},$$

a $b$ és $c$ rétegek után pedig összesen

$$p_{22} = \frac{\gamma (ce + bd)}{l}.$$

S olyannak képzelhetjük a mondottak szerint az $A$ tartót, mintha egymástól függetlenül elmozdítható két vonattal meg lehetne terhelni, (III ábrán az $a$ réteg után számítandó vonat $a$-val, a $b$ és a $c$ rétegek után számítandó pedig $b+c$-vel van megjelölve,) még pedig mindkettővel *síkbeli* átvitel útján, t. i. akképpen, mintha a valóban az $A$ és $A_1$ főtartók *között* elrendezett valamennyi hossztartó az $A$ tartó síkjában lenne elhelyezve.

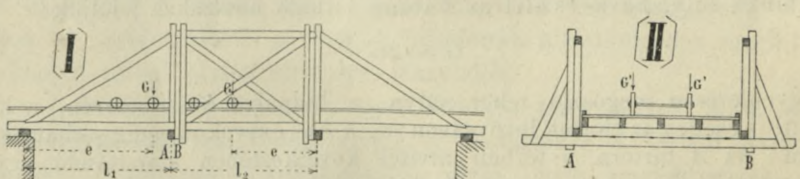
Megjegyzendő az e példában mondottak dolgában még, hogy abban az esetben, ha a kereszttartók nem merőlegesek a főtartókra, általában minden egyes *kerék* után külön kell az $A$ tartóra számítandó súlyt megállapítani, minthogy ez esetben az egyes kerekeken át a kereszttartókkal párhuzamosan húzott vetítő sugarak más-más pontokon metszik az $A$ tartó alaprajzának középvonalát. Csak ott pótolhatjuk eredőjével az ugyanegy tengelyen levő két kerék súlyát, ahol az $A$ tartóra számítandó vonaton szintén eredőjével lehet két-két súlyt pótolni.



*171-ik ábra.*

Megjegyezzük továbbá másrészt, hogy abban az esetben, ha több mint két tartó támasztja a hidat, s ha valamely középső tartó síkja, súlyokkal megterhelt átviteli közön megy át a keresztmetszet vetületén, (171-ik ábra,) az ily középső tartóra nézve az alsóbb rendű átvitelre is tekintettel kell lenni, mind a veszélyes terhelés megállapításában, mind az e tartókra számítandó teher meghatározásában, mig két főtartó esetében a főtartók felé irányuló átvitel közelebbi módjának az e tartókra háruló megterhelés nagyságára, amint ezt föntebb már megjegyeztük, nincsen befolyása.

***Második példa.*** Végre a 172. I—II ábrákon vázolt függesztőműves közúti fahíd $AB$ kereszttartójára számítandó terhet fogjuk még meghatározni, a híd hosszában egymásután haladó tengelyek súlyára. Az $m$ irányú átviteli tartókat ez esetben a híd hossztartói képezik, a párhuzamos átviteli tartókat pedig a pályadeszkák. Fölteszszük, hogy a hossztartókat a kereszttartók képezte közökben, a deszkákat pedig a hossztartók képezte egyes nyilásokban két-két támaszú tartóknak lehet tekinteni. A kerekeket a főtar-




*172-ik ábra.*

tókkal párhuzamos sorokban haladóknak veszszük föl. Ha az egy-egy kerékre eső súly általában $G$, e súly távolsága az $AB$ kereszttartóval szemközt fekvő kereszttartó vagy talpgerenda középvonalától, a hossztartókkal párhuzamos irányban mérve $e$, a hossztartókkal párhuzamos irányban, egy-egy sorban levő kerekek után az $AB$ kereszttartóra számítandó súly $G'$, s ha végre a hossztartók elméleti hídnyilása az $AB$ kereszttartó két oldalán sorban $l_1$ és $l_2$ (I ábra,) akkor:

$$G' = \frac{\sum_0^{l_1} Ge}{l_1} + \frac{\sum_0^{l_2} Ge}{l_2}$$

Megjegyzendő, hogy abban az esetben, ha a kereszttartók nem merőlegesek a hossztartókra, $G'$ mindegyik keréksorra más. A szóban forgó $G'$ súlyok meghatározása után akképpen hajthatjuk végre az $AB$ kereszttartó szilárdsági számítását, mintha az e tartóval párhuzamos irányú, a II ábrán vetületben látható, átviteli tartók, t. i. a pályadeszkák, vele ugyanabban a síkban lennének, és mintha a $G'$ súlyok a szóban forgó $AB$ kereszttartóra valóban ható oly súlyrendszert képeznének, mely az épp említett átvitel útján hat e tartóra, s annak irányában vonat gyanánt el is mozdítható.